

Politechnika Rzeszowska
im. Ignacego Łukasiewicza

Dyscyplina naukowa nauki fizyczne

Rozprawa doktorska

mgr inż. Michał Wanic

Nieliniowe efekty dynamiki kwantowej i klasycznej wywołane sprzężeniem magnetoelektrycznym w układach hybrydowych

---

Promotor:
dr hab. Levan Chotorlishvili, prof. PRz

Promotor pomocniczy:
dr inż. Mariusz Trybus, prof. PRz

Rzeszów 2026

Pragnę serdecznie podziękować mojemu Promotorowi, dr. hab. Levanowi Chotorlishvili, prof. PRz, za opiekę naukową, cenne uwagi i dyskusje oraz merytoryczne wsparcie na każdym etapie realizacji niniejszej rozprawy. Szczególnie dziękuję za cierpliwość, zaufanie oraz prowadzenie mnie przez kolejne etapy pracy naukowej.

Dziękuję również mojemu Promotorowi pomocniczemu, dr. inż. Mariuszowi Trybusowi, prof. PRz, za wsparcie, inspirujące dyskusje, cenne sugestie oraz pomoc w rozwiązywaniu problemów pojawiających się w trakcie badań.

Serdecznie dziękuję Koleżankom i Kolegom za pomoc, wsparcie techniczne, wspólne dyskusje oraz dobre słowo, które niejednokrotnie pomagało w trudniejszych momentach pracy nad rozprawą.

Najserdeczniejsze podziękowania kieruję do mojej Rodziny za nieustanne wsparcie, motywację i wiarę we mnie. Dziękuję za cierpliwość, wyrozumiałość oraz nieustanną zachętę do dalszej pracy.

Wszystkim, którzy przyczynili się do powstania tej rozprawy, składam serdeczne podziękowania.

Spis treści

Wykaz skrótów i symboli **10**
Wstęp **11**
1. Cel i zakres pracy **15**
2. Podstawy teoretyczne multiferroików i sprzężenia magnetoelektrycznego **17**
2.1. Opis fenomenologiczny sprzężenia magnetoelektrycznego 17
2.2. Opis mikroskopowy sprzężenia magnetoelektrycznego 19
2.3. Nanostruktury i podejścia kwantowe w badaniach multiferroików 21
2.4. Praktyczne definicje współczynników magnetoelektrycznych 23
2.5. Metoda pomiaru sprzężenia magnetoelektrycznego z wykorzystaniem techniki lock-in 24
2.6. Multiferroiki jednofazowe 26
2.6.1. Sprzężenie magnetoelektryczne indukowane przez ściany domenowe 26
2.6.2. Odkształcenie wymienne 28
2.6.3. Elektromagnony 29
2.7. Multiferroiki wielofazowe 31
2.7.1. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez naprężenie interfejsu 32
2.7.2. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez ładunek interfejsu 34
2.7.3. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez przesunięcie wymiany . . . 36
2.8. Badania właściwości multiferroików 38
2.8.1. $BaTiO_3$ jako materiał referencyjny w badaniach właściwości multiferroicznych 38
2.8.2. Badania helikalnych multiferroików 40
2.8.3. Badania nad skyrmionami 42
2.8.4. Solitony elektromagnetyczne 44
2.9. Podsumowanie 45
3. Zastosowania multiferroików i efektów magnetoelektrycznych **47**
3.1. Detektory pola magnetycznego 48
3.2. Urządzenia radiowe i mikrofalowe 49
3.3. Pamięci RAM 50
3.4. Zbieracze energii 52

3.5. Transfer ciepła 54
3.6. Transport energii 56
3.7. Podsumowanie 57
4. Chaos i nieliniowość w układach hybrydowych 58
4.1. Bifurkacje w prostych układach dynamicznych 58
4.2. Wahadło matematyczne 60
4.3. Atraktor Lorenza 63
4.4. Bifurkacja Hopfa 66
4.5. Wykładnik Lapunowa 68
4.6. Fraktale 70
4.7. Wymiar Kaplana–Yorke'a 75
4.8. Analiza liniowa układów dynamicznych 76
4.9. Przykłady fizyczne analizy liniowej 80
4.9.1. Oscylator harmoniczny tłumiony 81
4.9.2. Relaksacyjna dynamika polaryzacji ferroelektrycznej 84
4.9.3. Sprzężona dynamika polaryzacji i magnetyzacji w multiferroikach . 85
4.10. Podsumowanie 86
5. Nieliniowa dynamika magnetoelektryczna: rezonans parametryczny, bifurkacje i struktury fraktalne 88
5.1. Model teoretyczny układu magnetoelektrycznego 89
5.2. Matematyczny opis systemu 90
5.3. Bifurkacja Hopfa indukowana sprzężeniem magnetoelektrycznym 93
5.4. Słaba nieliniowość jako granica regularnej dynamiki 99
5.5. Rezonans parametryczny magnetoelektryczny 102
5.6. Chaos i nieliniowość w układach hybrydowych 103
5.6.1. Równania ruchu i zakres analizy 104
5.6.2. Chaos deterministyczny i przekroje Poincarégo 104
5.6.3. Wykładniki Lapunowa 106
5.6.4. Wymiar fraktalny atraktorów 108
5.6.5. Analiza widmowa i transfer chaosu między podsystemami 109
5.6.6. Wpływ temperatury i fluktuacji termicznych 111
5.7. Podsumowanie 112
6. Splątanie kwantowe w hybrydowych układach foton–magnon 115
6.1. Model kryształu fotonowo–magnonowego 116
6.1.1. Podukład magnetyczny 117
6.1.2. Sprzężenie foton–magnon poprzez efekt magnetoelektryczny 118
6.2. Całkowity Hamiltonian układu 120

6.3. Dynamika nieliniowa . . . 121
6.3.1. Od kwantowych równań Langevina do opisu nieliniowego . . . 121
6.3.2. Punkty stałe i struktura przestrzeni fazowej . . . 123
6.3.3. Charakterystyka amplitudowo–częstotliwościowa i bifurkacje . . . 125
6.3.4. Wielomian równowagowy i granica obszaru niestabilności . . . 128
6.4. Splątanie . . . 136
6.5. Podsumowanie . . . 141
7. Atom dwupoziomowy jako wskaźnik termalizacji wielomodowych światłowodów optycznych 143
7.1. Model rozważanego układu . . . 144
7.1.1. Opis pola elektrycznego w światłowodzie . . . 145
7.1.2. Wyprowadzenie dyskretnego nieliniowego równania Schrödingera . . . 146
7.1.3. Widmo modów liniowych . . . 147
7.1.4. Hamiltonian Jaynesa-Cummingsa dla atomu dwupoziomowego . . . 147
7.2. Wyprowadzenie równań opisujących dynamikę układu . . . 148
7.2.1. Rozwiązanie równania Schrödingera . . . 148
7.2.2. Konstrukcja macierzy gęstości . . . 149
7.2.3. Inwersja atomowa . . . 150
7.3. Termalizacja modów optycznych . . . 151
7.3.1. Równania stanu . . . 153
7.3.2. Granica wysokiej temperatury . . . 153
7.3.3. Interpretacja temperatury ujemnej . . . 153
7.4. Wpływ termalizacji modów na dynamikę atomu dwupoziomowego . . . 154
7.4.1. Przypadek nietermalizowanych modów . . . 154
7.4.2. Przypadek termalizowanych modów . . . 154
7.4.3. Granica wysokiej temperatury – wyprowadzenie analityczne . . . 156
7.4.4. Dekoherencja w układzie . . . 158
7.5. Podsumowanie rozdziału . . . 159
Podsumowanie i wnioski 161
Bibliografia 163

Wykaz kluczowych skrótów i symboli

Symbole greckie

α	średnia liczba fotonów
α_G	współczynnik tłumienia Gilberta
β^2	średnia liczba magnonów
ϵ_r	przenikalność dielektryczna materiału
ϵ_0	przenikalność elektryczna próżni
λ	wartość własna macierzy
λ	wykładnik Lapunowa
μ_B	magneton Bohra
μ_0	przenikalność magnetyczna próżni

Symbole łacińskie

$\hat{H}$	hamiltonian
$\hbar$	stała Diraca
$\mathbf{e}_{i,i+1}$	wekor jednostkowy łączący spiny $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_{i+1}$
$\mathbf{S}_i$	operator spinu w i-tym węźle sieci
B	zewnętrzne zmienne pole magnetyczne
B_{ind}	indukcja pola magnetyucznego
D	efektywna stała sprzężenia ME
D_0	efektywna stała oddziaływania DM
D_p	wymiar podobieństwa, wymiar fraktalny
E	zewnętrzne pole elektryczne

F_0	energia w stanie podstawowym
G_j	siła oddziaływania między dipolem atomowym a polem danego modu
g_L	czynnik Landégo
g_{ME}	współczynnik sprzężenia magnetoelektrycznego
H	zewnętrzne pole magnetyczne
J	macierz Jacobiego
K	stała oddziaływania
k_B	stała Boltzmanna
K_{an}	stała anizotropii
M	magnetyzacja
M_S	spontaniczna magnetyzacja
P_S	spontaniczna polaryzacja
T_C	temperatura Curie
V_0	wymuszenie zewnętrznego pola elektrycznego

Skróty

DM	Działoszyńskiego–Morii (oddziaływanie)
ME	magnetoelektryczne
PMA	prostopadła anizotropia magnetokrystaliczna
YIG	granat itrowo-żelazowy

Wstęp

Współczesna fizyka coraz częściej koncentruje się na badaniu układów hybrydowych, w których oddziałują ze sobą różne stopnie swobody – elektryczne, magnetyczne, optyczne lub mechaniczne. Sprzężenie pomiędzy tymi podsystemami prowadzi do powstawania nowych zjawisk fizycznych, które nie występują w poszczególnych składnikach analizowanych oddzielnie. Układy takie stanowią ważny obszar badań zarówno z punktu widzenia fizyki podstawowej, jak i potencjalnych zastosowań technologicznych, obejmujących między innymi elektronikę spinową, urządzenia mikrofalowe oraz technologie kwantowe.

Jedną z klas materiałów, w których współistnienie różnych stopni swobody prowadzi do szczególnie interesujących efektów fizycznych, są multiferroiki. Są to materiały wykazujące jednocześnie kilka typów uporządkowania ferroicznego, takich jak ferroelektryczność, ferromagnetyzm lub ferroelastyczność. Szczególną uwagę zwraca możliwość występowania sprzężenia magnetoelektrycznego (ME), polegającego na wzajemnym oddziaływaniu pól magnetycznych i elektrycznych w materiale.

Podstawy teoretyczne analiz takich zjawisk sięgają końca XIX wieku, kiedy Pierre Curie wskazał, że symetria sieci krystalograficznej może dopuszczać istnienie efektów magnetoelektrycznych [25]. Występowanie liniowego efektu magnetoelektrycznego zostało następnie przewidziane teoretycznie przez I. E. Działoszyńskiego w 1959 roku na podstawie analizy symetrii kryształu Cr_2O_3 [30]. Krótko później efekt ten został potwierdzony eksperymentalnie przez D. N. Astrowa oraz niezależnie przez V. J. Folena, G. T. Rado i E. W. Staldera [5, 36].

W kolejnych dekadach badania nad multiferroikami rozwijały się stopniowo, jednak przez długi czas ich znaczenie aplikacyjne pozostawało ograniczone ze względu na niewielkie wartości współczynników magnetoelektrycznych oraz fakt, że wiele efektów obserwowano jedynie w niskich temperaturach. Ponowny wzrost zainteresowania tymi materiałami nastąpił na początku XXI wieku wraz z rozwojem technik wytwarzania cienkich warstw, metod numerycznych oraz nowych koncepcji projektowania materiałów funkcjonalnych [45, 87].

Współczesne badania coraz częściej koncentrują się na strukturach hybrydowych, w których różne fazy materiałowe lub różne typy wzbudzeń są sprzężone ze sobą poprzez oddziaływania magnetyczne, elektryczne, sprężyste lub optyczne. Przykładami takich układów są między innymi kompozytowe struktury magnetoelektryczne, hybrydowe układy foton–magnon w rezonatorach mikrofalowych oraz układy atom–pole elektromagnetyczne

badane w ramach elektrodynamiki kwantowej w rezonatorach. W układach tych obserwuje się bogate spektrum zjawisk obejmujących dynamikę nieliniową, chaos deterministyczny, generację korelacji kwantowych oraz procesy dekoherencji i efektywnej termalizacji.

Celem niniejszej rozprawy jest analiza wybranych układów hybrydowych, w których sprzężenie pomiędzy różnymi stopniami swobody prowadzi do powstawania złożonych zjawisk dynamicznych w opisie klasycznym i kwantowym. Szczególna uwaga poświęcona jest roli nieliniowości oraz kolektywnych efektów wynikających z oddziaływania wielu podsystemów fizycznych.

Rozprawa składa się z sześciu rozdziałów.

W Rozdziale 2 przedstawiono podstawy teoretyczne fizyki multiferroików oraz sprzężenia magnetoelektrycznego. Omówiono zarówno fenomenologiczny, jak i mikroskopowy opis oddziaływań magnetoelektrycznych, a także wybrane mechanizmy prowadzące do powstawania takich efektów w materiałach jednofazowych i kompozytowych. Przedstawiono również przykłady układów fizycznych, w których obserwuje się zjawiska charakterystyczne dla multiferroików.

W Rozdziale 3 zaprezentowano wybrane zastosowania multiferroików i efektów magnetoelektrycznych. Omówiono między innymi możliwości wykorzystania tych materiałów w detektorach pola magnetycznego, urządzeniach mikrofalowych, pamięciach typu RAM, układach do zbierania energii oraz w procesach transportu energii i ciepła.

Rozdział 4 poświęcony jest wprowadzeniu do teorii dynamiki nieliniowej i chaosu deterministycznego. Przedstawiono podstawowe pojęcia i narzędzia analizy układów dynamicznych, takie jak bifurkacje, wykładniki Lapunowa czy struktury fraktalne, które stanowią podstawę analizy dynamiki badanych układów magnetoelektrycznych.

W Rozdziale 5 przedstawiono wyniki badań dotyczących nieliniowej dynamiki układu magnetoelektrycznego, obejmujących między innymi analizę rezonansu parametrycznego, bifurkacji oraz powstawania struktur fraktalnych w przestrzeni parametrów.

Rozdział 6 poświęcony jest analizie własności kwantowych hybrydowego układu foton–magnon, w którym badane są mechanizmy generacji i kontroli splątania kwantowego pomiędzy różnymi modami pola.

W ostatnim rozdziale, Rozdziale 7, przeanalizowano dynamikę atomu dwupoziomowego sprzężonego z wielomodowym polem optycznym. Pokazano, że atom może pełnić rolę lokalnej sondy pozwalającej na badanie procesu termalizacji zachodzącego w układzie wielomodowym.

Analizowane w rozprawie układy, mimo że różnią się charakterem fizycznym, łączy wspólna idea badawcza. We wszystkich przypadkach kluczową rolę odgrywa sprzężenie pomiędzy różnymi stopniami swobody prowadzące do pojawienia się nowych, emergentnych własności dynamicznych układu.

W szczególności w części poświęconej układom magnetoelektrycznym analizowana jest rola nieliniowości i sprzężenia między polaryzacją elektryczną a magnetyzacją w generowaniu złożonej dynamiki, obejmującej rezonanse parametryczne, bifurkacje oraz chaos deterministyczny. W układzie foton–magnon sprzężenie pomiędzy wzbudzeniami magnetycznymi i optycznymi prowadzi natomiast do powstawania korelacji kwantowych i umożliwia kontrolę splątania pomiędzy modami pola. Z kolei w przypadku atomu dwupoziomowego sprzężonego z wielomodowym polem optycznym analizowane jest, w jaki sposób złożona struktura wielu modów prowadzi do efektywnej dekoherencji i pojawienia się zachowania o charakterze termicznym.

Można zatem stwierdzić, że wspólnym motywem pracy jest analiza przejścia od dynamiki mikroskopowej pojedynczych stopni swobody do złożonych zjawisk kolektywnych powstających w wyniku ich wzajemnego oddziaływania. W tym sensie rozprawa łączy opis klasycznej dynamiki nieliniowej z kwantową teorią korelacji oraz procesów dekoherencji w układach hybrydowych.

Rozdział 1.

Cel i zakres pracy

Celem niniejszej rozprawy jest zbadanie roli nieliniowości oraz sprzężeń hybrydowych w kształtowaniu złożonej dynamiki układów fizycznych, obejmującej przejścia od ruchu regularnego do chaosu deterministycznego, generację korelacji kwantowych oraz pojawienie się efektywnego zachowania termodynamicznego w układach wielomodowych. Praca koncentruje się na analizie mechanizmów odpowiedzialnych za powstawanie tych zjawisk oraz na identyfikacji parametrów umożliwiających ich kontrolę.

Rozprawa obejmuje trzy powiązane tematycznie obszary badawcze.

Pierwszym z nich jest analiza nieliniowej dynamiki hybrydowego układu magnetoelektrycznego złożonego z ferroelektryka i magnetycznego nanodysku. Celem tej części pracy było określenie wpływu sprzężenia magnetoelektrycznego na strukturę przestrzeni fazowej, stabilność rozwiązań oraz występowanie bifurkacji i chaosu deterministycznego. W szczególności badano możliwość sterowania dynamiką magnetyzacji za pomocą zewnętrznych pól elektrycznych oraz warunki efektywnego transferu energii pomiędzy podsystemami.

Drugim obszarem badań jest teoretyczna analiza kryształu foton–magnon z periodyczną modulacją struktury. Celem tej części było zbadanie wpływu nieliniowości kondensatu magnonowego na dynamikę układu oraz określenie związku między strukturą klasycznej przestrzeni fazowej a wielkością splątania foton–magnon. Analizowano warunki stabilności rozwiązań stacjonarnych, charakter bifurkacji oraz wpływ temperatury na generację i trwałość korelacji kwantowych.

Trzecim obszarem pracy jest analiza dynamiki atomu dwupoziomowego sprzężonego z wielomodowym układem optycznym w kontekście procesu termalizacji modów. Celem tej części było wyjaśnienie mechanizmu, w którym wielomodowość i rozkład częstości prowadzą do efektywnej dekoherencji oraz pojawienia się zachowania o charakterze termodynamicznym, mimo braku jawnej dyssypacji. Badano wpływ temperatury modów na dynamikę inwersji populacji oraz elementy pozadiagonalne zredukowanej macierzy gęstości atomu.

Zakres pracy obejmuje modelowanie hamiltonowskie badanych układów, analizę nieliniowych równań ruchu w ujęciu klasycznym i półklasycznym, badanie stabilności rozwiązań stacjonarnych oraz identyfikację bifurkacji. W części kwantowej zastosowano formalizm równań Langevina oraz analizę macierzy kowariancji w celu ilościowego opisu korelacji kwantowych. W pracy wykorzystano zarówno metody analityczne, jak

i obliczenia numeryczne umożliwiające pełną charakterystykę dynamiki w szerokim zakresie parametrów.

Rozprawa ma charakter teoretyczny i koncentruje się na identyfikacji uniwersalnych mechanizmów rządzących dynamiką układów hybrydowych, ze szczególnym uwzględnieniem roli nieliniowości, sprzężeń między podsystemami oraz wielomodowości.

Rozdział 2.

Podstawy teoretyczne multiferroików i sprzężenia magnetoelektrycznego

Zjawiska multiferroiczne należą do grupy efektów, w których oddziaływania elektryczne i magnetyczne są ze sobą nierozerwalnie powiązane poprzez strukturę symetrii materiału oraz mikroskopowe mechanizmy sprzężeń między spinami, ładunkiem i siecią krystaliczną. Opis tych zjawisk wymaga podejścia wieloskalowego – od teorii fenomenologicznych opartych na symetrii i rozwinięciach termodynamicznych, po modele mikroskopowe uwzględniające oddziaływania wymienne, sprzężenie spin–orbita oraz efekty magnetoelastyczne.

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie ram teoretycznych, które stanowią podstawę dalszych analiz dynamicznych prowadzonych w kolejnych częściach pracy. W szczególności omówione zostaną: fenomenologiczny opis sprzężenia magnetoelektrycznego (ME) w języku teorii Landaua i analizy symetrii, mikroskopowe mechanizmy prowadzące do powstania polaryzacji sprzężonej z uporządkowaniem magnetycznym oraz różnice pomiędzy multiferroikami jedno- i wielofazowymi.

Przedstawione w tym rozdziale podstawy teoretyczne stanowią punkt wyjścia do analizy nieliniowej dynamiki, bifurkacji oraz przejść do chaosu w układach magnetoelektrycznych, które będą przedmiotem dalszych rozdziałów.

2.1. Opis fenomenologiczny sprzężenia magnetoelektrycznego

Multiferroiki stanowią klasę materiałów, w których współistnieją co najmniej dwa uporządkowania ferroiczne, najczęściej ferroelektryczne oraz ferro- lub antyferromagnetyczne. W takiej sytuacji możliwe jest pojawienie się sprzężenia magnetoelektrycznego, czyli zjawiska polegającego na wzajemnym oddziaływaniu pól elektrycznych i magnetycznych w materiale. Konsekwencją tego sprzężenia jest możliwość sterowania polaryzacją elektryczną za pomocą pola magnetycznego oraz sterowania magnetyzacją za pomocą pola elektrycznego [87, 97, 98]. Obserwacja liniowego sprzężenia magnetoelektrycznego w materiale wymaga spełnienia określonych warunków symetrii, w szczególności jednoczesnego złamania symetrii inwersyjnej oraz symetrii odwrócenia

czasu [30, 33]. Zjawiska magnetoelektryczne można analizować zarówno z perspektywy pomiarowej, jak i fenomenologicznej. W kontekście eksperymentalnym często stosuje się wielkości takie jak napięciowy współczynnik sprzężenia magnetoelektrycznego $\partial V/\partial H$, szczególnie w kompozytach i strukturach warstwowych, gdzie sprzężenie piezoelektryczno-magnetostrykcyjne prowadzi do znacznych wartości odpowiedzi ME [76]. Z kolei opis teoretyczny opiera się na rozwinięciu energii swobodnej w sensie Landaua, w którym spontaniczna polaryzacja i magnetyzacja pełnią rolę makroskopowych parametrów porządku, a sprzężenie ME wynika z odpowiednich członów w rozwinięciu energii całkowitej oraz z narzuconych przez symetrię ograniczeń [35]. Fenomenologiczny opis sprzężenia magnetoelektrycznego opiera się na teorii Landaua, w której energię swobodną materiału przedstawia się jako funkcję makroskopowych parametrów porządku. W przypadku multiferroików są nimi spontaniczna polaryzacja P_S oraz spontaniczna magnetyzacja M_S. Zakładając jednorodność układu i pomijając oddziaływania gradientowe, całkowitą energię swobodną w obecności zewnętrznych pól elektrycznego E oraz magnetycznego H można zapisać jako rozwinięcie Taylora względem tych pól [35, 63]:

$$\begin{aligned} F(E,H) = F_0 - P_{S,i}E_i \ - M_{S,i}H_i \ - \tfrac{1}{2}\epsilon_0\varepsilon_{ij}E_i \ E_j - \tfrac{1}{2}\mu_0\mu_{ij}H_i \ H_j - \alpha_{ij}E_i \ H_j \\ -\tfrac{1}{2}\beta_{ijk}E_i \ H_jH_k - \tfrac{1}{2}\gamma_{ijk}H_i \ E_jE_k + \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdzie F_0 jest energią w stanie podstawowym, ϵ_0 i μ_0 oznaczają odpowiednio przenikalność elektryczną i magnetyczną próżni, natomiast ϵ_{ij} i μ_{ij} są tensorami podatności dielektrycznej i magnetycznej. Tensory $\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}$ i γ_{ijk} opisują odpowiednio liniowe i nieliniowe sprzężenia magnetoelektryczne. Struktura tensorowa tych wielkości jest ściśle związana z symetrią krystaliczną materiału; szczególnie liniowy efekt ME jest dopuszczalny tylko w układach jednocześnie pozbawionych symetrii inwersyjnej oraz symetrii odwrócenia czasu [30, 33]. Aby wyznaczyć zależności opisujące odpowiedź materiału na pola zewnętrzne, korzysta się z definicji polaryzacji i magnetyzacji jako pochodnych energii swobodnej względem pól zewnętrznych:

$$P_i(E,H) = -\frac{\partial F}{\partial E_i}, \quad M_i(E,H) = -\frac{\partial F}{\partial H_i}. \tag{2.2}$$

Podstawiając rozwinięcie energii, otrzymuje się zależność na polaryzację całkowitą:

$$P_i \ = P_{S,i} + \epsilon_0\varepsilon_{ij}E_j + \alpha_{ij}H_j + \frac{1}{2}\beta_{ijk}H_jH_k + \gamma_{ijk}H_i \ E_j + \dots \tag{2.3}$$

W przypadku braku przyłożonego pola elektrycznego, $E = 0$, odpowiedź ta sprowadza się do bezpośredniego efektu magnetoelektrycznego:

$$P_i = \alpha_{ij} H_j + \frac{1}{2}\beta_{ijk} H_j H_k. \tag{2.4}$$

Analogicznie, pochodna względem pola magnetycznego prowadzi do wyrażenia na magnetyzację:

$$M_i = M_{S,i} + \mu_0 \mu_{ij} H_j + \alpha_{ij} E_j + \beta_{ijk} E_i \; H_j + \frac{1}{2}\gamma_{ijk} E_j E_k + \ldots \tag{2.5}$$

W przypadku braku pola magnetycznego, $H = 0$, otrzymuje się odwrotny efekt magnetoelektryczny:

$$M_i = \alpha_{ij} E_j + \frac{1}{2}\gamma_{ijk} E_j E_k. \tag{2.6}$$

2.2. Opis mikroskopowy sprzężenia magnetoelektrycznego

Fenomenologiczne modele opisują sprzężenie magnetoelektryczne na poziomie makroskopowym, wprowadzając odpowiednie tensory odpowiedzi i rozwinięcia energii swobodnej. Aby dokładniej zrozumieć naturę współczynników sprzężenia, takich jak α_{ij}, konieczne jest sięgnięcie do poziomu mikroskopowego, na którym oddziaływania jonów, momentów magnetycznych oraz pól zewnętrznych decydują o strukturze magnetycznej i jej wrażliwości na zaburzenia elektryczne lub magnetyczne. Istnieje kilka kluczowych mechanizmów prowadzących do efektu magnetoelektrycznego w różnych klasach multiferroików [18, 33, 41, 48, 59]. Symetria układu krystalicznego określa, czy efekt ME jest dozwolony, lecz nie pozwala na przewidzenie jego wielkości. Aby wyznaczyć skalę sprzężenia, niezbędna jest analiza oddziaływań na poziomie powłok elektronowych, przesunięć jonów i zależności właściwości magnetycznych od lokalnego otoczenia krystalicznego. Mikroskopowe mechanizmy efektu ME można podzielić na klasy: anizotropię jednojonową, zmiany wymiany symetrycznej i antysymetrycznej, oddziaływania dipolowe, oddziaływanie Zeemana, a także elektryczną polaryzację indukowaną przez niekolinearność i frustrację spinową. Jednym z podstawowych źródeł sprzężenia ME jest zmiana anizotropii magnetycznej pojedynczego jonu pod wpływem pola elektrycznego. Lokalne pole krystaliczne, określone przez położenia jonów ligandów, decyduje o rozszczepieniu poziomów energetycznych i o preferowanym kierunku momentu magnetycznego. Pole elektryczne może powodować przesunięcia jonów ligandów lub ich deformację, prowadząc do zmian w wielkości i symetrii pola krystalicznego. W efekcie

zmienia się energia anizotropii, co można schematycznie zapisać jako

$$\Delta\hat{H}_{\text{ani}} \propto (S_i^{\alpha})^2, \tag{2.7}$$

gdzie S_i^{α} oznacza rzut momentu spinowego jonu i na kierunek α. Zmiana anizotropii wpływa na orientację lub stabilność uporządkowania magnetycznego, a więc prowadzi do nielokalnej zmiany makroskopowej magnetyzacji i tym samym do efektu ME. Drugim ważnym mechanizmem jest modyfikacja symetrycznej superwymiany między spinami, reprezentowanej ogólną postacią

$$\hat{H}_{\text{ex}}^{\text{sym}} \propto J_{ij}\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \tag{2.8}$$

gdzie J_{ij} jest całką wymiany, ściśle zależną od nakładania się orbitali, ich symetrii oraz odległości r_{ij} między jonami magnetycznymi. Pole elektryczne, poprzez przesunięcia jonów i zmianę funkcji falowych elektronów, może wpływać na wartości J_{ij}, co można ująć w schematycznej formie:

$$\Delta\hat{H}_{\text{ex}}^{\text{sym}} \propto r_{ij}\left(S_i^{\alpha}S_j^{\beta} + S_i^{\beta}S_j^{\alpha}\right). \tag{2.9}$$

Zmiana superwymiany prowadzi do modyfikacji zarówno magnetycznego porządku długozasięgowego, jak i temperatury przejścia magnetycznego. W materiałach o silnym sprzężeniu spin-sieć efekt ten może stanowić dominujący wkład do sprzężenia ME. Oddziaływanie Działoszyńskiego–Morii (DM), będące konsekwencją sprzężenia spin–orbita w środowisku pozbawionym inwersji, opisuje postać [30, 74]

$$\hat{H}_{\text{DM}} \propto \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j). \tag{2.10}$$

W zależności od materiału, wektor DM może prowadzić do miejscowego skręcenia spinów lub stabilizować niekolinearne struktury magnetyczne. Ponieważ generator DM zależy od geometrycznego otoczenia jonów, zmiana ich położeń lub lokalnej symetrii pod wpływem pola elektrycznego może prowadzić do zmiany całki wymiany antysymetrycznej. Technicznie można to zapisać jako

$$\Delta\hat{H}_{\text{DM}} \propto r_{ij}\left(S_i^{\alpha}S_j^{\beta} - S_i^{\beta}S_j^{\alpha}\right). \tag{2.11}$$

Choć energia DM jest zwykle mniejsza niż energia superwymiany symetrycznej, odgrywa ona kluczową rolę w wielu multiferroikach typu II, w których struktura magnetyczna bezpośrednio generuje polaryzację elektryczną. Oddziaływania dipolowe między momentami magnetycznymi

$$\hat{H}_{\text{dip}} \propto \frac{\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{m}_j}{r_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{m}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^5}, \tag{2.12}$$

mogą być również modyfikowane przez przesunięcia jonów indukowane przez pole elektryczne, szczególnie w materiałach piezoelektrycznych lub magnetostrycyjnych. Choć oddziaływania te są słabsze od wymiany, mogą wpływać na lokalną anizotropię magnetyczną i stabilność wybranych konfiguracji spinowych, przyczyniając się do efektu ME. Pole elektryczne może wpływać na energię Zeemana zmieniając czynnik Landégo g_L poprzez modyfikację funkcji falowych elektronów oraz zmianę pola krystalicznego. Energia Zeemana

$$\hat{H}_Z = \mu_B \mathbf{B}_{ind} \cdot \hat{g}_L \, \mathbf{S}_i \ , \tag{2.13}$$

gdzie μ_B to magneton Bohra, B_{ind} indukcja pola magnetyucznego, może ulegać zmianie wskutek zmiany elementów tensora g_L, co bezpośrednio przekłada się na zależność magnetyzacji od pola elektrycznego. Mechanizm ten ma szczególne znaczenie w materiałach o silnym sprzężeniu spin–orbita. W szeregu multiferroików typu II, takich jak $TbMnO_3$ czy $Ni_3V_2O_8$, polaryzacja elektryczna jest wynikiem złożonego, niekolinearnego uporządkowania spinów indukowanego przez konkurujące oddziaływania wymiany. Mechanizm ten prowadzi do generacji polaryzacji elektrycznej zgodnie z zależnością

$$\mathbf{P}_{ij} \propto \mathbf{e}_{ij} \times (\mathbf{S}_i \ \times \mathbf{S}_j), \tag{2.14}$$

gdzie $\mathbf{e}_{ij}$ jest wektorem jednostkowym wskazującym kierunek od jonu i do jonu j. W układach z cykloidalnymi lub spiralnymi porządkami spinów niewielkie zmiany w położeniach jonów lub wartości energii DM mogą znacząco modyfikować polaryzację elektryczną, co prowadzi do wyjątkowo silnego sprzężenia ME. Frustracja wzmacnia ten efekt, ponieważ niestabilne lub bliskie degeneracji konfiguracje magnetyczne są bardziej podatne na zaburzenia zewnętrzne [56, 75, 81]. W większości materiałów multiferroicznych obserwuje się jednoczesne działanie wielu opisanych powyżej mechanizmów. Ich względny udział zależy od symetrii, struktury krystalicznej, rodzaju jonów magnetycznych, a także od intensywności sprzężenia spin–orbita. W materiałach antyferromagnetycznych, takich jak Cr_2O_3, efekt ME powstaje dzięki subtelnej nierównowadze oddziaływań pomiędzy podsystemami magnetycznymi, co prowadzi do niezerowych wartości średnich wielkości tensorowych i umożliwia indukcję polaryzacji w materiale o globalnym braku magnetyzacji.

2.3. Nanostruktury i podejścia kwantowe w badaniach multiferroików

Zastosowanie technik nanoskalowych oraz nowoczesnych metod opisu kwantowego znacząco poszerzyło zakres zjawisk obserwowanych w multiferroikach. Precyzyjne

projektowanie struktur, kontrola oddziaływań spinowych oraz możliwość pobudzania układów poza równowagą pozwalają dziś badać sprzężenie magnetoelektryczne w reżimach wcześniej niedostępnych. Niniejszy podrozdział koncentruje się na dwóch uzupełniających się obszarach: efektach wynikających z nanostrukturyzacji multiferroików oraz zjawiskach charakterystycznych dla opisu kwantowo-mechanicznego, w tym dla dynamicznych przejść fazowych.

W ostatnich latach szczególne zainteresowanie wzbudzają multiferroiczne metapowierzchnie oraz heterostruktury nanoskalowe, w których precyzyjne ułożenie warstw pozwala modyfikować lokalne sprzężenia spinowe i ferroelektryczne. Przykładem takich układów są wielowarstwowe struktury $SrTiO_3$/YIG, w których połączenie efektów spin–orbita i ferroelektrycznych deformacji sieci umożliwia uzyskanie złożonej dwójłomności sterowanej zewnętrznymi polami. Dzięki temu właściwości refrakcyjne materiału można modulować dla różnych polaryzacji światła, co otwiera drogę do zastosowań w regulowanej fotonice [58]. Nanometryczne heterostruktury ujawniają także możliwość generowania tzw. solitonów elektromagnonowych — wzbudzeń będących wynikiem nieliniowego sprzężenia spinów z drganiami sieci. Zmienne pola elektryczne mogą pobudzać solitony w pobliżu krawędzi pasma magnetycznego, a nanoskalowe ograniczenie przestrzenne prowadzi do znacznego wzmocnienia ich amplitudy. W praktyce oznacza to, że nanostruktury mogą wspierać bardzo efektywną konwersję sygnałów elektrycznych na dynamiczną odpowiedź magnetyczną, co jest szczególnie istotne dla spintroniki wysokich częstotliwości [57]. Innym przejawem nietypowych zjawisk w nanoskali są plazmoniczne sieci skyrmionowe powstające w multiferroikach osadzonych na metalicznych podłożach. Interferencja polaryzacji powierzchniowych plazmonów tworzy rozkłady pola elektrycznego, które — poprzez sprzężenie magnetoelektryczne — mogą lokalizować i stabilizować skyrmiony w określonych pozycjach. Dzięki temu możliwe jest optyczne manipulowanie uporządkowaniem spinowym, co stanowi wartościowy mechanizm w projektowaniu magnonowych struktur logicznych oraz precyzyjnych sensorów magnetycznych [27, 111, 112].

W opisie kwantowym multiferroików istotną rolę odgrywa zarówno dynamika spinów w stanach splątanych, jak i zjawiska topologiczne. Przykładowo, w łańcuchach o helikalnym uporządkowaniu spinowym, takich jak $LiCu_2O_2$, odpowiednio kształtowane impulsy pola elektrycznego mogą umożliwiać transport informacji kwantowej z dużą wiernością. Okresowe „kopnięcia" elektryczne przeciwdziałają wpływowi niejednorodności w materiale i stabilizują układ, co sugeruje, że multiferroiki mogą stanowić platformę dla komunikacji kwantowej [106].

Interesującą klasę zjawisk stanowią również pretermalne czasowe kryształy Floqueta (ang. *prethermal Floquet time crystals* – pFTC), które mogą powstawać w chiralnych

łańcuchach multiferroicznych pobudzanych okresowymi polami. Obecność oddziaływań Działoszyńskiego–Morii i nieuporządkowania pozwala utrzymać długotrwałą koherencję spinową, a dynamika takich układów wykazuje cechy przydatne w detekcji sygnałów AC. W fazie pFTC kwantowa informacja Fishera rośnie szybciej niż liniowo wraz z liczbą spinów, przekraczając standardową granicę kwantową [93].

2.4. Praktyczne definicje współczynników magnetoelektrycznych

W opisie eksperymentalnym zjawisko magnetoelektryczne określa się poprzez pomiar odpowiedzi elektrycznej materiału na zewnętrzne pole magnetyczne oraz odpowiedzi magnetycznej na pole elektryczne. Najczęściej stosowane są dwie wielkości: liniowy współczynnik magnetoelektryczny oraz napięciowy współczynnik magnetoelektryczny. Ich definicje wynikają bezpośrednio z wielkości makroskopowych opisujących materiał, takich jak polaryzacja elektryczna, magnetyzacja czy pole elektryczne generowane w próbce. W opisie makroskopowym zjawisko magnetoelektryczne charakteryzuje współczynnik sprzężenia magnetoelektrycznego α [33, 77, 79]. Elektrycznie indukowane sprzężenie ME jest definiowane jako zmiana magnetyzacji (M) pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego (E):

$$\alpha_E = \left(\frac{\partial M}{\partial E}\right). \tag{2.15}$$

Analogicznie, magnetycznie indukowane sprzężenie ME oznacza zmianę polaryzacji (P) pod wpływem przyłożonego pola magnetycznego (H):

$$\alpha_H = \left(\frac{\partial P}{\partial H}\right). \tag{2.16}$$

W pełnym opisie tensory α_{ij} określają liniową odpowiedź polaryzacji na przyłożone pole magnetyczne oraz magnetyzacji na pole elektryczne. Liniowy współczynnik sprzężenia magnetoelektrycznego opisuje zależności (2.15) i (2.16). Obie wielkości mają w układzie SI jednostki $[\alpha_H] = [\alpha_E] = \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}$, co wynika z relacji między jednostkami pól i indukowanych odpowiedzi. W praktyce eksperymentalnej częściej stosuje się wielkości zależne od napięcia, ponieważ w wielu konfiguracjach pomiarowych łatwiej jest rejestrować różnicę potencjałów powstającą na elektrodach niż bezpośrednio mierzyć polaryzację. Jeżeli pole elektryczne w próbce opisane jest relacją $E = V/d$, gdzie V oznacza przyłożone lub indukowane napięcie, a d grubość warstwy dielektrycznej, wówczas polaryzacja elektryczna przyjmuje postać $P = \epsilon_0 \epsilon_r E$. Dla materiałów o dużej przenikalności dielektrycznej ($\epsilon_r \gg 1$) często stosuje się przybliżenie: $P \approx \epsilon_0 \epsilon_r E$. Podstawiając powyższą zależność do definicji liniowego

efektu magnetoelektrycznego otrzymuje się wyrażenie:

$$\alpha_H = \left(\frac{\partial P}{\partial H}\right) \approx \epsilon_0 \epsilon_r \left(\frac{\partial E}{\partial H}\right) = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{d} \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right) \tag{2.17}$$

Wprowadza się wówczas napięciowy współczynnik magnetoelektryczny

$$\alpha_H^V = \frac{1}{d} \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right), \tag{2.18}$$

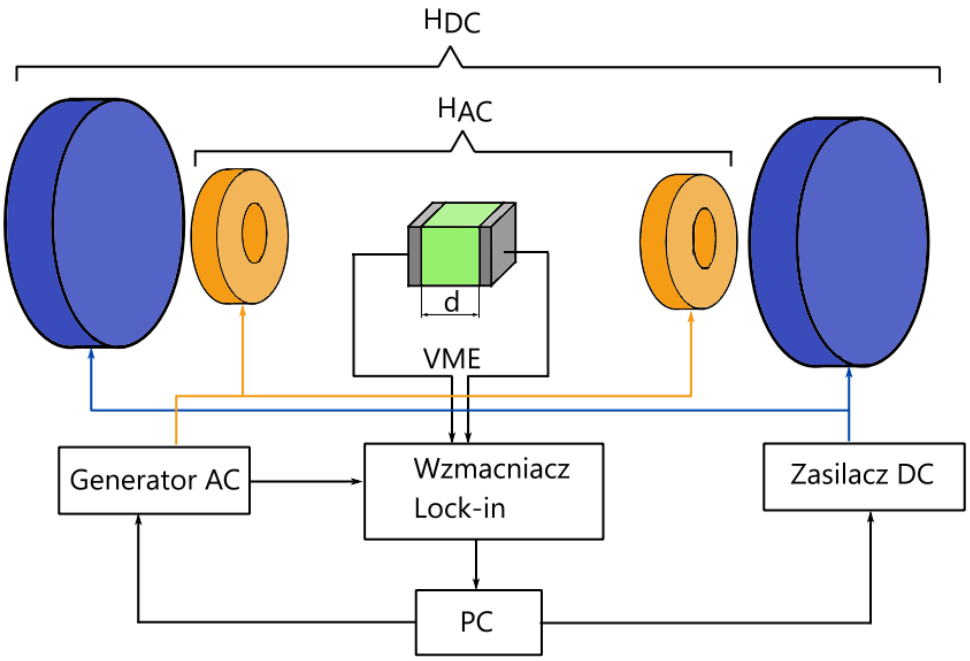
który w układzie SI posiada jednostki $[\alpha_H^V] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}$, natomiast w układzie CGS zapisuje się go jako $[\alpha_H^V] = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{cm \cdot Oe}}$, co bywa wygodniejsze w praktyce laboratoryjnej, zwłaszcza w badaniach kompozytów magnetoelektrycznych oraz cienkowarstwowych heterostruktur. Zależność napięciowa jest szczególnie istotna w zastosowaniach, w których efekt ME wykorzystywany jest do detekcji zmian sygnału magnetycznego lub do elektrycznego sterowania właściwościami magnetycznymi w urządzeniach pamięciowych, czujnikach czy elementach mikroelektromechanicznych [82, 108].

