dr hab. Tomasz Dzido, prof. UMG
Zakład Podstaw Informatyki
Wydział Informatyki
Uniwersytet Morski w Gdyni

Gdynia, 23.04.2026

Recezja
rozprawy doktorskiej mgr. Mateusza Pirgi pt.
"Zbiory niezależne i dominujące w grafach zawierające zbiór liści"

O przygotowanie poniższej recenzji zwróciła się do mnie Prewodnicząca Rady Dyscypliny Naukowej Matematyka Politechniki Rzeszowskiej pani dr hab. Liliana Rybarska-Rusinek, prof. PRz. W tej sprawie skierowała do mnie pismo datowane na 5 marca 2026 roku, które odebrałem na Uniwersytecie Morskim w dniu 12 marca 2026r.

Pan mgr Mateusz Pirga jest asystentem w Zakładzie Matematyki Dyskretnej Politechniki Rzeszowskiej. Przygotował rozprawę doktorską pod kierunkiem pani dr hab. Iwony Włoch, profesora Politechniki Rzeszowskiej. Pan Mateusz Pirga jest współautorem 4 opublikowanych w czasopismach z listy MNiSW artykułów. Zgodnie z oświadczeniem, w każdym z nich jego udział jest co najmniej 50%.

1 Wprowadzenie i przedstawienie problemu naukowego rozprawy

Pojęcie zbioru niezależnego należy do podstawowych i najczęściej badanych pojęć teorii grafów. Jego geneza sięga prac C. Berge'a z lat sześćdziesiątych XX wieku, jednak problemy, które można interpretować w tym języku, pojawiały się znacznie wcześniej, między innymi w klasycznych zagadnieniach kombinatorycznych. W ujęciu współczesnym zbiór niezależny w grafie G jest podzbiorem wierzchołków, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią. Jednym z naturalnych kierunków badań jest zarówno wyznaczanie maksymalnych zbiorów niezależnych, jak i zliczanie wszystkich zbiorów tego typu.

Problemy enumeracyjne związane ze zbiorami niezależnymi są intensywnie badane od wielu lat. Szczególne znaczenie miało odkrycie związków pomiędzy liczbą zbiorów niezależnych w pewnych klasach grafów a klasycznymi ciągami liczbowymi, takimi jak liczby Fibonacciego czy Lucasa. W ostatnich latach obserwuje się również rosnące zainteresowanie bardziej wyspecjalizowanymi klasami zbiorów niezależnych, w szczególności takimi, które spełniają dodatkowe warunki strukturalne.

Jednym z naturalnych kierunków uogólnień jest rozważanie zbiorów niezależnych powiązanych z różnymi wariantami dominowania w grafach. W tym kontekście istotną rolę odgrywają zbiory dominujące, wielokrotnie dominujące oraz zbiory $(1, 2)$-dominujące. Szczególnie interesujące są sytuacje, w których rozważane zbiory zawierają zbiór liści grafu jako podzbiór, co prowadzi do nowych problemów zarówno strukturalnych, jak i enumeracyjnych.

Problematyka ta jest aktualna i rozwijana przez wielu badaczy, a jej znaczenie wynika zarówno z aspektów czysto teoretycznych, jak i potencjalnych zastosowań, między innymi w kombinatoryce chemicznej oraz analizie struktur dyskretnych.

Autor rozprawy sformułował następujące główne cele i tezy pracy:

1. Wyznaczenie najmniejszych i największych wartości liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w wybranych klasach grafów, w szczególności w $(n, n+1)$-grafach zawierających określone podgrafy indukowane, oraz charakteryzacja grafów ekstremalnych.
2. Wyznaczenie dokładnych wartości parametru $\sigma_L(G)$ w szczególnych rodzinach grafów oraz opis odpowiednich przekształceń grafowych zachowujących monotoniczność tego parametru.

T. D.

3. Ustalenie zależności pomiędzy liczbą niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących a liczbami Padovana oraz Perrina, a także wprowadzenie i analiza odpowiednich wielomianów związanych z tymi ciągami.

4. Zbadanie zależności pomiędzy liczbą maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści a uogólnionymi liczbami Padovana oraz wprowadzenie uogólnionych wielomianów Padovana.

5. Wprowadzenie pojęcia właściwego zbioru 2-dominującego, rozwiązanie problemu istnienia takich zbiorów oraz podanie pełnej charakteryzacji grafów, które je posiadają, a także analiza zależności pomiędzy odpowiednimi parametrami dominowania.

Główne cele oraz tezy rozprawy zostały sformułowane jasno i precyzyjnie. Podjęta tematyka jest wymagająca i jednocześnie aktualna, o czym świadczy duża liczba publikacji z ostatnich lat poświęconych zarówno problemom zliczania zbiorów niezależnych, jak i różnym wariantom dominowania w grafach. Zakres pracy dobrze wpisuje się w rozwijający się nurt badań w teorii grafów.