2.5. Metoda pomiaru sprzężenia magnetoelektrycznego z wykorzystaniem techniki lock-in

Wprowadzone w poprzedniej sekcji definicje współczynników magnetoelektrycznych stanowią podstawę opisu ilościowego zjawiska ME, jednak ich bezpośredni pomiar w praktyce eksperymentalnej napotyka istotne trudności. Wynika to z faktu, że sygnały magnetoelektryczne generowane w rzeczywistych materiałach są bardzo słabe, często na poziomie mikro- lub nanowoltów, co powoduje ich silne maskowanie przez szumy termiczne oraz zakłócenia aparaturowe [50, 101]. Z tego względu w badaniach multiferroików powszechnie stosuje się metody dynamiczne, w których odpowiedź materiału jest modulowana, a następnie selektywnie detektowana.

Najczęściej wykorzystywaną techniką jest metoda z zastosowaniem wzmacniacza typu lock-in, umożliwiająca bezpośredni pomiar napięciowego współczynnika magnetoelektrycznego α_H^V. W typowej konfiguracji eksperymentalnej do próbki przykłada się jednocześnie stałe pole magnetyczne H_{DC} oraz niewielkie pole zmienne H_{AC} o zadanej częstotliwości. Pole stałe ustala stan magnetyczny układu, natomiast pole zmienne wymusza oscylacyjną odpowiedź materiału, prowadząc do powstania napięcia elektrycznego o tej samej częstotliwości [29]. W ten sposób odpowiedź magnetoelektryczna zostaje jednoznacznie powiązana z częstotliwością sygnału wzbudzającego (zob. rys. 2.1).

Zasada działania wzmacniacza lock-in opiera się na detekcji synchronicznej. Sygnał napięciowy generowany w próbce jest mnożony przez sygnał odniesienia o tej samej



Rys. 2.1. Schemat układu pomiarowego współczynnika magnetoelektrycznego z wykorzystaniem techniki lock-in. Próbka (kolor zielony) umieszczona jest w polu magnetycznym będącym superpozycją składowej stałej H_{DC} (elektromagnes, kolor niebieski) oraz zmiennej H_{AC} (cewki Hemholtza, kolor pomarańczowy). Generator sygnału dostarcza jednocześnie pole odniesienia dla wzmacniacza lock-in, co umożliwia detekcję synchroniczną napięcia magnetoelektrycznego V_{ME} indukowanego w próbce. (opracowanie własne).

częstotliwości, pochodzący z generatora sterującego polem H_{AC}. W wyniku tej operacji powstają składowe o częstotliwościach będących sumą i różnicą częstotliwości sygnałów, jednak zastosowanie filtru dolnoprzepustowego eliminuje składniki szybkozmienne, pozostawiając jedynie składową wolnozmienną proporcjonalną do amplitudy sygnału zgodnego z sygnałem referencyjnym. Mechanizm ten umożliwia skuteczne odrzucenie szumów oraz sygnałów o innych częstotliwościach, co pozwala na detekcję bardzo słabych sygnałów elektrycznych [124].

W nowoczesnych układach pomiarowych stosuje się detekcję dwufazową, w której sygnał analizowany jest względem dwóch sygnałów odniesienia przesuniętych o 90°. Pozwala to na wyznaczenie zarówno składowej zgodnej w fazie, jak i prostopadłej, co umożliwia pełniejszą charakterystykę odpowiedzi materiału. Analiza fazy sygnału ma szczególne znaczenie w przypadku materiałów kompozytowych, gdzie sprzężenie magnetoelektryczne może mieć charakter pośredni i być związane z oddziaływaniami magnetostrykcyjno–piezoelektrycznymi [44].

W praktycznej realizacji eksperymentu próbka wyposażona w elektrody umieszczana jest w układzie generującym pole magnetyczne, natomiast generator sygnału dostarcza zarówno sygnał odniesienia dla wzmacniacza lock-in, jak i steruje polem H_{AC}. Napięcie

V_{ME} indukowane w próbce trafia na wejście wzmacniacza, gdzie ulega wzmocnieniu, detekcji synchronicznej oraz filtracji. Ostatecznie na wyjściu otrzymuje się sygnał stały proporcjonalny do amplitudy efektu magnetoelektrycznego.

Na podstawie zmierzonego napięcia możliwe jest wyznaczenie napięciowego współczynnika magnetoelektrycznego zgodnie z zależnością:

$$\alpha_H^V = \frac{V_{ME}}{d \cdot H_{AC}}, \tag{2.19}$$

gdzie d oznacza grubość próbki, natomiast H_{AC} amplitudę zmiennego pola magnetycznego. Tak zdefiniowana wielkość odpowiada praktycznej realizacji pochodnej $\partial V/\partial H$ wprowadzonej w poprzedniej sekcji i umożliwia bezpośrednie porównanie wyników eksperymentalnych dla różnych materiałów oraz konfiguracji pomiarowych [29, 44].

2.6. Multiferroiki jednofazowe

Multiferroiki jednofazowe są materiałami, w których w obrębie jednej fazy krystalicznej współistnieją co najmniej dwa uporządkowania długozasięgowe, najczęściej ferroelektryczne i magnetyczne. W przeciwieństwie do układów wielofazowych ich właściwości fizyczne są jednorodne w całej objętości materiału, co sprzyja bezpośredniemu sprzężeniu pomiędzy stopniami swobody odpowiedzialnymi za różne typy uporządkowania.

Współistnienie uporządkowania magnetycznego i elektrycznego wymaga spełnienia rygorystycznych warunków symetrii sieci krystalograficznej. Analiza symetrii oparta na grupach Shubnikova wskazuje, że spośród 122 magnetycznych grup przestrzennych jedynie 31 dopuszcza istnienie ferroelektryczności, 31 umożliwia uporządkowanie magnetyczne, natomiast tylko 13 grup symetrii pozwala na jednoczesne występowanie obu tych stanów uporządkowania.

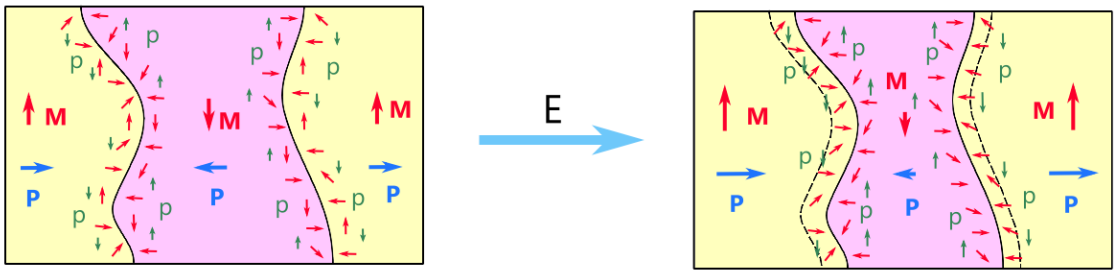
Z tego względu multiferroiki jednofazowe występują rzadko w naturze i są trudne do otrzymania w procesach syntezy materiałowej, a obserwowane w nich sprzężenie magnetoelektryczne jest zazwyczaj słabe i silnie zależne od szczegółów strukturalnych oraz mechanizmów oddziaływań mikroskopowych [88, 108].

2.6.1. Sprzężenie magnetoelektryczne indukowane przez ściany domenowe

Współistnienie domen magnetycznych oraz ferroelektrycznych lub ferroelastycznych w obrębie jednej fazy krystalicznej, prowadzi do powstawania ścian domenowych na ich granicach. Ściany te odgrywają istotną rolę w mechanizmach sprzężenia

magnetoelektrycznego, ponieważ w ich obrębie dochodzi do lokalnych zaburzeń symetrii, sprzyjających wzajemnemu oddziaływaniu różnych stopni swobody.

Wzmocnienie oddziaływań magnetoelektrycznych w pobliżu ścian domenowych wynika z niejednorodnego efektu magnetoelektrycznego, polegającego na indukowaniu polaryzacji ferroelektrycznej w sąsiedztwie ścian domen magnetycznych. Efekt ten jest konsekwencją lokalnej niecentrosymetrii występującej wewnątrz ścian domenowych, nawet w materiałach, które w stanie objętościowym zachowują symetrię centrosymetryczną. Schemat przedstawiający oddziaływanie magnetoelektryczne w ramach ścian domenowych przestawiono na rys. 2.2.



Rys. 2.2. Schemat oddziaływań magnetoelektrycznych w pobliżu ścian domenowych. Domeny o wypadkowej magnetyzacji (M) oraz polaryzacji (P), w pobliżu granicy dochodzi do zaburzenia magnetyzacji i powstania indukowanej polaryzacji (p). Przyłożenie zewnętrznego pola elektrycznego (E) powoduje rozszerzenie się domen o równoległym kierunku polaryzacji kosztem domen antyrównoległych. Prowadzi to do większych zaburzeń na granicach domen. (opracowanie własne).

Do zjawisk magnetoelektrycznych związanych ze ścianami domen należą m.in. elektrycznie napędzany ruch ścian domen magnetycznych, zmiana orientacji (nachylenia) płaszczyzny ściany domenowej, a także unieruchamianie ścian domen magnetycznych na ścianach domen ferroelektrycznych. Mechanizmy te umożliwiają precyzyjne sterowanie strukturą domenową za pomocą zewnętrznego pola elektrycznego.

Niejednorodność polaryzacji w pobliżu ścian domen jest bezpośrednio związana z lokalnymi zaburzeniami symetrii magnetycznej, które prowadzą do pojawienia się oddziaływania Działoszyńskiego–Morii. Oddziaływanie to sprzyja powstawaniu lokalnej polaryzacji ferroelektrycznej, co oznacza, że nawet niewielkie, lokalne zaburzenia symetrii mogą indukować właściwości ferroelektryczne w materiale.

Mechanizm sprzężenia magnetoelektrycznego indukowanego przez ściany domenowe został zaobserwowany m.in. w manganianach ziem rzadkich w niskich temperaturach. W pobliżu antyferromagnetycznego przejścia fazowego dochodzi w nich do reorganizacji spinów jonów Mn^{3+}, prowadzącej do powstawania domen rotacji spinowej. Domeny te

zaburzają lokalną symetrię magnetyczną, co skutkuje sprzężeniem pomiędzy magnetyzacją a polaryzacją ferroelektryczną [27, 70].

Eksperymentalna obserwacja sprzężenia magnetoelektrycznego indukowanego przez oddziaływanie ścian domen możliwa jest z wykorzystaniem metod optyki nieliniowej. W szczególności zastosowanie generacji drugiej harmonicznej przez Fiebiga i współpracowników umożliwiło bezpośrednią obserwację domen oraz ich wzajemnego sprzężenia w multiferroiku $YMnO_3$ [34].

2.6.2. Odkształcenie wymienne

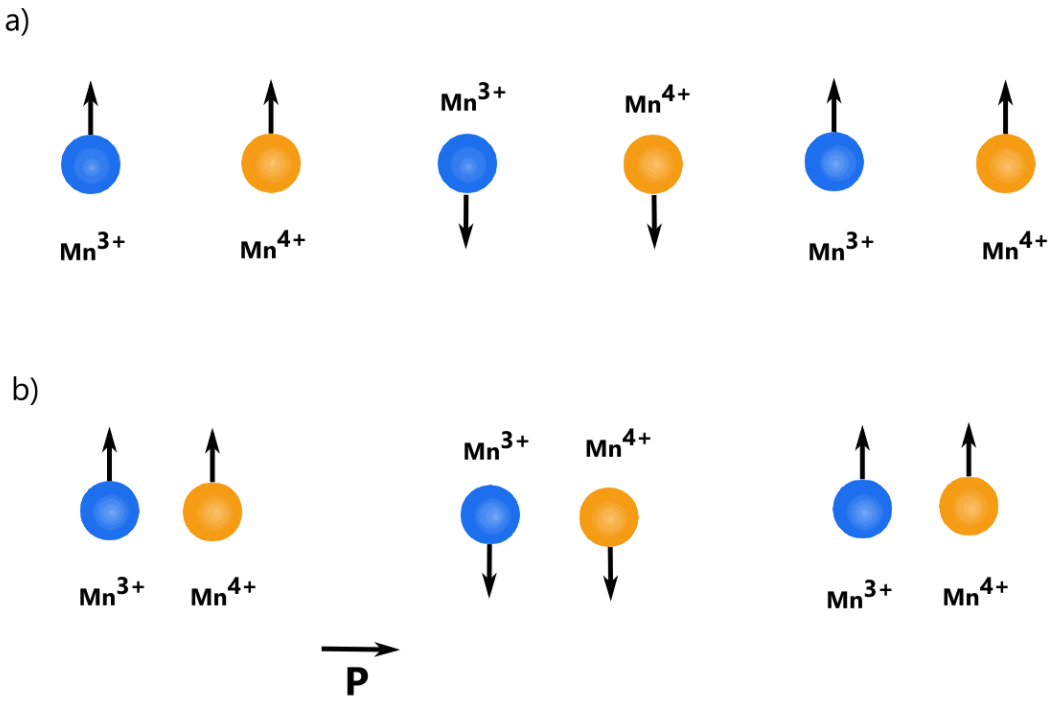
Jony magnetyczne w sieci krystalicznej mają tendencję do zmiany swoich położeń w taki sposób, aby minimalizować energię wymiany magnetycznej. Prowadzi to do lokalnych deformacji sieci krystalograficznej, znanych jako odkształcenie wymienne (ang. *exchange striction*), które stanowi jedno z głównych źródeł silnego sprzężenia magnetoelektrycznego w jednofazowych multiferroikach o uporządkowaniu kolinearnym lub cykloidalnym.

W układach, w których jony magnetyczne tworzą struktury spinowe kolinearne lub magnetycznie sfrustrowane, występuje uporządkowanie magnetyczne dalekiego zasięgu. Prowadzi ono do obniżenia lokalnej symetrii sieci krystalograficznej, co w połączeniu z oddziaływaniem Działoszyńskiego–Morii może skutkować indukcją polaryzacji ferroelektrycznej. Mechanizm ten jest szczególnie wyraźny w ortorombowych manganianach ziem rzadkich, gdzie momenty magnetyczne jonów manganu układają się wzdłuż naprzemiennych płaszczyzn sieci krystalograficznej.

Konkurencja pomiędzy oddziaływaniami ferromagnetycznymi i antyferromagnetycznymi w podukładzie magnetycznym prowadzi do efektu magnetostrykcji, w którym spiny równoległe są przyciągane, natomiast spiny antyrównoległe ulegają oddaleniu (zob. rys. 2.3). Taka nierównomierna deformacja sieci powoduje powstanie niecentrosymetrii, co skutkuje indukcją polaryzacji elektrycznej [18].

Zjawisko odkształcenia wymiennego zostało potwierdzone eksperymentalnie w wielu jednofazowych multiferroikach, takich jak perowskity (RMn_2O_5), cykloidalne multiferroiki (Ca_3CoMnO_6), niklany ziem rzadkich ($RNiO_3$) oraz tlenki żelaza ziem rzadkich (RFe_2O_4). W przypadku perowskitów wzrost polaryzacji ferroelektrycznej związany jest z nierównomiernym rozmieszczeniem jonów Mn^{3+} i Mn^{4+} w sieci krystalograficznej. Transfer ładunku z jonów manganu do wiązań Mn–O–Mn prowadzi do ich skracania, co bezpośrednio skutkuje magnetostrykcją i pojawieniem się polaryzacji [45].

Aktualne badania teoretyczne przewidują możliwość indukcji polaryzacji ferroelektrycznej poprzez odkształcenie wymienne w temperaturze pokojowej w związkach RMn_2O_5 [8]. Z kolei badania eksperymentalne przeprowadzone na multiferroiku $HoFeO_3$



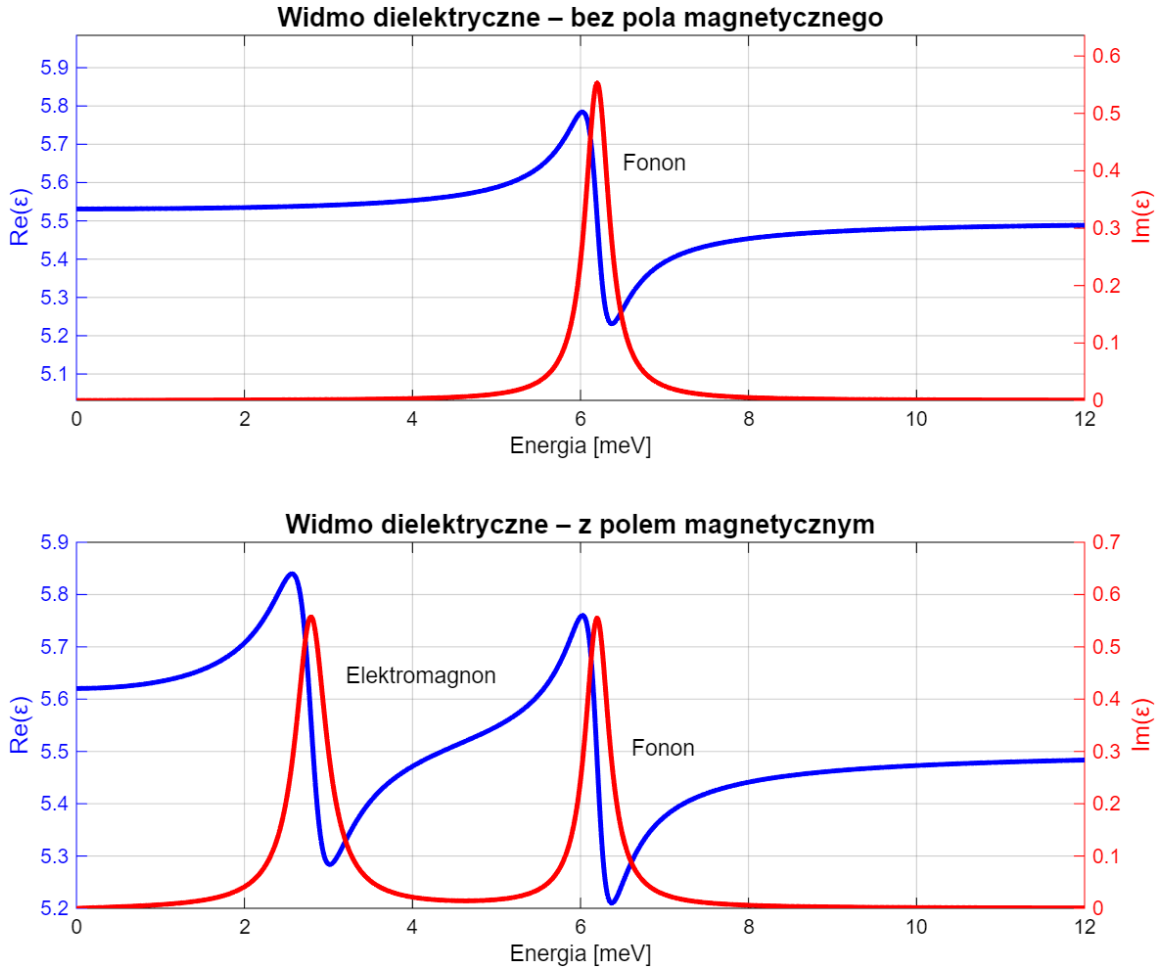
Rys. 2.3. Schemat powstawania magnetostrykcji na podstawie łańcucha spinowego zbudowanego z jonów Mn^{3+} i Mn^{4+} o układzie spinowym góra-góra-dół-dół. **a)** położenie pierwotne, jony rozłożone równomiernie, **b)** magnetostrykcja, powodująca przyciąganie się jonów równoległych i odpychanie antyrównoległych, w rezultacie indukowana jest polaryzacja. (opracowanie własne).

wykazały istnienie silnego sprzężenia magnetoelektrycznego w temperaturze zbliżonej do pokojowej (ok. 210 K), potwierdzając praktyczne znaczenie tego mechanizmu [26].

2.6.3. Elektromagnony

Występowanie sprzężenia magnetoelektrycznego w multiferroikach jednofazowych prowadzi do wzajemnego oddziaływania pomiędzy wzbudzeniami magnetycznymi (magnonami) a drganiami sieci krystalicznej (fononami). Sprzężone wzbudzenia tego typu określane są mianem elektromagnonów. Eksperymentalnie manifestują się one jako rezonanse aktywne elektrycznie w widmach dielektrycznych, obserwowane m.in. w postaci przesunięć częstotliwości fononowych, anomalii magnetodielektrycznych lub dodatkowych rezonansów w paśmie terahercowym [110] – charakterystyczne widma dla elektromagnetonów przedstawiono na rys. 2.4.

Obecność elektromagnonów potwierdzono w szeregu klasycznych multiferroików jednofazowych, takich jak $TbMnO_3$, $GdMnO_3$, YMn_2O_5 oraz $TbMn_2O_5$. Początkowo zakładano, że mechanizm ich powstawania związany jest z odwrotnym oddziaływaniem Działoszyńskiego–Morii, w którym niekolinearne uporządkowanie spinów indukuje polaryzację elektryczną sprzężoną z dynamiką magnetyczną [23, 56]. Model ten znalazł



Rys. 2.4. Symulowane widmo przenikalności dielektrycznej ϵ w zakresie niskich energii (meV) ilustrujące obecność elektromagnonu w multiferroiku jednofazowym. Górny panel przedstawia widmo bez zewnętrznego pola magnetycznego – widoczny jest jedynie rezonans fononowy (pik w części urojonej $\mathrm{Im}(\epsilon)$). Dolny panel pokazuje widmo w obecności pola magnetycznego – pojawia się dodatkowy, wyraźny rezonans w niższej energii (ok. 2–3 meV), który jest charakterystyczną dla elektromagnonu. Pik ten jest aktywny elektrycznie (widoczny w widmie dielektrycznym), co odróżnia go od klasycznych magnonów (aktywnych magnetycznie). Symulacja oparta na modelu Lorentza z dwoma oscylatorami. (opracowanie własne).

potwierdzenie m.in. w przypadku $TbMnO_3$, gdzie elektromagnony są bezpośrednio związane z cykloidalnym uporządkowaniem spinów.

Dalsze badania eksperymentalne wykazały jednak istnienie elektromagnonów również w materiałach takich jak $DyMnO_3$, w których obserwowane rezonanse nie mogły zostać w pełni wyjaśnione w ramach odwrotnego mechanizmu DM. W odpowiedzi zaproponowano alternatywny mechanizm oparty na symetrycznej wymianie Heisenberga w połączeniu ze sprzężeniem magnetostrykcyjnym spinów z polarnymi modami sieci krystalicznej. W tym ujęciu deformacje sieci indukowane przez uporządkowanie magnetyczne prowadzą do aktywacji fononów, które mogą sprzęgać się z magnonami i być wzbudzane bezpośrednio przez pole elektryczne [103].

Tego rodzaju sprzężenie spin–sieć może występować w szerokiej klasie materiałów magnetycznych, jednak tylko w multiferroikach prowadzi ono do elektrycznej aktywności wzbudzeń magnetycznych, co stanowi ich cechę wyróżniającą. Pomimo intensywnych badań dokładny mechanizm powstawania elektromagnonów pozostaje przedmiotem dyskusji, w szczególności w kontekście wyznaczenia siły sprzężenia fonon–magnon oraz identyfikacji konkretnych modów fononowych odpowiedzialnych za to zjawisko.

Większość znanych multiferroików jednofazowych wykazuje obecność elektromagnonów jedynie w niskich temperaturach, co znacząco ogranicza ich potencjalne zastosowania. Z tego względu szczególne zainteresowanie budzą materiały, w których sprzężenie magnetoelektryczne i związane z nim elektromagnony występują w temperaturze pokojowej. Do tej grupy należą m.in. $GdFe_{0.94}Mg_{0.06}O_3$, $Na_{0.5}Bi_{0.5}TiO_3$ oraz domieszkowane związki tytanianu sodowo-bizmutowego np. $Na_{0.49}Bi_{0.51}Ti_{0.98}Fe_{0.02}O_3$. W materiałach tych wartość współczynnika sprzężenia magnetoelektrycznego pozostaje jednak stosunkowo niska i nie przekracza 10 mV/(cm·Oe).

Znacznie wyższe wartości współczynnika ME, rzędu 400 mV/(cm·Oe), zaobserwowano w warstwowym multiferroiku $Bi_5Ti_3FeO_{15}$, choć nadal są one niższe niż w przypadku klasycznego $BiFeO_3$, dla którego współczynnik sprzężenia osiąga wartości około 3000 mV/(cm·Oe). To właśnie żelazian bizmutu pozostaje obecnie najbardziej intensywnie badanym materiałem pod kątem elektromagnonów i zastosowań magnetoelektrycznych. Na zainteresowanie $Bi_5Ti_3FeO_{15}$ wpływa również możliwość jego syntezy bez konieczności stosowania technologii wysokociśnieniowych, co stanowi istotną przewagę nad wieloma innymi perowskitami [45, 87].

2.7. Multiferroiki wielofazowe

Potrzeba uzyskania dużych wartości sprzężenia magnetoelektrycznego (w stosunku do multiferroików jednofazowych) skłoniła naukowców do poszukiwania materiałów, które łączą w sobie dwa lub więcej uporządkowań. Kompozytowe materiały składające się najczęściej z ferroelektryka i ferromagnetyka umożliwiają uzyskanie wysokich wartości sprzężenia, które występuje również w temperaturach pokojowych, co jest kluczowe w szeregu zastosowań. Mulitiferroiki wielofazowe mogą mieć postać cząstek, wielowarstwowych układów cienkich warstw czy samoorganizujących się nanostruktur. Efekt magnetoelektryczny zależy od właściwości faz, ich mikrostruktury oraz jakości interfejsu międzyfazowego [45, 88, 113].

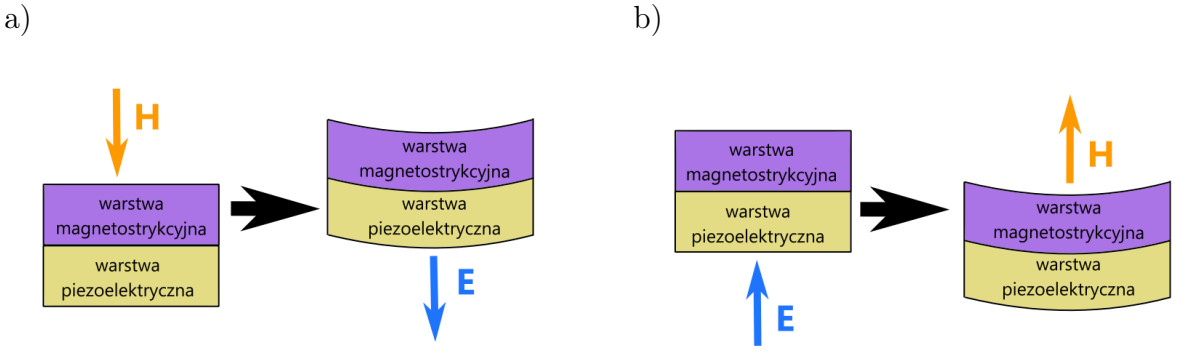
Wśród ferroelektryków wykorzystywanych w multiferroikach wielofazowych szczególną rolę odgrywa tytanian baru ($BaTiO_3$ – BTO), który ze względu na wysoką polaryzację spontaniczną, dobre dopasowanie sieciowe do metali przejściowych oraz stabilność

strukturalną w temperaturze pokojowej jest często traktowany jako materiał modelowy. Z tego względu wiele omawianych poniżej mechanizmów sprzężenia magnetoelektrycznego ilustrowanych będzie na przykładzie układów zawierających BTO.

2.7.1. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez naprężenie interfejsu

Jednym z najskuteczniejszych mechanizmów realizacji sprzężenia magnetoelektrycznego w multiferroikach wielofazowych jest sprzężenie pośredniczone przez naprężenie mechaniczne na granicy faz. Mechanizm ten opiera się na współdziałaniu magnetostrykcji w fazie ferromagnetycznej oraz piezoelektryczności w fazie ferroelektrycznej i prowadzi do efektywnej konwersji pomiędzy polem magnetycznym i elektrycznym poprzez deformację sprężystą struktury [113].

W najprostszym ujęciu zewnętrzne pole magnetyczne powoduje odkształcenie magnetostrykcyjne fazy ferromagnetycznej, które następnie przenoszone jest przez interfejs do fazy piezoelektrycznej. W odpowiedzi na to naprężenie w ferroelektryku generowany jest ładunek elektryczny. Analogiczny proces zachodzi w kierunku odwrotnym: przyłożone pole elektryczne prowadzi do deformacji fazy piezoelektrycznej, która z kolei modyfikuje stan magnetyczny fazy magnetostrykcyjnej. Schemat tych procesów przedstawiono na rys. 2.5. W takim przypadku sprzężenie magnetoelektryczne ma charakter pośredni i jego efektywność zależy przede wszystkim od właściwości sprężystych obu faz, ich grubości, a także jakości i ciągłości interfejsu.



Rys. 2.5. Schemat sprzężenia magnetoelektrycznego za pomocą naprężenia interfejsu: **a)** Pole magnetyczne (H) powoduje odkształcenie warstwy magnetostrykcyjnej, a tym samym warstwy piezoelektrycznej indukując pole elektryczne (E), **b)** Pole elektryczne (E) odkształca warstwę piezoelektryczną, co powoduje odkształcenie warstwy magnetostrykcyjnej indukując pole magnetyczne (H). (opracowanie własne).

Multiferroiki wykorzystujące sprzężenie poprzez naprężenie interfejsu realizowane są w różnych konfiguracjach strukturalnych, obejmujących kompozyty cząstkowe, układy wielowarstwowe oraz samoorganizujące się nanostruktury. Szczególnie interesującym

podejściem są nanokompozyty o strukturze rdzeń–powłoka, w których jedna faza otacza drugą, zapewniając dużą powierzchnię kontaktu oraz ograniczając niepożądaną dyfuzję chemiczną na granicy faz. W nanokompozycie $CoFe_2O_4$ o proporcji masowej 1:1 i strukturze rdzeń–powłoka zaobserwowano wartość sprzężenia magnetoelektrycznego blisko 35 razy większą niż w przypadku mechanicznej mieszaniny tych samych faz (odpowiednio 8,1 mV/(cm·Oe) oraz 0,1 mV/(cm·Oe)) [15]. Wynik ten jednoznacznie wskazuje na kluczową rolę kontrolowanej mikrostruktury oraz efektywnego przenoszenia naprężeń na granicy faz.

Pomimo znaczącej poprawy właściwości magnetoelektrycznych w kompozytach cząstkowych typu rdzeń–powłoka, układy te zazwyczaj charakteryzują się niższymi wartościami sprzężenia niż struktury warstwowe. Dla przykładu kompozyty cząstkowe PZT wykazują sprzężenie rzędu 195 mV/(cm·Oe), co jest wartością co najmniej o rząd wielkości mniejszą niż w warstwowych multiferroikach PZT (około 4,7 V/(cm·Oe)) czy PVDF, dla których raportowano wartości sięgające 21,5 V/(cm·Oe).

Z tego względu największe zainteresowanie badawcze budzą obecnie multiferroiki wielowarstwowe, w których efektywność sprzężenia magnetoelektrycznego może być dodatkowo wzmacniana przez rezonans mechaniczny. W trójwarstwowych strukturach typu Metglas/PVDF/Metglas zaobserwowano wzrost współczynnika sprzężenia magnetoelektrycznego z około 7,2 V/(cm·Oe) w niskich częstotliwościach do około 238 V/(cm·Oe) przy częstotliwości rezonansowej rzędu 50 kHz. Zjawisko to podkreśla istotną rolę dynamiki sprężystej w projektowaniu wysokoefektywnych multiferroików warstwowych.

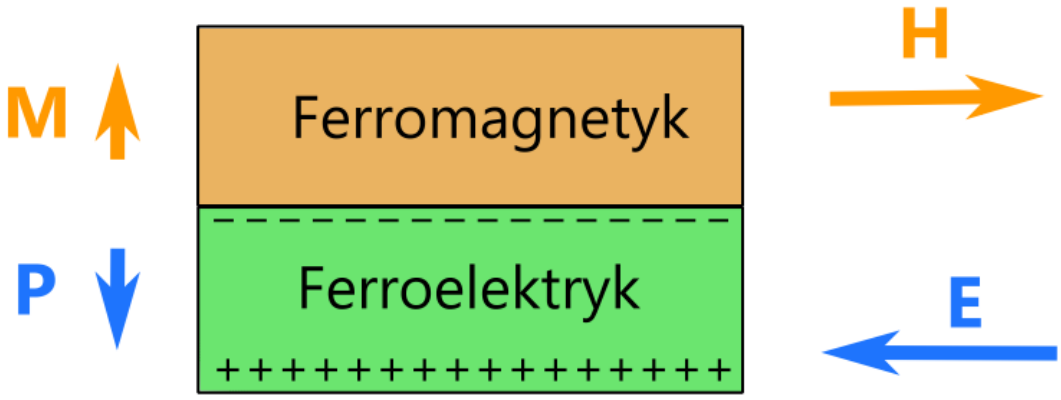
Rozwinięciem koncepcji wielowarstwowych kompozytów są układy cienkowarstwowe, w których faza magnetyczna – wykonana z metali takich jak żelazo, nikiel, kobalt lub ich stopów, a także z tlenków magnetycznych – osadzana jest bezpośrednio na podłożu lub warstwie piezoelektrycznej. W tego typu strukturach BTO jest często wykorzystywany jako warstwa piezoelektryczna ze względu na wysoką polaryzację spontaniczną, dobre właściwości sprężyste oraz korzystne dopasowanie sieciowe do wielu ferromagnetyków. Czynniki te sprzyjają efektywnemu przenoszeniu naprężeń i czynią BTO jednym z najczęściej stosowanych ferroelektryków w multiferroikach opartych na sprzężeniu mechanicznym [45, 104].

Oprócz sprzężenia pośredniczonego przez deformację mechaniczną, w multiferroikach wielofazowych istotną rolę odgrywają również mechanizmy związane bezpośrednio z redystrybucją ładunku na granicy faz. W szczególności w układach cienkowarstwowych oraz heterostrukturach epitaksjalnych, gdzie przenoszenie naprężeń może być częściowo ograniczone przez podłoże, dominującym źródłem sprzężenia magnetoelektrycznego stają się efekty elektrostatyczne i elektronowe zachodzące w obszarze interfejsu.

2.7.2. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez ładunek interfejsu

Alternatywnym mechanizmem realizacji sprzężenia magnetoelektrycznego w multiferroikach wielofazowych jest sprzężenie pośredniczone przez ładunek pojawiający się na granicy faz ferroelektrycznej i ferromagnetycznej. Mechanizm ten odgrywa szczególnie istotną rolę w cienkowarstwowych heterostrukturach oraz supersieciach, w których sprzężenie mechaniczne jest osłabione na skutek silnego związania warstw z podłożem lub niewielkich grubości poszczególnych faz.

W tego typu układach przyłożone pole elektryczne prowadzi do zmiany polaryzacji ferroelektryka, co skutkuje akumulacją lub redukcją ładunku na interfejsie. Ładunek ten jest ekranowany w fazie ferromagnetycznej przez elektrony przewodnictwa, przy czym proces ekranowania ma charakter spinowo-zależny. W konsekwencji dochodzi do nierównomiernego obsadzenia stanów spinowych, co prowadzi do modyfikacji lokalnej magnetyzacji w pobliżu interfejsu (zob. rys. 2.6). Powstała w ten sposób składowa magnetoelektryczna zależy bezpośrednio od wartości polaryzacji ferroelektrycznej, co umożliwia sterowanie stanem magnetycznym za pomocą pola elektrycznego.



Rys. 2.6. Schemat przedstawiający sprzężenie magnetoelektryczne poprzez ładunek interfejsu. Pole elektryczne (E) powoduje powstanie polaryzacji (P) wewnątrz warstwy ferroelektrycznej, co prowadzi do zaburzenia obsadzenia stanów spinowych i powstania magnetyzacji (M) w warstwie ferromagnetyka czego efektem jest pojawienie się pola magnetycznego (H). (opracowanie własne).

Klasycznym przykładem układu, w którym sprzężenie magnetoelektryczne ma charakter interfejsowy, są heterostruktury $Fe/BaTiO_3$. Dzięki bardzo dobremu dopasowaniu parametrów sieciowych (około 98,6%) możliwe jest wytwarzanie wysokiej jakości interfejsów epitaksjalnych o niewielkiej liczbie defektów strukturalnych. Badania teoretyczne wykazały, że przełączenie polaryzacji ferroelektrycznej $BaTiO_3$ prowadzi do skokowej zmiany momentu magnetycznego warstwy żelaza, co wynika z modyfikacji

hybrydyzacji stanów elektronowych typu d w pobliżu poziomu Fermiego [28]. Efekt ten ma charakter lokalny, jednak ze względu na silne sprzężenie elektronowe może wpływać na magnetyzację całej warstwy ferromagnetycznej.

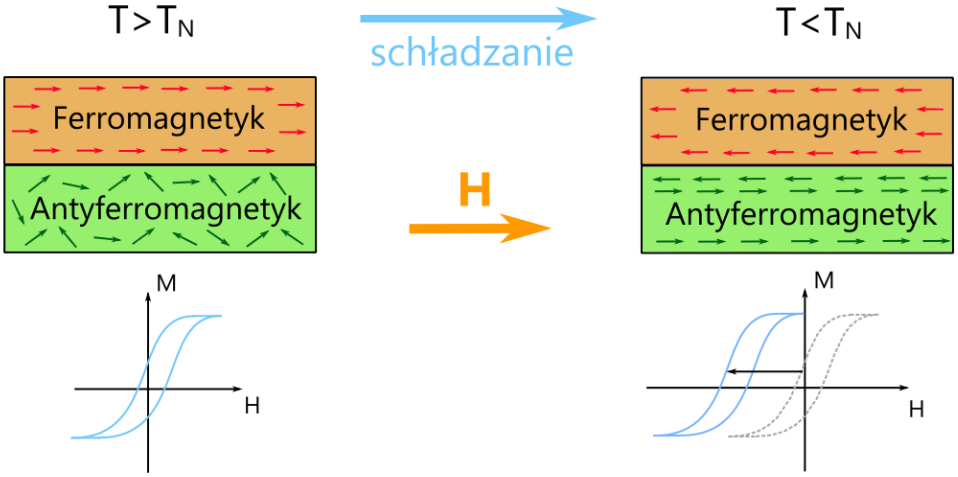
Eksperymentalne potwierdzenie istnienia sprzężenia magnetoelektrycznego w układach Fe/BTO uzyskano m.in. za pomocą magnetometrii SQUID oraz technik dyfrakcyjnych. Zaobserwowano zarówno bezpośrednią odpowiedź magnetyczną na przyłożone pole elektryczne, jak i istotne efekty magnetoelastyczne związane z przejściami fazowymi BTO. Podczas nagrzewania i chłodzenia układu pojawiają się anomalie oraz histereza magnetyzacji, wynikające z przenoszenia odkształceń sieciowych z warstwy ferroelektrycznej na ferromagnetyk [89].

Rozwinięciem koncepcji heterostruktur dwuwarstwowych są supersieci trójskładnikowe, złożone z ferromagnetyka, ferroelektryka oraz warstwy metalicznej. W takich układach, jak Fe/$BaTiO_3$/Pt lub Fe/$PbTiO_3$/Pt, zaobserwowano indukowanie pola magnetycznego w pobliżu interfejsu ferromagnetyk–ferroelektryk wyłącznie za pomocą zewnętrznego pola elektrycznego. Wykazano liniową zależność pomiędzy wartością indukowanego pola magnetycznego a polaryzacją ferroelektryczną, a także istotne różnice w sile sprzężenia dla różnych materiałów ferroelektrycznych, co wskazuje na kluczową rolę szczegółów struktury i chemii interfejsu [64].

Znaczenie atomowej struktury interfejsu zostało dodatkowo potwierdzone w badaniach ultracienkich warstw $BaTiO_3$ osadzanych na żelazie. Analiza dyfrakcji rentgenowskiej oraz obliczenia teoretyczne wykazały obecność pojedynczej warstwy BaO na granicy materiałów oraz sąsiedniej warstwy TiO_2 w bezpośrednim kontakcie z Fe. Taka konfiguracja sprzyja silnej relaksacji pionowej oraz intensywnej rekonstrukcji elektronowej, prowadząc do wzmocnionego sprzężenia magnetoelektrycznego na interfejsie [73].

Mechanizm sprzężenia pośredniczonego przez ładunek jest szczególnie atrakcyjny z punktu widzenia zastosowań w niskomocowych urządzeniach spintronicznych. Zmiana polaryzacji ferroelektrycznej umożliwia bowiem sterowanie stanem magnetycznym za pomocą napięcia, bez konieczności przepływu prądu. Takie podejście pozwala na znaczną redukcję strat energetycznych i otwiera drogę do realizacji nieulotnych pamięci magnetoelektrycznych oraz elementów logicznych sterowanych polem elektrycznym [99].

Oprócz mechanizmów opartych na przenoszeniu naprężeń oraz redystrybucji ładunku na granicy faz, w multiferroikach wielofazowych istotną rolę odgrywają również efekty związane z oddziaływaniem spinów na interfejsie. W szczególności na granicy faz ferromagnetycznej i antyferromagnetycznej może dochodzić do powstania przesunięcia wymiany, które umożliwia pośrednie sterowanie właściwościami magnetycznymi za pomocą pola elektrycznego poprzez sprzężenie z porządkiem ferroelektrycznym.



Rys. 2.7. Schemat sprzężenia magnetoelektrycznego poprzez przesunięcie wymiany. Schłodzenie układu poniżej temperatury Néela (T_N) w obecności pola magnetycznego (H) powoduje ustawienie spinów w warstwie antyferromagnetycznej co wymusza kierunek ułożenia spinów w warstwie ferroelektrycznej. (opracowanie własne).

2.7.3. Sprzężenie magnetoelektryczne poprzez przesunięcie wymiany

Przesunięcie wymiany (ang. *exchange bias*) jest zjawiskiem występującym na granicy faz ferromagnetycznej i antyferromagnetycznej, polegającym na przesunięciu pętli histerezy ferromagnetyka wzdłuż osi pola magnetycznego oraz często towarzyszącym mu wzroście koercji. Efekt ten wynika z niepełnej kompensacji momentów magnetycznych w warstwie antyferromagnetycznej oraz z istnienia sprzężenia wymiennego pomiędzy spinami obu faz na interfejsie [71, 78, 110].

Klasycznie zjawisko przesunięcia wymiany obserwowane jest po schłodzeniu układu poniżej temperatury Néela antyferromagnetyka w obecności zewnętrznego pola magnetycznego. W takich warunkach orientacja spinów w warstwie antyferromagnetycznej zostaje „zamrożona” i narzuca preferowany kierunek namagnesowania warstwy ferromagnetycznej (zob. rys. 2.7). W rezultacie pętla histerezy ulega przesunięciu, a układ wykazuje pamięć magnetyczną zależną od historii pola [60, 78].