2 Omówienie wyników rozprawy wraz z uwagami

Przedstawiona rozprawa doktorska składa się z pięciu rozdziałów, wstępu, bardzo przydatnego spisu oznaczeń, podsumowania, a także z bibliografii.

Pierwsze dwa rozdziały to rozdziały wstępne, zawierają wprowadzenie do problematyki, potrzebne definicje, bogato prezentują dotychczasowe wyniki znane w literaturze. Przestawiają tezy pracy. Nie mam uwag do tej części pracy.

Rozdział trzeci rozprawy doktorskiej poświęcony jest analizie liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w (n, n+1)-grafach oraz wyznaczeniu ekstremalnych wartości tego parametru w odpowiednich klasach grafów. Jest to rozdział, w którym przedstawiono zarówno konstrukcje przekształceń grafowych, jak i szczegółowe obliczenia prowadzące do wyznaczenia wartości parametru $\sigma_L(G)$.

Na początku rozdziału zdefiniowano badaną klasę grafów oraz wprowadzono analizowany parametr $\sigma_L(G)$. Następnie, w szeregu twierdzeń (3.2–3.10), przedstawiono zestaw przekształceń grafowych, które nie zmniejszają wartości tego parametru i umożliwiają redukcję problemu do szczególnej podrodziny grafów. Jest to podejście poprawne i dobrze uzasadnione, choć miejscami wymaga ono od czytelnika dużej samodzielności w śledzeniu zmian struktury grafów. Bardzo pozytywnie oceniam stronę wizualną tego fragmentu rozdziału – liczne rysunki w istotny sposób ułatwiają zrozumienie kolejnych przekształceń oraz przebiegu dowodów. Jest to szczególnie istotne przy tak złożonych operacjach na grafach.

Lemat 3.11 zawiera kluczowe wzory na wartość parametru $\sigma_w(G_n^{k,l,r})$ w zależności od parametrów k, l, r oraz n. Dowód tego lematu ma charakter skrótowy i w dużej mierze przypomina formę artykułową. W mojej ocenie wskazane byłoby jego bardziej szczegółowe rozpisanie, zwłaszcza w zakresie przejść algebraicznych, co zwiększyłoby jego czytelność dla czytelnika spoza wąskiej specjalizacji. Podobna uwaga dotyczy Wniosku 3.12, w którym zabrakło rozwinięcia wartości liczbowych dla ciągu Fibonacciego, co ułatwiłoby interpretację uzyskanych nierówności i porównań. Również Lemat 3.13, mimo poprawności merytorycznej, zawiera bardzo zwarte przekształcenia algebraiczne, które w kilku miejscach wymagają dopowiedzenia szczegółów rachunkowych.

Zastrzeżenie budzi sformułowanie Lematu 3.14. W obecnej formie najprawdopodobniej brakuje w nim jednoznacznego rozróżnienia przypadków wynikających z parzystości parametru k. Przykładowo, dla $k = 6$ nie jest wprost jasne, którą z podanych zależności należy zastosować.

Rozdział kończy się Twierdzeniami 3.17 i 3.18, w których wyznaczono górne oszacowanie parametru $\sigma_w(G_n^{k,l,r})$ oraz wskazano grafy ekstremalne. Wynik ten stanowi podsumowanie wcześniejszych rozważań i jest ich naturalnym zwieńczeniem. Dowód jest poprawny, choć bardzo

T. D.

złożony technicznie i oparty na wieloetapowych przekształceniach grafowych oraz własnościach ciągu Fibonacciego.

Podsumowując, rozdział trzeci zawiera poprawne i interesujące wyniki, jednak jego czytelność miejscami nieznacznie obniża zbyt skrótowy styl niektórych dowodów oraz brak pełnej analizy przypadków w części lematów. Mimo tych uwag, konstrukcja całego rozdziału jest spójna i prowadzi w sposób logiczny do głównego twierdzenia o maksymalnej wartości badanego parametru.

Rozdział czwarty rozprawy doktorskiej poświęcony jest wielomianowym uogólnieniom klasycznych ciągów liczbowych, w szczególności ciągów Fibonacciego, Padovana oraz – w tle konstrukcji kombinatorycznych – również powiązanych struktur typu Perrina. Rozważania prowadzone są w kontekście teorii grafów, głównie poprzez kompozycję grafów oraz G-złączenia, co pozwala na naturalne przejście od klasycznych ciągów rekurencyjnych do ich uogólnień grafowych.

Na początku rozdziału wprowadzono wielomian Fibonacciego grafu oraz jego znane postacie dla wybranych klas grafów. Następnie zdefiniowano wielomiany Padovana grafu, oparte na liczbie maksymalnych zbiorów niezależnych oraz uogólnionych struktur $(1,2)$-dominacyjnych. Konstrukcja ta jest poprawna i dobrze umotywowana, a analogia do klasycznego przypadku Fibonacciego została wykorzystana w sposób przejrzysty i naturalny.