W kontekście multiferroików szczególnie interesujące są układy, w których warstwa antyferromagnetyczna jest jednocześnie ferroelektryczna. W takich materiałach, jak $BiFeO_3$ czy $YMnO_3$, porządek magnetyczny i elektryczny są ze sobą sprzężone, co umożliwia kontrolowanie konfiguracji spinowej za pomocą pola elektrycznego. W efekcie możliwe staje się pośrednie sterowanie przesunięciem wymiany oraz właściwościami magnetycznymi warstwy ferromagnetycznej poprzez przełączanie domen ferroelektrycznych [31, 109].

Jednym z najbardziej intensywnie badanych materiałów tego typu jest $BiFeO_3$, który łączy wysoką temperaturę Néela z relatywnie silną polaryzacją ferroelektryczną. W heterostrukturach zawierających $BiFeO_3$ oraz ferromagnetyki wykazano, że przełączenie domen ferroelektrycznych polem elektrycznym prowadzi do rotacji struktury antyferromagnetycznej, a tym samym do zmiany warunków sprzężenia wymiennego na interfejsie. Przykładowo w układzie $Co_{0.9}Fe_{0.1}/BiFeO_3$ zaobserwowano elektrycznie sterowaną zmianę orientacji domen magnetycznych, wynikającą z rotacji wektora polaryzacji i sprzężonego z nim porządku spinowego [24, 47].

Pomimo znacznego potencjału aplikacyjnego mechanizmu przesunięcia wymiany, jego wykorzystanie w praktycznych urządzeniach napotyka na istotne ograniczenia. W wielu układach temperatura, w której efekt przesunięcia wymiany jest stabilny, pozostaje poniżej temperatury pokojowej, co ogranicza możliwość zastosowań technologicznych. Dodatkowym problemem jest metastabilny charakter ścian domenowych w ferroelektryku, który utrudnia uzyskanie w pełni odwracalnego i nieulotnego przełączania stanów magnetycznych.

Aktualne badania koncentrują się na projektowaniu wielowarstwowych struktur oraz supersieci, które umożliwiają stabilizację przesunięcia wymiany w temperaturach pokojowych. Przykładem są złożone heterostruktury metaliczne, takie jak $Ta/Cu/Mn_{70}/Ir_{30}/Fe_{70.2}Co_{7.8}Si_{12}B_{10}$, w których zaobserwowano sprzężenie magnetoelektryczne o wartości sięgającej $96,7 \mathrm{Vcm}^{-1}\mathrm{Oe}^{-1}$ przy częstotliwości rezonansowej około 1,2 kHz. Wyniki te wskazują, że odpowiednia inżynieria interfejsu oraz kontrola mikrostruktury mogą znacząco rozszerzyć zakres temperatur i warunków, w których mechanizm przesunięcia wymiany może być efektywnie wykorzystywany [45].

Przedstawione ograniczenia mechanizmu przesunięcia wymiany pokazują, że jego praktyczna użyteczność zależy nie tylko od samego istnienia sprzężenia magnetoelektrycznego, lecz przede wszystkim od stabilności domen, jakości interfejsu oraz warunków temperaturowych. Osiągnięcie dużych wartości sprzężenia w złożonych heterostrukturach potwierdza, że odpowiednia inżynieria materiałowa pozwala znacząco poszerzyć zakres funkcjonowania tego efektu.

Jednocześnie wyniki te podkreślają, że rzeczywista odpowiedź magnetoelektryczna ma silnie materiałowo-zależny charakter i wymaga szczegółowej analizy właściwości konkretnych układów. W kolejnej części rozdziału omówione zostaną badania właściwości wybranych materiałów i struktur modelowych, które umożliwiają bezpośrednią weryfikację omawianych mechanizmów sprzężenia magnetoelektrycznego.

2.8. Badania właściwości multiferroików

Dotychczasowe rozważania koncentrowały się na klasyfikacji multiferroików oraz mechanizmach sprzężenia magnetoelektrycznego w układach jednofazowych i wielofazowych. W niniejszym rozdziale uwaga zostaje skierowana na szczegółową analizę właściwości wybranych materiałów i układów, w których oddziaływania pomiędzy stopniami swobody elektrycznymi, magnetycznymi i mechanicznymi prowadzą do powstawania złożonych stanów uporządkowania.

Szczególny nacisk położono na materiały i struktury, które stanowią platformę do badań zjawisk nieliniowych, efektów interfejsowych oraz topologicznych konfiguracji porządku, takich jak struktury helikalne, skyrmiony czy solitony. Analiza ta obejmuje zarówno klasyczne ferroelektryki wykorzystywane jako materiały referencyjne, jak i układy, w których sprzężenie magnetoelektryczne prowadzi do jakościowo nowych właściwości dynamicznych i statycznych.

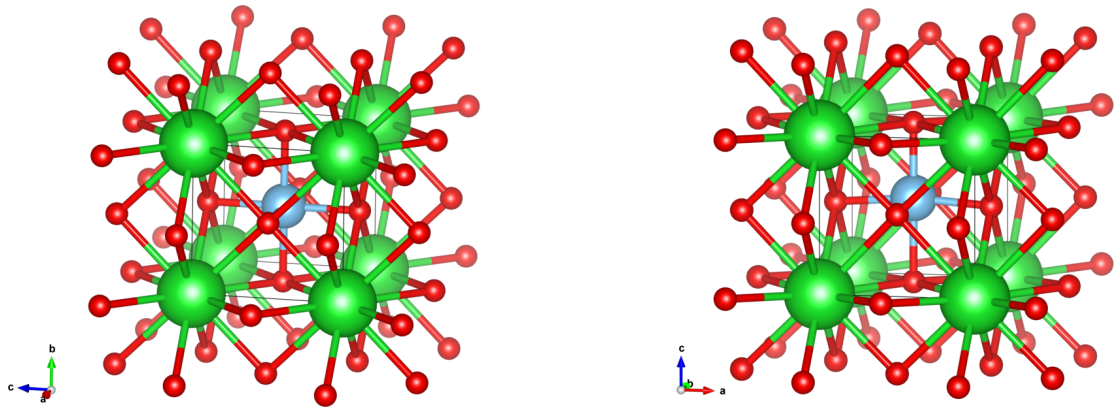
2.8.1. $BaTiO_3$ jako materiał referencyjny w badaniach właściwości multiferroicznych

Tytanian baru ($BaTiO_3$, BTO) jest jednym z najlepiej poznanych ferroelektryków o strukturze perowskitu i odgrywa rolę materiału referencyjnego w badaniach właściwości ferroelektrycznych oraz sprzężeń elektro-mechanicznych. Charakteryzuje się wysoką stałą dielektryczną, przekraczającą $\epsilon_r > 1000$ w temperaturze pokojowej, oraz silną spontaniczną polaryzacją osiągającą $P_s \approx 26\ \mu\mathrm{C/cm}^2$ w fazie tetragonalnej.

W temperaturze przejścia ferroelektrycznego $T_C \approx 120$–$130\ ^\circ\mathrm{C}$ $BaTiO_3$ przechodzi z fazy paraelektrycznej o symetrii kubicznej (zob. rys.2.8a) do fazy ferroelektrycznej tetragonalnej (zob. rys.2.8b), a przy dalszym obniżaniu temperatury występują kolejne przejścia do faz ortorombowej oraz romboedrycznej. Sekwencja tych przemian fazowych, dobrze opisana w literaturze, czyni BTO dogodnym układem modelowym do badań wpływu deformacji sieci, naprężeń oraz defektów na stabilność uporządkowania ferroelektrycznego [27, 46, 67, 83, 86].

$BaTiO_3$ nie wykazuje uporządkowania magnetycznego powyżej temperatur kriogenicznych, co wyklucza go jako jednoskładnikowy multiferroik typu I. Właśnie ta cecha sprawia jednak, że materiał ten stanowi wygodną platformę do badań nad indukowaną multiferroicznością, w której oddziaływania magnetyczne pojawiają się wskutek modyfikacji strukturalnych, domieszkowania lub sprzężeń interfejsowych [42, 52, 84, 85].

a) b)



Rys. 2.8. Wizualizacja struktur $BaTiO_3$ (kolorem zielonym oznaczono jony Ba, kolorem czerwonym jony O, a kolorem niebieskim jony Ti): **a)** Faza kubiczna (symetria Pm-3m) jon Ti^{4+} znajduje się w centrum symetrycznego oktaedru tlenowego TiO_6 – faza paraelektryczna. **b)** Faza tetragonalna (symetria P4mm) jon Ti^{4+} przesunięty wzdłuż osi c powoduje deformacje oktaedru tlenowego TiO_6 i powstanie momentu dipolowego – faza ferroelektryczna. (opracowanie własne).

Jednym z kierunków takich badań jest domieszkowanie $BaTiO_3$ jonami metali przejściowych (Fe, Co, Mn, Ni, Cr), prowadzące do modyfikacji zarówno właściwości elektrycznych, jak i magnetycznych. Przykładowo, podstawienie jonów Fe na pozycjach Ti w strukturze perowskitu ($BaTi_{1-x}Fe_xO_{3-\delta}$) prowadzi do pojawienia się słabego ferromagnetyzmu w temperaturze pokojowej dla stężeń $x \approx 0{,}05$–$0{,}15$. Zjawisko to wiązane jest z obecnością wakansów tlenowych oraz oddziaływaniami typu supersuperwymiany $Fe^{3+}-V_O-Fe^{3+}$ [31]. Jednocześnie obserwuje się częściową redukcję polaryzacji ferroelektrycznej, która jednak pozostaje na poziomie umożliwiającym dalsze zastosowania funkcjonalne.

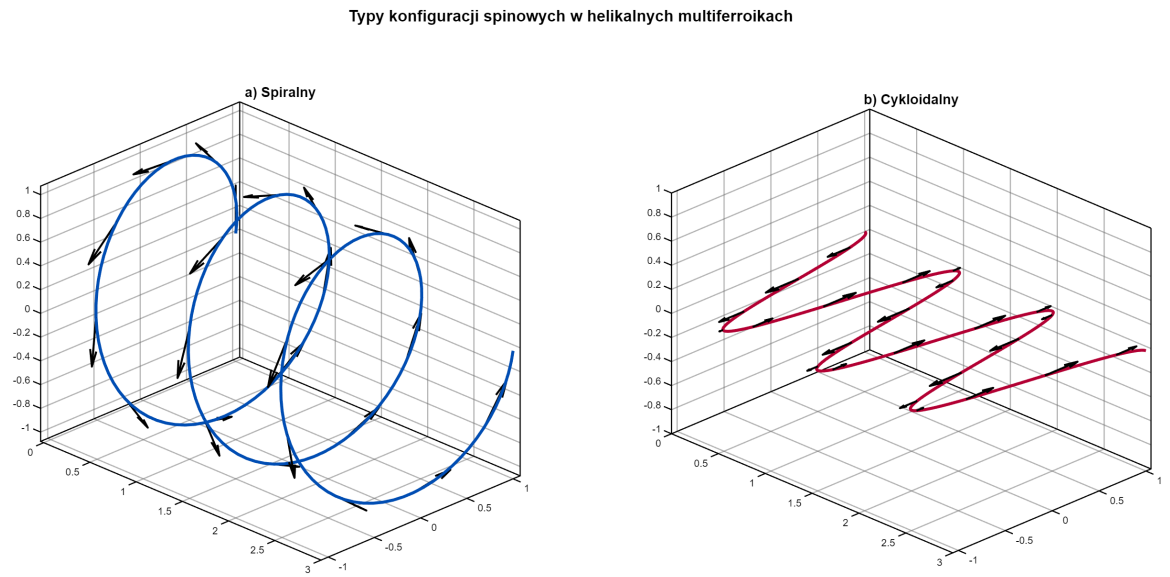
Szczególnie istotną rolę $BaTiO_3$ odgrywa w badaniach cienkich warstw, heterostruktur i nanokompozytów, gdzie pełni on funkcję fazy ferroelektrycznej sprzęganej z materiałami magnetycznymi. W warstwowych układach kompozytowych obserwuje się silny efekt magnetoelektryczny wynikający z przenoszenia naprężeń na granicy faz. Współczynnik sprzężenia magnetoelektrycznego α_E osiąga w takich strukturach wartości rzędu 1–5 V/(cm·Oe) w temperaturze pokojowej [125], co czyni je jednymi z najbardziej efektywnych układów wielofazowych.

Z powyższych względów $BaTiO_3$ pełni w badaniach właściwości multiferroicznych rolę uniwersalnej platformy materiałowej, umożliwiającej systematyczne badanie wpływu naprężeń, defektów, domieszek oraz interfejsów na sprzężenie pomiędzy stopniami swobody elektrycznymi i magnetycznymi. W kolejnych podrozdziałach omówione zostaną układy,

w których analogiczne mechanizmy prowadzą do powstawania bardziej złożonych stanów uporządkowania, takich jak struktury helikalne, skyrmiony czy solitony.

2.8.2. Badania helikalnych multiferroików

Helikalne multiferroiki stanowią szczególną klasę materiałów, w których ferroelektryczność nie ma pochodzenia strukturalnego, lecz wynika bezpośrednio z niekolinearnego uporządkowania magnetycznego. W odróżnieniu od klasycznych ferroelektryków, takich jak $BaTiO_3$, gdzie spontaniczna polaryzacja jest związana z przesunięciem jonów w sieci krystalicznej i tylko pośrednio może oddziaływać z magnetyzmem, w helikalnych multiferroikach oba porządki są ze sobą sprzężone na poziomie mikroskopowym. Spiralne lub cykloidalne konfiguracje spinów prowadzą do powstania chiralnych struktur magnetycznych (zob. rys. 2.9), które generują polaryzację elektryczną i umożliwiają jej sterowanie za pomocą pola magnetycznego [23].



Rys. 2.9. Schematyczne przedstawienie dwóch podstawowych typów helikalnych struktur magnetycznych w multiferroikach typu II: a) spiralna (płaszczyzna obrotu spinów jest prostopadła do wektora propagacji q), b) cykloidalna (płaszczyzna obrotu zawiera kierunek q) – ta konfiguracja najczęściej prowadzi do indukcji spontanicznej polaryzacji elektrycznej poprzez mechanizm odwrotnego oddziaływania Działoszyńskiego-Morii. (opracowanie własne).

Mikroskopowym źródłem ferroelektryczności w tego typu układach jest najczęściej odwrotny mechanizm Działoszyńskiego-Morii, w którym lokalna polaryzacja elektryczna jest proporcjonalna do wektorowego iloczynu sąsiednich spinów i może być zapisana w postaci $\mathbf{P} \propto \mathbf{e}_{ij} \times (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j)$. Mechanizm ten prowadzi do silnego sprzężenia magnetoelektrycznego, umożliwiającego wzajemne sterowanie uporządkowaniem magnetycznym i polaryzacją elektryczną przy relatywnie niewielkich polach zewnętrznych [9].

Teoretyczne analizy helikalnych multiferroików wskazują, że sprzężenie magnetoelektryczne może być wykorzystane do precyzyjnej kontroli struktury spinowej za pomocą pola elektrycznego. Na przykład w jednowymiarowych modelach multiferroików ze sfrustrowanymi oddziaływaniami spinowymi wykazano, że obecność pola elektrycznego prowadzi do stabilizacji faz chiralnych oraz indukuje przejścia fazowe pomiędzy różnymi konfiguracjami spiralnymi. Numeryczne analizy takich modeli potwierdzają wyjątkową wrażliwość układu na pole elektryczne, co skutkuje zwiększeniem wierności transferu kwantowego – miary efektywności przesyłania stanów kwantowych w systemach spinowych. Właściwości te czynią helikalne multiferroiki obiecującymi kandydatami do zastosowań w technologiach przetwarzania informacji o niskim zapotrzebowaniu energetycznym, gdzie kluczowa jest możliwość manipulacji spinami przy minimalnych stratach energii [6].

Istotnym potwierdzeniem tych koncepcji są badania eksperymentalne manganianów ziem rzadkich, takich jak $TbMnO_3$ i $DyMnO_3$. W materiałach tych spiralne uporządkowanie spinów prowadzi do pojawienia się spontanicznej polaryzacji ferroelektrycznej, której wartość i kierunek mogą być kontrolowane zewnętrznym polem magnetycznym. Polaryzacja jest generowana głównie na ścianach domen magnetycznych, a jej powstawanie wiąże się z transportem ładunku przez wiry magnetyczne wynikające z niekolinearnej konfiguracji spinów [75].

Podobne zjawiska zaobserwowano w multiferroiku $LiCuVO_4$, gdzie w zerowym polu magnetycznym spontaniczny spiralny porządek spinowy indukuje polaryzację ferroelektryczną. Eksperymenty wykazały możliwość przełączania kierunku polaryzacji za pomocą pola magnetycznego, przy czym struktura krystalograficzna materiału prowadzi do wyraźnej anizotropii odpowiedzi magnetoelektrycznej. Stwierdzono również istnienie dwóch krytycznych wartości pola magnetycznego: pierwszej odpowiadającej przełączeniu polaryzacji oraz drugiej, przy której układ przechodzi do stanu paraelektrycznego, co pozostaje w zgodzie z przewidywaniami teoretycznymi [90].

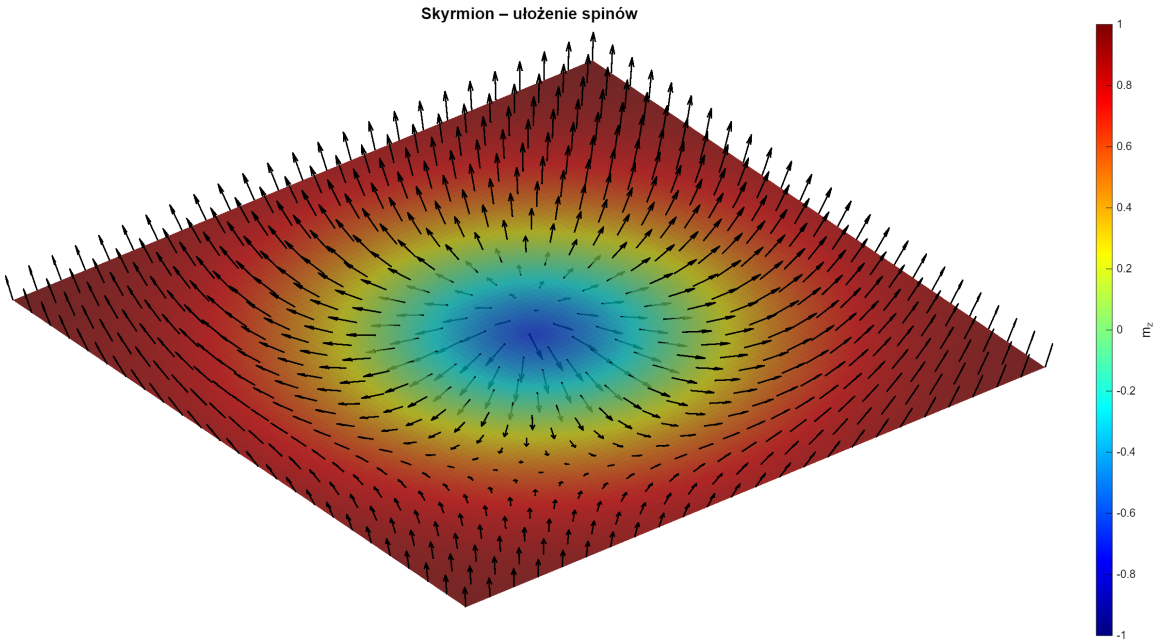
W niekolinearnych strukturach spinowych, takich jak helikalne multiferroiki, sprzężenie magnetoelektryczne jest ściśle związane z transportem momentu pędu spinowego. Pole elektryczne może indukować bezstratny prąd spinowy, natomiast w magnetykach spiralnych odpowiada za superprąd spinowy wynikający z trwałej, uporządkowanej struktury spinowej [56]. Zjawiska te zostały potwierdzone m.in. w eksperymentach z atomowymi łańcuchami żelaza na powierzchni irydu, badanych za pomocą skaningowego mikroskopu tunelowego. Zaobserwowano w nich chiralne tekstury spinowe, których zmiany na końcach łańcucha są wykrywalne na odległościach rzędu dziesiątek nanometrów. Stabilizację magnetyczną uzyskano dzięki sprzężeniu

z ferromagnetycznym łańcuchem kobaltu, co umożliwia przesyłanie informacji o stanie magnetycznym na znaczne odległości [72].

Bogata przestrzeń fazowa helikalnych multiferroików, wynikająca z konkurencji oddziaływań wymiennych, anizotropii magnetycznej oraz wpływu pól zewnętrznych, sprzyja stabilizacji bardziej złożonych tekstur magnetycznych. W szczególności umożliwia ona istnienie topologicznie nietrywialnych struktur, takich jak skyrmiony i solitony magnetyczne, które stanowią naturalne rozwinięcie opisywanych tu zjawisk i zostaną omówione w kolejnych podrozdziałach.

2.8.3. Badania nad skyrmionami

W multiferroikach "napędzanych" spinowo oddziaływanie Działoszyńskiego-Morii odgrywa kluczową rolę w stabilizacji niekolinearnych i topologicznie nietrywialnych struktur magnetycznych. Jednym z najważniejszych przykładów takich struktur są skyrmiony magnetyczne – lokalne, wirujące tekstury spinowe charakteryzujące się niezerową liczbą topologiczną. Wizualizację skryrmionu przedstawiono na rys. 2.10. Ich topologiczna ochrona sprawia, że są one odporne na ciągłe deformacje struktury magnetycznej, co odróżnia je od klasycznych domen magnetycznych i czyni szczególnie interesującymi z punktu widzenia stabilności oraz potencjalnych zastosowań.



Rys. 2.10. Wizualizacja skyrmionu, rozkład wektorów spinu na płaszczyźnie (x, y). Kierunki spinów przedstawiono za pomocą strzałek, a skalą barw składowa (m_z) (od niebieskiego $m_z = -1$ - spin w dół do czerwonego $m_z = +1$ - spin w górę). (opracowanie własne).

Skyrmiony powstają w wyniku konkurencji pomiędzy symetrycznym oddziaływaniem wymiennym, oddziaływaniem DM oraz anizotropią magnetyczną i polem zewnętrznym.

W multiferroikach o silnym sprzężeniu magnetoelektrycznym obecność oddziaływania DM prowadzi nie tylko do stabilizacji skyrmionów, lecz również do ich bezpośredniego sprzężenia z polaryzacją elektryczną. W konsekwencji możliwe jest sterowanie pozycją, dynamiką oraz stabilnością skyrmionów za pomocą pola elektrycznego, bez konieczności stosowania prądów elektrycznych i związanych z nimi strat Joule'a.

Eksperymentalnie istnienie skyrmionów magnetycznych potwierdzono m.in. w izolatorach magnetycznych i multiferroikach takich jak Cu_2OSeO_3 oraz cienkich warstwach granatu itrowo-żelazowego (YIG). Szczególnie istotne jest to, że w tych materiałach skyrmiony mogą być tworzone, przemieszczane oraz anihilowane przy użyciu pól elektrycznych, co stanowi bezpośrednią konsekwencję sprzężenia magnetoelektrycznego. Badania łączące eksperymenty z symulacjami numerycznymi wykazały możliwość kontrolowanego pułapkowania i uwalniania skyrmionów poprzez lokalnie modulowane pole elektryczne, co otwiera drogę do ich funkcjonalnego wykorzystania w układach logicznych i pamięciowych [107, 112].

Rozwinięciem tej koncepcji są teoretyczne propozycje wykorzystania skyrmionów w sztucznych sieciach potencjałów, w szczególności w tzw. sieciach skyrmionów plazmonicznych. Dla materiałów takich jak YIG zaproponowano model, w którym interferencja czterech wiązek laserowych generuje periodyczny potencjał plazmoniczny, wyznaczający pozycje skyrmionów w dwuwymiarowej sieci. Układ taki można interpretować jako nowy stan materii, analogiczny do sieci optycznych stosowanych w fizyce zimnych atomów, z tą różnicą, że węzłami sieci są topologiczne tekstury magnetyczne, a nie atomy.

W tak zdefiniowanej sieci plazmonicznej skyrmiony oddziałują ze sobą poprzez długozasięgowe oddziaływania dipolowe, co prowadzi do pojawienia się zjawisk zbiorowych. Gdy promień wzajemnego oddziaływania przekracza regulowaną odległość pomiędzy węzłami sieci, system przechodzi w stan silnie skorelowany, który można opisać jako sieć sprzężonych stanów skyrmion–plazmon. Zmiana geometrii interferencji optycznej umożliwia dynamiczną reorganizację sieci skyrmionowej, oferując znacznie większą elastyczność sterowania niż wcześniejsze metody oparte wyłącznie na polach magnetycznych [111].

Istotnym aspektem badań nad skyrmionami jest również możliwość precyzyjnej detekcji ich struktury i dynamiki. Zastosowanie lokalnych czujników pola magnetycznego, takich jak centra azotowo-wakancyjne w diamencie, pozwala na obrazowanie morfologii tekstur skyrmionowych z wysoką rozdzielczością przestrzenną, przy jednoczesnym ograniczeniu inwazyjnych efektów pomiarowych. Uwięzienie skyrmionów w zewnętrznie kontrolowanych potencjałach zmniejsza ich dryft oraz fluktuacje, co znacząco zwiększa dokładność eksperymentalnej charakteryzacji.

Połączenie topologicznej stabilności skyrmionów z możliwością ich sterowania za pomocą pól elektrycznych i optycznych czyni te struktury jednymi z najbardziej obiecujących obiektów badań w fizyce multiferroików. Stanowią one naturalne ogniwo łączące klasyczne helikalne uporządkowanie spinowe z bardziej złożonymi, nieliniowymi i topologicznie chronionymi stanami materii, co wprowadza bezpośrednie przejście do badań nad solitonami magnetycznymi i ich dynamiką.

2.8.4. Solitony elektromagnetyczne

Sprzężenie magnetoelektryczne w multiferroikach nie tylko umożliwia wzajemne sterowanie magnetyzacją i polaryzacją, lecz prowadzi również do powstawania nieliniowych, lokalizowanych wzbudzeń, określanych mianem solitonów. W przeciwieństwie do liniowych fal spinowych lub elektromagnetycznych, solitony zachowują swój kształt podczas propagacji, co wynika z równowagi pomiędzy dyspersją a nieliniowością układu. W multiferroikach źródłem tej nieliniowości jest silne sprzężenie pomiędzy stopniami swobody spinowymi, sieciowymi i elektromagnetycznymi.

Jednym z pierwszych teoretycznych opisów solitonów w multiferroikach jest model elektromagnonowych solitonów zaproponowany przez Khomerikiego i współpracowników [57]. Autorzy wykazali, że przyłożenie pola elektrycznego o częstotliwości leżącej jednocześnie w przerwie pasmowej ferroelektryka oraz w paśmie wzbudzeń magnetycznych umożliwia generację propagujących solitonów magnetycznych sprzężonych z falą elektromagnetyczną. Taki rezonansowy dobór częstotliwości prowadzi do znacznego wzmocnienia sygnału — na poziomie dwóch rzędów wielkości pomiędzy sygnałem wejściowym i wyjściowym — co wskazuje na możliwość wykorzystania tego efektu w funkcjonalnych elementach takich jak tranzystory magnetyczne sterowane polem elektrycznym.

Nowsze prace rozszerzają tę koncepcję na solitony chiralne i topologiczne, wykorzystując helikalne uporządkowanie spinowe jako dodatkowy stopień swobody sterowania. W strukturach falowodowych składających się z nieliniowego dielektryka (np. krzemu lub CS_2) umieszczonego pomiędzy warstwami helikalnych multiferroików wykazano istnienie chiralnych solitonów optycznych, których właściwości mogą być regulowane za pomocą zewnętrznego pola elektrycznego. Analityczne modele oraz symulacje numeryczne pokazują, że helikalność multiferroika oraz amplituda fali elektromagnetycznej umożliwiają precyzyjną kontrolę prędkości, stabilności i lokalizacji solitonów, co czyni takie układy obiecującą platformą dla zastosowań w optyce nieliniowej i fotonice funkcjonalnej [49].

Szczególnie interesującym kierunkiem badań są topologiczne solitony w multiferroikach antyferromagnetycznych. W cienkich warstwach $BiFeO_3$ wykazano możliwość elektrycznego

generowania i stabilizacji solitonów antyferromagnetycznych, takich jak zamknięte cykloidy spinowe, stabilizowane radialnie symetrycznym polem elektrycznym. Zmiana polaryzacji przyłożonego pola umożliwia projektowanie oraz przełączanie tych stanów, natomiast kontrola naprężeń epitaksjalnych pozwala na inżynierię domen antyferromagnetycznych o zadanej orientacji. Takie podejście stanowi istotny krok w kierunku rekonfigurowalnych struktur topologicznych, łączących cechy solitonów i skyrmionów w jednym układzie [16].

Zebrane wyniki wskazują, że solitony elektromagnetyczne w multiferroikach stanowią naturalne uzupełnienie badań nad helikalnymi strukturami spinowymi i skyrmionami. Dzięki możliwości sterowania ich dynamiką za pomocą pól elektrycznych i optycznych, multiferroiki jawią się jako wszechstronna platforma dla przyszłych urządzeń opartych na nieliniowej dynamice i topologii, takich jak przełączniki optyczne, pamięci topologiczne oraz energooszczędne układy przetwarzania informacji.

2.9. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono teoretyczne podstawy opisu multiferroików oraz mechanizmów sprzężenia magnetoelektrycznego, obejmujące zarówno podejścia fenomenologiczne, jak i mikroskopowe. Fenomenologiczny opis, oparty na rozważaniach symetrii i rozwinięciach energii swobodnej, umożliwia uniwersalną klasyfikację efektów magnetoelektrycznych oraz wprowadzenie praktycznych definicji współczynników magnetoelektrycznych, istotnych z punktu widzenia interpretacji wyników eksperymentalnych i zastosowań technologicznych.

Ujęcie mikroskopowe pozwala na powiązanie obserwowanych efektów z oddziaływaniami wymiennymi, magnetostrykcją oraz relatywistycznymi mechanizmami sprzężenia spin–orbita, w tym oddziaływaniem Działoszyńskiego–Morii. Pokazano, że lokalne zaburzenia symetrii, niekolinearność uporządkowania spinowego oraz deformacje sieci krystalograficznej odgrywają kluczową rolę w indukowaniu polaryzacji elektrycznej w układach magnetycznych oraz w dynamice sprzężenia magnetoelektrycznego, m.in. poprzez powstawanie elektromagnonów.

W rozdziale omówiono także znaczenie nanostruktur i podejść kwantowych w badaniach multiferroików, podkreślając rolę interfejsów, efektów rozmiarowych oraz ograniczonej liczby stopni swobody w wzmacnianiu sprzężenia magnetoelektrycznego. Szczególną uwagę poświęcono rozróżnieniu pomiędzy multiferroikami jednofazowymi, w których sprzężenie wynika z wewnętrznych mechanizmów mikroskopowych, a multiferroikami wielofazowymi, gdzie kluczową rolę odgrywa inżynieria interfejsów, przenoszenie naprężeń, efekty ładunkowe oraz przesunięcie wymiany.

Przegląd badań właściwości wybranych układów, obejmujący klasyczne ferroelektryki, helikalne multiferroiki oraz układy o charakterze topologicznym, takie jak skyrmiony i solitony elektromagnetyczne, ukazuje znaczenie dynamiki, nieliniowości i topologii w opisie współczesnych multiferroików. Tak zarysowane podstawy teoretyczne stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań poświęconych zastosowaniom multiferroików oraz analizie chaosu i nieliniowości w układach magnetoelektrycznych, przedstawionych w kolejnych rozdziałach pracy.

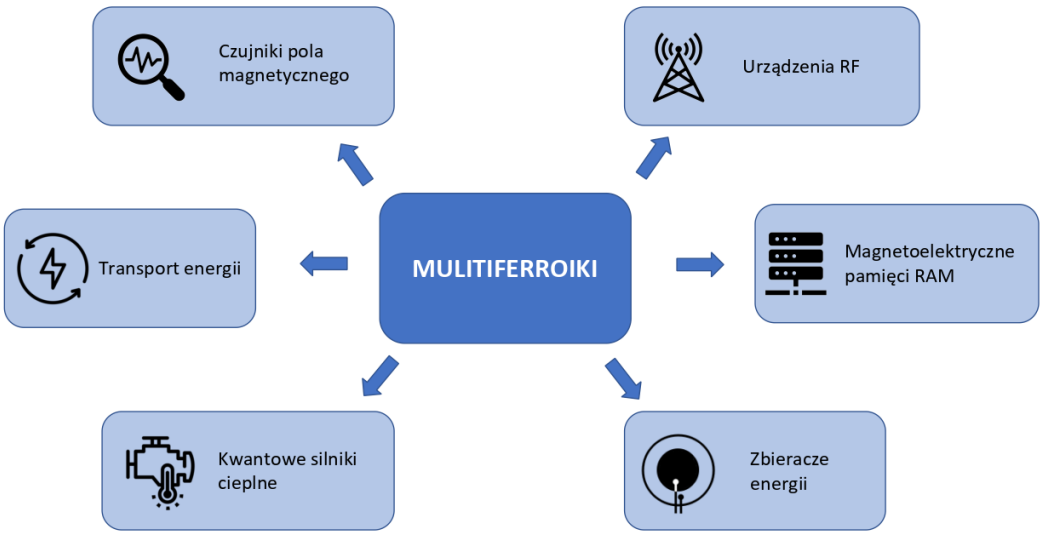
Rozdział 3.

Zastosowania multiferroików i efektów magnetoelektrycznych

Wyniki badań właściwości multiferroików, zarówno jednofazowych, jak i wielofazowych, wskazują na ich unikalny potencjał w technologii urządzeń funkcjonalnych. Możliwość wzajemnego sterowania ferroelektrycznością i magnetyzmem pozwala na projektowanie materiałów, w których pojedyncze pole zewnętrzne może wpływać na różne stopnie swobody układu, co otwiera szerokie spektrum zastosowań praktycznych.

Multiferroiki znajdują zastosowanie w czujnikach pola magnetycznego, urządzeniach radiowych, pamięciach RAM, zbieraczach energii, a także w technologii transferu ciepła i transportu energii. Efekty sprzężenia ferroelektrycznego i magnetycznego, w tym mechaniczne, elektrostatyczne i wymuszone przesunięciem wymiany, pozwalają na uzyskanie wysokiej czułości, energooszczędnej kontroli sygnałów oraz stabilności funkcjonalnej w różnych warunkach pracy [118].

Rysunek 3.1 przedstawia schemat przykładowych zastosowań multiferroików, ilustrując różnorodność efektów, które mogą być wykorzystane w praktycznych urządzeniach oraz systemach technologicznych.



Rys. 3.1. Schemat przykładowych zastosowań multiferroików (na podstawie [118]).

3.1. Detektory pola magnetycznego

Zjawisko sprzężenia magnetoelektrycznego stanowi podstawę działania nowej generacji czujników pola magnetycznego, łączących wysoką czułość z niewielkimi rozmiarami oraz niskim poborem mocy. W przeciwieństwie do klasycznych magnetometrów opartych na zjawiskach magnetorezystywnych lub indukcyjnych, detektory magnetoelektryczne umożliwiają bezpośrednią konwersję sygnału magnetycznego na sygnał elektryczny bez konieczności stosowania zewnętrznych źródeł prądu polaryzującego. Cecha ta czyni je szczególnie atrakcyjnymi w zastosowaniach mobilnych oraz w układach o ograniczonym budżecie energetycznym [76, 114].

Teoretycznie czujniki magnetoelektryczne mogą być realizowane zarówno w multiferroikach jednofazowych, jak i wielofazowych. W praktyce jednak, ze względu na niewielkie wartości współczynników ME oraz często niskie temperatury pracy multiferroików jednofazowych, zdecydowana większość badań koncentruje się na materiałach kompozytowych i heterostrukturach cienkowarstwowych, w których sprzężenie magnetoelektryczne występuje w temperaturze pokojowej [35]. Najczęściej wykorzystywane są układy składające się z warstwy magnetostrykcyjnej oraz piezoelektrycznej, w których pole magnetyczne indukuje odkształcenie mechaniczne, a to z kolei generuje sygnał elektryczny. Schemat takiego układu przedstawiono na rys. 3.2a.

Najwyższą czułość osiągają czujniki pracujące w pobliżu częstotliwości rezonansowej układu elektromechanicznego. W takim reżimie nawet bardzo słabe pola magnetyczne prowadzą do znaczącego wzmocnienia odpowiedzi elektrycznej. Przykładowo, w czujnikach opartych na strukturze $Si/SiO_2/Pt/AlN/FeCoSiB$ wykazano granicę detekcji rzędu $400\,fT/Hz^{1/2}$ w rezonansie oraz czułość rzędu pojedynczych pikotesli poza nim [120]. Osiągnięcie tak niskich progów detekcji jest możliwe dzięki połączeniu wysokiego współczynnika magnetostrykcji stopów amorficznych z dużą jakością mechaniczną rezonatorów cienkowarstwowych.

W ostatnich latach szczególną uwagę poświęca się integracji czujników magnetoelektrycznych z układami nanoelektromechanicznymi (NEMS). Miniaturyzacja rezonatorów prowadzi do zwiększenia częstotliwości własnych oraz poprawy stosunku sygnału do szumu, co umożliwia detekcję pól magnetycznych przy jednoczesnej redukcji rozmiaru i masy urządzenia [39, 40]. Co istotne, w tego typu układach możliwa jest zarówno elektryczna detekcja pola magnetycznego w obecności stałego pola biasującego, jak i elektryczny odczyt częstotliwości rezonansu bez konieczności stosowania zewnętrznego pola magnetycznego.

Rozwijane są również czujniki wykorzystujące alternatywne mechanizmy sprzężenia magnetoelektrycznego, takie jak przesunięcie wymiany lub sprzężenie interfejsowe sterowane

a)



b)



Rys. 3.2. **a)** Schemat magnetoelektrycznego czujnika pola magnetycznego składającego się kolejno z warstwy krzemu, warstwy magnetostrykcyjnej, warstwy ołowiu, warstwy piezoelektryka oraz elektrody. Pomiar napięcia indukowanego przez pole magnetyczne odbywa się pomiędzy warstwą magnetostrykcją a elektrodą (na podstawie [118]). **b)** Schemat cewki indukcyjnej sterowanej za pomocą napięcia składającej się kolejno z elektrody, warstwy piezoelektrycznej, elektrody, warstwy krzemu i warstwy magnetostrykcyjnej. Podanie napięcia na elektrody powoduje deformację warstwy piezoelektrycznej, które za pomocą sprzężenia magnetoelektrycznego przenosi się na warstwę magnetostrykcyjną powodują zmianę przenikalności magnetycznej co bezpośrednio wpływa na zmianę indukcji cewki (na podstawie [102]).

ładunkiem. Takie podejście pozwala na projektowanie detektorów pracujących przy bardzo niskich napięciach sterujących oraz integrację z układami spintronicznymi [11, 102]. Dzięki temu detektory magnetoelektryczne są obecnie rozważane jako konkurencyjna technologia wobec czujników Hallowskich, magnetorezystywnych oraz SQUID-ów w zakresie niskich pól magnetycznych i wysokiej integracji układowej.

Podsumowując, detektory pola magnetycznego oparte na multiferroikach i heterostrukturach magnetoelektrycznych stanowią jedną z najbardziej dojrzałych i dynamicznie rozwijających się klas zastosowań tych materiałów, łącząc wysoką czułość, niewielkie rozmiary oraz możliwość pracy w temperaturze pokojowej.

3.2. Urządzenia radiowe i mikrofalowe

Sprzężenie magnetoelektryczne umożliwia aktywne sterowanie parametrami elementów pracujących w zakresie wysokich częstotliwości poprzez kontrolę właściwości magnetycznych za pomocą pola elektrycznego lub, odwrotnie, odpowiedzi elektrycznej za pomocą pola magnetycznego. Mechanizm ten pozwala na projektowanie urządzeń radiowych i mikrofalowych, w których strojenie charakterystyk odbywa się bez

konieczności stosowania dużych prądów sterujących, co znacząco redukuje straty mocy oraz nagrzewanie układu [11, 87].

Zjawisko to znajduje zastosowanie w szerokiej klasie komponentów wysokoczęstotliwościowych, takich jak filtry pasmowe, przesuwniki fazowe, rezonatory, oscylatory, dostrajalne cewki czy miniaturowe anteny [32]. W układach tych przełączanie lub ciągłe dostrajanie parametrów realizowane jest poprzez zmianę polaryzacji ferroelektrycznej warstwy multiferroicznej, co prowadzi do modyfikacji warunków rezonansu magnetycznego lub elektrycznego. Schemat cewki indukcyjnej sterowanej za pomocą napięcia przedstawiono na rys. 3.2b. W porównaniu z klasycznymi rozwiązaniami opartymi na diodach pojemnościowych lub elementach MEMS, podejście magnetoelektryczne umożliwia uzyskanie szybszej odpowiedzi oraz większej integracji z układami scalonymi [76, 102].

Szczególnie istotną zaletą urządzeń magnetoelektrycznych są ich niewielkie rozmiary, umożliwiające bezpośrednią integrację na chipach elektronicznych oraz w systemach typu system-on-chip. Niskie napięcia potrzebne do przełączania polaryzacji ferroelektrycznej sprawiają, że elementy te są atrakcyjne z punktu widzenia energooszczędnej elektroniki wysokich częstotliwości, w tym systemów komunikacji bezprzewodowej i technologii Internetu Rzeczy.

Jednym z głównych wyzwań technologicznych pozostaje obecność szumów i strat związanych z granicami faz magnetostrykcyjnych oraz niejednorodnościami interfejsów. Zjawiska te mogą prowadzić do pogorszenia dobroci rezonansowej oraz stabilności parametrów pracy. W celu ich minimalizacji stosuje się materiały o niskich stratach magnetycznych, takie jak granaty itrowo-żelazowe (YIG), a także wysokiej jakości ferroelektryki perowskitowe, w tym $BaTiO_3$, które charakteryzują się dobrą stabilnością dielektryczną w szerokim zakresie częstotliwości [114].

Rozwój urządzeń radiowych opartych na sprzężeniu magnetoelektrycznym wpisuje się w ogólny trend zastępowania klasycznych elementów pasywnych rozwiązaniami aktywnie sterowanymi polem elektrycznym. Takie podejście otwiera drogę do projektowania rekonfigurowalnych układów mikrofalowych o zwiększonej funkcjonalności, zmniejszonym zużyciu energii oraz wysokim stopniu miniaturyzacji.

3.3. Pamięci RAM

Multiferroiki znajdują zastosowanie w pamięciach o dostępie swobodnym (ang. *random-access memory* – RAM), gdzie w zależności od dominującego mechanizmu oddziaływania wyróżnia się pamięci ferroelektryczne (FeRAM) oraz magnetyczne (MRAM), sterowane odpowiednio polem elektrycznym i magnetycznym. Połączenie obu

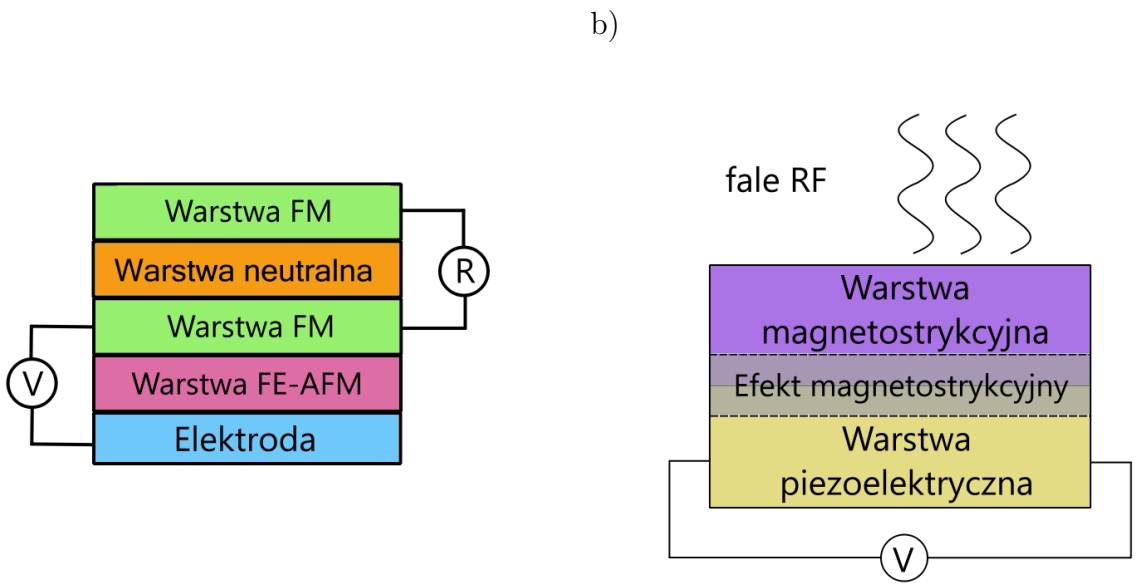
funkcjonalności w jednym układzie umożliwia zapis informacji w czterech stanach logicznych, a w bardziej złożonych architekturach nawet w ośmiu, co znacząco zwiększa gęstość zapisu danych.

Klasyczne magnetyczne pamięci MRAM wykorzystują złącza tunelowe ferromagnetyków do przechowywania dwóch stanów logicznych, jednak ich przełączanie wymaga stosowania stosunkowo wysokich prądów w celu generowania lokalnych pól magnetycznych, co prowadzi do zwiększonego zużycia energii. Podobnie, pamięci FeRAM i MRAM, mimo że jako technologie nieulotne oferują krótki czas dostępu i wysoką trwałość cykli zapisu, charakteryzują się znacznym zapotrzebowaniem energetycznym podczas operacji zapisu.

Wykorzystanie sprzężenia magnetoelektrycznego umożliwia istotne obniżenie energii wymaganej do przełączania stanów pamięci. W takim podejściu zmiana namagnesowania warstwy ferromagnetycznej w złączu tunelowym realizowana jest za pomocą pola elektrycznego, a nie magnetycznego, co prowadzi do koncepcji nieulotnych pamięci magnetycznych sterowanych elektrycznie, określanych jako magnetoelectric RAM (MERAM) [12]. Schemat ilustrujący konfigurację MERAM z wykorzystaniem warstwy ferroelektryczno-antyferromagnetycznej oraz dwóch warstw ferromagnetyka przedstawiono na rys. 3.3a. Alternatywnym rozwiązaniem są multiferroiczne złącza tunelowe, w których współistnienie polaryzacji ferroelektrycznej i spinowej umożliwia uzyskanie czterech stabilnych stanów logicznych w pojedynczym elemencie pamięci.

Eksperymentalne badania struktur Co/PZT/LSMO osadzonych na podłożu $SrTiO_3$ wykazały, że krótkie impulsy napięciowe mogą skutecznie przełączać stany magnetyczne w temperaturach nieco powyżej 250 K, przy jednoczesnym znacznym obniżeniu zapotrzebowania energetycznego w porównaniu z konwencjonalnymi metodami opartymi na polach magnetycznych. Autorzy tych prac podkreślają, że odpowiedni dobór materiału elektrody, zapewniający dobrą zgodność strukturalną z warstwą PZT, może umożliwić rozszerzenie stabilnej pracy takich układów powyżej temperatury pokojowej [80].

Najnowsze kierunki badań koncentrują się na antyferromagnetycznych pamięciach magnetoelektrycznych (AF-MERAM), w których całkowicie eliminuje się ferromagnetyczne komponenty. Przykładem jest zastosowanie cienkich warstw Cr_2O_3, gdzie przełączanie porządku antiferromagnetycznego realizowane jest za pomocą impulsów napięciowych przy progu zapisu nawet 50-krotnie niższym niż w klasycznych strukturach MERAM. Co istotne, odczyt stanu pamięci może być realizowany całkowicie elektrycznie w temperaturze pokojowej. Takie podejście eliminuje straty związane z histerezą ferromagnetyczną oraz umożliwia wykorzystanie stałych magnesów jedynie do inicjalizacji stanu, co dodatkowo redukuje całkowite zużycie energii i poprawia skalowalność układów kompatybilnych z technologią CMOS [61].



Rys. 3.3. **a)** Schemat magnetoelektrycznej pamięci RAM (MERAM) składający się z elektrody, warstwy ferroelektryczno-antyferromagnetycznej (FE-AFM), dwóch warstw ferromagnetyka (FM) przedzielonych warstwą neutralną. Zapis danych odbywa się przez przyłożenie napięcia między elektrodą a dolną warstwą FM, odczyt przez pomiar rezystancji pomiędzy warstwami FM (na podstawie [118]). **b)** Schemat zbieracza energii opartego o efekt magnetostrykcyjny. Fale radiowe powodują zmianę magnetyzacji warstwy magnetostrykcyjnej, co powoduje odkształcenie warstwy piezoelektrycznej i pojawienie się napięcia. Z kolei przyłożenie napięcia do warstwy piezoelektrycznej powoduje odkształcenie warstwy magnetostrykcyjnej i emisję fal radiowych (na podstawie [118]).

3.4. Zbieracze energii

Magnetoelektryczne zbieracze energii (ang. *magnetoelectric energy harvesters*) są urządzeniami wykorzystującymi sprzężenie magnetoelektryczne do bezpośredniej konwersji energii pola magnetycznego w sygnał elektryczny. W porównaniu z klasycznymi generatorami elektromagnetycznymi umożliwiają one znaczną miniaturyzację układów przy zachowaniu wysokiej czułości oraz niskiego zapotrzebowania energetycznego. Z tego względu multiferroiki wielofazowe są intensywnie badane jako platformy dla autonomicznych czujników oraz mikrosystemów zasilanych energią środowiskową [76].

Szczególnie obiecującym kierunkiem są implantowalne zbieracze energii i czujniki biomagnetyczne, zdolne do detekcji niezwykle słabych pól magnetycznych generowanych przez aktywność biologiczną, taką jak sygnały neuronalne [122]. Przykładem takiego rozwiązania jest cienkowarstwowa antena magnetoelektryczna oparta na heterostrukturze AlN/FeGaB, o wymiarach rzędu $250 \times 175\ \mu\mathrm{m}^2$. W układzie tym warstwa AlN pełni funkcję piezoelektryka, przekształcając pole elektryczne w naprężenia mechaniczne, natomiast warstwa FeGaB wykazuje silne właściwości magnetostrykcyjne, umożliwiając konwersję energii pola magnetycznego w deformację mechaniczną. Sprzężenie tych efektów na granicy

faz prowadzi do efektywnej konwersji energii magnetycznej w sygnał elektryczny. Schemat takiego rozwiązania jest przedstawiony na rys. 3.3b.

Urządzenie to funkcjonuje jako nanoelektromechaniczny system rezonansowy (NEMS), zdolny zarówno do odbioru i emisji fal elektromagnetycznych, jak i do detekcji pola magnetycznego. Kluczową cechą układu jest obecność dwóch częstotliwości rezonansowych: gigahercowej (ok. 2,51 GHz), związanej z grubością warstwy AlN, oraz megahercowej (ok. 63,6 MHz), determinowanej jej szerokością. Rezonans w zakresie GHz umożliwia bezprzewodowe zasilanie układu oraz transmisję sygnału pomiarowego, natomiast rezonans w zakresie MHz odpowiada za detekcję bardzo słabych pól magnetycznych rzędu pikoTesli. W szczególności wykazano możliwość wykrywania pola magnetycznego generowanego przez neuron o częstotliwości około 1 kHz i amplitudzie około 120 pT w odległości około 1 mm od nerwu [122].

Tak zaprojektowany układ umożliwia bezkontaktowy pomiar aktywności neuronalnej bez konieczności stosowania zewnętrznego źródła energii, co czyni go wyjątkowo obiecującym rozwiązaniem dla bioelektroniki i medycyny implantacyjnej. Przykład ten wyraźnie podkreśla znaczenie badań nad multiferroikami wykazującymi silne sprzężenie magnetoelektryczne w temperaturze pokojowej oraz stabilność funkcjonalną w warunkach zbliżonych do fizjologicznych.

Oprócz konwersji energii pola magnetycznego, multiferroiki oferują również możliwość zbierania energii promieniowania elektromagnetycznego w ramach efektu fotowoltaicznego. W multiferroikach fotowoltaicznych mechanizm generowania prądu jest zbliżony do obserwowanego w ferroelektrykach: absorpcja fotonu prowadzi do wzbudzenia pary elektron–dziura, która jest rozdzielana przez wewnętrzne pole elektryczne związane ze spontaniczną polaryzacją [2]. Istotną cechą multiferroików jest jednak obecność dodatkowych mechanizmów rozdziału nośników, takich jak asymetria strukturalna oraz domenowe pola wewnętrzne, które mogą generować napięcia fotowoltaiczne przekraczające przerwę energetyczną materiału [119].

Szczególnie intensywnie badanym materiałem w tym kontekście jest $BiFeO_3$, który łączy ferroelektryczność i antyferromagnetyzm z relatywnie wąską przerwą energetyczną rzędu 2,2–2,7 eV. W cienkich warstwach $BiFeO_3$ wykazano istnienie silnego efektu fotowoltaicznego związanego z domenami ferroelektrycznymi, gdzie kierunek i wartość prądu mogą być kontrolowane poprzez polaryzację elektryczną [91, 121]. Dzięki temu multiferroiki oferują potencjał dla fotowoltaiki sterowanej elektrycznie oraz integracji funkcji zbierania energii i pamięci w jednym materiale.

Połączenie efektów magnetoelektrycznych i fotowoltaicznych w jednej strukturze lub heterostrukturze otwiera drogę do hybrydowych zbieraczy energii, zdolnych do jednoczesnego pozyskiwania energii z pól magnetycznych, elektrycznych oraz

promieniowania elektromagnetycznego. Takie podejście jest szczególnie atrakcyjne dla autonomicznych mikrosystemów, czujników Internetu Rzeczy oraz implantów medycznych, gdzie kluczowe znaczenie mają miniaturyzacja, niezawodność oraz długoterminowa stabilność pracy [3, 76].

3.5. Transfer ciepła

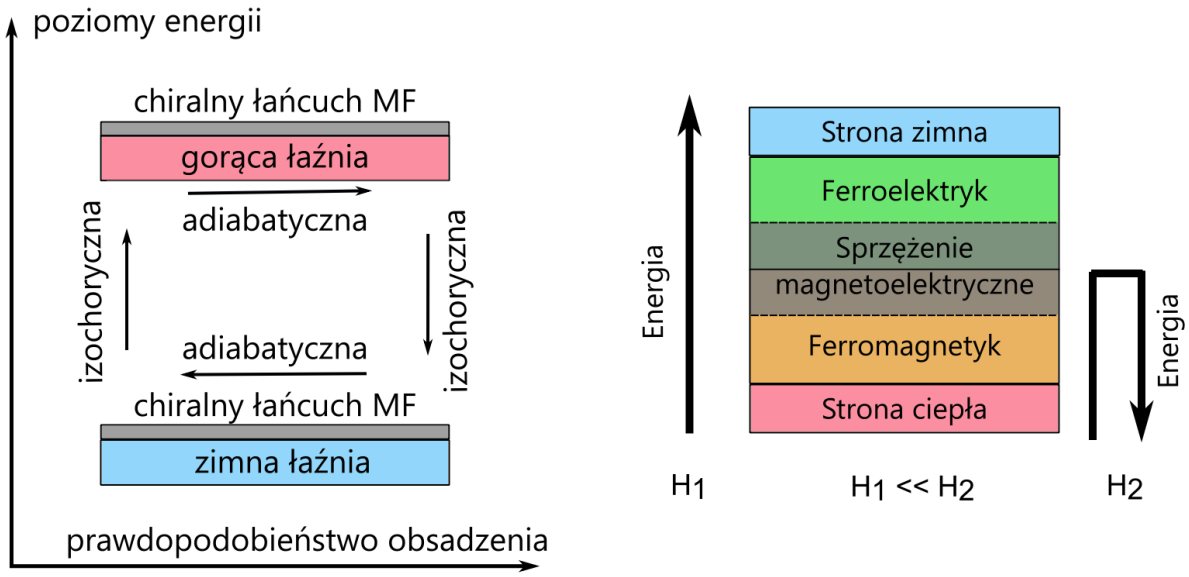
Multiferroiki o chiralnym uporządkowaniu spinów stanowią interesującą platformę do badań nad transportem energii i ciepła w układach kwantowych, gdzie kluczową rolę odgrywają sprzężenie magnetoelektryczne oraz korelacje spinowe. W ostatnich latach zagadnienia te są intensywnie badane w kontekście kwantowej termodynamiki oraz spinokalorytroniki, w których energia i ciepło są przenoszone za pośrednictwem stopni swobody spinowych i fononowych, a nie wyłącznie poprzez klasyczne gradienty temperatury.

W szczególności teoretyczne prace nad jednowymiarowymi chiralnymi łańcuchami multiferroicznymi wskazują, że możliwe jest wykorzystanie sprzężenia magnetoelektrycznego do realizacji kwantowych cykli termodynamicznych, takich jak kwantowy silnik Otto. W odróżnieniu od klasycznych silników cieplnych, działanie silnika kwantowego opiera się na kontrolowanej ewolucji stanów kwantowych, w której istotną rolę odgrywają koherencja oraz splątanie spinowe [10].

W chiralnych multiferroikach zewnętrzne pole elektryczne sprzężone z porządkiem spinowym moduluje oddziaływania wymiany oraz oddziaływanie Działoszyńskiego–Morii, prowadząc do zmian w strukturze energetycznej układu. Mechanizm ten umożliwia realizację poszczególnych etapów cyklu Otto poprzez adiabatyczne i izochoryczne przemiany stanów kwantowych, w których energia wymieniana jest pomiędzy układem spinowym a efektywnymi zbiornikami cieplnymi (zob. rys. 3.4a). W takim ujęciu transfer ciepła jest bezpośrednio związany z reorganizacją poziomów energetycznych oraz populacji stanów własnych sterowanych polem elektrycznym [19, 56, 75].

Szczególną rolę w tych procesach odgrywa splątanie spinowe. Analizy modelowe pokazują, że wzrost stopnia splątania w układzie prowadzi do zwiększenia wydajności konwersji energii, ponieważ korelacje kwantowe ograniczają produkcję entropii w trakcie cyklu termodynamicznego [105]. W idealizowanych modelach małych układów, takich jak łańcuchy złożone z trzech spinów, wykazano możliwość osiągania bardzo wysokiej sprawności cyklu, zbliżonej do jedności. Należy jednak podkreślić, że nie oznacza to naruszenia drugiej zasady termodynamiki — wysoka sprawność wynika z kwantowego charakteru zbiorników oraz niewielkiej liczby stopni swobody, a nie z przekroczenia granicy Carnota zdefiniowanej dla silników klasycznych [7].

a) b)



Rys. 3.4. **a)** Schemat kwantowego cyklu Otto opartego na chiralnych łańcuchach multiferroicznych, ilustrujący cykl termodynamiczny z kierunkiem procesów adiabatycznych i izochorycznych (na podst. [118]). **b)** Schemat diody termicznej zbudowanej z ferromagnetyka i ferroelektryka. Transfer ciepła zależy od wartości pola magnetycznego H, wzrost pola powoduje ograniczenie przepływu ciepła ze względu na zmianę orientacji domen magnetycznych. (opracowanie własne).

Chiralność multiferroicznego łańcucha wprowadza dodatkową asymetrię w dynamice transportu energii, wzmacniając efekty interferencji kwantowej i umożliwiając kierunkowy transfer ciepła. Zjawisko to można interpretować jako realizację funkcjonalnych odpowiedników diod cieplnych i zaworów termicznych w skali nanometrowej, których działanie jest sterowane polem elektrycznym zamiast gradientem temperatury [17]. Takie podejście wpisuje się w rozwijający się obszar fononiki i termiki kwantowej, gdzie kontrola przepływu ciepła jest jednym z kluczowych wyzwań technologicznych.

Potencjalne zastosowania multiferroicznych układów do sterowanego transferu ciepła obejmują miniaturowe źródła pracy użytecznej, elementy zarządzania energią w nanoukładach oraz hybrydowe systemy przetwarzania energii, w których sygnały elektryczne kontrolują przepływ energii cieplnej. Jednocześnie dalszy rozwój tych koncepcji wymaga pogłębionych badań nad wpływem dekoherencji, stabilnością splątania w warunkach rzeczywistych oraz możliwością skalowania efektów kwantowych do układów o większej liczbie stopni swobody.

3.6. Transport energii

W multiferroikach wielofazowych propagacja energii i sygnałów pomiędzy układem ferroelektrycznym a ferromagnetycznym jest w decydującym stopniu determinowana przez właściwości interfejsu, którego dynamika odgrywa kluczową rolę w realizacji sprzężenia magnetoelektrycznego. Badania teoretyczne, wsparte analizami numerycznymi dla $BaTiO_3$ w kompozycie z materiałem ferromagnetycznym, wskazują na istnienie progu amplitudy sygnału, powyżej którego interfejs staje się przezroczysty dla modów ferroelektrycznych. Przezroczystość ta umożliwia przenikanie wzbudzeń ferroelektrycznych przez warstwę ferromagnetyczną, a jej wystąpienie jest bezpośrednio związane z wartością sprzężenia magnetoelektrycznego – im silniejsze sprzężenie, tym efektywniejszy transfer energii. Kontrolowana manipulacja przenikalnością interfejsu pozwala na precyzyjne sterowanie transmisją sygnałów, co otwiera możliwości zastosowań w urządzeniach optoelektronicznych oraz pamięciach nowej generacji [20, 125].

Interesującym aspektem dynamiki interfejsu jest rola fluktuacji i szumu. Wykazano, że dodanie szumu do sygnału o amplitudzie poniżej progu transmisji może wywołać przepływ energii, pod warunkiem odpowiedniego doboru jego intensywności. Zjawisko to wykazuje analogię do rezonansu stochastycznego, w którym obecność szumu wzmacnia odpowiedź układu na słabe bodźce, zwiększając jego efektywną czułość. Efekt ten, potwierdzony numerycznie, podkreśla nieliniowy charakter interfejsu magnetoelektrycznego oraz jego potencjalną rolę w amplifikacji sygnałów w warunkach rzeczywistych [20, 38].

Sprzężenie magnetoelektryczne w kompozytach tetragonalnego żelaza i $BaTiO_3$ umożliwia również realizację diody termicznej, będącej termicznym odpowiednikiem diody elektrycznej, zdolnej do kierunkowego transportu ciepła, co zostało schematycznie pokazane na rys. 3.4b. Proces ten ma charakter fononowy i zachodzi poprzez szerokie spektrum drgań w zakresie teraherców, obejmujące zarówno mody akustyczne, jak i optyczne. Dioda termiczna charakteryzuje się silną asymetrią przepływu: strumień ciepła jest znacząco większy w jednym kierunku niż w przeciwnym, przy czym efekt ten zależy od gradientu temperatury, struktury interfejsu oraz właściwości multiferroicznych materiału. Dzięki współistnieniu ferroelektryczności i ferromagnetyzmu możliwe jest aktywne sterowanie transportem ciepła za pomocą polaryzacji elektrycznej i namagnesowania [22, 65].

Analizy numeryczne wykazały, że przyłożenie zewnętrznego pola elektrycznego prowadzi do wzrostu przewodnictwa cieplnego oraz wzmocnienia efektu prostowania, natomiast pole magnetyczne może osłabiać strumień cieplny poprzez modyfikację orientacji domen magnetycznych. Mechanizmy te mają swoje źródło w oddziaływaniach

na poziomie atomowym pomiędzy warstwami ferroelektrycznymi i ferromagnetycznymi, które modulują propagację fononów na granicy faz [22].

Rozwinięte badania nad transportem energii w multiferroikach wskazują na ich istotny potencjał aplikacyjny w technologiach zarządzania energią. Możliwość sterowania przepływem sygnałów i ciepła za pomocą pól elektrycznych i magnetycznych otwiera drogę do projektowania zaawansowanych przełączników cieplnych, pamięci termicznych oraz elementów chłodzenia w nanoelektronice. Przezroczystość interfejsu oraz zjawiska analogiczne do rezonansu stochastycznego sugerują ponadto możliwość budowy wysoko czułych czujników, w których szum pełni konstruktywną rolę w procesie detekcji.

3.7. Podsumowanie

Przedstawione zastosowania multiferroików opierają się w dużej mierze na zjawiskach nieliniowych, takich jak sprzężenie magnetoelektryczne, rezonans mechaniczny, przełączanie domenowe czy dynamiczna odpowiedź interfejsów w strukturach wielofazowych. W wielu przypadkach funkcjonowanie urządzeń zachodzi w warunkach dalekich od równowagi termodynamicznej, gdzie niewielkie zmiany parametrów zewnętrznych mogą prowadzić do istotnych zmian odpowiedzi układu.

Szczególnie w układach nanoelektromechanicznych, rezonatorach magnetoelektrycznych oraz systemach opartych na dynamicznym transporcie energii i ciepła pojawiają się reżimy pracy charakteryzujące się silną nieliniowością, wielostabilnością oraz wrażliwością na warunki początkowe. Zjawiska te, choć często postrzegane jako ograniczenie stabilności urządzeń, mogą również stanowić dodatkowy zasób funkcjonalny, umożliwiający wzmacnianie sygnałów, selektywne przełączanie stanów czy adaptacyjną odpowiedź systemu.

Z tego względu pełne zrozumienie i kontrola właściwości multiferroików wymaga uwzględnienia narzędzi teorii układów dynamicznych oraz analizy chaosu deterministycznego. Następny rozdział poświęcony jest omówieniu mechanizmów prowadzących do zachowań chaotycznych w układach multiferroicznych oraz ich wpływu na dynamikę i funkcjonalność badanych systemów.

Rozdział 4.

Chaos i nieliniowość w układach hybrydowych

Nieliniowe układy dynamiczne odgrywają istotną rolę w opisie wielu zjawisk fizycznych, w tym procesów zachodzących w układach hybrydowych, gdzie sprzężenie różnych stopni swobody, takich jak uporządkowanie magnetyczne, elektryczne oraz sieci krystalicznej, prowadzi do złożonej dynamiki czasowej. W takich układach nawet deterministyczne modele matematyczne mogą wykazywać silną wrażliwość na warunki początkowe oraz parametry materiałowe, co jest charakterystyczne dla zachowań chaotycznych.

Z punktu widzenia obliczeń numerycznych chaos deterministyczny stanowi istotne wyzwanie interpretacyjne. Obecność nieliniowości oraz sprzężeń między różnymi polami skutkuje wzmacnianiem drobnych zaburzeń, w tym błędów numerycznych i niepewności danych wejściowych, co może prowadzić do istotnych rozbieżności pomiędzy pozornie równoważnymi symulacjami. Zjawisko to nabiera szczególnego znaczenia w modelowaniu dynamiki systemów, w których analizowane układy często charakteryzują się wielowymiarową przestrzenią fazową i bogatą strukturą stanów metastabilnych.

Celem niniejszego rozdziału jest przedstawienie podstawowych pojęć teorii układów dynamicznych niezbędnych do analizy takich zjawisk. Rozważania rozpoczynają się od prostych modeli jednowymiarowych i zjawiska bifurkacji, ilustrującego jakościowe zmiany dynamiki w funkcji parametrów sterujących. Następnie wprowadzona zostaje koncepcja przestrzeni fazowej oraz pojęcie atraktora, stanowiące naturalny język opisu długoczasowego zachowania układów dynamicznych. W dalszej części omówione zostają przykłady chaosu deterministycznego, w tym atraktor Lorenza, oraz ilościowe miary chaosu, takie jak wykładnik Lapunowa. Rozdział uzupełnia omówienie fraktalnych właściwości obiektów pojawiających się w układach chaotycznych oraz podstaw analizy stabilności punktów stałych, które stanowią punkt odniesienia dla bardziej złożonych modeli stosowanych w obliczeniach numerycznych.

4.1. Bifurkacje w prostych układach dynamicznych

Jednym z fundamentalnych pojęć teorii nieliniowych układów dynamicznych jest bifurkacja, rozumiana jako jakościowa zmiana zachowania układu wywołana ciągłą zmianą jednego z parametrów sterujących. W kontekście fizycznym bifurkacje opisują sytuacje, w których niewielka modyfikacja warunków zewnętrznych lub parametrów materiałowych

prowadzi do pojawienia się nowych stanów równowagi, zmiany ich stabilności lub przejścia do zupełnie odmiennego reżimu dynamiki [100].

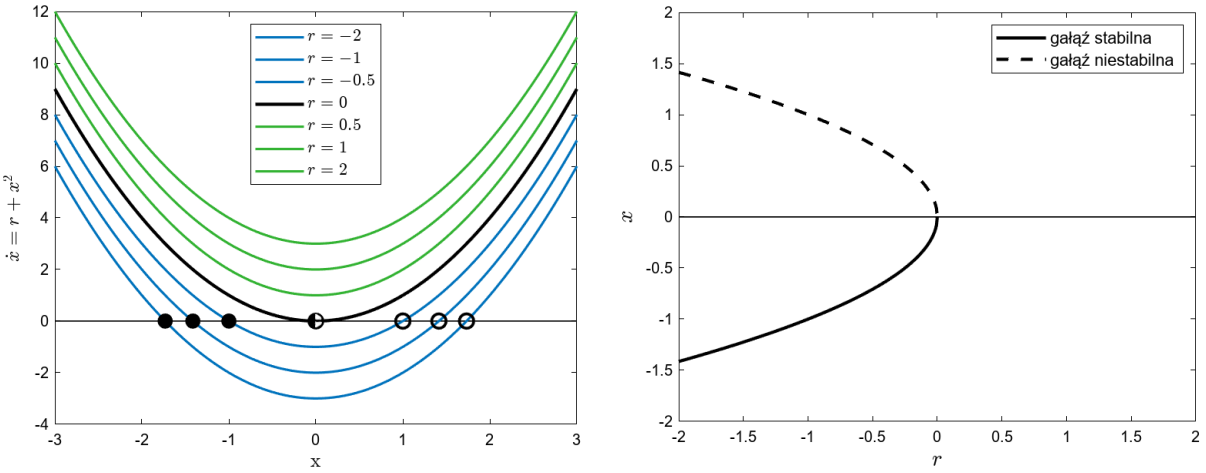
Aby zilustrować to zjawisko, rozważmy najprostszy jednowymiarowy układ dynamiczny opisany równaniem różniczkowym pierwszego rzędu

$$\dot{x} = r + x^2, \tag{4.1}$$

gdzie $x(t)$ jest zmienną dynamiczną, natomiast r pełni rolę parametru sterującego. Punkty stałe układu, odpowiadające stanom równowagi, wyznaczane są przez warunek $\dot{x} = 0$. W zależności od wartości parametru r równanie to może posiadać dwa rozwiązania rzeczywiste, jedno rozwiązanie zdegenerowane lub nie posiadać rozwiązań rzeczywistych.

Dla $r < 0$ układ posiada dwa punkty stałe, z których jeden jest stabilny, a drugi niestabilny. W miarę zwiększania parametru r punkty te zbliżają się do siebie, aż dla $r = 0$ ulegają połączeniu i zanikają. Dla $r > 0$ punkty stałe nie istnieją, a dynamika układu ulega zasadniczej zmianie. Wykres równania (4.1) wraz z zaznaczonymi punktami stałymi przedstawiono na rys. 4.1a, a jego diagram bifurkacyjny na rys. 4.1b. Tego rodzaju bifurkacja nazywana jest bifurkacją siodłowo-węzłową i stanowi jeden z najprostszych mechanizmów jakościowej zmiany dynamiki w układach nieliniowych. Z fizycznego punktu widzenia

a) b)



Rys. 4.1. **a)** Jednowymiarowe pole wektorowe dla układu $\dot{x} = r + x^2$ dla różnych wartości parametru r. Dla $r > 0$ (kolor zielony) brak punktów stałych, dla $r < 0$ (kolor niebieski) dwa punkty stałe, stabilny (pełne koło) oraz niestabilny (puste koło). Dla $r = 0$ przypadek szczególny punkt półstabilny. **b)** Diagram bifurkacyjny układu $\dot{x} = r + x^2$, ilustrujący bifurkację siodłowo-węzłową. (opracowanie własne).

bifurkacja tego typu może być interpretowana jako zanik stabilnego stanu równowagi w wyniku zmiany parametru kontrolnego, co prowadzi do nieograniczonego wzrostu lub gwałtownej zmiany obserwowanej wielkości. Analogiczne mechanizmy pojawiają się w wielu

modelach fizycznych, w których parametry takie jak pole zewnętrzne, temperatura czy stałe sprzężenia determinują istnienie stabilnych konfiguracji układu.

Intuicję stojącą za tym zjawiskiem można dodatkowo zilustrować, odwołując się do prostego równania algebraicznego postaci

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{4.2}$$

dla którego liczba rozwiązań rzeczywistych zależy od wartości współczynników. W szczególnym przypadku $a = 0$ równanie traci charakter kwadratowy, co prowadzi do jakościowej zmiany liczby rozwiązań. Choć analogia ta nie opisuje dynamiki czasowej, dobrze obrazuje ideę zanikania lub pojawiania się rozwiązań w wyniku zmiany parametrów.

Bifurkacje odgrywają istotną rolę w analizie bardziej złożonych układów fizycznych, w których przestrzeń fazowa ma większy wymiar, a liczba możliwych stanów równowagi rośnie. W szczególności stanowią one jeden z mechanizmów prowadzących do powstawania złożonych reżimów dynamiki, w tym zachowań chaotycznych. W kontekście obliczeń numerycznych bifurkacje wyznaczają granice stabilności rozwiązań i wskazują obszary przestrzeni parametrów, w których dynamika układu staje się szczególnie wrażliwa na zaburzenia i błędy numeryczne.

4.2. Wahadło matematyczne

Analiza jednowymiarowych układów dynamicznych pozwala na intuicyjne wprowadzenie pojęcia bifurkacji, jednak do opisu bardziej realistycznych układów fizycznych konieczne jest rozważenie dynamiki w przestrzeni o większym wymiarze. Naturalnym narzędziem takiego opisu jest przestrzeń fazowa, w której stan układu w danej chwili czasu reprezentowany jest przez punkt o współrzędnych odpowiadających zmiennym dynamicznym i ich pochodnym czasowym.

Jako przykład rozważmy wahadło matematyczne o masie m i długości l, którego ruch w obecności grawitacji opisany jest równaniem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0, \tag{4.3}$$

gdzie $\theta(t)$ oznacza kąt wychylenia wahadła od położenia równowagi, a g przyspieszenie ziemskie [100]. Wprowadźmy częstość charakterystyczną układu $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ oraz $\tau = \omega t$ co pozwala zapisać równanie (4.3) w postaci bezwymiarowej

$$\ddot{\theta} + \sin\theta = 0. \tag{4.4}$$

Takie sformułowanie równań jest szczególnie użyteczne w analizie numerycznej, gdyż eliminuje jawne występowanie parametrów fizycznych i umożliwia bezpośrednie porównywanie dynamiki układów o różnych skalach.

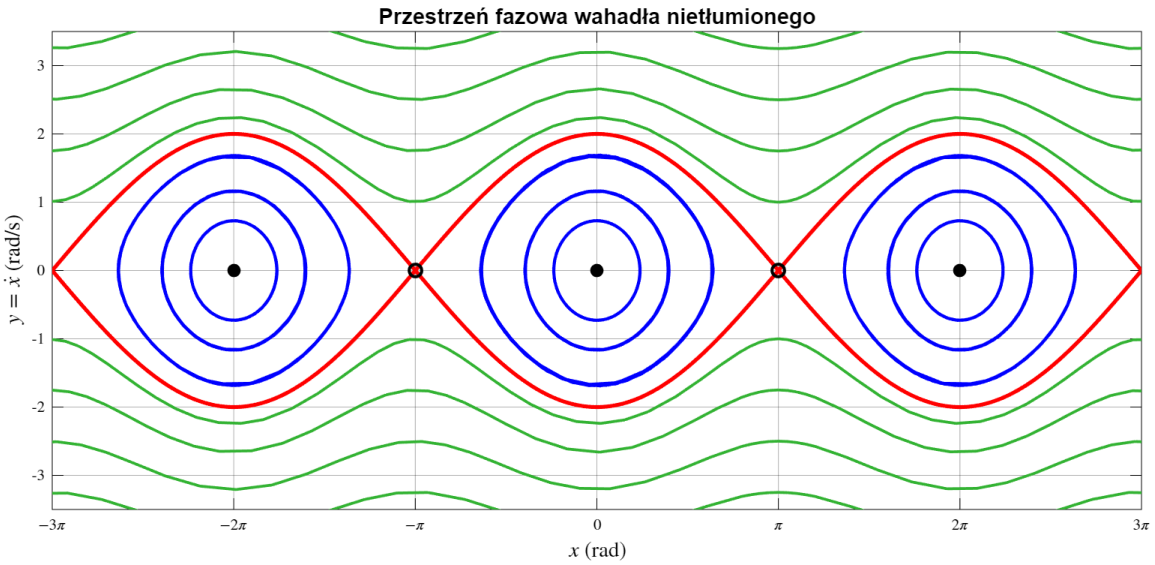
Aby przejść do opisu w przestrzeni fazowej, wprowadzamy zmienne

$$\theta = x, \dot{\theta} = y, \tag{4.5}$$

co pozwala zapisać równania ruchu w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\sin x. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Stan układu w każdej chwili czasu odpowiada punktowi (x, y) w dwuwymiarowej przestrzeni fazowej, natomiast jego ewolucja czasowa opisywana jest przez trajektorię w tej przestrzeni. Wyróżniamy dwa typy trajektorii w zależności od wykonywanego przez wahadło ruchu. Ruchy oscylacyjne tworzą trajektorie zamknięte, natomiast ruchy obrotowe trajektorie otwarte (zob. rys. 4.2).



Rys. 4.2. Przestrzeń fazowa wahadła nietłumionego. Zaznaczono trajektorie charakteryzujące ruch oscylacyjny (kolor niebieski), trajektorie charakteryzujące ruch obrotowy (kolor zielony), linię separacji (kolor czerwony), punkty stabilne (pełne koło) oraz punkty niestabilne (puste koło).(opracowanie własne).

Punkty stałe układu definiowane są jako punkty przestrzeni fazowej, w których wszystkie pochodne czasowe zanikają: $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$. Dla wahadła matematycznego punkty

te odpowiadają położeniom równowagi wahadła, tj.

$$(x, y) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}. \tag{4.7}$$

Położenie $\theta = 0$ (oraz wielokrotności 2π) odpowiada stabilnemu położeniu równowagi, natomiast $\theta =$ (oraz wielokrotności 2π) odpowiada położeniu niestabilnemu.

Lokalną stabilność punktów stałych można zbadać, dokonując linearyzacji równań ruchu. Macierz Jacobiego układu w punkcie $(0, 0)$ ma postać:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

wartości własne są czysto urojone, co odpowiada ruchowi okresowemu i zamkniętym trajektoriom w przestrzeni fazowej. W rezultacie trajektorie fazowe tworzą rodziny zamkniętych orbit, których kształt zależy od energii układu. Rozważmy również punkt $(\pi, 0)$ wówczas macierz Jacobiego przyjmuje postać

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Otrzymujemy równanie charakterystyczne macierzy J w postaci: $\lambda^2 - 1 = 0$ i jego rozwiązania $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ oznacza to że punkt $(\pi, 0)$ jest punktem siodłowym. Przez ten punkt przechodzi linia separująca trajektorie oscylacyjne od ruchów obrotowych wahadła, stanowi ona granicę pomiędzy obszarami przestrzeni fazowej o jakościowo różnej dynamice.

Uwzględniając tłumienie liniowe równanie (4.4) przyjmuje postać:

$$\ddot{\theta} + \alpha\dot{\theta} + \sin\theta = 0, \tag{4.10}$$

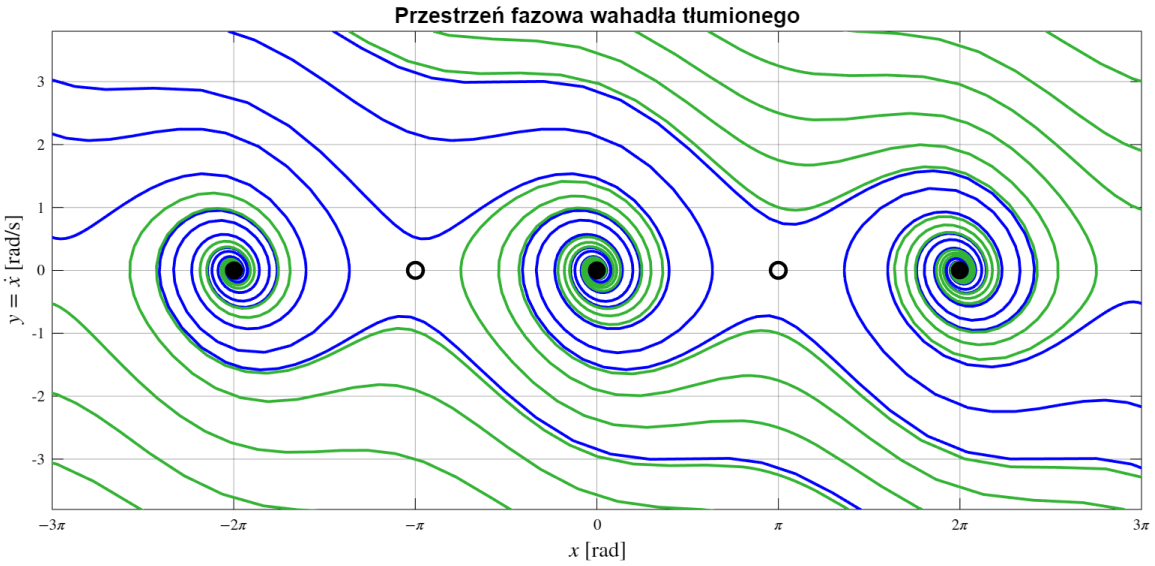
gdzie $\alpha = \gamma/\omega$ jest bezwymiarowym współczynnikiem tłumienia. W przestrzeni fazowej układ opisany jest równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\alpha y - \sin x. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Powoduje to zmianę macierzy Jacobiego

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Dla stabilnego położenia równowagi wartości własne mają ujemne części rzeczywiste, co prowadzi do spiralnego zaniku trajektorii w przestrzeni fazowej. W efekcie wszystkie trajektorie, niezależnie od warunków początkowych, dążą do stabilnego punktu stałego, który pełni rolę atraktora (zob. rys. 4.3).



Rys. 4.3. Przestrzeń fazowo wahadła tłumionego. Wyróżniono trajektorie ruchu oscylacyjnego (kolor niebieski) i obrotowego (kolor zielony) dla wahadła nietłumionego. W przypadku wahadła tłumionego obie te trajektorie zmierzają do punktów stabilnych. (opracowanie własne).

Analiza wahadła matematycznego w przestrzeni fazowej pokazuje, w jaki sposób wprowadzenie bezwymiarowych zmiennych oraz lokalna analiza stabilności punktów stałych pozwalają na zrozumienie globalnej struktury trajektorii. Podejście to będzie dalej wykorzystywane w analizie bardziej złożonych układów dynamicznych, w których obecność nieliniowości i sprzężeń między wieloma stopniami swobody prowadzi do powstawania atraktorów o znacznie bardziej złożonej, często chaotycznej strukturze.

4.3. Atraktor Lorenza

Jednym z najbardziej znanych i jednocześnie najprostszych przykładów układu wykazującego chaos deterministyczny jest model zaproponowany przez Edwarda Lorenza w 1963 roku w kontekście uproszczonego opisu konwekcji atmosferycznej [69]. Pomimo niewielkiej liczby zmiennych dynamicznych, układ ten wykazuje bogatą i nieperiodyczną dynamikę, która stała się klasycznym przykładem zachowania chaotycznego w układach deterministycznych [100].

Model Lorenza opisany jest przez układ trzech równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\rho - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}, \tag{4.13}$$

gdzie zmienne $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ opisują odpowiednio natężenie konwekcji, różnicę temperatur oraz odchylenie pionowego profilu temperatury od równowagi, natomiast parametry σ, ρ i β są dodatnimi stałymi charakteryzującymi właściwości układu. Układ ten ma charakter bezwymiarowy, co czyni go szczególnie dogodnym do analizy numerycznej. Punkty stałe układu Lorenza wyznaczane są przez warunek zaniku wszystkich pochodnych czasowych. Oprócz punktu oczywistego $(0, 0, 0)$, który odpowiada stanowi braku konwekcji, dla odpowiednich wartości parametru ρ pojawiają się dwa dodatkowe punkty stałe:

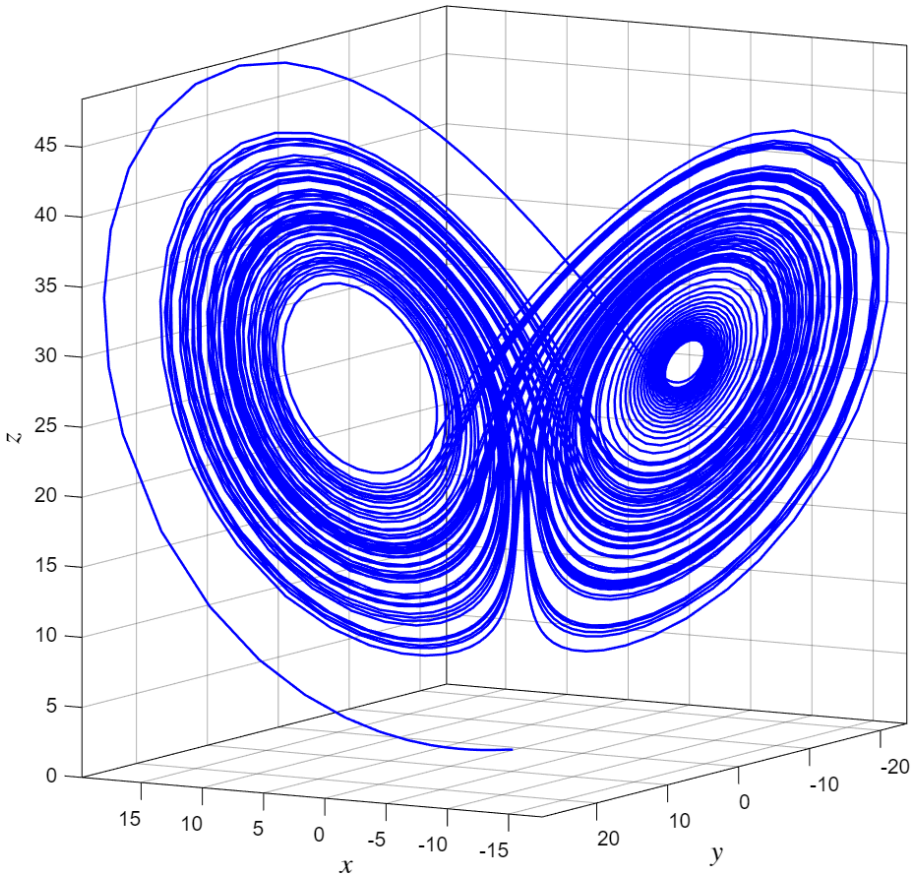
$$\left(\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1\right). \tag{4.14}$$

Dla małych wartości ρ punkt $(0, 0, 0)$ jest stabilny, jednak wraz ze wzrostem tego parametru traci stabilność, a dynamika układu ulega jakościowej zmianie. W dalszym zwiększaniu ρ również pozostałe punkty stałe tracą stabilność, co prowadzi do pojawienia się nieperiodycznego ruchu w przestrzeni fazowej.