W dalszej części przedstawiono szereg twierdzeń (m.in. 4.20–4.24), prowadzących do jawnych postaci wielomianów dla ścieżek i cykli. Na szczególne wyróżnienie zasługuje bardzo przejrzysty i poprawny dowód Twierdzenia 4.26, który w klarowny sposób wykorzystuje zasadę włączeń i wyłączeń. Warto również podkreślić, że uzyskane wyniki dobrze wpisują się w znane interpretacje kombinatoryczne liczb Padovana, a w szerszym tle nawiązują do klasycznych uogólnień typu Perrina.

Pewne drobne zastrzeżenia dotyczą prezentacji części dowodów rekurencyjnych – w szczególności w Twierdzeniu 4.17 brakuje wyraźnej wzmianki o przypadkach bazowych lub ich jednoznacznego wskazania jako prostych. Drobna nieścisłość redakcyjna pojawia się również w definicji na stronie 55, gdzie brak jest pełnego doprecyzowania powiązania zmiennych x i y z grafami H_i, co może wpływać na czytelność zapisu.

Rozdział kończy się uogólnieniem w postaci wielomianów Padovana dla G-złączeń, co stanowi naturalne i dobrze uzasadnione domknięcie całości rozważań.

Podsumowując, rozdział czwarty zawiera poprawne i wartościowe wyniki, stanowiące spójne rozszerzenie klasycznych konstrukcji liczbowych (Padovan, Perrin) w języku teorii grafów. Rozważania są prowadzone logicznie i konsekwentnie, a wskazane drobne uwagi mają charakter głównie redakcyjny i nie wpływają na ogólną ocenę merytoryczną rozdziału.

Rozdział piąty rozprawy doktorskiej poświęcony jest badaniu właściwych zbiorów 2-dominujących oraz analizie zależności pomiędzy parametrami $\gamma_2(G)$, $\gamma_{\overline{2}}(G)$ i $\gamma_3(G)$. Rozdział ma charakter zarówno definicyjny, jak i strukturalny, a jego istotnym elementem jest charakteryzacja grafów dopuszczających istnienie $\overline{2}$-DS.

W części wprowadzającej przedstawiono tło teoretyczne związane z dominowaniem oraz w sposób naturalny wprowadzono pojęcie właściwego zbioru 2-dominującego. Kluczowym wynikiem jest Twierdzenie 5.3.

W dalszej części rozdziału przedstawiono szereg wniosków i zależności dla różnych klas grafów. Niektóre z nich, jak Wniosek 5.10, mają charakter bezpośrednich konsekwencji znanych faktów i mogłyby zostać osadzone jedynie w kontekście literatury. Warto również zauważyć, że pojawiają się tu również klasyczne zależności rekurencyjne (np. związane z ciągami typu Fibonacci, Perrin czy Padovan).

Na pozytywną ocenę zasługuje końcowa część rozdziału, w której podkreślono aktualność omawianej tematyki poprzez odniesienia do najnowszych prac.

Podsumowując, rozdział jest spójny i zawiera wartościowe wyniki, choć miejscami jego czytelność mogłaby zostać udoskonalona poprzez mocniejsze wyeksponowanie znaczenia niektórych rezultatów.

T.D.

Na końcu pracy znajduje się jej podsumowanie. Autor przedstawia w nim najważniejsze uzyskane wyniki oraz wskazuje możliwe kierunki dalszych badań. Bibliografia pracy jest bardzo obszerna i zawiera 76 pozycji, co świadczy o szerokim zakresie przeanalizowanej literatury oraz dobrym osadzeniu tematyki rozprawy w aktualnym stanie wiedzy. Spis literatury uwzględnia bowiem zarówno klasyczne, jak i nowsze wyniki z zakresu teorii grafów, w szczególności dotyczące zbiorów dominujących i niezależnych.

3 Ocena rozprawy

Moim zdaniem pan mgr Michał Pirga udowodnił prawdziwość tez swojej rozprawy doktorskiej. Autor wykazał się bardzo dobrą znajomością metod stosowanych w teorii grafów oraz umiejętnością prowadzenia badań naukowych w dyscyplinie matematyka. Szczególnie istotną wartość pracy stanowią wyniki dotyczące zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści oraz ich powiązań z liczbami typu Padovana i Perrina, a także rezultaty dotyczące właściwych i doskonałych zbiorów dominujących.

Praca jest napisana starannie i w sposób przejrzysty. Zauważone w tekście drobne usterki redakcyjne i stylistyczne nie mają wpływu na jej wartość merytoryczną ani na poprawność przedstawionych wyników.

Biorąc to wszystko pod uwagę uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa spełnia wszystkie wymagania stawiane pracom doktorskim. W związku z tym wnoszę o dopuszczenie pana mgr. Michała Pirgi do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Dzido