Analiza lokalnej stabilności punktów stałych, oparta na macierzy Jacobiego i wartościach własnych, wskazuje na istnienie zakresu parametrów, w którym żaden punkt stały nie jest stabilny. W tym reżimie trajektorie układu nie dążą do pojedynczego punktu ani do orbity okresowej, lecz pozostają ograniczone do skończonego obszaru przestrzeni fazowej.

Długoczasowe zachowanie układu Lorenza w odpowiednim zakresie parametrów prowadzi do powstania obiektu znanego jako atraktor Lorenza (zob. rys. 4.4). Jest to atraktor o złożonej, nieperiodycznej strukturze, na którym trajektorie poruszają się w sposób pozornie nieregularny, nie powtarzając się dokładnie w czasie. Pomimo tego ruch ten pozostaje całkowicie deterministyczny i jednoznacznie określony przez równania ruchu.

Charakterystyczną cechą atraktora Lorenza jest jego geometryczna struktura przypominająca dwa skrzydła, pomiędzy którymi trajektoria nieregularnie się przełącza. Zachowanie to związane jest z obecnością niestabilnych rozmaitości punktów siodłowych oraz mechanizmem rozciągania i składania trajektorii w przestrzeni fazowej, który stanowi jedną z fundamentalnych cech chaosu deterministycznego.



Rys. 4.4. Atraktor Lorenza, powstały na bazie równania (4.13) dla parametrów: $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = 8/3$. (opracowanie własne).

Jedną z kluczowych właściwości atraktora Lorenza jest silna wrażliwość na warunki początkowe. Trajektorie rozpoczynające się w bardzo bliskich punktach przestrzeni fazowej rozbiegają się wykładniczo w czasie, co w praktyce uniemożliwia długoczasowe przewidywanie ewolucji układu. W kontekście modelowania fizycznego, w tym symulacji dynamiki układów o wielu sprzężonych stopniach swobody, atraktor Lorenza stanowi modelowy przykład pokazujący, że nieregularne zachowanie czasowe nie musi wynikać z losowości, lecz może być naturalną konsekwencją deterministycznej dynamiki nieliniowej. Z tego względu pojęcie atraktora chaotycznego oraz związane z nim właściwości mają kluczowe znaczenie w interpretacji wyników obliczeń numerycznych.

Atraktor Lorenza stanowi zatem naturalne rozwinięcie pojęć wprowadzonych wcześniej — przestrzeni fazowej, punktów stałych oraz atraktorów — i przygotowuje grunt pod ilościowy opis chaosu deterministycznego, który zostanie przedstawiony w kolejnej części rozdziału.

4.4. Bifurkacja Hopfa

W układach dynamicznych o co najmniej dwóch stopniach swobody zmiana parametrów sterujących może prowadzić nie tylko do zaniku lub pojawienia się punktów stałych, lecz także do powstania stabilnych oscylacji okresowych. Jednym z podstawowych mechanizmów takiego przejścia jest bifurkacja Hopfa, w której stabilny punkt stały traci stabilność, a w jego otoczeniu pojawia się zamknięta trajektoria w przestrzeni fazowej, zwana orbitą graniczną.

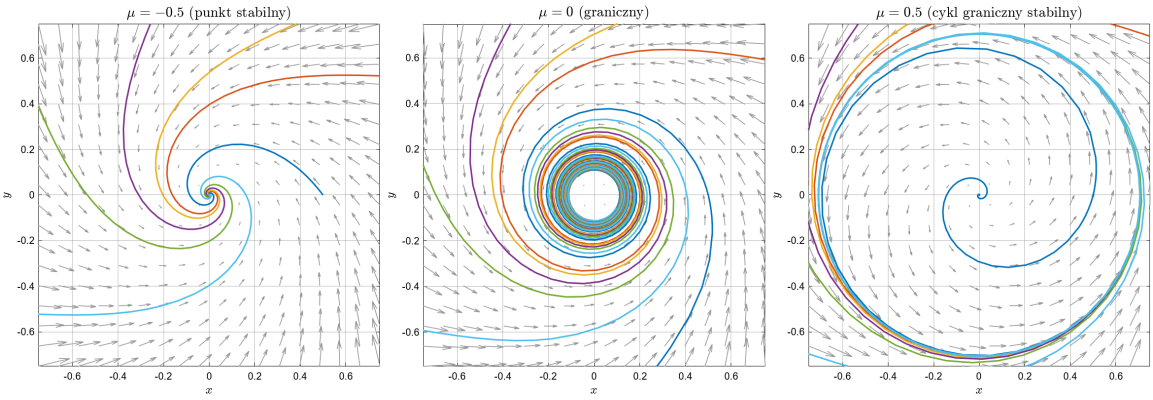
Zjawisko to ma istotne znaczenie fizyczne, gdyż opisuje powstawanie samoistnych oscylacji w układach nieliniowych, takich jak oscylatory elektryczne, układy mechaniczne z tłumieniem i wymuszeniem, a także modele dynamiki magnetoelektrycznej w materiałach wieloskładnikowych.

Aby zilustrować bifurkację Hopfa, rozważmy prosty dwuwymiarowy układ dynamiczny postaci

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - y - x\,(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + \mu y - y\,(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{4.15}$$

gdzie μ jest parametrem sterującym. Punkt stały układu znajduje się w początku układu współrzędnych $(0, 0)$. Dla $\mu < 0$ punkt ten jest stabilny, a wszystkie trajektorie w jego otoczeniu spiralnie do niego dążą (zob. rys. 4.5a). Odpowiada to sytuacji, w której wszelkie zaburzenia zanikają w czasie.

a) b) c)



Rys. 4.5. Portrety fazowe normalnej formy bifurkacji Hopfa dla trzech wartości parametru sterującego μ: **a)** $\mu < 0$ — stabilny punkt stały w $(0, 0)$, **b)** $\mu = 0$ — przypadek graniczny odpowiadający utracie stabilności, **c)** $\mu > 0$ — stabilny cykl graniczny powstający w wyniku bifurkacji Hopfa. Kolorowe krzywe przedstawiają trajektorie dla różnych warunków początkowych, natomiast jasnoszare strzałki ilustrują pole wektorowe układu, wskazujące kierunek ewolucji w przestrzeni fazowej. (opracowanie własne).

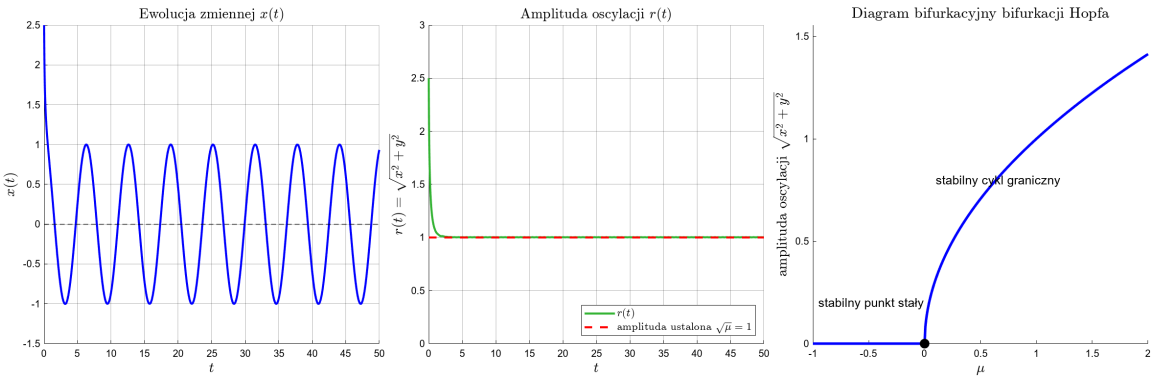
Lokalną dynamikę w pobliżu punktu stałego można zbadać, dokonując linearyzacji równań ruchu. Macierz Jacobiego w punkcie $(0, 0)$ ma postać

$$J = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Wartości własne tej macierzy dane są wyrażeniem $\lambda_{\pm} = \mu \pm i$. Dla $\mu < 0$ części rzeczywiste wartości własnych są ujemne, co odpowiada stabilnemu ognisku w przestrzeni fazowej. W punkcie $\mu = 0$ części rzeczywiste wartości własnych przechodzą przez zero, a dla $\mu > 0$ stają się dodatnie, co oznacza utratę stabilności punktu stałego. Zmianę charakteru trajektorii dla $\mu = 0$ pokazano na rys. 4.5b, a dla $\mu > 0$ na rys. 4.5c.

Dla $\mu > 0$ punkt stały w początku układu staje się niestabilny, jednak nieliniowe składniki równań ruchu ograniczają wzrost amplitudy. W rezultacie trajektorie nie uciekają do nieskończoności, lecz stabilizują się na zamkniętej krzywej w przestrzeni fazowej. Krzywa ta stanowi stabilną orbitę graniczną, odpowiadającą ruchowi okresowemu o ustalonej amplitudzie (zob. rys. 4.6). Z fizycznego punktu widzenia bifurkacja Hopfa opisuje zatem

a) b) c)



Rys. 4.6. **a)** Ewolucja zmiennej x w czasie dla $\mu > 0$, widać pojawienie się stałych oscylacji, **b)** amplituda oscylacji $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ w czasie, widać ustalenie stałej amplitudy, **c)** Zależność amplitudy oscylacji od wartości parametru μ, dla $\mu < 0$ brak oscylacji, dla $\mu > 0$ amplituda oscylacji wzrasta wraz ze wzrostem μ. (opracowanie własne).

przejście od stanu równowagi do samoistnych oscylacji, których amplituda zależy od wartości parametru sterującego. W odróżnieniu od ruchów okresowych wynikających z warunków początkowych, oscylacje te są stabilne i niezależne od szczegółów zaburzenia.

Bifurkacja Hopfa odgrywa szczególną rolę jako etap pośredni pomiędzy prostą dynamiką a zachowaniami chaotycznymi. W wielu układach fizycznych kolejne bifurkacje prowadzą od stabilnego punktu stałego, przez oscylacje okresowe i quasiokresowe, aż do pełnego chaosu deterministycznego.

W przeciwieństwie do bifurkacji Hopfa, w której długoczasowa dynamika ograniczona jest do jednowymiarowej orbity granicznej, w układzie Lorenza utrata stabilności

prowadzi do powstania atraktora o znacznie bardziej złożonej, nieperiodycznej strukturze. Porównanie tych dwóch mechanizmów pozwala lepiej zrozumieć różnorodność dróg prowadzących do chaosu w nieliniowych układach dynamicznych.

Z punktu widzenia obliczeń numerycznych bifurkacja Hopfa wyznacza granicę stabilności rozwiązań stacjonarnych i wskazuje zakres parametrów, w którym pojawiają się trwałe oscylacje. Analiza tego typu przejść jest istotna w modelowaniu układów sprzężonych, gdzie oscylacyjna dynamika może stanowić etap poprzedzający bardziej złożone, chaotyczne zachowanie.

4.5. Wykładnik Lapunowa

Dotychczasowa analiza dynamiki nieliniowych układów dynamicznych opierała się głównie na jakościowym opisie trajektorii w przestrzeni fazowej oraz na badaniu stabilności punktów stałych i orbit granicznych. W przypadku układów chaotycznych taka analiza okazuje się jednak niewystarczająca, gdyż trajektorie pozostają ograniczone do atraktora, a mimo to wykazują skrajną wrażliwość na warunki początkowe. Ilościowym narzędziem pozwalającym opisać to zjawisko jest wykładnik Lapunowa.

Wykładnik Lapunowa mierzy średnie tempo rozbiegania się dwóch trajektorii startujących z niemal identycznych warunków początkowych (zob. rys. 4.7a). W przeciwieństwie do stabilności liniowej punktów stałych, pojęcie to dotyczy długoczasowego zachowania trajektorii w całej przestrzeni fazowej [100].

Niech $\delta x(0)$ oznacza początkowo niewielką różnicę pomiędzy dwoma punktami w przestrzeni fazowej. Jeśli w czasie t odległość ta zachowuje się jak

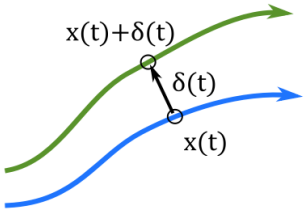
$$|\delta x(t)| \sim |\delta x(0)| e^{\lambda t}, \tag{4.17}$$

wówczas wielkość λ nazywana jest wykładnikiem Lapunowa. Zależność ta odpowiada liniowemu wzrostowi logarytmu odległości pomiędzy trajektoriami w początkowym etapie ewolucji, co zilustrowano na rys. 4.7b. W zależności od znaku wykładnika możemy wyróżnić:

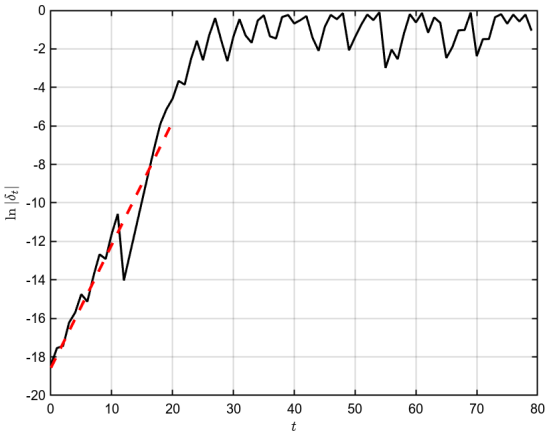
- $\lambda < 0$ oznacza zbieganie się trajektorii i stabilność ruchu,
- $\lambda = 0$ odpowiada ruchowi okresowemu lub quasiokresowemu,
- $\lambda > 0$ jest charakterystyczny dla chaosu deterministycznego.

Dodatni wykładnik Lapunowa oznacza, że nawet arbitralnie małe zaburzenie warunków początkowych prowadzi do wykładniczo narastających różnic w ewolucji układu, co praktycznie uniemożliwia długoterminowe prognozowanie jego stanu. W układach liniowych wykładniki Lapunowa pokrywają się z częściami rzeczywistymi wartości

a)



b)



Rys. 4.7. **a)** Schematyczny rysunek ilustrujący rozchodzenie się trajektorii w czasie t. **b)** Ilustracja idei wykładnika Lapunowa na przykładzie mapy logistycznej: liniowy wzrost $\ln|\delta t|$ odpowiada wykładniczej rozbieżności bliskich trajektorii, natomiast późniejsze oscylacje wynikają z ograniczenia dynamiki do atraktora chaotycznego. (opracowanie własne).

własnych macierzy Jacobiego. W przypadku punktów stałych i orbit granicznych można zatem odczytać stabilność bezpośrednio z analizy liniowej.

Intuicyjne znaczenie wykładnika Lapunowa można zilustrować na prostym przykładzie jednowymiarowego układu chaotycznego, jakim jest mapa logistyczna. Dwie trajektorie startujące z niemal identycznych warunków początkowych oddalają się w sposób wykładniczy, co prowadzi do liniowego wzrostu logarytmu ich odległości w funkcji czasu. W dalszej ewolucji obserwowane są oscylacje logarytmu odległości wokół wartości stałej, wynikające z ograniczenia dynamiki do atraktora chaotycznego (zob. rys. 4.7b). Takie zachowanie stanowi bezpośrednią ilustrację definicji wykładnika Lapunowa.

W układach nieliniowych o złożonej strukturze atraktora, takich jak klasyczne układy chaotyczne o fraktalnej strukturze atraktora, lokalna stabilność zmienia się wzdłuż trajektorii, a globalna dynamika nie może być opisana pojedynczym Jacobianem. W takich przypadkach wykładnik Lapunowa stanowi uśrednioną w czasie miarę niestabilności, uwzględniającą całą historię ewolucji układu.

Dla układów wielowymiarowych definiuje się zbiór wykładników Lapunowa, zwany spektrum wykładników Lapunowa. Dla ciągłego układu dynamicznego o n zmiennych stanowych spektrum to składa się z n liczb: $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$.

Poszczególne wykładniki Lapunowa niosą ze sobą wyraźną interpretację fizyczną, umożliwiającą wnioskowanie o charakterze ruchu:

- obecność co najmniej jednego dodatniego wykładnika Lapunowa wskazuje na wykładniczą wrażliwość na warunki początkowe i stanowi warunek konieczny chaosu,

- wykładnik równy zeru odzwierciedla niezmienniczość dynamiki względem przesunięcia w czasie,
- suma wykładników Lapunowa informuje o lokalnym kurczeniu lub rozszerzaniu objętości elementów w przestrzeni fazowej.

Dla klasycznych układów chaotycznych o trzech stopniach swobody, takich jak atraktor Lorenza, typowe wartości wykładników Lapunowa wskazują na istnienie jednej niestabilnej i dwóch stabilizujących składowych dynamiki, co prowadzi do charakterystycznej, fraktalnej struktury atraktora.

W praktycznych obliczeniach numerycznych wykładniki Lapunowa wyznaczane są poprzez śledzenie ewolucji małych zaburzeń wzdłuż trajektorii referencyjnej. Z punktu widzenia symulacji fizycznych dodatni wykładnik Lapunowa wyznacza horyzont czasowy, po którym wyniki obliczeń stają się nieprzewidywalne mimo deterministycznego charakteru równań ruchu. Ma to szczególne znaczenie w modelowaniu układów silnie sprzężonych, gdzie niewielkie błędy numeryczne mogą prowadzić do jakościowo odmiennych trajektorii.

Wykładnik Lapunowa stanowi jedno z podstawowych kryteriów identyfikacji chaosu w układach deterministycznych. W połączeniu z analizą przestrzeni fazowej oraz bifurkacji umożliwia on pełniejszy opis dynamiki układu oraz wyznaczenie zakresów parametrów, w których zachowanie chaotyczne staje się dominujące.

W kontekście obliczeń numerycznych wykładnik Lapunowa pozwala nie tylko na klasyfikację rodzaju ruchu, lecz także na ocenę stabilności rozwiązań i wiarygodności długoczasowych symulacji, co ma istotne znaczenie w badaniach układów o złożonej dynamice nieliniowej.

4.6. Fraktale

Analiza wykładników Lapunowa pokazuje, że w układach chaotycznych w przestrzeni fazowej jednocześnie występują kierunki rozszerzania i kurczenia trajektorii. Taka dynamika prowadzi do powstania zbiorów niezmienniczych o bardzo złożonej strukturze geometrycznej, które nie są ani krzywymi, ani powierzchniami w klasycznym sensie. Zbiory te nazywane są fraktalami, a ich podstawową cechą jest niecałkowity wymiar geometryczny.

W kontekście układów dynamicznych fraktalność nie jest właściwością narzuconą z zewnątrz, lecz bezpośrednią konsekwencją deterministycznej dynamiki nieliniowej. Atraktory chaotyczne, takie jak atraktor Lorenza, stanowią klasyczne przykłady fraktali powstających w przestrzeni fazowej.

Klasyczne fraktale geometryczne charakteryzują się właściwością samopodobieństwa, polegającą na tym, że cała struktura może być rozłożona na skończoną liczbę kopii

samej siebie, przeskalowanych o stały współczynnik. W przeciwieństwie do atraktorów chaotycznych, samopodobieństwo to jest w tych przypadkach dokładne i obowiązuje na wszystkich skalach [100].

Własność ta pozwala na wprowadzenie najprostszego pojęcia wymiaru fraktalnego, zwanego wymiarem podobieństwa, który stanowi naturalny pierwszy krok w opisie geometrii fraktali.

Jeśli obiekt składa się z N identycznych kopii samego siebie, z których każda jest pomniejszona względem oryginału o czynnik r, wówczas wymiar podobieństwa D_p spełnia zależność

$$N = r^{D_p} \rightarrow D_p = \frac{\ln N}{\ln r}. \tag{4.18}$$

Definicja ta ma charakter czysto geometryczny i opiera się wyłącznie na właściwości samopodobieństwa.

Zbiór Cantora jest jednym z najprostszych przykładów fraktala samopodobnego. W każdej iteracji konstrukcji jednostkowy odcinek dzielony jest na trzy równe części, z których środkowa zostaje usunięta. W rezultacie każda iteracja prowadzi do powstania $N = 2$ kopii zbioru z poprzedniego kroku, z których każda jest przeskalowana w dół współczynnikiem $r = 3$. Schemat powstawania zbioru pokazano na rys. 4.8a. Zastosowanie wzoru na wymiar podobieństwa (4.18) prowadzi do

$$D_p = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63, \tag{4.19}$$

co wskazuje, że zbiór Cantora jest obiektem o wymiarze pośrednim pomiędzy punktem a odcinkiem.

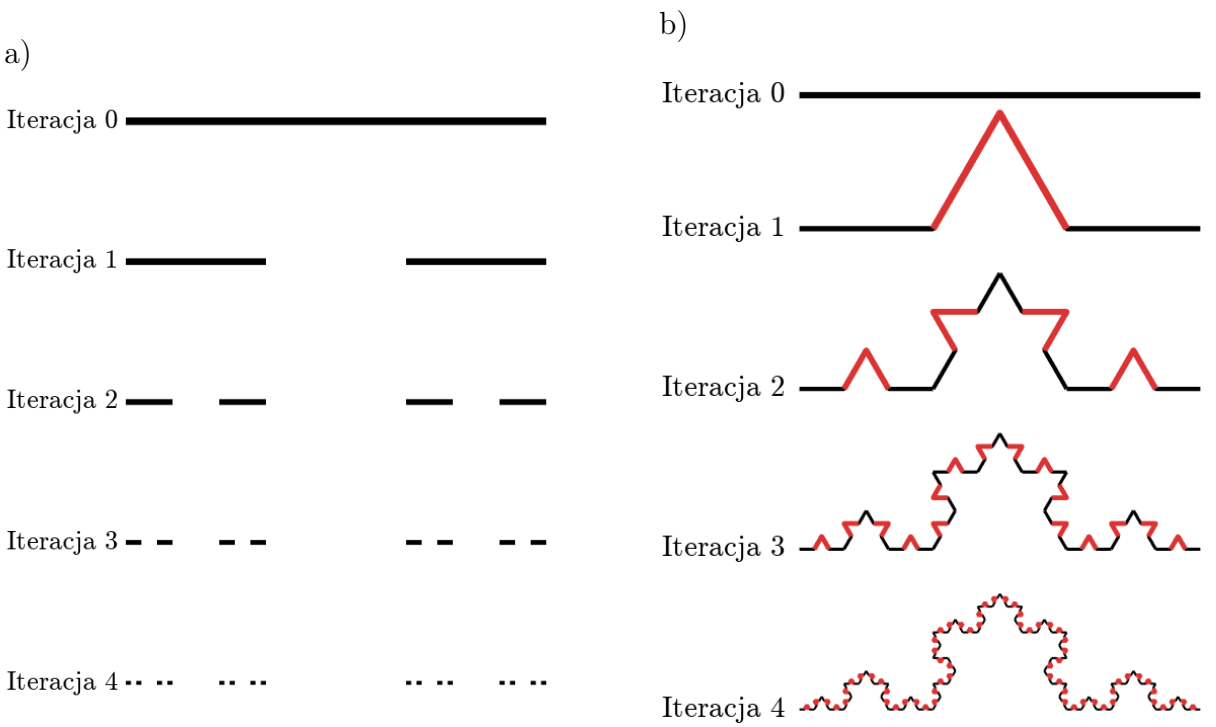
Krzywa Kocha powstaje poprzez iteracyjne zastępowanie każdego odcinka czterema nowymi odcinkami o długości równej jednej trzeciej długości wyjściowej. W każdej iteracji krzywa składa się z $N = 4$ kopii samej siebie, przeskalowanych w dół współczynnikiem $r = 3$. Schemat powstawania krzywej zilustrowano na rys. 4.8b. Wymiar podobieństwa krzywej Kocha wynosi zatem

$$D_p = \frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26, \tag{4.20}$$

co tłumaczy paradoksalną własność tej krzywej: nieskończoną długość przy jednocześnie skończonym obszarze, który ogranicza.

Trójkąt Sierpińskiego konstruowany jest przez podział trójkąta równobocznego na cztery mniejsze trójkąty i usunięcie centralnego. Pozostała figura składa się z $N = 3$ kopii samej siebie, przeskalowanych w dół współczynnikiem $r = 2$ (rys. 4.9). Wymiar podobieństwa trójkąta Sierpińskiego dany jest wzorem

$$D_p = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.58, \tag{4.21}$$



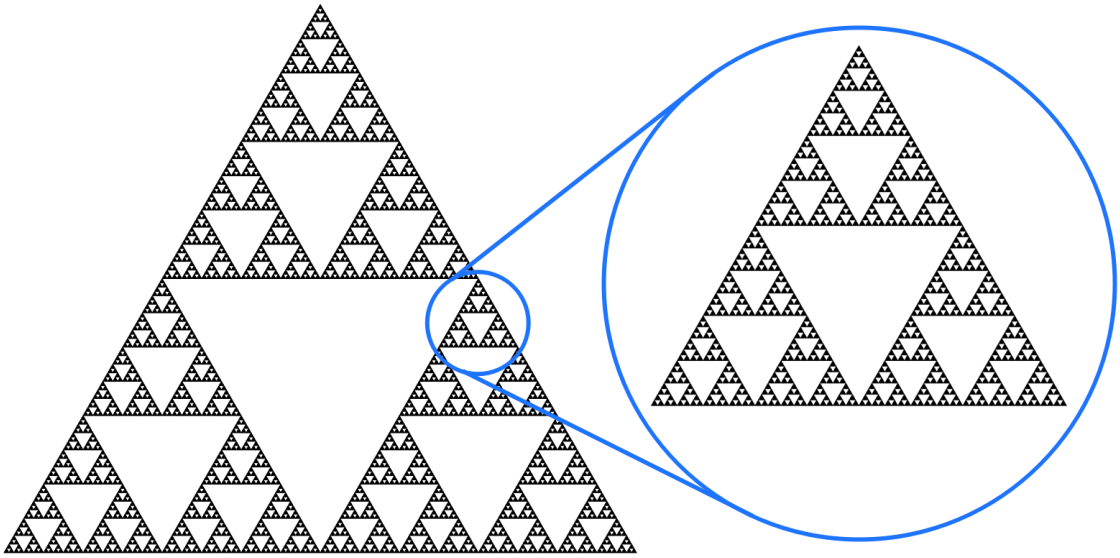
Rys. 4.8. **a)** Schemat powstawania kolejnych iteracji zbioru Cantora. **b)** Schemat powstawania kolejnych iteracji krzywej Kocha. Kolorem czerwonym oznaczono elementy dodawane w każdej iteracji. (opracowanie własne).

Wymiar podobieństwa stanowi intuicyjne i analitycznie proste narzędzie do opisu fraktali o idealnej strukturze samopodobnej. Jego główną zaletą jest możliwość bezpośredniego wyznaczenia wymiaru na podstawie reguły konstrukcji obiektu, bez konieczności przeprowadzania obliczeń granicznych.

Jednocześnie definicja ta ma istotne ograniczenia. Może być stosowana wyłącznie do fraktali o dokładnym samopodobieństwie, dla których znany jest jednoznaczny schemat skalowania. W przypadku fraktali naturalnych oraz atraktorów chaotycznych samopodobieństwo ma charakter przybliżony i statystyczny, co uniemożliwia bezpośrednie zastosowanie wymiaru podobieństwa.

Ograniczenia wymiaru podobieństwa prowadzą do konieczności wprowadzenia bardziej uniwersalnych definicji wymiaru fraktalnego, które mogą być stosowane do obiektów nieregularnych i zbiorów generowanych numerycznie. Jedną z najczęściej stosowanych w praktyce metod jest wymiar pudełkowy, który nie wymaga jawnej samopodobności i pozwala na ilościowy opis atraktorów chaotycznych powstających w układach dynamicznych.

W klasycznej geometrii wymiar obiektu przyjmuje wartości całkowite: punkt ma wymiar zero, krzywa – jeden, a powierzchnia – dwa. Dla fraktali takie rozróżnienie okazuje



Rys. 4.9. Trójkąt Sierpińskiego ilustrujący własność samopodobieństwa: powiększenie wybranego fragmentu struktury odtwarza całość fraktala w tej samej skali geometrycznej. (opracowanie własne).

się niewystarczające. Ich struktura wykazuje szczegóły na wielu skalach, a liczba stopni swobody potrzebnych do opisu obiektu nie jest liczbą całkowitą.

Jedną z najczęściej stosowanych definicji wymiaru fraktalnego jest wymiar pudełkowy (ang. *box-counting dimension*). Polega on na pokryciu badanego zbioru siatką pudełek o rozmiarze l i zliczeniu liczby $N(l)$ pudełek, które zawierają fragment zbioru. Wymiar fraktalny definiuje się jako granicę

$$D_p = \lim_{l \to 0} \frac{\ln N(l)}{\ln (1/l)}. \tag{4.22}$$

Dla obiektów klasycznych definicja ta prowadzi do wymiarów całkowitych, natomiast dla fraktali przyjmuje wartości niecałkowite.

W odróżnieniu od fraktali geometrycznych, atraktory chaotyczne nie są konstruowane jawnie, lecz wyłaniają się jako zbiór punktów odwiedzanych przez trajektorię układu dynamicznego w długim czasie. Ich fraktalna struktura wynika z jednoczesnego rozciągania i składania przestrzeni fazowej, co prowadzi do samopodobieństwa na wielu skalach.

Definicja wymiaru pudełkowego stanowi naturalne uogólnienie pojęcia wymiaru podobieństwa na obiekty, które nie wykazują dokładnego samopodobieństwa. W szczególności obejmuje ona zbiory generowane numerycznie, takie jak atraktory chaotyczne, dla których struktura fraktalna ujawnia się jedynie w sensie statystycznym.

W praktycznych zastosowaniach obliczeniowych badany zbiór nie jest dany w postaci ciągłej, lecz reprezentowany przez skończony zbiór punktów uzyskanych w wyniku

długoczasowej symulacji układu dynamicznego. Wyznaczanie wymiaru fraktalnego sprowadza się wówczas do analizy rozkładu tych punktów w przestrzeni fazowej.

Procedura numeryczna oparta na metodzie pudełkowej polega na pokryciu przestrzeni fazowej regularną siatką hipersześcianów o boku l oraz zliczeniu liczby $N(l)$ komórek zawierających co najmniej jeden punkt trajektorii. Operację tę powtarza się dla szeregu malejących wartości l, uzyskując zależność $N(l)$ od skali obserwacji.

W zakresie skal, dla których struktura fraktalna jest dobrze rozwinięta, zależność ta przyjmuje w przybliżeniu postać potęgową

$$N(l) \sim l^{-D_p}, \tag{4.23}$$

co prowadzi do liniowej zależności pomiędzy $\ln N(l)$ a $\ln(1/l)$. Wymiar pudełkowy wyznaczany jest wówczas jako nachylenie prostej dopasowanej do danych numerycznych w odpowiednim zakresie skal.

Istotnym elementem analizy numerycznej jest wybór przedziału l, w którym zachowanie potęgowe jest najlepiej widoczne. Dla zbyt dużych skal struktura atraktora ulega wygładzeniu, natomiast dla zbyt małych skal wyniki obliczeń zdominowane są przez dyskretny charakter danych oraz błędy numeryczne. W praktyce wymaga to identyfikacji obszaru liniowego na wykresie logarytmicznym oraz odrzucenia obszarów przejściowych.

Z punktu widzenia dynamiki układu wymiar pudełkowy dostarcza informacji o efektywnej liczbie stopni swobody ruchu na atraktorze. W połączeniu z analizą wykładników Lapunowa umożliwia on ilościowy opis równowagi pomiędzy rozciąganiem i kurczeniem trajektorii w przestrzeni fazowej, a tym samym pełniejszą charakterystykę chaosu deterministycznego.

Dla atraktora Lorenza wymiar fraktalny jest liczbą niecałkowitą, co odzwierciedla fakt, że atraktor ten nie wypełnia całej trójwymiarowej przestrzeni fazowej, lecz zajmuje zbiór o mniejszym, ułamkowym wymiarze.

Istnieje ścisły związek pomiędzy fraktalnością atraktora a jego wykładnikami Lapunowa. W praktyce często stosowanym przybliżeniem wymiaru atraktora jest wymiar Kaplana–Yorke'a, definiowany na podstawie spektrum wykładników Lapunowa. Wskazuje on, że fraktalna geometria atraktora jest bezpośrednią konsekwencją nierównowagi pomiędzy kierunkami rozszerzania i kurczenia w przestrzeni fazowej.

Zależność ta podkreśla, że chaos deterministyczny nie jest przypadkowy, lecz posiada ściśle określoną strukturę geometryczną, możliwą do ilościowego opisu.

W badaniach numerycznych fraktalność atraktorów stanowi ważne kryterium identyfikacji i klasyfikacji złożonej dynamiki. Obliczanie wymiaru fraktalnego pozwala

porównywać różne modele dynamiczne oraz analizować wpływ parametrów sterujących na stopień złożoności układu.

W kontekście obliczeń układów fizycznych fraktalna struktura atraktorów wskazuje na ograniczoną liczbę efektywnych stopni swobody, mimo formalnie wysokiego wymiaru przestrzeni fazowej. Stanowi to istotną informację przy interpretacji wyników symulacji numerycznych i budowie uproszczonych modeli efektywnej dynamiki.

4.7. Wymiar Kaplana–Yorke'a

Analiza wykładników Lapunowa dostarcza informacji o lokalnym rozciąganiu i kurczeniu trajektorii w przestrzeni fazowej, natomiast wymiar fraktalny opisuje geometryczną złożoność zbioru niezmienniczego, na którym ta dynamika się realizuje. Naturalnym pytaniem jest, w jaki sposób te dwa opisy — dynamiczny i geometryczny — są ze sobą powiązane. Jednym z najczęściej stosowanych narzędzi łączących oba podejścia jest wymiar Kaplana–Yorke'a [54].

Wymiar Kaplana–Yorke'a, nazywany również wymiarem Lapunowa, definiowany jest bezpośrednio na podstawie uporządkowanego spektrum wykładników Lapunowa. Niech j będzie największym indeksem takim, że suma pierwszych j wykładników jest nieujemna:

$$\sum_{i=1}^{j} \lambda_i \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{j+1} \lambda_i < 0. \tag{4.24}$$

Wówczas wymiar Kaplana–Yorke'a dany jest wzorem

$$D_{KY} = j + \frac{\sum_{i=1}^{j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|}. \tag{4.25}$$

Definicja ta opiera się na intuicyjnym obrazie lokalnego rozciągania przestrzeni fazowej wzdłuż kierunków odpowiadających dodatnim wykładnikom Lapunowa oraz jednoczesnego kurczenia w pozostałych kierunkach. Wymiar Kaplana–Yorke'a określa efektywną liczbę stopni swobody dynamiki, uwzględniając nierównowagę pomiędzy tymi procesami.

W przypadku ruchu okresowego, spektrum wykładników Lapunowa zawiera jeden wykładnik równy zeru, a pozostałe są ujemne, co prowadzi do całkowitego wymiaru Kaplana–Yorke'a równego jeden. Dla atraktorów chaotycznych pojawia się co najmniej jeden dodatni wykładnik Lapunowa, a wymiar Kaplana–Yorke'a przyjmuje wartość niecałkowitą, odzwierciedlając fraktalną strukturę atraktora.

Dla atraktora Lorenza wymiar Kaplana–Yorke'a przyjmuje wartość pomiędzy dwa a trzy, co potwierdza, że atraktor ten nie wypełnia całej trójwymiarowej przestrzeni

fazowej, lecz zajmuje zbiór o złożonej, ułamkowej geometrii. Wartość ta pozostaje w dobrej zgodności z wymiarem pudełkowym wyznaczanym metodami numerycznymi.

Z punktu widzenia obliczeń numerycznych wymiar Kaplana–Yorke'a stanowi szczególnie użyteczne narzędzie, gdyż pozwala oszacować wymiar atraktora bez konieczności bezpośredniej analizy jego struktury geometrycznej. Wystarczy znajomość spektrum wykładników Lapunowa, które i tak wyznaczane jest w procesie identyfikacji chaosu.

Choć wymiar Kaplana–Yorke'a dostarcza globalnej informacji o geometrycznej złożoności atraktora i pozwala na ilościowy opis chaosu deterministycznego, jego definicja opiera się bezpośrednio na lokalnych właściwościach dynamiki zakodowanych w wykładnikach Lapunowa. Te z kolei wynikają z linearyzacji równań ruchu w otoczeniu trajektorii odniesienia. Oznacza to, że nawet w przypadku silnie nieliniowych układów chaotycznych analiza liniowa pozostaje fundamentalnym narzędziem badania stabilności i struktury przestrzeni fazowej. Z tego względu w kolejnej części rozdziału powrócono do klasycznej analizy liniowej układów dynamicznych oraz klasyfikacji punktów stałych, które stanowią naturalny punkt odniesienia dla interpretacji zachowań nieliniowych i chaotycznych omawianych w dalszej części pracy.

4.8. Analiza liniowa układów dynamicznych

Pomimo że głównym tematem niniejszego rozdziału są zjawiska nieliniowe i chaos deterministyczny, kluczowym elementem analizy jakościowej układów dynamicznych pozostaje teoria liniowych równań różniczkowych. Analiza liniowa stanowi naturalny punkt wyjścia do badania stabilności rozwiązań oraz lokalnej dynamiki w otoczeniu punktów równowagi. Co istotne, narzędzia te zachowują swoje znaczenie również w przypadku układów nieliniowych, gdyż lokalne właściwości dynamiki mogą być opisane poprzez linearyzację równań ruchu [53].

Rozważmy autonomiczny układ równań różniczkowych pierwszego rzędu w dwóch zmiennych

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \dot{y} = g(x, y), \tag{4.26}$$

gdzie $x(t)$ i $y(t)$ opisują ewolucję stanu układu w czasie. Punkt (x_0, y_0) nazywany jest punktem stałym (punktem równowagi), jeżeli spełnia warunki

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad g(x_0, y_0) = 0. \tag{4.27}$$

W punkcie tym układ pozostaje w spoczynku, a jego stabilność zależy od zachowania trajektorii w jego otoczeniu.

Aby zbadać lokalną dynamikę w pobliżu punktu stałego, dokonuje się linearyzacji układu równań poprzez rozwinięcie funkcji f i g w szereg Taylora w otoczeniu punktu równowagi i zachowanie jedynie wyrazów liniowych:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} (y-y_0) \tag{4.28}$$

i analogicznie dla $g(x,y)$. Prowadzi to do układu

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

gdzie $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$, a macierz Jacobiego dana jest wzorem

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x_0,y_0)} . \tag{4.30}$$

Właściwości lokalnej dynamiki są w pełni określone przez wartości własne macierzy Jacobiego. Ich znaki oraz części rzeczywiste decydują o stabilności punktu stałego oraz typie trajektorii w jego sąsiedztwie.

Wartości własne macierzy Jacobiego spełniają równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 - \mathrm{tr}(J)\lambda + \det(J) = 0, \tag{4.31}$$

gdzie $\mathrm{tr}(J)$ oznacza ślad macierzy, a $\det(J)$ jej wyznacznik. Analiza znaków tych wielkości pozwala na pełną klasyfikację punktów stałych w układach dwuwymiarowych.

W dalszej analizie wygodnie jest wprowadzić oznaczenia

$$p = \mathrm{tr}(J), \quad q = \det(J), \tag{4.32}$$

co prowadzi do kanonicznej postaci równania (4.31)

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0. \tag{4.33}$$

Taki zapis umożliwia bezpośrednią analizę stabilności punktu stałego na podstawie parametrów p i q, bez konieczności jawnego wyznaczania wartości własnych.

Charakter wartości własnych zależy od wyróżnika równania charakterystycznego

$$\Delta = p^2 - 4q. \tag{4.34}$$

Jeżeli $\Delta > 0$, wartości własne są rzeczywiste, natomiast dla $\Delta < 0$ tworzą parę zespoloną sprzężoną. Z kolei znak wyznacznika q decyduje o tym, czy wartości własne mają ten sam znak, czy też przeciwny.

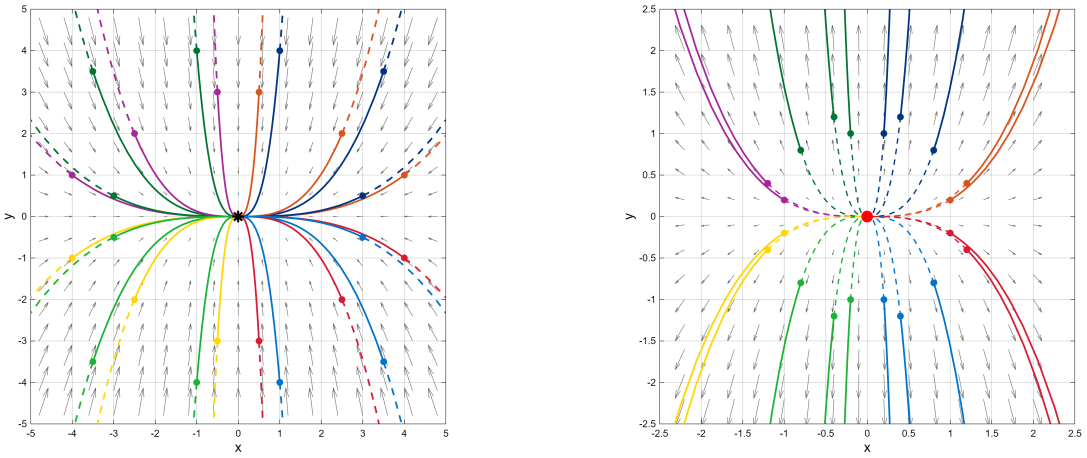
Na tej podstawie można wyróżnić następujące przypadki:

- Stabilny węzeł:

$$q > 0, \quad p < 0, \quad \Delta > 0, \tag{4.35}$$

co oznacza, że obie wartości własne są rzeczywiste i ujemne. W rezultacie trajektorie zbiegają do punktu równowagi bez oscylacji (zob. rys. 4.10a).

a) b)



Rys. 4.10. Przykłady trajektorii układów dynamicznych. Kolorowe punkty oznaczają warunki początkowe. Ciągłe linie odpowiadają ewolucji do przodu w czasie ($t \to +\infty$), przerywane linie – ewolucji wstecz w czasie ($t \to -\infty$). **a)** stabilny węzeł – trajektorie zbiegają do punktu równowagi (0,0), **b)** niestabilny węzeł – trajektorie rozbiegają się od punktu równowagi. (opracowanie własne).

- Niestabilny węzeł:

$$q > 0, \quad p > 0, \quad \Delta > 0, \tag{4.36}$$

co oznacza, że obie wartości własne są rzeczywiste i dodatnie. W rezultacie trajektorie oddalają się od punktu stałego (zob. rys. 4.10b).

- Stabilna spirala:

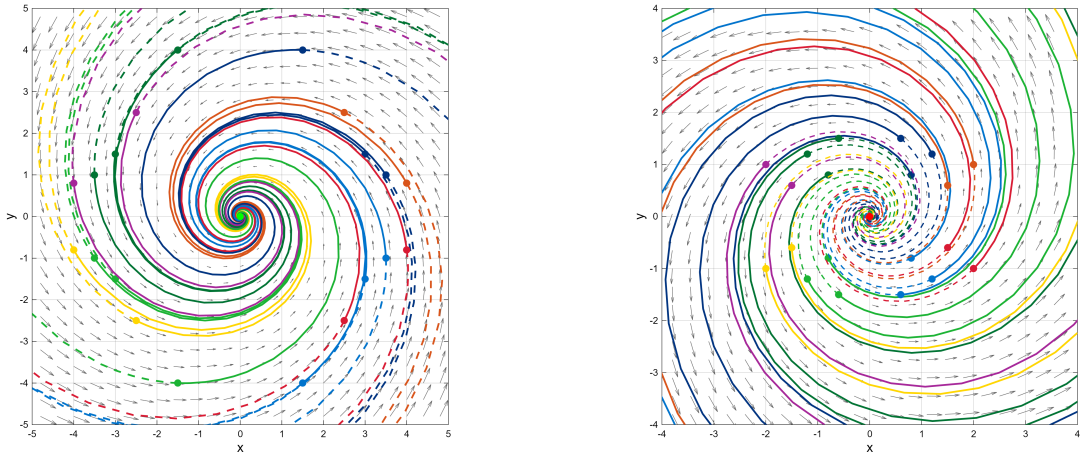
$$q > 0, \quad p < 0, \quad \Delta < 0, \tag{4.37}$$

co oznacza, że obie wartości własne są zespolone sprzężone, a część rzeczywista jest ujemna. W rezultacie trajektorie zbliżają się do punktu stałego, wykazując tłumione oscylacje (zob. rys. 4.11a).

- Niestabilna spirala:

$$q > 0, \quad p > 0, \quad \Delta < 0, \tag{4.38}$$

a) b)



Rys. 4.11. Przykłady trajektorii układów dynamicznych. Kolorowe punkty oznaczają warunki początkowe. Ciągłe linie odpowiadają ewolucji do przodu w czasie ($t \to +\infty$), przerywane linie – ewolucji wstecz w czasie ($t \to -\infty$). **a)** stabilna spirala – trajektorie zbiegają do punktu równowagi (0,0), **b)** niestabilna spirala – trajektorie rozbiegają się od punktu równowagi. (opracowanie własne).

co oznacza, że obie wartości własne są zespolone sprzężone, a część rzeczywista jest dodatnia. W rezultacie trajektorie oddalają się od punktu stałego, oscylując coraz silniej (zob. rys. 4.11b).

- Centrum:

$$q > 0, \quad p = 0, \quad \Delta < 0, \tag{4.39}$$

co oznacza, że obie wartości własne są czysto urojone (zespolone sprzężone o zerowej części rzeczywistej). W rezultacie trajektorie tworzą zamknięte orbity okresowe wokół punktu stałego (zob. rys. 4.12a).

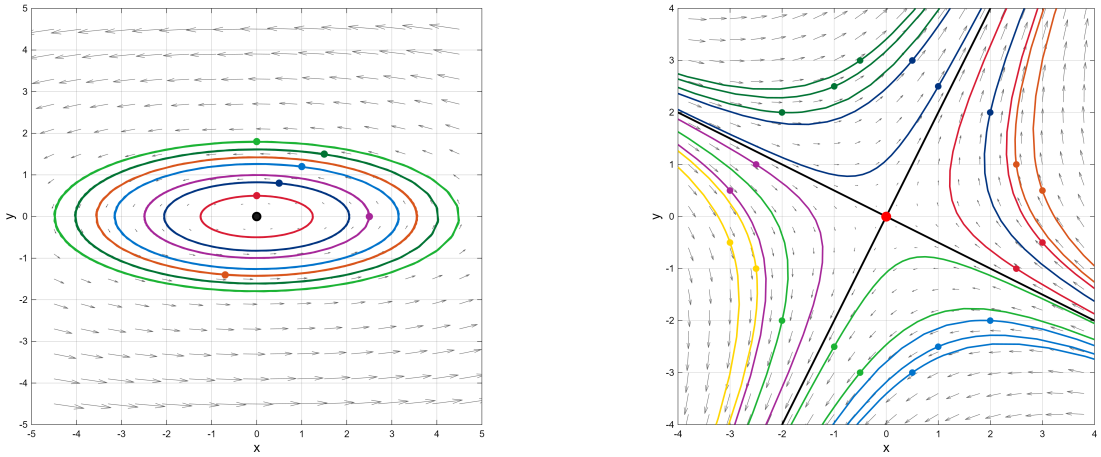
- Punkt siodłowy:

$$q < 0, \quad \Delta > 0, \tag{4.40}$$

co oznacza, że wartości własne mają przeciwne znaki (jedna dodatnia, jedna ujemna). W rezultacie punkt równowagi jest niestabilny – istnieje jeden kierunek stabilny i jeden niestabilny (zob. rys. 4.12b).

Taka klasyfikacja pozwala na przedstawienie całej struktury lokalnej dynamiki w postaci diagramu w przestrzeni (p, q), który stanowi jedno z podstawowych narzędzi analizy jakościowej układów dynamicznych (rys. 4.13). Choć analiza liniowa opisuje jedynie lokalne właściwości układu, jej znaczenie dla zrozumienia dynamiki nieliniowej jest fundamentalne. Bifurkacje, omawiane we wcześniejszych częściach rozdziału, można interpretować jako zmiany typu lub stabilności punktów stałych w miarę zmiany parametrów układu. Przykładowo bifurkacja Hopfa zachodzi w momencie, gdy para

a) b)



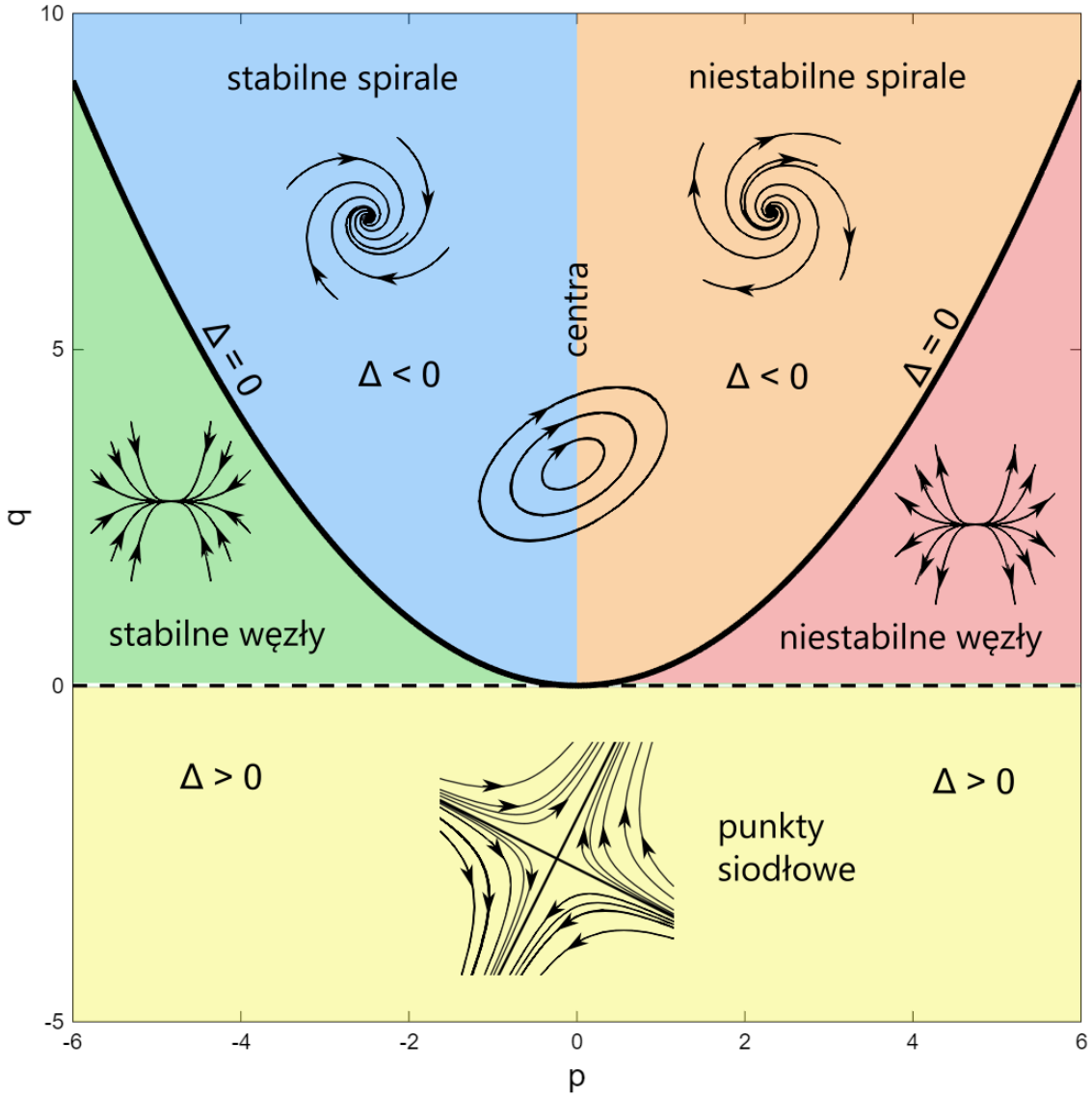
Rys. 4.12. **a)** Przykład trajektorii układu dynamicznego z punktem centralnym. Kolorowe punkty oznaczają warunki początkowe. Wszystkie trajektorie są zamkniętymi orbitami okresowymi (elipsami) i nie zbliżają się ani nie oddalają od punktu równowagi (0,0). **b)** Przykład trajektorii układu dynamicznego z punktem siodłowym. Kolorowe punkty oznaczają warunki początkowe. Większość trajektorii oddala się od punktu równowagi hiperbolicznie. Czarne linie oznaczają linie separujące (stabilną i niestabilną). (opracowanie własne).

zespolonych wartości własnych przechodzi przez oś urojoną, prowadząc do utraty stabilności punktu stałego i powstania cyklu granicznego.

Ponadto struktura lokalnych punktów stałych i ich rozmaitości stabilnych oraz niestabilnych stanowi punkt wyjścia do analizy globalnej dynamiki, w tym powstawania atraktorów chaotycznych. Nawet w układach wykazujących chaos, takich jak atraktor Lorenza, lokalna analiza liniowa pozwala zrozumieć mechanizmy rozciągania i składania trajektorii w przestrzeni fazowej, które są kluczowe dla generowania wrażliwości na warunki początkowe.

4.9. Przykłady fizyczne analizy liniowej

W celu zilustrowania znaczenia analizy liniowej oraz klasyfikacji punktów stałych, w niniejszej sekcji przedstawiono trzy przykłady fizyczne o rosnącym stopniu złożoności. Rozpoczęto od klasycznego oscylatora harmonicznego, który stanowi punkt odniesienia dla dalszych rozważań, następnie omówiono prosty model dynamiki polaryzacji ferroelektrycznej, a całość zwieńczono przykładem sprzężonej dynamiki polaryzacji i magnetyzacji w układach multiferroicznych.



Rys. 4.13. Klasyfikacja przestrzeni (p, q), z zaznaczonymi obszarami występowania różnych typów trajektorii. (opracowanie własne).

4.9.1. Oscylator harmoniczny tłumiony

Ruch tłumionego oscylatora harmonicznego opisany jest równaniem

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{4.41}$$

gdzie γ oznacza współczynnik tłumienia, natomiast ω_0 częstość własną układu. Wprowadzając zmienne fazowe

$$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}, \tag{4.42}$$

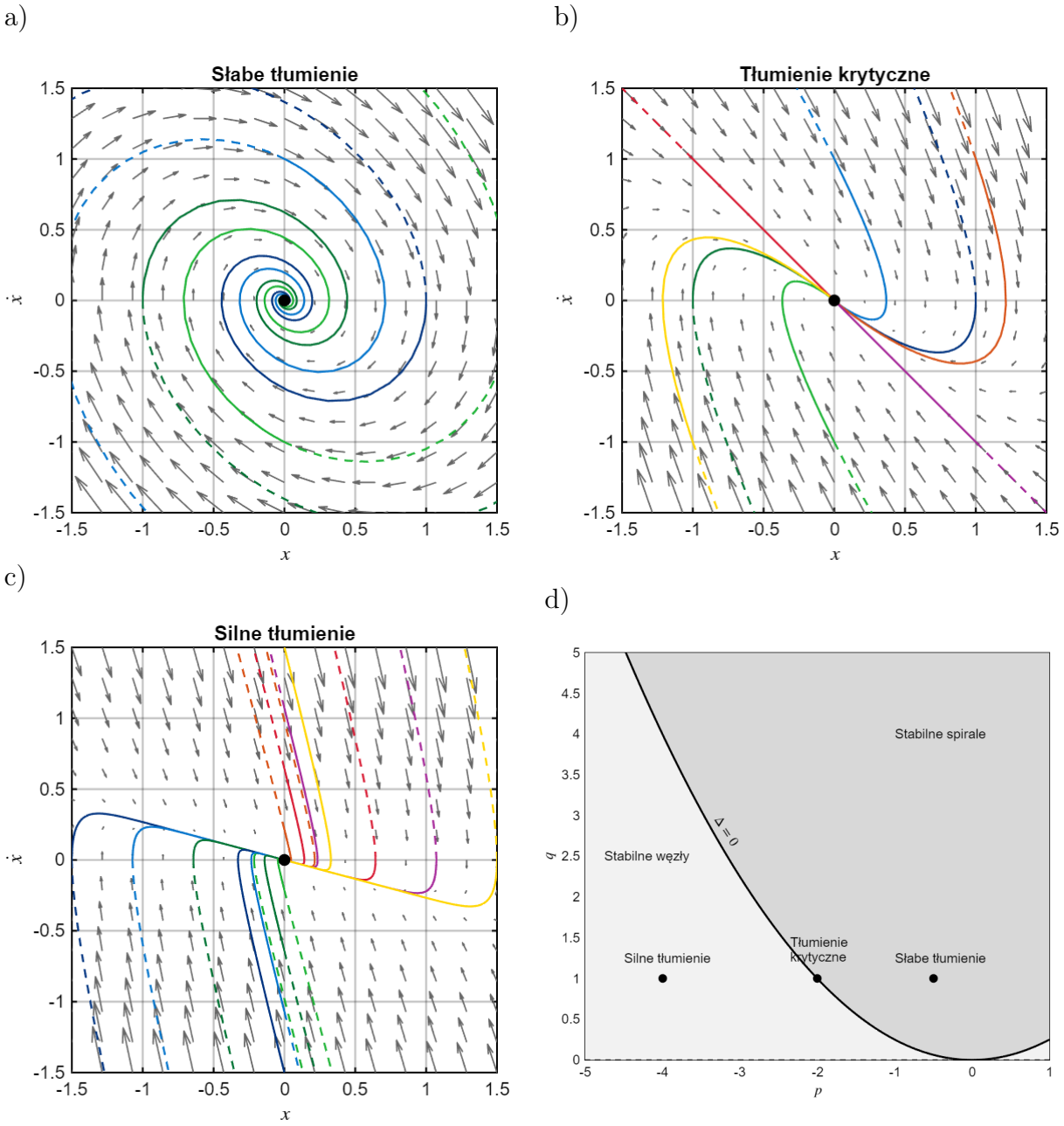
otrzymujemy układ równań pierwszego rzędu

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - \gamma x_2. \tag{4.43}$$

Jedynym punktem stałym układu jest punkt $(0, 0)$. Macierz Jacobiego w tym punkcie ma postać

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.44}$$

co prowadzi do parametrów $p = -\gamma$, $q = \omega_0^2$. Dla dodatniego tłumienia $\gamma > 0$ punkt stały jest stabilny, a jego charakter zależy od relacji pomiędzy γ i ω_0. W przypadku słabego tłumienia układ wykazuje tłumione oscylacje, odpowiadające stabilnej spirali w przestrzeni fazowej, natomiast dla silnego tłumienia trajektorie zbliżają się do punktu równowagi monotonicznie, tworząc stabilny węzeł. Porterty fazowe dla tłumionego oscylatora harmonicznego wraz z ich umiejscownieniem w przestrzeni pq przedstawiono na rys. 4.14. Przykład ten ilustruje bezpośredni związek pomiędzy parametrami fizycznymi a lokalną strukturą przestrzeni fazowej.



Rys. 4.14. Portrety fazowe tłumionego oscylatora harmonicznego dla różnych wartości współczynnika tłumienia: **a)** słabe tłumienie — stabilna spirala, **b)** tłumienie krytyczne, **c)** silne tłumienie — stabilny węzeł. Punkt $(0, 0)$ odpowiada stabilnemu punktowi równowagi. Na rysunku zaznaczono również pole wektorowe odpowiadające równaniom ruchu, co umożliwia bezpośrednią interpretację kierunku ewolucji trajektorii w przestrzeni fazowej. **d)** Diagram pq klasyfikujący punkty stałe liniowego oscylatora tłumionego. Zaznaczono linię tłumienia krytycznego $\Delta = 0$ oraz punkty odpowiadające trzem wartościom współczynnika tłumienia użytym w analizie portretów fazowych **a)**, **b)** i **c)**. (opracowanie własne).

4.9.2. Relaksacyjna dynamika polaryzacji ferroelektrycznej

Kolejnym przykładem jest relaksacyjny model dynamiki polaryzacji ferroelektrycznej, oparty na teorii Landaua. Równanie ruchu polaryzacji P można zapisać w postaci

$$\dot{P} = -\frac{\partial F(P)}{\partial P}, \tag{4.45}$$

gdzie energia swobodna ma postać

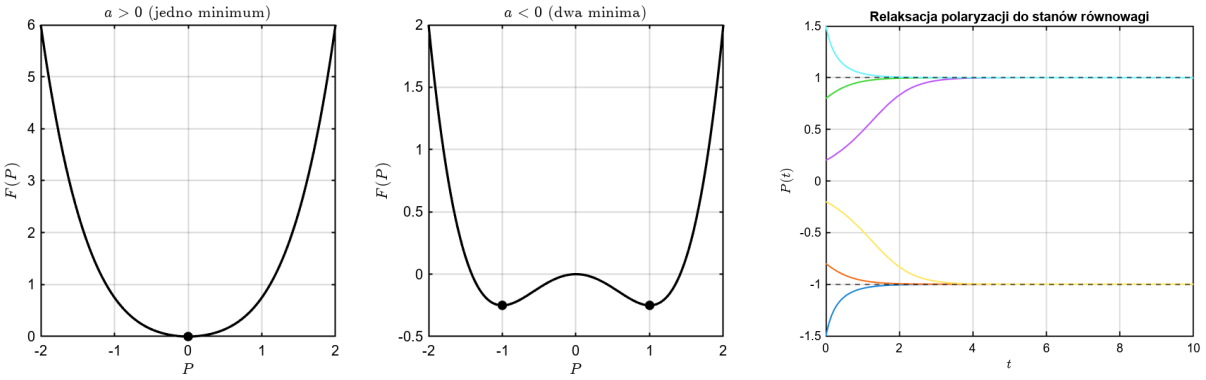
$$F(P) = \frac{a}{2}P^2 + \frac{b}{4}P^4. \tag{4.46}$$

Punkty stałe układu odpowiadają minimom energii swobodnej i są wyznaczane przez warunek $\partial F/\partial P = 0$. Dla $a > 0$ istnieje pojedynczy punkt równowagi $P = 0$, natomiast dla $a < 0$ pojawiają się dwa stabilne punkty równowagi, co odpowiada przejściu fazowemu typu ferroelektrycznego (rys. 4.15a). Istnienie dwóch punktów równowagi oznacza, że polaryzacja będzie dążyć w czasie do jednej z dwóch wartości (rys. 4.15b). Linearyzacja równania ruchu w otoczeniu punktu równowagi P_0 prowadzi do zależności

$$\delta\dot{P} = -\left(a + 3bP_0^2\right)\delta P. \tag{4.47}$$

Choć jest to układ jednowymiarowy, przykład ten dobrze ilustruje ideę lokalnej stabilności

a) b)



Rys. 4.15. **a)** Potencjał Landaua $F(P)$ dla $a > 0$ (jedno minimum) oraz $a < 0$ (dwa minima), ilustrujący bifurkację typu pitchfork i przejście paraelektryk–ferroelektryk. **b)** Ewolucja polaryzacji $P(t)$ dla różnych warunków początkowych w fazie ferroelektrycznej. Przerywane linie oznaczają stabilne punkty równowagi. (opracowanie własne).

oraz rolę parametrów materiałowych w kształtowaniu dynamiki. Zmiana znaku parametru a prowadzi do bifurkacji, omawianej we wcześniejszych częściach rozdziału.

Model ten stanowi naturalny punkt wyjścia do opisu bardziej złożonych układów, w których polaryzacja sprzężona jest z innymi stopniami swobody.

4.9.3. Sprzężona dynamika polaryzacji i magnetyzacji w multiferroikach

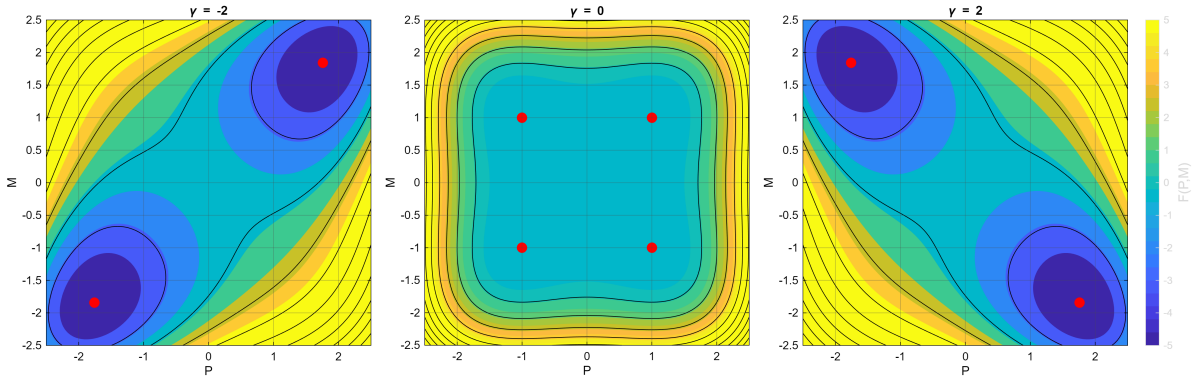
Najbardziej złożonym i jednocześnie najbardziej istotnym z punktu widzenia dalszej części pracy przykładem jest sprzężona dynamika polaryzacji P i magnetyzacji M w układach multiferroicznych. W ujęciu fenomenologicznym dynamikę takiego układu można opisać równaniami relaksacyjnymi

$$\dot{P} = -\frac{\partial F(P,M)}{\partial P}, \quad \dot{M} = -\frac{\partial F(P,M)}{\partial M}, \tag{4.48}$$

gdzie energia swobodna zawiera człony odpowiadające obu porządkom oraz ich wzajemnemu sprzężeniu:

$$F(P,M) = \frac{a}{2}P^2 + \frac{b}{4}P^4 + \frac{\alpha}{2}M^2 + \frac{\beta}{4}M^4 + \gamma PM. \tag{4.49}$$

W zależności od wartości sprzężenia γ wyróżniamy sprzężenie antyferromagnetyczne ($\gamma < 0$), sprzężenie ferromagnetyczne ($\gamma > 0$) oraz brak sprzężenia dla $\gamma = 0$, wówczas zmiana polaryzacji jest niezależna od zmiany magnetyzacji. Wykresy energii swobodnej dla trzech przypadków przedstawiono na rys. 4.16. Punkty stałe układu wyznaczane są przez



Rys. 4.16. Zależność energii swobodnej od polaryzacji (P) i magnetyzacji (M) dla różnych wartości γ. Dla $\gamma < 0$ występuje sprzężenie antyferromagnetyczne, dla $\gamma = 0$, brak sprzężenia, dla $\gamma > 0$ sprzężenie ferromagnetyczne. Punkty oznaczają lokalne minima energii swobodnej. (opracowanie własne).

warunki równowagi $\partial F/\partial P = 0$, $\partial F/\partial M = 0$. Linearyzacja równań ruchu w otoczeniu punktu równowagi (P_0, M_0) prowadzi do dwuwymiarowego układu liniowego, którego właściwości określa macierz Jacobiego

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 F}{\partial P^2} & -\frac{\partial^2 F}{\partial P \partial M} \\ -\frac{\partial^2 F}{\partial M \partial P} & -\frac{\partial^2 F}{\partial M^2} \end{pmatrix}_{(P_0,M_0)}. \tag{4.50}$$

Parametry p oraz q zależą bezpośrednio od współczynników materiałowych oraz siły sprzężenia magnetoelektrycznego γ. Zmiana tych parametrów może prowadzić do przejść pomiędzy różnymi typami punktów stałych, a w konsekwencji do pojawienia się oscylacji, bifurkacji oraz bardziej złożonych reżimów dynamicznych.

Przykład ten pokazuje, że nawet lokalna analiza liniowa dostarcza cennych informacji o możliwej dynamice sprzężonych układów multiferroicznych i stanowi niezbędne narzędzie interpretacji wyników obliczeń numerycznych, które zostaną przedstawione w dalszej części pracy.

4.10. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono podstawowe pojęcia i narzędzia teorii nieliniowych układów dynamicznych, ze szczególnym uwzględnieniem mechanizmów prowadzących do złożonej i chaotycznej dynamiki. Rozważania rozpoczęto od analizy bifurkacji w prostych układach jednowymiarowych, co pozwoliło na jakościowe zrozumienie wpływu parametrów sterujących na istnienie i stabilność rozwiązań stacjonarnych.

Następnie wprowadzono pojęcie przestrzeni fazowej oraz lokalnej stabilności punktów stałych na przykładzie wahadła matematycznego, ukazując, w jaki sposób geometria trajektorii odzwierciedla charakter ruchu układu. Omówienie bifurkacji Hopfa oraz atraktora Lorenza umożliwiło przejście od ruchów okresowych do chaosu deterministycznego, podkreślając rolę nieliniowości oraz sprzężeń pomiędzy stopniami swobody.

W celu ilościowej charakterystyki dynamiki chaotycznej wprowadzono wykładniki Lapunowa jako miarę wrażliwości na warunki początkowe, a następnie omówiono fraktalną strukturę atraktorów chaotycznych. Pojęcie wymiaru fraktalnego przedstawiono zarówno z perspektywy geometrycznej, jak i obliczeniowej, ze szczególnym uwzględnieniem wymiaru pudełkowego oraz wymiaru Kaplana–Yorke'a, który stanowi pomost pomiędzy opisem dynamicznym i geometrycznym.

Rozdział domknięto analizą liniową układów dynamicznych i klasyfikacją punktów stałych, stanowiącą fundamentalny punkt odniesienia dla badań nieliniowych. Przedstawione przykłady fizyczne — od klasycznego oscylatora harmonicznego, poprzez dynamikę polaryzacji ferroelektrycznej, aż po sprzężone układy multiferroiczne — pokazały, że nawet lokalna analiza stabilności dostarcza cennych informacji o możliwych reżimach dynamicznych oraz ich zależności od parametrów fizycznych.

Tak zbudowane ramy teoretyczne stanowią podstawę do interpretacji wyników obliczeń numerycznych przedstawionych w dalszej części pracy. W kolejnych rozdziałach

zaprezentowane zostaną modele i metody numeryczne zastosowane do analizy sprzężonej dynamiki w układach hybrydowych, wraz z omówieniem otrzymanych wyników i ich fizycznej interpretacji.

Rozdział 5.

Nieliniowa dynamika magnetoelektryczna: rezonans parametryczny, bifurkacje i struktury fraktalne

Sprzężenie magnetoelektryczne w multiferroikach prowadzi do wzajemnego oddziaływania stopni swobody magnetycznych i elektrycznych, którego konsekwencją jest nieliniowy charakter dynamiki układu. W odróżnieniu od liniowych odpowiedzi materiałowych, nieliniowość ta umożliwia pojawienie się złożonych zjawisk dynamicznych, takich jak rezonans parametryczny, bifurkacje rozwiązań stacjonarnych oraz chaos deterministyczny. Zjawiska te nie tylko stanowią interesujący problem poznawczy, lecz również wyznaczają granice stabilności i sterowalności układów magnetoelektrycznych istotnych z punktu widzenia potencjalnych zastosowań.

Celem niniejszego rozdziału jest szczegółowa analiza nieliniowej dynamiki układów magnetoelektrycznych w reżimie silnego sprzężenia, ze szczególnym uwzględnieniem mechanizmów prowadzących do utraty stabilności i powstawania złożonych struktur w przestrzeni fazowej. Rozważania prowadzone są w oparciu o model dynamiczny opisujący wzajemne oddziaływanie porządku magnetycznego i elektrycznego, który pozwala na systematyczne badanie wpływu parametrów sterujących na zachowanie układu.

Prezentowane w tym rozdziale wyniki bazują na pracy [117], której autor niniejszej rozprawy jest pierwszym autorem. W rozprawie przedstawiono rozszerzoną interpretację fizyczną uzyskanych rezultatów, uzupełniono analizę numeryczną oraz uporządkowano wyprowadzenia w sposób podkreślający ogólny mechanizm powstawania bifurkacji, rezonansów parametrycznych oraz chaosu w układach magnetoelektrycznych.

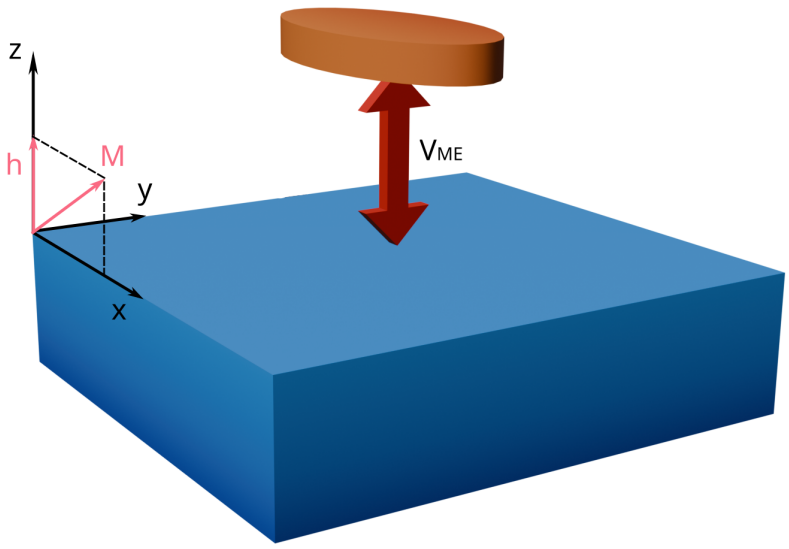
W pierwszej części rozdziału przedstawiony zostanie model teoretyczny magnetoelektrycznego układu dynamicznego oraz omówione zostaną warunki występowania rezonansu parametrycznego. Następnie przeanalizowany zostanie mechanizm bifurkacji Hopfa jako podstawowy scenariusz przejścia od stanu równowagi do oscylacji samowzbudnych. W dalszej kolejności pokazano, że dalsza zmiana parametrów prowadzi do utraty periodyczności i pojawienia się chaosu deterministycznego, którego przejawem są atraktory o strukturze fraktalnej oraz złożone diagramy bifurkacyjne.

Analiza chaotycznej dynamiki oparta jest zarówno na jakościowym opisie trajektorii w przestrzeni fazowej, jak i na ilościowych miarach chaosu, takich jak wykładniki Lapunowa oraz charakterystyki fraktalne. Uzyskane wyniki wskazują, że sprzężenie magnetoelektryczne może pełnić rolę skutecznego parametru kontrolnego, umożliwiającego przełączanie pomiędzy różnymi reżimami dynamicznymi – od stabilnych stanów stacjonarnych, przez oscylacje okresowe, aż po chaos deterministyczny.

Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki stanowią punkt wyjścia do dalszych rozważań dotyczących wpływu nieliniowej dynamiki na właściwości kwantowe układów światło–materia. W kolejnych rozdziałach pokazano, że obecność nieliniowości i chaosu odgrywa kluczową rolę w kształtowaniu splątania oraz procesów termalizacji w układach złożonych.

5.1. Model teoretyczny układu magnetoelektrycznego

Rozważany układ, którego schemat przedstawiono na rys. 5.1, składa się z cienkiego magnetycznego nanodysku osadzonego na ferroelektrycznym podłożu. Tego typu heterostruktury stanowią jedną z najbardziej obiecujących platform do badania efektu magnetoelektrycznego, w którym zmiana polaryzacji pod wpływem pola magnetycznego lub zmiana magnetyzacji pod wpływem pola elektrycznego wynika z oddziaływania między stopniami swobody magnetycznymi i elektrycznymi.



Rys. 5.1. Schemat analizowanego układu, elipsoidalny, magnetyczny nanodysk oddziałujący z ferroelektrycznym podłożem za pomocą sprzężenie magnetoelektrycznego V_{ME}. Zewnętrzne pole magnetyczne h przyłożone wzdłuż osi z, a wektor magnetyzacji znajduje się w płaszczyźnie XOZ. (opracowanie własne).

Efekt magnetoelektryczny w analizowanym układzie manifestuje się między innymi poprzez modyfikację efektywnej anizotropii magnetycznej wskutek sprzężenia ze sprężystym odkształceniem podłoża. Anizotropia ta może być kontrolowana poprzez dobór składu filmu i podłoża, parametrów sieci krystalicznej oraz poprzez naprężenia mechaniczne indukowane w strukturze.

Dobrze znanym przykładem materiałów o silnej anizotropii jednoosiowej są kobalt oraz związki międzymetaliczne takie jak YCo_5, w których oś heksagonalna [001] stanowi łatwy kierunek magnetyzacji. W strukturach o rozmiarach nanometrycznych istotną rolę odgrywa również anizotropia kształtu. Geometria nanodysku może znacząco wpływać na efektywną energię anizotropii. Przykładowo, prostokątny nanodysk o wydłużonej osi wzdłuż kierunku x opisany jest członem anizotropii postaci $K_{an}m_y^2$ ($K > 0$). Tego typu anizotropia łamie symetrię w płaszczyźnie i prowadzi do ograniczenia dynamiki magnetyzacji do płaszczyzny XOZ. Jeszcze bardziej efektywne sterowanie anizotropią kształtu możliwe jest poprzez zastosowanie naprężeń mechanicznych, które modyfikują energię magnetoelastyczną układu [14, 62, 66].

W niniejszym rozdziale rozważany jest przypadek, w którym dynamika jednostkowego wektora magnetyzacji jest ograniczona do płaszczyzny XOZ wskutek silnej anizotropii magnetokrystalicznej dodatkowo wzmocnionej przez naprężenie mechaniczne. Założenie to redukuje liczbę efektywnych stopni swobody, zachowując jednocześnie najistotniejsze mechanizmy nieliniowej dynamiki.

Celem niniejszego rozdziału jest wprowadzenie minimalnego, lecz fizycznie realistycznego modelu opisującego nieliniową dynamikę sprzężonego układu magnetyczno–ferroelektrycznego. Model ten stanowi punkt wyjścia do dalszej analizy bifurkacji, rezonansu parametrycznego oraz przejścia do chaosu w układach multiferroicznych.

W przyjętym opisie układ składa się z magnetycznego nanodysku sprzężonego z jednowymiarowym ferroelektrykiem, przy czym sprzężenie pomiędzy podukładami realizowane jest poprzez liniowy człon magnetoelektryczny proporcjonalny do iloczynu odpowiednich składowych magnetyzacji i polaryzacji. Taka forma sprzężenia stanowi najprostszą reprezentację efektu ME w heterostrukturze film–podłoże i pozwala na uchwycenie kluczowych mechanizmów nieliniowej dynamiki przy zachowaniu przejrzystości analitycznej.

5.2. Matematyczny opis systemu

Ze względu na silną anizotropię jednoosiową oraz anizotropię kształtu, omówione w poprzednim podrozdziale, przyjmujemy, że efektywna energia magnetyczna zawiera

człon postaci $K_{an}m_y^2$ ($K > 0$), który łamie symetrię w płaszczyźnie. W konsekwencji dynamika magnetyzacji zostaje skutecznie ograniczona do płaszczyzny XOZ. Ograniczenie to może być dodatkowo wzmocnione poprzez zastosowanie naprężeń mechanicznych, co wpisuje się w koncepcję straintroniki, umożliwiającej kontrolę anizotropii magnetycznej za pomocą zewnętrznych bodźców mechanicznych. Redukcja dynamiki do dwóch efektywnych stopni swobody pozwala na przejrzystą analizę nieliniowych efektów sprzężenia przy zachowaniu kluczowych mechanizmów fizycznych.

Całkowita energia swobodna układu przyjmuje postać sumy trzech składowych:

$$F = F_f + F_m + F_{ME}, \tag{5.1}$$

gdzie F_f opisuje podukład ferroelektryczny, F_m podukład magnetyczny, natomiast F_{ME} odpowiada za sprzężenie magnetoelektryczne.

Podukład ferroelektryczny modelowany jest klasycznym potencjałem Landaua z uwzględnieniem członu kinetycznego:

$$F_f = \frac{\dot{p}_z^2}{2} - \frac{\alpha}{2}p_z^2 + \frac{\beta}{4}p_z^4 - p_z E(t), \tag{5.2}$$

gdzie p_z jest składową polaryzacji wzdłuż osi z, natomiast $E(t)$ oznacza zewnętrzne pole elektryczne.

Energia części magnetycznej ma postać:

$$F_m = \frac{1}{2}K_{an}m_y^2 - h_z m_z, \tag{5.3}$$

gdzie $m = \mathbf{M}/|\mathbf{M}|$ jest jednostkowym wektorem magnetyzacji, a h_z oznacza stałe pole magnetyczne przyłożone wzdłuż osi z. Pole to pełni podwójną rolę: stabilizuje składową m_z oraz wyznacza skalę energetyczną podukładu magnetycznego.

Sprzężenie magnetoelektryczne przyjęto w najprostszej, liniowej postaci:

$$F_{ME} = -g_{ME}p_z m_z, \tag{5.4}$$

gdzie g_{ME} jest współczynnikiem sprzężenia ME. Odpowiada ono za bezpośrednie związanie dynamiki polaryzacji ferroelektrycznej z projekcją magnetyzacji wzdłuż osi z. Taka forma sprzężenia stanowi minimalny model efektu magnetoelektrycznego w heterostrukturze film–podłoże i pozwala na analizę nieliniowych efektów wynikających z wzajemnej dynamiki obu podukładów.

Dynamika układu opisana jest równaniami Landaua–Lifshitza–Gilberta dla magnetyzacji oraz równaniem ruchu dla polaryzacji:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{m}}{dt} &= -\mathbf{m}\times\mathbf{h}_{eff} + \alpha_G\left(\mathbf{m}\times\frac{d\mathbf{m}}{dt}\right), \\ \frac{d^2p_z}{dt^2} &= -\frac{\partial F}{\partial p_z} - \alpha_G\dot{p}_z + V_0\sin(\omega t) + C\sin(\Omega t), \end{aligned} \tag{5.5}$$

gdzie α_G to współczynnik tłumienia Gilberta, V_0 i C to wymuszenia zewnętrznych pół elektrycznych, a efektywne pole magnetyczne zdefiniowane jest jako:

$$\mathbf{h}_{eff} = -\frac{\partial F}{\partial \mathbf{m}}. \tag{5.6}$$

Dwa harmoniczne wymuszenia pola elektrycznego (V_0, C) odpowiadają wolnej i szybkiej skali czasowej, co odgrywa kluczową rolę w dalszej analizie.

Jednostkowy wektor magnetyzacji parametryzowany jest w postaci:

$$m = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta, \cos\theta\cos\varphi). \tag{5.7}$$

Uwzględniając dominujący wkład anizotropii kształtu oraz czynniki demagnetyzujące dla cienkiego dysku ($a_z = a_x \gg a_y$), energia anizotropii przyjmuje przybliżoną postać:

$$E_{SHA} \approx K\sin^2\theta. \tag{5.8}$$

Minimalizacja energii prowadzi do silnego ograniczenia ruchu do małych wychyleń $\theta \ll 1$. Przyjmując ponadto $h_z < K$, $g_{ME} < K$ oraz słabe tłumienie $\alpha_G \ll 1$, równania ruchu redukują się do:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} - \alpha_G\dot{\varphi} &= (h_z + g_{\mathrm{ME}}p_z)\sin\varphi, \\ \dot{\varphi} &= -\theta K. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Eliminując zmienną θ, otrzymujemy jedno równanie drugiego rzędu opisujące dynamikę kąta φ:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G\frac{d\varphi}{dt} = -\sin\varphi - g_{ME}p_z\sin\varphi, \tag{5.10}$$

Wprowadzając zmienne bezwymiarowe:

$$t \to t\sqrt{h_zK_{an}}, \quad \alpha_G \to \alpha_G\sqrt{\frac{K_{an}}{h_z}}, \quad g_{ME} \to \frac{g_{ME}}{h_z} \tag{5.11}$$

otrzymujemy ostateczny zestaw równań:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G \frac{d\varphi}{dt} &= -\sin\varphi - g_{ME} p_z \sin\varphi, \\ \frac{d^2 p_z}{dt^2} + \alpha_G \frac{dp_z}{dt} &= \alpha p_z - \beta p_z^3 + V_0 \sin(\omega t) + C \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{5.12}$$

Zakładając rozdział skal czasowych $\Omega \gg \omega$, rozwiązanie dla polaryzacji przyjmuje się w postaci:

$$p_z(t) = p_z(t) - \frac{C}{\Omega^2} \sin(\Omega t) \tag{5.13}$$

Po uśrednieniu po krótkim okresie otrzymujemy efektywne równania:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_z}{dt^2} + \alpha_G \frac{dP_z}{dt} + \gamma P_z + \beta P_z^3 - g_{ME} \cos\varphi &= V_0 \sin(\omega t), \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G \frac{d\varphi}{dt} &= -\sin\varphi - g_{ME} P_z \sin\varphi, \end{aligned} \tag{5.14}$$

gdzie $\gamma = \left(\frac{3\beta C^2}{2\Omega^4} - \alpha\right)$ to przeskalowana liniowa częstotliwość, która zależy od szybkiego wymuszenia elektrycznego. Równanie efektywne dla uśrednionej polaryzacji P_z (5.14) można interpretować jako równanie ruchu cząstki w jednowymiarowym potencjale nieliniowym z dyssypacją i wymuszeniem zewnętrznym. W przypadku pominięcia strat i wymuszeń, dynamika ferroelektryczna opisywana jest przez efektywny potencjał postaci

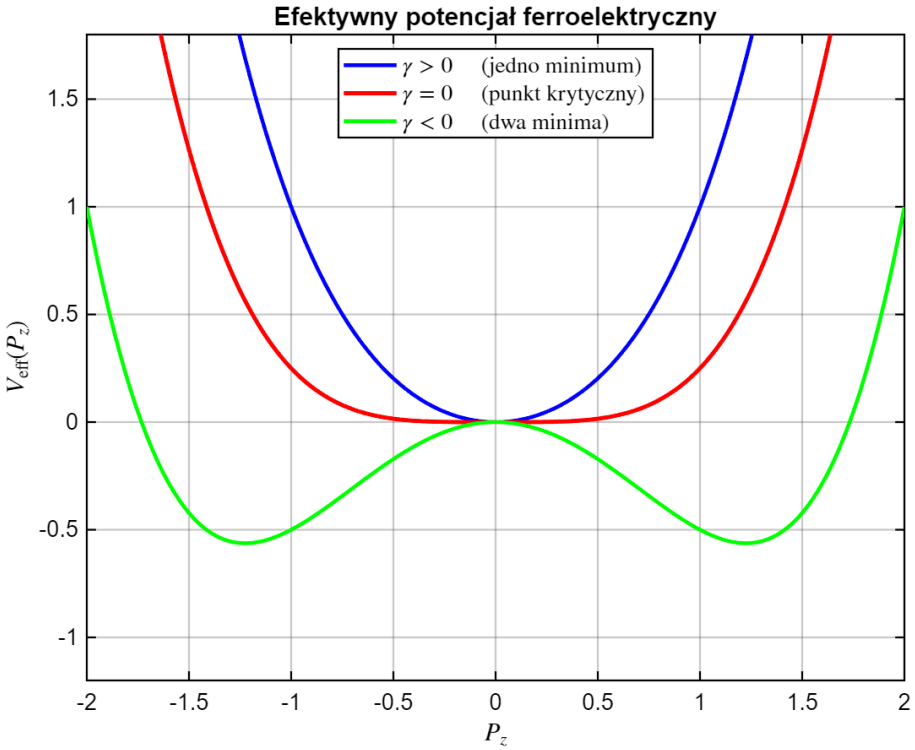
$$V_{\text{eff}}(P_z) = \frac{\gamma}{2} P_z^2 + \frac{\beta}{4} P_z^4, \tag{5.15}$$

Zmiana znaku parametru γ prowadzi do jakościowej zmiany kształtu potencjału $V_{\text{eff}}(P_z)$ — od pojedynczego minimum stabilnego (faza paraelektryczna) do struktury dwuminimowej charakterystycznej dla fazy ferroelektrycznej. Zachowanie efektywnego potencjału przedstawiono na rys. 5.2.

Taka rekonstrukcja krajobrazu energetycznego stanowi punkt wyjścia do dalszej analizy bifurkacji oraz przejść dynamicznych w sprzężonym układzie magnetoelektrycznym, ponieważ zmiana liczby minimów bezpośrednio wpływa na strukturę przestrzeni fazowej i możliwe trajektorie ruchu.

5.3. Bifurkacja Hopfa indukowana sprzężeniem magnetoelektrycznym

W niniejszej sekcji analizowana jest struktura portretu fazowego układu magnetoelektrycznego oraz mechanizm bifurkacji Hopfa wywołanej przez sprzężenie magnetoelektryczne. Punktem wyjścia jest dynamika magnetycznego podukładu



Rys. 5.2. Efektywny potencjał ferroelektryczny $V_{\text{eff}}(P_z)$ dla różnych wartości parametru γ. Dla $\gamma > 0$ potencjał posiada jedno minimum odpowiadające fazie paraelektrycznej, natomiast dla $\gamma < 0$ pojawia się struktura o dwóch minimach charakterystyczna dla stanu ferroelektrycznego. Przypadek $\gamma = 0$ odpowiada punktowi krytycznemu przejścia fazowego. (opracowanie własne).

w przypadku braku sprzężenia magnetoelektrycznego $g_{ME} = 0$ oraz dyssypacji, opisana klasycznym równaniem wahadła nieliniowego [123].

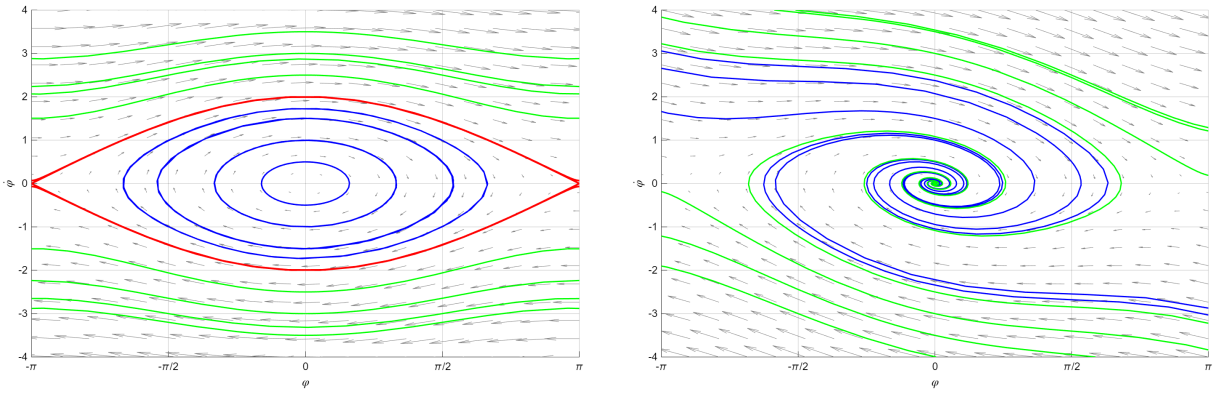
W tym granicznym przypadku równanie ruchu magnetyzacji sprowadza się do postaci

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \sin\varphi \ = 0, \tag{5.16}$$

a analiza lokalnej stabilności punktów stałych $(\varphi,\, \dot{\varphi}) = (0, 0)$ oraz $(0, \pi)$ prowadzona jest na podstawie macierzy Jacobiego. Dla punktu $(0, 0)$ wyznacznik macierzy Jacobiego jest dodatni, a suma wartości własnych wynosi zero, co oznacza istnienie stabilnego centrum. Natomiast punkt $(0, \pi)$ charakteryzuje się ujemnym wyznacznikiem Jacobiego, co identyfikuje go jako punkt siodłowy. Struktura portretu fazowego w tym przypadku zdominowana jest przez heterokliniczne orbity $\mathbb{C}$, które łączą punkty siodłowe i dzielą przestrzeń fazową na obszary trajektorii zamkniętych i otwartych. Wprowadzenie tłumienia Gilberta (α_G) prowadzi do przekształcenia centrów w spirale stabilne, co zostało zilustrowane na rysunkach portretów fazowych (rys. 5.3).

W celu zbadania wpływu sprzężenia magnetoelektrycznego rozważany jest układ równań opisujący sprzężenie magnetycznego stopnia swobody φ ze zmienną adiabatyczną

a) b)



Rys. 5.3. Portrety fazowe dla podsystemu magnetycznego przy braku sprzężenia ME ($g_{ME} = 0$) dla **a)** braku tłumienia Gilberta ($\alpha_G = 0$), **b)** w obecności tłumienia ($\alpha_G > 0$). (opracowanie własne).

ΔI, związaną z dynamiką ferroelektrycznego podukładu.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G\dot{\varphi} + (1 - g'_{ME}\Delta I)\sin\varphi &= 0, \\ \Delta\dot{I} &= V\sin\psi - g_{ME}\cos\varphi, \\ \dot{\psi} &= \varrho\Delta I, \end{aligned} \tag{5.17}$$

gdzie $g'_{ME} = -g_{ME}/\sqrt{\gamma}$, $\varrho = (\frac{d\theta(I)}{dI})$ to nieliniowa masa odwrotna obliczana w pobliżu n-tego rezonansu, $\Psi = \theta - \omega t$, ΔI jest odchyleniem zmiennej akcji od n-tego rezonansu.

W granicy silnego wymuszenia elektrycznego $V \gg g_{ME}$ możliwe jest iteracyjne rozwiązanie powyższego układu równań. W tym reżimie dynamika podukładu ferroelektrycznego może być analizowana w przybliżeniu Hamiltonowskim, co pozwala na wprowadzenie zmiennych akcja–kąt oraz identyfikację adiabatycznej zmiennej działania.

Szczegółowe wyprowadzenie rozwiązania Hamiltonowskiego oraz konstrukcja zmiennej adiabatycznej przedstawione zostały w pracy [117]. Wykorzystując otrzymany tam wynik, maksymalna wartość uśrednionej zmiennej adiabatycznej przyjmuje postać

$$\langle\Delta I\rangle = \frac{\pi}{2K(k)}\sqrt{\frac{E_f + V}{\varrho}}, \tag{5.18}$$

gdzie $K(k)$ oznacza zupełną całkę eliptyczną drugiego rodzaju.

Uwzględniając powyższy wynik, macierz Jacobiego dla zlinearyzowanego podukładu magnetycznego przyjmuje postać

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -(1 - g'_{ME}\langle\Delta I\rangle)\cos\varphi \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.19}$$

Charakter punktów stałych wyznaczany jest na podstawie śladu $\mathrm{Tr}(J)$ oraz wyznacznika $\det(J)$ macierzy Jacobiego. Pamiętając, że:

- $\det(J) < 0$ odpowiada punktowi siodłowemu,
- $\det(J) > 0$ oraz $\mathrm{Tr}(J) < 0$ odpowiada spiralom stabilnym,
- przejście przez $\det(J) = 0$ oznacza zmianę typu punktu stałego.

Punkt stały $(0, 0)$

Dla $\varphi = 0$ wyznacznik maiecrzy Jacobiego przyjmuje postać

$$\det(J) = 1 - g'_{ME}\langle \Delta I \rangle. \tag{5.20}$$

Jeżeli $g'_{ME}\langle \Delta I \rangle < 1$, wówczas $\det(J) > 0$ oraz $\mathrm{Tr}(J) = -1 < 0$, co oznacza stabilną spiralę. Wartości własne mają postać

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\alpha_G \pm 2i\sqrt{1 - g'_{ME}\langle \Delta I \rangle - \frac{\alpha_G^2}{4}}\right), \tag{5.21}$$

co odpowiada tłumionym oscylacjom wokół stanu równowagi.

Po przekroczeniu progu $g'_{ME}\langle \Delta I \rangle = 1$, wyznacznik zmienia znak ($\det(J) < 0$) i punkt stały przekształca się w punkt siodłowy. Oznacza to utratę stabilności lokalnej.

Punkt stały $(0, \pi)$

Dla $\varphi = \pi$ wyznacznik przyjmuje postać

$$\det(J) = g'_{ME}\langle \Delta I \rangle - 1. \tag{5.22}$$

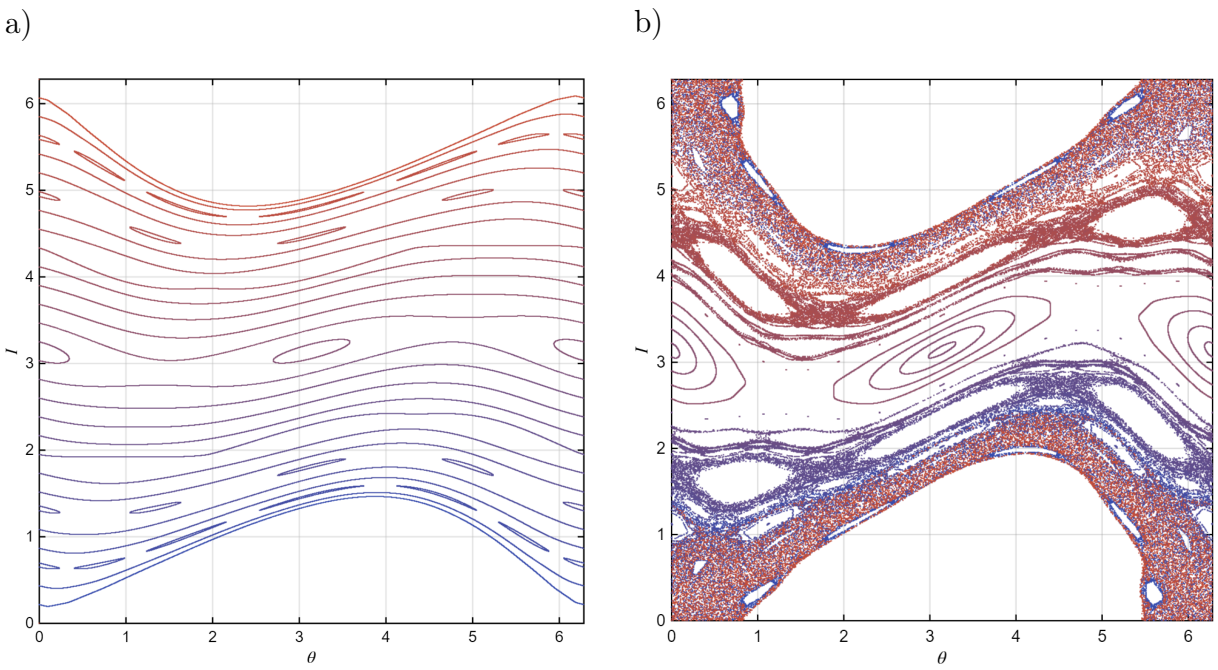
W tym przypadku warunki stabilności są odwrócone: dla $g'_{ME}\langle \Delta I \rangle > 1$ punkt jest spiralą stabilną, natomiast dla $g'_{ME}\langle \Delta I \rangle < 1$ staje się punktem siodłowym. Z powyższej analizy wynika, że parametr $g'_{ME}\langle \Delta I \rangle$ kontroluje zamianę stabilności punktów stałych. W szczególności w pobliżu wartości progowej dochodzi do zmiany charakteru pary sprzężonych wartości własnych. W przypadku gdy część rzeczywista wartości własnych przechodzi przez zero przy zachowaniu niezerowej części urojonej, spełnione są warunki bifurkacji Hopfa. Oznacza to przejście od stabilnego punktu stałego do stabilnego cyklu granicznego.

Bifurkacja Hopfa zachodzi w momencie, gdy część rzeczywista pary sprzężonych wartości własnych przechodzi przez zero, tj. gdy wyrażenie pod pierwiastkiem zmienia znak. Oznacza to, że sprzężenie magnetoelektryczne bezpośrednio kontroluje przejście od stabilnego punktu stałego do stabilnego cyklu granicznego.

W celu zrozumienia mechanizmu przejścia od dynamiki regularnej do chaotycznej konieczne jest krótkie odwołanie do formalizmu Kolmogorowa–Arnolda–Mosera (KAM) [4, 95, 96], opisującego zachowanie niemal całkowalnych układów Hamiltonowskich.

Rozważmy najpierw układ całkowalny, którego dynamika może zostać opisana w zmiennych akcja–kąt (I, θ). W takim przypadku ruch odbywa się na niezmienniczych torusach w przestrzeni fazowej, a częstości drgań zależą jedynie od zmiennych działania. Trajektorie są quasiperiodyczne, a przestrzeń fazowa wypełniona jest rodziną gładkich torusów.

Jeżeli do układu całkowalnego wprowadzona zostanie niewielka perturbacja, twierdzenie KAM stwierdza, że znaczna część niezmienniczych torusów przetrwa deformację, pod warunkiem że spełnione są odpowiednie warunki nierozsynchronizowania częstości (warunki typu Diophantine). Oznacza to, że dynamika pozostaje w dużej mierze regularna, przestrzeń fazową dla słabych perturbacji przedstawiono na rys. 5.4a.



Rys. 5.4. Przestrzeń fazowa dla zmiennych akcja–kąt (I, θ) dla teorii KAM **a)** słaba perturbacja, trajektorie są dobrze widoczne, **b)** niszczenie torusów w pobliżu rezonansu nieliniowego. (opracowanie własne).

Sytuacja zmienia się w pobliżu rezonansów nieliniowych, gdzie stosunki częstości przyjmują wartości wymierne. W tych obszarach torusy stają się podatne na destrukcję, a ich zniszczenie prowadzi do powstawania stref chaotycznych, sytuację tę przedstawiono na rys. 5.4b. W szczególności w pobliżu linii separacyjnych układu wahadłowego częstości drgań dążą do zera, co prowadzi do naruszenia warunków twierdzenia KAM i sprzyja globalnemu mieszaniu trajektorii w przestrzeni fazowej.

Dla dalszej analizy globalnej dynamiki rozważany jest bezdyssypacyjny limit układu, w którym całkowity Hamiltonian w kategoriach kanonicznych zmiennych akcja–kąt można

zapisać jako

$$\begin{aligned} H_{tot} &= H_0 + U, \\ H_0 &= \frac{\varrho(\Delta I)^2}{2} + V\cos\psi + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi, \\ U &= -g_{ME}\Delta I\cos\varphi, \end{aligned} \tag{5.23}$$

gdzie $(\Delta I, \psi)$ to kanoniczne zmienne akcja–kąt podsystemu ferroelektrycznego, φ kanoniczna sprzężona magnetyczna zmienna kątowa. W celu zbadania degeneracji w układzie wyznaczamy Hesjan:

$$\mathcal{D} = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H_0}{\partial(\Delta I)^2} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial\Delta I\ \partial I} \\ \frac{\partial^2 H_0}{\partial I\ \partial\Delta I} & \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \end{bmatrix}. \tag{5.24}$$

Analiza asymptotyczna prowadzi do

$$\mathcal{D}(k_m \ll 1) = -\frac{3\varrho}{8}, \qquad \mathcal{D}(k_m \gg 1) = \frac{\varrho}{2}, \qquad \mathcal{D}(k_m = 1) = 0, \tag{5.25}$$

co oznacza, że w pobliżu linii separacyjnych magnetycznego wahadła spełniony jest warunek załamania twierdzenia KAM. W tym reżimie większość niezmienniczych torusów ulega zniszczeniu, a w układzie pojawia się silny chaos deterministyczny.

Uzyskane wyniki pokazują, że już na poziomie deterministycznej dynamiki o niskim wymiarze sprzężenie magnetoelektryczne pełni rolę efektywnego parametru sterującego, zdolnego do jakościowej zmiany charakteru ruchu układu. Bifurkacja Hopfa wyznacza granicę pomiędzy relaksacyjną dynamiką punktu stałego a oscylacjami o skończonej amplitudzie, których istnienie jest bezpośrednią konsekwencją nieliniowego sprzężenia pomiędzy stopniami swobody ferroelektrycznymi i magnetycznymi.

Jednocześnie należy podkreślić, że analizowany układ nie jest autonomicznym oscylatorem o jednym stopniu swobody. Obecność zewnętrznych wymuszeń o różnych skalach czasowych, nieliniowego potencjału ferroelektrycznego oraz sprzężenia magnetoelektrycznego prowadzi do sytuacji, w której przestrzeń fazowa ma strukturę wielowymiarową, a dynamika układu może wykazywać silną wrażliwość na warunki początkowe.

W szczególności, w pobliżu linii separacyjnych i granic stabilności cykli granicznych, niewielkie zaburzenia parametrów lub energii początkowej mogą prowadzić do rozpadu niezmienniczych torusów w sensie twierdzenia KAM oraz do pojawienia się ruchu nieregularnego. Mechanizm ten jest charakterystyczny dla nieliniowych układów Hamiltonowskich słabo zaburzonych dyssypacją i stanowi naturalny punkt wyjścia do analizy chaosu deterministycznego.

W kolejnej części pracy dynamika sprzężonego układu magnetoelektrycznego zostanie zatem przeanalizowana z punktu widzenia teorii chaosu, z wykorzystaniem narzędzi takich jak przekroje Poincarégo, wykładniki Lapunowa oraz fraktalne właściwości atraktorów. Pozwoli to na ilościową charakterystykę przejścia od ruchu regularnego do chaotycznego oraz na powiązanie obserwowanych zjawisk z nieliniowym charakterem sprzężenia magnetoelektrycznego.

5.4. Słaba nieliniowość jako granica regularnej dynamiki

Naturalnym krokiem pomiędzy analizą bifurkacji Hopfa a pełnym opisem chaosu w układach hybrydowych jest zbadanie dynamiki w reżimie słabej nieliniowości, gdzie ruch pozostaje regularny, lecz ujawnia już mechanizmy prowadzące do utraty stabilności. W tym zakresie możliwe jest jeszcze zastosowanie metod perturbacyjnych, które pozwalają jednoznacznie zidentyfikować granice obowiązywania opisu liniowego.

Rozważamy dynamikę układu w pobliżu punktu równowagi magnetycznej, zakładając małe odchylenia kąta magnetyzacji ($\varphi \ll 1$), co pozwala przyjąć aproksymacje

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \sin\varphi = \varphi. \tag{5.26}$$

Przy dodatkowym założeniu $\gamma|P_z| > \beta|P_z|^3$ układ równań ruchu można sprowadzić do postaci

$$\begin{aligned} \frac{d^2P_z}{dt^2} + \alpha_G\frac{dP_z}{dt} + \gamma P_z + \beta P_z^3 - g_{ME}\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) &= V_0\sin(\omega t), \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G\frac{d\varphi}{dt} &= -\varphi + g_{ME}P_z\varphi. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Warunek $\gamma|P_z| > \beta|P_z|^3$ oznacza, że analizujemy dynamikę w reżimie słabej nieliniowości podukładu ferroelektrycznego, w którym wkład liniowy w rozwinięciu potencjału Landaua dominuje nad członem sześciennym. Innymi słowy, amplituda polaryzacji pozostaje dostatecznie mała, aby zachować lokalnie quasi-harmoniczny charakter ruchu, przy jednoczesnym uwzględnieniu pierwszych poprawek nieliniowych. Już na tym etapie widoczna jest multiplikatywna postać sprzężenia magnetoelektrycznego: polaryzacja $P_z(t)$ nie działa jako zewnętrzna siła wymuszająca, lecz modyfikuje efektywny współczynnik przy φ, a tym samym chwilową częstość własną oscylacji magnetycznych. Oznacza to, że sprzężenie ma charakter parametryczny, co w dalszej analizie prowadzi do redukcji

równania magnetycznego do postaci równania Mathieu i umożliwia powstawanie niestabilności parametrycznych.

Aby rozdzielić dynamikę liniową i nieliniową, równania (5.27) zapisujemy w postaci

$$\begin{aligned} \ddot{P}_z + \gamma P_z &= N(P_z, \dot{P}_z, \varphi, \dot{\varphi}, t), \\ \ddot{\varphi} + \varphi &= M(P_z, \dot{P}_z, \varphi, \dot{\varphi}, t), \end{aligned} \tag{5.28}$$

gdzie $N(\dots)$ oraz $M(\dots)$ traktowane są jako małe nieliniowe poprawki do równań liniowych. W przypadku nierezonansowym ($\sqrt{\gamma} \neq \omega \neq 1$) rozwiązania części liniowej przyjmują postać oscylacyjną

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= A_1 \sin(t + \alpha_1), \\ P_{z0}(t) &= A_2 \sin(\sqrt{\gamma} t + \alpha_2) + B \sin \omega t, \end{aligned} \tag{5.29}$$

z amplitudą wymuszenia $B = V_0/(\gamma - \omega)$.

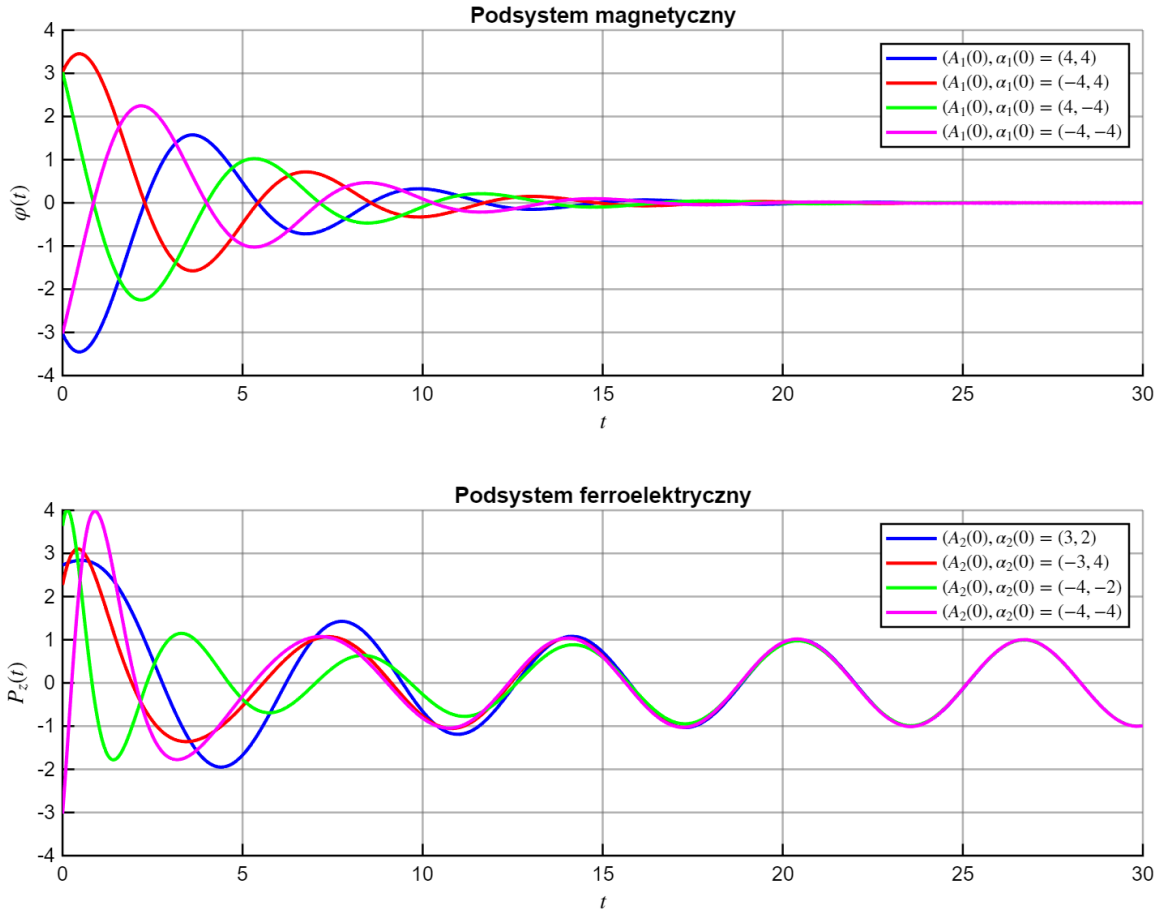
Zastosowanie uogólnionej metody Van der Pola [21] prowadzi do równań ewolucji amplitud i faz, które po uśrednieniu po szybkich zmiennych dają rozwiązania asymptotyczne

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= A_1(0) e^{-\alpha_G t/2} \sin(t + \alpha_1(0)), \\ P_z(t) &= A_2(0) e^{-\alpha_G t/2} \sin\left[\left(\sqrt{\gamma} - \frac{3\beta B^2}{4\sqrt{\gamma}} \right) t - \frac{\beta A_2^3(0)}{4\sqrt{\gamma}\alpha_G} \left(1 - e^{-3\alpha_G t/2} \right) + \alpha_2(0) \right] \\ &\quad + B \sin \omega t. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Z równań (5.30) wynika, że w reżimie słabej nieliniowości podsystem magnetyczny relaksuje do spiralnego atraktora (amplituda φ dąży do 0), natomiast podsystem ferroelektryczny osiąga cykl graniczny (amplituda P_z dąży do regularnych oscylacji), którego częstotliwość ulega nieliniowemu przesunięciu. Zmiany amplitud (φ, P_z) w czasie pokazana na rys. 5.5, a przestrzenie fazowe ukazujące odpowiednio stabilną spiralę i cykl graniczny przedstawiono na rys. 5.6

Dalsze zagęszczenie widma częstotliwości następuje w przypadku rezonansu nieliniowego, gdy $\omega_0^2 = (p/q)^2 \omega^2 + \beta\Delta$, gdzie p, q to liczby całkowite, a Δ to małe roztrojenie. Wówczas, stosując metodę Bogolubowa [13], otrzymuje się równania amplitudowo-fazowe

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\alpha_G}{2} a - \frac{V_0}{2\omega} \cos\theta, \\ \dot{\theta} &= \frac{\beta\Delta}{2\omega} + \frac{3\beta a^2}{8\omega} + \frac{V_0}{2a} \sin\theta, \end{aligned} \tag{5.31}$$



Rys. 5.5. Panel górny wykres zmian podysystemu magnetycznego φ w czasie dla różnych warunków początkowych $(A_1(0), \alpha_1(0))$, w każdym przypadku φ osiąga 0 co definiuje stabilną spiralę. Panel dolny wykres zmian podsystemu ferroelektrycznego P_z w czasie dla różnych warunków początkowych $(A_2(0), \alpha_2(0))$, układ stabilizuje się w postaci oscylacji, co definiuje cykl graniczny. (opracowanie własne).

prowadzące do charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej w warunkach równowagi $(\dot{a} = 0, \dot{\theta} = 0)$

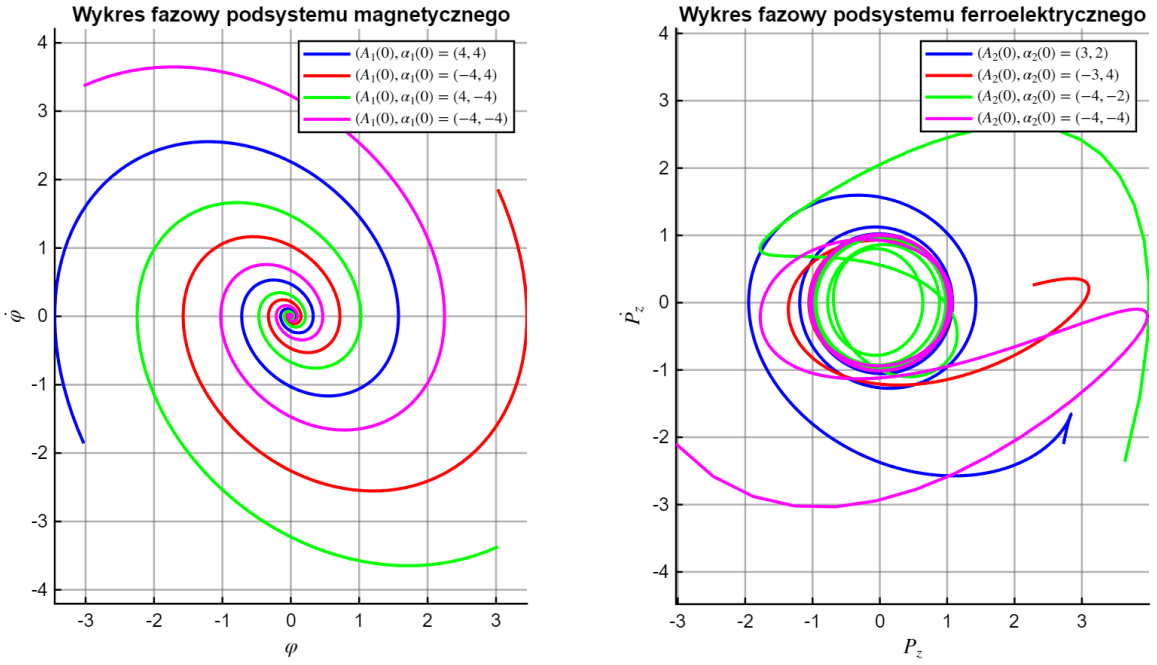
$$a^2 \left[\left(\frac{3\beta}{8} a^2 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{2} \right)^2 + \frac{\omega^2 \alpha_G^2}{4} \right] = \frac{V_0^2}{4}. \tag{5.32}$$

Kluczowym rezultatem tej analizy jest fakt, że rozwiązanie dla podsystemu magnetycznego przyjmuje postać równania o parametrycznie modulowanym współczynniku

$$\ddot{\varphi} + \alpha_G \dot{\varphi} + [1 - a g_{ME} \cos(\omega t + \theta)] \varphi = 0, \tag{5.33}$$

które stanowi bezpośredni punkt wyjścia do analizy niestabilności parametrycznych, rezonansów Mathieu oraz destrukcji niezmienniczych torusów.

W tym sensie reżim słabej nieliniowości wyznacza granicę pomiędzy regularną dynamiką a chaosem, a dalsze zwiększanie siły sprzężenia magnetoelektrycznego prowadzi do łamania



Rys. 5.6. Wykresy fazowe podsystemu magnetycznego (lewy panel) oraz ferroelektrycznego (prawy panel) dla różnych warunków początkowych. Dobrzy widoczny charakter atraktorów definiowany przez równanie (5.30). (opracowanie własne).

warunków twierdzenia KAM i pojawienia się deterministycznego chaosu, co zostanie omówione w kolejnej sekcji.

5.5. Rezonans parametryczny magnetoelektryczny

W poprzedniej części wykazano, że w granicy słabej nieliniowości dynamika układu pozostaje regularna, a oddziaływanie magnetoelektryczne prowadzi do tłumionych oscylacji magnetycznych oraz stabilnego cyklu granicznego w podsystemie ferroelektrycznym. Naturalnym kolejnym krokiem jest analiza sytuacji, w której oscylacje ferroelektryczne modulują parametry efektywnego potencjału magnetycznego, prowadząc do rezonansu parametrycznego.

Punktem wyjścia jest równanie ruchu podsystemu magnetycznego otrzymane w poprzedniej sekcji (5.33). Wprowadzając notację $2\tau = \omega t + \theta$, równanie to można zapisać w postaci

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma_M \dot{\varphi} + \left(\delta^2 + \mu^2 + \zeta \cos 2\tau\right) \varphi = 0, \tag{5.34}$$

gdzie parametry efektywne dane są zależnościami

$$\delta = \frac{4}{\omega^2}(1 - \alpha_G), \qquad \zeta = \frac{4 a g_{ME}}{\omega^2}, \qquad \mu = \frac{2\alpha_G}{\omega^2}. \tag{5.35}$$

Równanie (5.34) ma postać klasycznego równania Mathieu opisującego rezonans parametryczny w układach nieliniowych.

Rozwiązania równania Mathieu mogą mieć charakter okresowy lub niestabilny, w zależności od relacji pomiędzy parametrami δ i ζ. Zgodnie z teorią Floqueta, rozwiązania okresowe istnieją jedynie wzdłuż określonych krzywych w przestrzeni parametrów, zwanych charakterystykami Mathieu:

$$\frac{4}{\omega^2}(1-\alpha_G) = A_n\left[\frac{4a'(\omega)g_{ME}}{\omega^2}\right], \tag{5.36}$$

gdzie $A_n(\zeta)$ oznaczają charakterystyczne wartości równania Mathieu, a $a'(\omega)$ jest rzeczywistym rozwiązaniem równania (5.32).

Poza tymi krzywymi dynamika magnetyczna ulega niestabilności parametrycznej, objawiającej się wykładniczym wzrostem amplitudy oscylacji. Fizycznie oznacza to, że energia dostarczana do układu przez zewnętrzne pole elektryczne jest przekazywana do podsystemu magnetycznego za pośrednictwem sprzężenia magnetoelektrycznego, kompensując straty związane z tłumieniem Gilberta.

Dla niewielkich wartości parametru modulacji ζ charakterystyki Mathieu przyjmują asymptotyczną postać $A_n(\zeta) \approx n^2$, natomiast dla silniejszego sprzężenia magnetoelektrycznego pojawiają się szerokie obszary niestabilności parametrycznej. Granice tych obszarów wyznaczają tzw. języki Arnolda, które stanowią naturalny próg przejścia od ruchu okresowego do złożonej dynamiki nieliniowej.

Rezonans parametryczny pełni w badanym układzie rolę mechanizmu przygotowującego przejście do chaosu. Wzrost amplitudy oscylacji magnetycznych prowadzi do wzmocnienia nieliniowych składników równań ruchu, co skutkuje destrukcją niezmienniczych torusów i zanikiem opisu perturbacyjnego. W kolejnym rozdziale analizowany jest już bezpośrednio reżim silnej nieliniowości, w którym dynamika układu przejawia cechy chaosu deterministycznego, takie jak struktury fraktalne, dodatnie wykładniki Lapunowa oraz wrażliwość na warunki początkowe.

5.6. Chaos i nieliniowość w układach hybrydowych

W poprzednim rozdziale wykazano, że sprzężenie magnetoelektryczne prowadzi do rezonansu parametrycznego w podsystemie magnetycznym, którego istnienie jest ściśle związane z okresową modulacją parametrów dynamicznych przez oscylacje ferroelektryczne. Rezonans ten stanowi granicę stosowalności opisu perturbacyjnego i zapowiada przejście do reżimu silnej nieliniowości.

W niniejszym rozdziale analizowana jest dynamika układu w warunkach, w których amplitudy oscylacji nie są już małe, a oddziaływanie magnetoelektryczne prowadzi do destrukcji niezmienniczych torusów w przestrzeni fazowej. W tym reżimie dynamika układu przejawia cechy chaosu deterministycznego, takie jak wrażliwość na warunki początkowe, struktury fraktalne oraz dodatnie wykładniki Lapunowa.

Podstawowym celem rozdziału jest identyfikacja mechanizmów odpowiedzialnych za powstawanie chaosu w sprzężonych układach ferroelektryczno–magnetycznych oraz określenie roli sprzężenia magnetoelektrycznego w sterowaniu przejściem pomiędzy dynamiką regularną i chaotyczną.

5.6.1. Równania ruchu i zakres analizy

Punktem wyjścia do dalszych rozważań są pełne, nieliniowe równania ruchu sprzężonego układu ferroelektryczno–magnetycznego:

$$\begin{aligned} \frac{d^2P_z}{dt^2} + \alpha_G \frac{dP_z}{dt} + \gamma P_z + \beta P_z^3 - g_{ME}\cos\varphi &= V_0 \sin(\omega t), \\ \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G \frac{d\varphi}{dt} &= -\sin\varphi - g_{ME} P_z \sin\varphi \ . \end{aligned} \tag{5.37}$$

W przeciwieństwie do poprzednich części pracy, nie zakłada się tutaj ani małych amplitud oscylacji, ani słabego sprzężenia magnetoelektrycznego. Obecność członu βP_z^3 w równaniu ferroelektrycznym oraz nieliniowej funkcji $\sin\varphi$ w podsystemie magnetycznym prowadzi do bogatej struktury dynamicznej, w której możliwe są zarówno ruchy regularne, jak i chaotyczne.

Analiza chaosu prowadzona jest w czterowymiarowej przestrzeni fazowej zdefiniowanej przez wektor stanu

$$\mathbf{x}(t) = \left[P_z(t),\, \dot{P}_z(t),\, \varphi(t),\, \dot{\varphi}(t)\right], \tag{5.38}$$

co umożliwia zastosowanie narzędzi teorii układów dynamicznych, takich jak przekroje Poincarégo, wykładniki Lapunowa oraz metody estymacji wymiaru fraktalnego atraktorów.

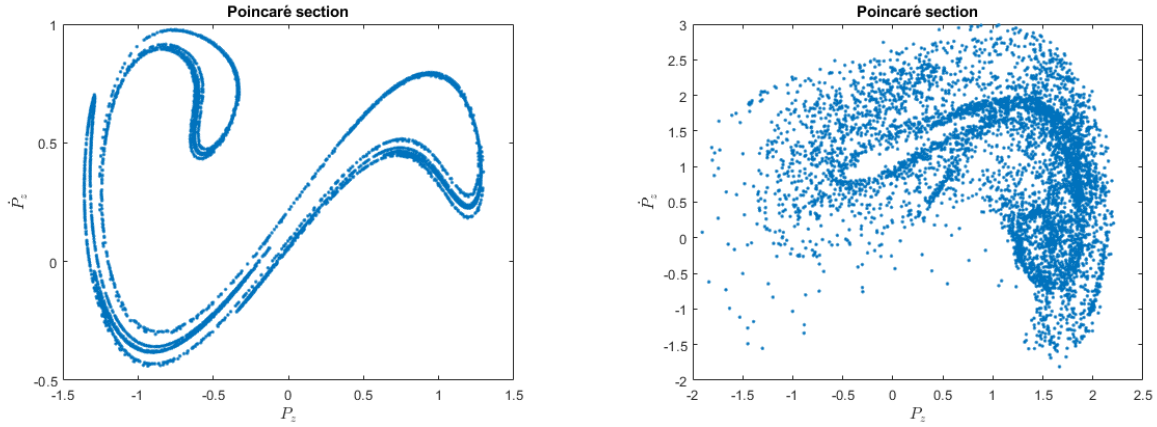
5.6.2. Chaos deterministyczny i przekroje Poincarégo

Jednym z podstawowych narzędzi pozwalających na wizualizację przejścia do chaosu w układach okresowo wymuszanych są przekroje Poincarégo. Metoda ta polega na próbkowaniu trajektorii w przestrzeni fazowej w chwilach $t_n = nT$, gdzie $T = 2\pi/\omega$ jest okresem zewnętrznego wymuszenia.

W niniejszej pracy przekroje Poincarégo konstruowane są poprzez rzut czterowymiarowej przestrzeni fazowej na dwuwymiarową podprzestrzeń związaną

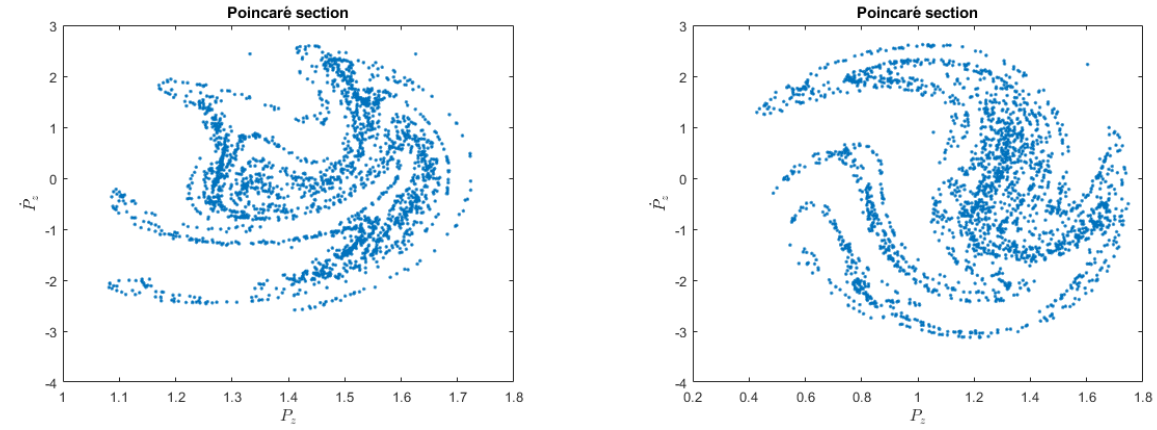
z podsystemem ferroelektrycznym $(P_z, \dot{P}_z)$. Takie podejście pozwala w sposób jednoznaczny rozróżnić dynamikę regularną, quasiperiodiczną oraz chaotyczną.

a) b)



Rys. 5.7. Przekroje Poincarégo dla systemu ferroelektrycznego dla potencjału dwu-dolinowego ($\gamma < 0$) [117], **a)** dla braku sprzężenia ME ($g_{ME} = 0$), **b)** w obecności sprzężenia ME ($g_{ME} = 1$) [117].

a) b)



Rys. 5.8. Przekroje Poincarégo dla systemu ferroelektrycznego dla potencjału jedno-dolinowego ($\gamma > 0$) [117], **a)** dla braku sprzężenia ME ($g_{ME} = 0$), **b)** w obecności sprzężenia ME ($g_{ME} = 1$) [117].

W przypadku braku sprzężenia magnetoelektrycznego ($g_{ME} = 0$) trajektorie w przekroju Poincarégo lokalizują się wokół punktów równowagi odpowiadających minimum potencjału ferroelektrycznego. W zależności od znaku parametru γ obserwowane są struktury charakterystyczne dla potencjału jednodolinowego (rys. 5.7) lub dwudolinowego (rys. 5.8).

Wprowadzenie sprzężenia magnetoelektrycznego prowadzi do jakościowej zmiany topologii przekrojów Poincarégo. Dla odpowiednio dużych wartości g_{ME} regularne

struktury ulegają rozmyciu, a w przestrzeni fazowej pojawiają się nieregularne, samopodobne struktury, będące sygnaturą chaosu deterministycznego. Efekt ten jest szczególnie wyraźny w przypadku potencjału dwudolinowego, gdzie sprzężenie magnetoelektryczne znacząco wzmacnia wrażliwość układu na warunki początkowe.

W kolejnych podrozdziałach ilościowa charakterystyka chaosu zostanie przeprowadzona z wykorzystaniem maksymalnych wykładników Lapunowa oraz metod estymacji wymiaru fraktalnego, co pozwoli na systematyczne porównanie różnych reżimów dynamicznych i ocenę roli sprzężenia magnetoelektrycznego jako parametru sterującego dynamiką układu.

5.6.3. Wykładniki Lapunowa

Przekroje Poincarégo pozwalają na jakościową identyfikację dynamiki chaotycznej, jednak nie dostarczają jednoznacznej, ilościowej miary wrażliwości układu na warunki początkowe. W tym celu w analizie nieliniowych układów dynamicznych powszechnie stosuje się wykładniki Lapunowa, które opisują średnie tempo rozbiegania się trajektorii początkowo położonych blisko siebie w przestrzeni fazowej.

Biorąc pod uwagę dwa rozwiązania równań ruchu (5.37), których stany początkowe różnią się o niewielki wektor

$$\delta_0 = \|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}'(0)\| .$$

W miarę ewolucji układu odległość pomiędzy trajektoriami zmienia się w czasie zgodnie z relacją

$$\delta(t) \sim \delta_0 e^{\lambda t},$$

gdzie λ jest maksymalnym wykładnikiem Lapunowa. Dodatnia wartość λ stanowi jednoznaczne kryterium chaosu deterministycznego, wskazując na wykładniczą wrażliwość dynamiki na warunki początkowe.

W niniejszej pracy maksymalny wykładnik Lapunowa wyznaczany jest numerycznie na podstawie definicji

$$\lambda(g_{ME}) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)\Delta t} \sum_{n=0}^{N} \log \left\| \frac{\delta \mathbf{x}_n}{\|\delta \mathbf{x}_{n-1}\|} \right\|, \tag{5.39}$$

gdzie Δt jest krokiem czasowym integracji, a $\delta \mathbf{x}_n$ oznacza odległość pomiędzy dwiema trajektoriami po n-tym kroku czasowym. W celu uzyskania statystycznie stabilnych wyników wartości wykładnika Lapunowa są uśredniane po zbiorze kilkuset trajektorii o losowo dobranych, bliskich sobie warunkach początkowych.

Analiza wykładników Lapunowa została przeprowadzona dla różnych wartości stałej sprzężenia magnetoelektrycznego g_{ME} oraz dla dwóch jakościowo odmiennych przypadków

potencjału ferroelektrycznego: jedno- i dwudolinowego, odpowiadających odpowiednio $\gamma > 0$ oraz $\gamma < 0$. Uzyskane wyniki zestawiono w tabelach 5.1–5.3.

Tab. 5.1. Wykładnik Lapunova (λ) oraz wymiar fraktalny (D_p) dla różnych wartości sprzężenia ME (g_{ME}) dla parametrów: $\gamma = -1, \beta = 1, \alpha_G = 0,3, V_0 = 0,5, \omega = 1,2$.

g_{ME}	0,00	0,07	0,30	0,43	0,61	0,76	0,90	1,00
λ	0,014	0,022	0,020	0,000	0,000	0,001	0,035	0,030
D_p	1,48	1,34	1,46	0,06	0,02	0,09	1,83	2,02

Źródło: [117]

Tab. 5.2. Wykładnik Lapunova (λ) oraz wymiar fraktalny (D_p) dla różnych wartości sprzężenia ME (g_{ME}) dla parametrów: $\gamma = 1, \beta = 5, \alpha_G = 0,02, V_0 = 8, \omega = 0,5$.

g_{ME}	0,00	0,20	0,56	1,00
λ	0,019	0,022	0,018	0,038
D_p	2,25	2,11	2,28	1,37

Źródło: [117]

Tab. 5.3. Wykładnik Lapunova (λ) oraz wymiar fraktalny (D_p) dla różnych wartości sprzężenia ME (g_{ME}) dla parametrów: $\gamma = -1, \beta = 0,5, \alpha_G = 0,3, V_0 = 0,2, \omega = 1,2$.

g_{ME}	0,00	0,50	0,75	1,00
λ	-0,002	-0,006	0,025	0,031
D_p	0,06	0,05	1,7	1,95

Źródło: [117]

W przypadku potencjału dwudolinowego ($\gamma < 0$) nawet niewielkie wartości sprzężenia magnetoelektrycznego prowadzą do dodatnich wykładników Lapunowa, co wskazuje na silną wrażliwość układu na oddziaływanie pomiędzy podsystemami. Jednocześnie obserwowany jest zakres wartości g_{ME}, dla których wykładnik Lapunowa przyjmuje wartości bliskie zeru, co świadczy o istnieniu wąskich obszarów dynamiki regularnej osadzonych pomiędzy reżimami chaotycznymi.

Dla potencjału jednowymiarowego ($\gamma > 0$) układ wykazuje większą odporność na chaos indukowany sprzężeniem magnetoelektrycznym. W tym przypadku dodatnie wykładniki Lapunowa pojawiają się dopiero dla większych wartości g_{ME}, a dynamika regularna utrzymuje się w szerszym zakresie parametrów.

Otrzymane wyniki jednoznacznie potwierdzają, że sprzężenie magnetoelektryczne pełni rolę parametru sterującego przejściem pomiędzy dynamiką regularną i chaotyczną. Co istotne, przejście to nie ma charakteru monotonicznego — wzrost wartości g_{ME} może zarówno wzmacniać chaos, jak i prowadzić do jego tłumienia w określonych obszarach przestrzeni parametrów.

W celu pełniejszej charakterystyki złożoności obserwowanej dynamiki, w kolejnym podrozdziale zostanie przeprowadzona analiza geometrii atraktorów chaotycznych z wykorzystaniem metod estymacji wymiaru fraktalnego.

5.6.4. Wymiar fraktalny atraktorów

Dodatni wykładnik Lapunowa stanowi jednoznaczne kryterium chaosu deterministycznego, jednak nie dostarcza informacji o geometrycznej strukturze atraktora w przestrzeni fazowej. W tym celu stosuje się analizę wymiaru fraktalnego, który pozwala ilościowo opisać stopień złożoności geometrycznej zbiorów generowanych przez chaotyczną dynamikę. W niniejszej pracy wykorzystano metodę Grassbergera–Procaccia [43], powszechnie stosowaną do estymacji wymiaru korelacyjnego atraktorów niskowymiarowych.

Rozważany jest zbiór punktów $\{\mathbf{x}(t_i)\}$ w przestrzeni fazowej, uzyskanych poprzez próbkowanie trajektorii układu w ustalonym reżimie dynamicznym. Funkcja korelacyjna definiowana jest jako

$$C(\rho) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i,j=1}^{N} \Theta_H \left(\rho - \|\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_j)\|\right), \tag{5.40}$$

gdzie Θ_H oznacza funkcję skokową Heaviside'a, a ρ jest promieniem kuli w przestrzeni fazowej. Funkcja $C(\rho)$ określa prawdopodobieństwo znalezienia dwóch punktów trajektorii w odległości mniejszej niż ρ.

Dla atraktorów fraktalnych funkcja korelacyjna spełnia skalowanie potęgowe

$$C(\rho) \sim \rho^{D_p}, \tag{5.41}$$

gdzie D_p jest wymiarem korelacyjnym atraktora. W praktyce wartość D_p wyznaczana jest jako nachylenie odcinka liniowego wykresu $\log C(\rho)$ w funkcji $\log \rho$, w obszarze skalowania, w którym zależność ta jest dobrze spełniona.

Analiza wymiaru fraktalnego została przeprowadzona dla tych samych zestawów parametrów, dla których wyznaczono wykładniki Lapunowa. Pozwala to na bezpośrednie porównanie miar dynamicznych i geometrycznych chaosu w układzie multiferroicznym. Otrzymane wartości wymiaru fraktalnego zestawiono w tabelach 5.1–5.3.

W przypadku potencjału dwudolinowego ($\gamma < 0$) obserwuje się wyraźny wzrost wymiaru fraktalnego wraz ze wzrostem sprzężenia magnetoelektrycznego g_{ME}, co koreluje z dodatnimi wartościami maksymalnego wykładnika Lapunowa. Dla parametrów, dla których $\lambda \approx 0$, wymiar fraktalny zbliża się do wartości całkowitych, wskazując na quasi-regularny charakter dynamiki. W obszarach silnego chaosu wartości D_p przekraczają

jedność, co świadczy o powstawaniu złożonych, samopodobnych struktur w przestrzeni fazowej.

Dla potencjału jednowymiarowego ($\gamma > 0$) zmiany wymiaru fraktalnego mają charakter mniej gwałtowny, a atraktory pozostają geometrycznie prostsze w szerokim zakresie wartości g_{ME}. Dopiero dla większych wartości sprzężenia magnetoelektrycznego obserwuje się istotny wzrost wymiaru fraktalnego, zgodny z pojawieniem się dodatnich wykładników Lapunowa.

Zestawienie wyników analizy wykładników Lapunowa oraz wymiarów fraktalnych wskazuje jednoznacznie, że sprzężenie magnetoelektryczne nie tylko inicjuje chaos deterministyczny, lecz również kontroluje jego strukturę geometryczną. Co istotne, w pewnych zakresach parametrów obserwowane jest przejście pomiędzy atraktorami chaotycznymi o różnym stopniu złożoności, co potwierdza istnienie bogatej, wieloetapowej dynamiki nieliniowej w badanym układzie.

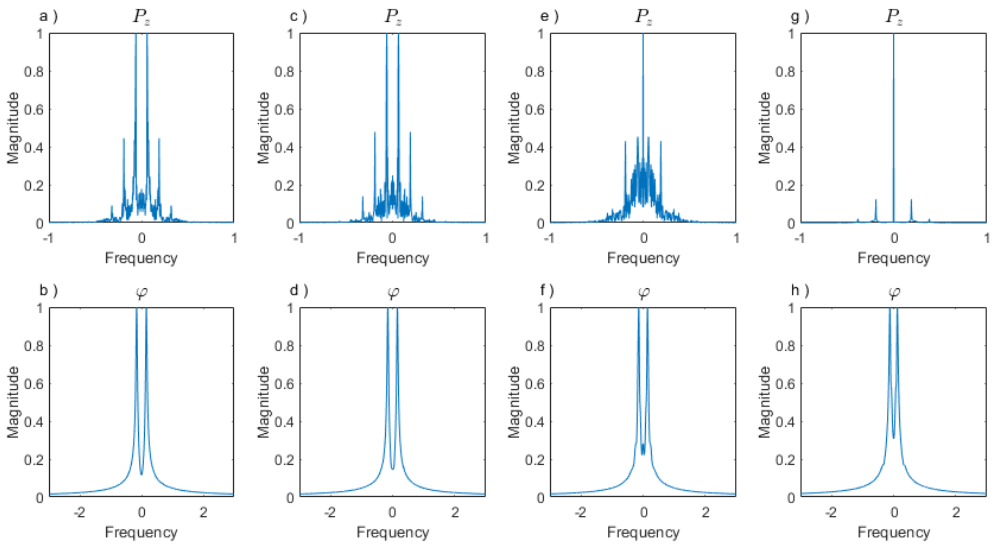
W kolejnym podrozdziale zostanie przeanalizowana struktura widmowa dynamiki ferroelektrycznej i magnetycznej, co umożliwi identyfikację transferu chaosu pomiędzy podsystemami.

5.6.5. Analiza widmowa i transfer chaosu między podsystemami

Analiza wykładników Lapunowa oraz wymiarów fraktalnych dostarcza jednoznacznych kryteriów identyfikacji chaosu deterministycznego, jednak nie pozwala bezpośrednio określić, w jaki sposób złożona dynamika rozkłada się pomiędzy podsystemy ferroelektryczny i magnetyczny. W tym celu szczególnie użyteczna jest analiza widmowa, która umożliwia badanie struktury częstotliwościowej oscylacji oraz identyfikację mechanizmów odpowiedzialnych za powstawanie i transfer chaosu.

W niniejszej pracy zastosowano szybką transformatę Fouriera (FFT) do analizy czasowych przebiegów polaryzacji ferroelektrycznej $P_z(t)$ oraz kąta magnetyzacji $\varphi(t)$. W przypadku dynamiki regularnej widmo sygnału składa się z dyskretnych linii częstotliwościowych, odpowiadających częstościom własnym układu oraz ich kombinacjom nieliniowym. Natomiast dla dynamiki chaotycznej charakterystycznym sygnałem jest poszerzenie widma i pojawienie się quasi-ciągłego rozkładu częstotliwości, stanowiącego jednoznaczny ślad nieregularnej ewolucji w czasie.

Na rysunkach 5.9–5.10 przedstawiono widma Fouriera dla obu podsystemów, wyznaczone dla różnych wartości sprzężenia magnetoelektrycznego g_{ME} oraz różnych form potencjału ferroelektrycznego. Analiza tych wyników ujawnia istotną rolę sprzężenia magnetoelektrycznego jako kanału transferu energii i nieregularności dynamicznych pomiędzy stopniami swobody elektrycznymi i magnetycznymi.



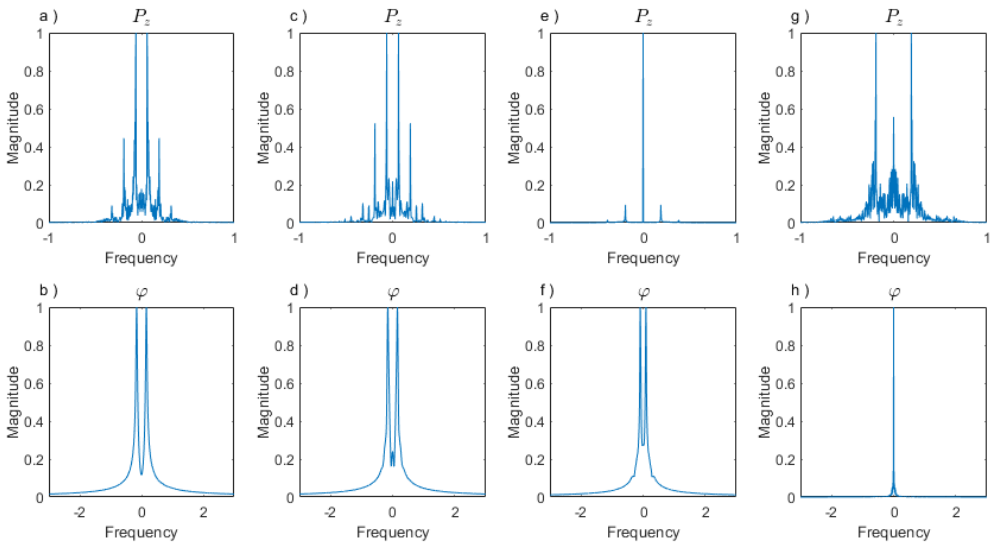
Rys. 5.9. Wykresy FFT dla różnych wartości sprzężenia g_{ME} dla podsystemu elektrycznego P_z (a, c, e, g) i magnetycznego φ (b, d, f, h). Wartości parametrów: $\gamma = -1, \beta = 1, \alpha_G = 0,3, V_0 = 0,5, \omega = 1,2$. Wykresy a) i b) dla $g_{ME} = 0,0$, c) i d) dla $g_{ME} = 0,07$, e) i f) dla $g_{ME} = 0,30$, g) i h) dla $g_{ME} = 0,43$ [117].

W przypadku potencjału dwudolinowego ($\gamma < 0$) obserwuje się, że dla niewielkich wartości g_{ME} chaos może być dominujący w podsystemie ferroelektrycznym, podczas gdy dynamika magnetyczna pozostaje względnie regularna. Wraz ze wzrostem sprzężenia magnetoelektrycznego następuje stopniowe poszerzanie widma magnetycznego, czemu towarzyszy częściowa regularyzacja widma ferroelektrycznego. Zjawisko to wskazuje na transfer chaosu pomiędzy podsystemami, w którym sprzężenie magnetoelektryczne pełni rolę mechanizmu redystrybucji niestabilności dynamicznych.

Odwrotna sytuacja może wystąpić dla innych zestawów parametrów, gdzie chaos inicjowany jest w podsystemie magnetycznym i następnie przenoszony na stopnie swobody ferroelektryczne. Wyniki te jednoznacznie pokazują, że chaos w układach multiferroicznych nie jest właściwością pojedynczego podsystemu, lecz wynika z kolektywnej dynamiki całego układu sprzężonego.

Dla potencjału jednowymiarowego ($\gamma > 0$) widma Fouriera pozostają w dużym zakresie parametrów wąskie, co potwierdza większą stabilność dynamiki ferroelektrycznej w tym przypadku. Dopiero dla silnego sprzężenia magnetoelektrycznego obserwuje się wyraźne poszerzenie widm, zgodne z pojawieniem się dodatnich wykładników Lapunowa oraz wzrostem wymiaru fraktalnego atraktorów.

Analiza widmowa uzupełnia zatem ilościowe miary chaosu, dostarczając intuicyjnego obrazu mechanizmów prowadzących do nieregularnej dynamiki oraz jej przestrzennego rozkładu pomiędzy podsystemami. W szczególności potwierdza ona, że sprzężenie



Rys. 5.10. Wykresy FFT dla różnych wartości sprzężenia g_{ME} dla podsystemu elektrycznego P_z (a, c, e, g) i magnetycznego φ (b, d, f, h). Wartości parametrów: $\gamma = 1, \beta = 5, \alpha_G = 0,02, V_0 = 8, \omega = 0,5$. Wykresy a) i b) dla $g_{ME} = 0,0$, c) i d) dla $g_{ME} = 0,20$, e) i f) dla $g_{ME} = 0,56$, g) i h) dla $g_{ME} = 1,0$ [117].

magnetoelektryczne może zarówno wzmacniać chaos, jak i prowadzić do jego częściowej supresji w jednym z podsystemów kosztem drugiego.

Wyniki te wskazują, że poprzez odpowiedni dobór parametrów zewnętrznych, takich jak amplituda i częstotliwość pola elektrycznego oraz siła sprzężenia magnetoelektrycznego, możliwe jest sterowanie charakterem dynamiki układu — od regularnej, poprzez quasi-okresową, aż po chaotyczną.

5.6.6. Wpływ temperatury i fluktuacji termicznych

Dotychczasowa analiza nieliniowej dynamiki układu magnetoelektrycznego była prowadzona w granicy deterministycznej, co pozwoliło jednoznacznie zidentyfikować mechanizmy bifurkacji, rezonansu parametrycznego oraz chaosu deterministycznego. W rzeczywistych układach multiferroicznych dynamika zachodzi jednak w skończonej temperaturze, a fluktuacje termiczne stanowią istotne źródło niedeterministycznych zaburzeń.

W obecności temperatury T dynamika podsystemu ferroelektrycznego może być opisana równaniem Langevina, równoważnym stacjonarnemu równaniu Fokkera–Plancka:

$$\dot{P}_z = -\alpha_G \frac{\partial (F_f + F_{ME})}{\partial P_z} + \xi(t), \tag{5.42}$$

gdzie $F_f = -\frac{\alpha}{2} p_z^2 + \frac{\beta}{4} p_z^4 - p_z E(t)$ to energia swobodna układu ferroelektrycznego. Natomiast $\xi(t)$ jest białym szumem Gaussa o korelacjach $\langle \xi(t)\xi(0) \rangle = \sigma^2 \delta(t)$, z $\sigma^2 = \alpha_G k_B T / V$, a V to

objętość podsystemu ferroelektrycznego. W tym reżimie dominującą rolę w dynamice polaryzacji odgrywają fluktuacje termiczne oraz pole elektryczne, natomiast sprzężenie magnetoelektryczne może być traktowane jako perturbacja.

W przypadku ferroelektryka o potencjale dwudolinowym polaryzacja staje się zmienną losową, przyjmującą wartości odpowiadające minimom energii swobodnej. Średnia wartość polaryzacji

$$\mathcal{P}(T) = p_{1z}P_1 + p_{2z}P_2 \tag{5.43}$$

zależy jawnie od temperatury poprzez czynniki Boltzmanna. W konsekwencji dynamika magnetyczna przyjmuje postać

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \alpha_G \frac{d\varphi}{dt} + \Big[1 + g_{ME}\mathcal{P}(T)\Big] \sin\varphi = 0. \tag{5.44}$$

Porównując powyższe równanie z analizą stabilności i bifurkacji przeprowadzoną w części deterministycznej, można zauważyć, że temperatura prowadzi do efektywnej renormalizacji parametrów układu. W szczególności średnia polaryzacja $\mathcal{P}(T)$ pełni rolę parametru sterującego, analogicznego do wartości średniej zmiennej adiabatycznej w analizie bifurkacji Hopfa.

Oznacza to, że podstawowe mechanizmy niestabilności dynamicznych, rezonansu parametrycznego oraz przejścia do chaosu pozostają zachowane, jednak ich warunki realizacji stają się funkcją temperatury. W tym sensie fluktuacje termiczne nie znoszą nieliniowej dynamiki układu, lecz modyfikują jej zakres i charakter, co ma kluczowe znaczenie dla interpretacji wyników eksperymentalnych.

5.7. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przeprowadzono kompleksową analizę nieliniowej dynamiki układu magnetoelektrycznie sprzężonego, składającego się z ferroelektrycznego kryształu oraz magnetycznego nanodysku. Głównym celem było zrozumienie roli sprzężenia magnetoelektrycznego jako czynnika sterującego przejściami pomiędzy regularną dynamiką, rezonansami nieliniowymi oraz chaosem deterministycznym.

Wykazano, że poprzez odpowiedni dobór zewnętrznych pól elektrycznych możliwe jest dynamiczne kształtowanie efektywnego potencjału ferroelektrycznego, w tym przejście od pojedynczej studni do potencjału dwudolinowego. Zmiana ta ma kluczowe znaczenie dla dynamiki całego układu, gdyż prowadzi do jakościowo różnych scenariuszy ewolucji w przestrzeni fazowej. W szczególności pokazano, że układ wykazuje znacznie większą wrażliwość na sprzężenie magnetoelektryczne w przypadku potencjału dwudolinowego, co sprzyja powstawaniu niestabilności dynamicznych i chaosu.

Analizę rozpoczęto od opisu Hamiltonowskiego, który pozwolił na identyfikację podstawowych struktur fazowych w granicy słabej dyssypacji. Wykorzystując formalizm zmiennych akcja–kąt oraz twierdzenie Kolmogorowa–Arnolda–Mosera, wykazano istnienie niezmienniczych torusów w przestrzeni fazowej układu hybrydowego. Sprzężenie magnetoelektryczne pełniło w tym kontekście rolę perturbacji prowadzącej do ich destrukcji, zgodnie z przewidywaniami teorii KAM. W reżimie umiarkowanej nieliniowości chaos pojawia się selektywnie w podsystemie magnetycznym, podczas gdy dynamika ferroelektryczna pozostaje regularna. W przypadku silnej nieliniowości, w pobliżu linii separujących, dochodzi do powstania struktur homoklinicznych i chaos obejmuje oba podsystemy, nawet dla arbitralnie małych wartości sprzężenia magnetoelektrycznego.

Istotnym elementem rozdziału była analiza bifurkacji w układzie. Wykazano, że wraz ze wzrostem efektywnej siły sprzężenia magnetoelektrycznego dochodzi do bifurkacji Hopfa, prowadzącej do powstania stabilnych oscylacji lub ich zaniku. W granicy słabej nieliniowości zastosowano metodę Van der Pola w przypadku nierozsynchronizowanym oraz metodę Bogoliubowa w reżimie rezonansowym. Pozwoliło to na analityczne wyprowadzenie charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych oraz na redukcję dynamiki magnetycznej do równania typu Mathieu.

Analiza rezonansu parametrycznego wykazała, że energia może być efektywnie pompowana z podsystemu ferroelektrycznego do magnetycznego, kompensując straty dyssypacyjne. Pokazano, że tylko dla ściśle określonych wartości parametrów — odpowiadających charakterystykom Mathieu — dynamika magnetyzacji pozostaje okresowa. Warunki te mieszczą się w realistycznych zakresach parametrów materiałowych i eksperymentalnych, co podkreśla potencjał aplikacyjny omawianych efektów.

W reżimie silnej nieliniowości i obecności dyssypacji przeprowadzono analizę numeryczną, obejmującą portrety fazowe, przekroje Poincarégo, wykładniki Lapunowa oraz wymiary fraktalne. Wyniki jednoznacznie wskazują na kluczową rolę sprzężenia magnetoelektrycznego w sterowaniu stopniem chaosu oraz w transferze chaotycznej dynamiki pomiędzy podsystemami ferroelektrycznym i magnetycznym.

Na zakończenie rozdziału omówiono jakościowo wpływ skończonej temperatury. Wykazano, że dynamika magnetyzacji może być opisana poprzez średnią termiczną polaryzację ferroelektryczną, wyznaczoną w formalizmie Fokkera–Plancka. Temperatura prowadzi do efektywnej renormalizacji parametrów dynamicznych, nie zmieniając jednak fundamentalnych mechanizmów bifurkacji i niestabilności zidentyfikowanych w analizie deterministycznej.

Podsumowując, rozdział ten dostarcza spójnego i wieloaspektowego obrazu nieliniowej dynamiki układów magnetoelektrycznych, łącząc narzędzia analityczne i numeryczne

oraz wskazując realne możliwości sterowania dynamiką magnetyczną za pomocą pól elektrycznych.

Powyższe wyniki pokazują, że sprzężenie pomiędzy różnymi stopniami swobody — nawet jeśli formalnie słabe — może prowadzić do głębokiej reorganizacji dynamiki układu, obejmującej niestabilności, rezonanse parametryczne oraz chaos deterministyczny. W szczególności wykazano, że sprzężenie magnetoelektryczne umożliwia efektywny transfer energii i niestabilności pomiędzy podsystemami ferroelektrycznym i magnetycznym, prowadząc do powstawania złożonych struktur dynamicznych i fraktalnych w przestrzeni fazowej.

Naturalnym pytaniem, które pojawia się w tym kontekście, jest rola analogicznych mechanizmów w układach kwantowych. W szczególności interesujące jest, czy sprzężenie pomiędzy różnymi podsystemami może pełnić funkcję nośnika korelacji kwantowych oraz w jakim stopniu nieliniowość i rezonanse wpływają na generację i dynamikę splątania.

W kolejnym rozdziale przenosimy te rozważania na grunt układów kwantowych, analizując kryształ foton–magnon jako przykład hybrydowego systemu o silnym sprzężeniu pomiędzy stopniami swobody światła i magnetyzmu. Celem jest zbadanie, w jaki sposób nieliniowość i struktura pasmowa takiego układu wpływają na właściwości splątania oraz na dynamikę korelacji kwantowych z perspektywy nieliniowej.

Rozdział 6.

Splątanie kwantowe w hybrydowych układach foton–magnon

W poprzednim rozdziale wykazano, że sprzężenie magnetoelektryczne w układach hybrydowych prowadzi do istotnych modyfikacji dynamiki klasycznej, obejmujących rezonanse parametryczne, bifurkacje typu Hopfa oraz przejścia do chaosu deterministycznego. Analiza ta ujawniła kluczową rolę nieliniowości i sprzężenia w transferze energii oraz niestabilności pomiędzy różnymi stopniami swobody. Naturalnym krokiem jest zatem rozszerzenie tych rozważań na grunt mechaniki kwantowej i zbadanie, w jaki sposób analogiczne mechanizmy wpływają na powstawanie i dynamikę korelacji kwantowych.

Jednym z najbardziej charakterystycznych przejawów korelacji kwantowych w układach złożonych jest splątanie. W hybrydowych strukturach światło–materia, takich jak kryształy foton–magnon, splątanie nie tylko stanowi fundamentalny problem fizyczny, lecz również odgrywa istotną rolę w kontekście potencjalnych zastosowań w technologiach kwantowych, w tym w przetwarzaniu informacji oraz komunikacji kwantowej. Układy te charakteryzują się obecnością wielu oddziałujących ze sobą modów oraz nieliniową strukturą widma, co czyni je szczególnie podatnymi na efekty wynikające z rezonansów i sprzężeń między różnymi skalami energetycznymi.

W niniejszym rozdziale, bazującym na artykule [115], którego autor rozprawy jest współautorem, analizowany jest kryształ foton–magnon jako modelowy układ hybrydowy, w którym splątanie powstaje w wyniku sprzężenia pomiędzy kwantami pola elektromagnetycznego i wzbudzeniami magnetycznymi. W odróżnieniu od podejść opartych wyłącznie na liniowej teorii odpowiedzi, zastosowana zostaje perspektywa nieliniowa, umożliwiająca uchwycenie subtelnych efektów wynikających z wielomodowości układu oraz nieliniowej dynamiki sprzężonych stopni swobody.

Celem rozdziału jest zbadanie właściwości splątania w zależności od parametrów układu, takich jak siła sprzężenia, struktura pasmowa oraz charakter wzbudzeń, a także identyfikacja mechanizmów prowadzących do jego wzmocnienia lub zaniku. Szczególną uwagę poświęcono roli nieliniowości w generacji splątania oraz związkom pomiędzy dynamiką układu a miarami korelacji kwantowych. Uzyskane wyniki stanowią naturalne rozwinięcie analiz klasycznych przedstawionych w poprzednim rozdziale i tworzą spójną

podstawę do dalszych rozważań dotyczących termalizacji i przepływu informacji w układach wielomodowych.

6.1. Model kryształu fotonowo–magnonowego

Układy hybrydowe łączące stopnie swobody optyczne i magnetyczne stanowią obecnie jeden z kluczowych kierunków badań w fizyce informacji kwantowej oraz nanofotonice. W szczególności sprzężenie foton–magnon umożliwia realizację interfejsów między kwantową optyką a stanami spinowymi w ciałach stałych, otwierając drogę do implementacji protokołów przetwarzania informacji oraz czujników kwantowych.

Klasycznym układem badanym w literaturze jest rezonator optyczny sprzężony z kulą z granatu itrowo–żelazowego (YIG), w którym nieliniowość magnetyczna wynika z magnonowego efektu Kerra (ang. *Magnon Kerr Effect*). W typowej konfiguracji objętość kuli jest jednak stosunkowo duża, co prowadzi do osłabienia efektywnej stałej nieliniowej i ogranicza możliwości jej zewnętrznej kontroli.

W niniejszym rozdziale proponowany jest alternatywny teoretyczny układ: cienka warstwa YIG z periodyczną strukturą otworów, tworząca kryształ fotonowo–magnonowy. Periodyczna modulacja parametrów magnetycznych prowadzi do powstania pasmowej struktury widma magnonowego, w której występuje wyraźne minimum dyspersji. Minimum to stabilizuje kondensat magnonowy, odpowiadający makroskopowo obsadzonemu wybranemu modowi. To właśnie ten mod stanowi aktywny stopień swobody podukładu magnetycznego w dalszej analizie.

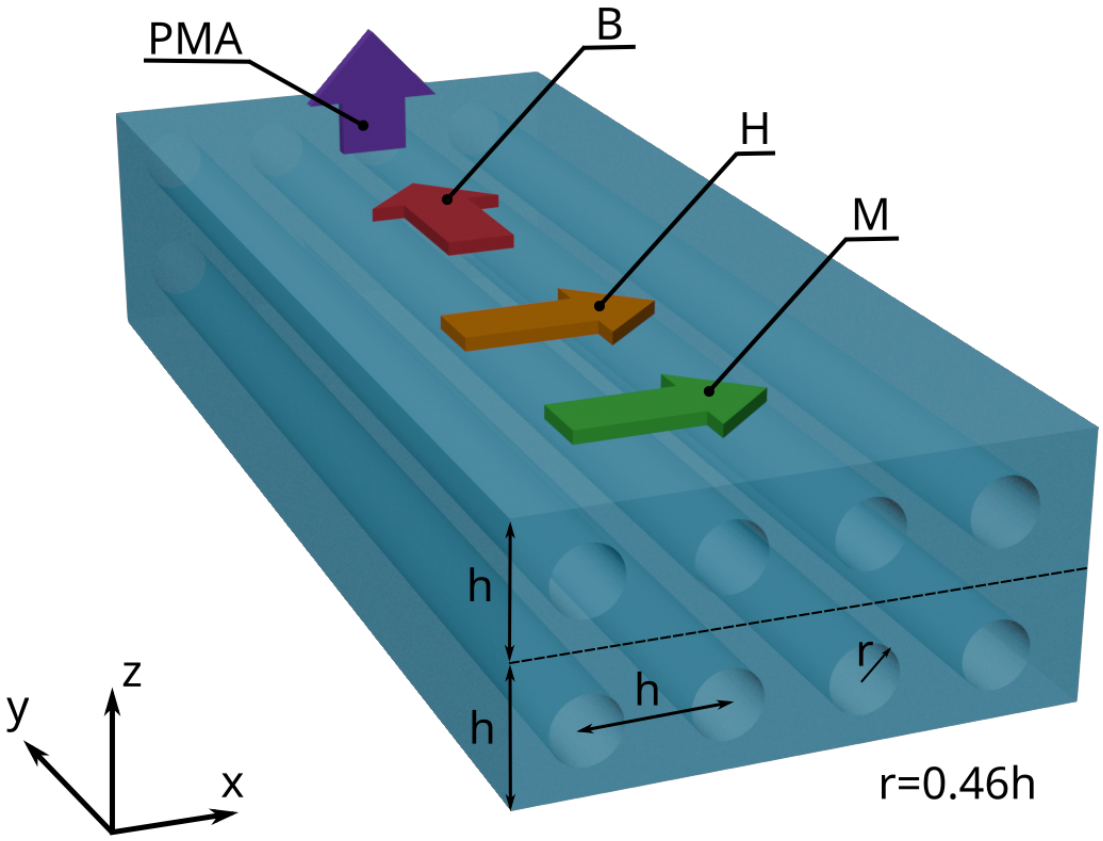
W proponowanym modelu nieliniowość ma inne źródło niż w klasycznej konfiguracji z kulą YIG. Jej mechanizm opiera się na:

- kondensacji magnonów, prowadzącej do wzmocnienia oddziaływań wewnątrzpasmowych,
- domieszkowaniu bizmutem, zwiększającym prostopadłą anizotropię magnetokrystaliczną (PMA) i tym samym efektywną siłę oddziaływań magnon–magnon,
- sprzężeniu magnetoelektrycznym generującym efektywne oddziaływanie Działoszyńskiego–Morii.

W rezultacie efektywna nieliniowość przyjmuje postać oddziaływania analogicznego do efektu Kerra, lecz o znacznie większej i — co istotne — kontrolowalnej sile. Parametrami sterującymi są w tym przypadku natężenie zewnętrznego pola elektrycznego oraz koncentracja domieszki bizmutu.

Istotnym elementem niniejszego podejścia jest odejście od czysto liniowej analizy kwantowej. Zamiast rozpoczynać od zlinearyzowanych równań Langevina wokół ustalonego

stanu stacjonarnego, najpierw wyprowadzony zostaje pełny układ równań nieliniowych dla amplitud i faz modów fotonowego oraz magnonowego. Takie podejście umożliwia analizę topologii punktów stałych, bifurkacji oraz struktur separacyjnych w przestrzeni fazowej. Jak zostanie wykazane w dalszej części rozdziału, topologicznie odmienne obszary przestrzeni fazowej odpowiadają jakościowo różnym właściwościom splątania foton–magnon. Schemat rozważanego układu przedstawiono na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Kryształ fotonowy-magnonowy z periodyczną strukturą otworów o promieniu r, rozmieszczonych w odległości równej okresowi struktury h. Zaznaczono przyłożenie PMA, zewnętrznego zmiennego pola magnetycznego **B**, zewnętrznego stałego pola magnetycznego **H** oraz wypadkowej magnetyzacji **M**. (Na podstawie [115]).

6.1.1. Podukład magnetyczny

Rozważana jest cienka warstwa granatu itrowo–żelazowego z periodyczną strukturą otworów rozmieszczonych w odległości równej okresowi struktury leżącą w płaszczyźnie XOY. Przyjęto geometrię $L_y \gg L_{x,z}$, zmienne zewnętrzne pole magnetyczne **B**, stałe zewnętrzne pole magnetyczne **H** przyłożone wzdłuż osi **x**, co prowadzi do ustawienia wypadkowej magnetyzacji **M** również wzdłuż osi **x**. Dodatkowo uwzględniona została prostopadła anizotropia magnetokrystaliczna (PMA) skierowana wzdłuż osi **z**.

Hamiltonian systemu magnetycznego ma postać

$$\hat{H}_M = \hat{H}_{ex} + \hat{H}_Z + \hat{H}_{dip} + \hat{H}_{an}, \tag{6.1}$$

gdzie $\hat{H}_{ex}$ opisuje oddziaływanie wymienne, $\hat{H}_Z$ oddziaływanie Zeemana, $\hat{H}_{dip}$ sprzężenie dipol–dipol, natomiast człon anizotropowy związany z prostopadłą anizotropią magnetokrystaliczną (PMA) przyjmuje postać

$$\hat{H}_{an} = -K_{an} \sum_i (\mathbf{S}_i \mathbf{z})^2, \tag{6.2}$$

gdzie K_{an} jest stałą anizotropii, a $\mathbf{S}_i$ jest operatorem spinu w węźle sieci i. Szczegółowa analiza Hamiltonianu została przeprowadzona w pracy [37].

Zastosowanie transformacji Holsteina–Primakoffa prowadzi do reprezentacji bozonowej, w której efektywny Hamiltonian magnonowy (ograniczony do procesów wewnątrzpasmowych) przyjmuje postać

$$\hat{H}_m = \sum_q \omega_q \hat{m}_q^\dagger \hat{m}_q + K \sum_q \hat{m}_q^\dagger \hat{m}_q \hat{m}_q^\dagger \hat{m}_q. \tag{6.3}$$

Częstość magnonowa dana jest wyrażeniem $\omega_q = \sqrt{\eta_1^2 - \eta_2^2} - K$, gdzie $\eta_1 = Jq^2 + \gamma_e(H_{0x} + 2\pi\ M_s f_q) - K_{an}S$ oraz $\eta_2 = 2\pi\ M_s f_s - K_{an}S$. Tutaj J oznacza stałą wymiany, M_s magnetyzację nasycenia, γ_e współczynnik giromagnetyczny, f_q i f_s są czynnikami formy wynikającymi z geometrii próbki, natomiast S odpowiada efektywnej wartości spinu w komórce elementarnej YIG. Częstości ω_q leżą w zakresie kilku GHz. Operatory $\hat{m}_q^\dagger$ oraz $\hat{m}_q$ są operatorami kreacji i anihilacji magnonów o wektorze falowym q.

Drugi człon w równaniu (6.3) opisuje wewnątrzpasmowe oddziaływanie magnon–magnon i jest formalnie równoważny nieliniowości typu Kerra. Jego siła, opisana parametrem K, zależy w szczególności od stałej anizotropii K_{an} i może być modyfikowana poprzez domieszkowanie bizmutem lub naprężenia mechaniczne.

6.1.2. Sprzężenie foton–magnon poprzez efekt magnetoelektryczny

YIG wykazuje właściwości magnetoelektryczne, co potwierdzono eksperymentalnie oraz w obliczeniach z pierwszych zasad [68, 92]. W obecności pola elektrycznego w materiale indukowana jest polaryzacja związana z chiralnością spinową. Efektywny człon magnetoelektryczny można zapisać w postaci

$$\hat{H}_{DM} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}, \tag{6.4}$$

gdzie $\mathbf{E}$ jest polem elektrycznym w rezonatorze, natomiast polaryzacja ma postać

$$\mathbf{P} = -E_{EX}\frac{ea_0}{E_{SO}}\sum_i \mathbf{e}_{i,i+1}\times(\mathbf{S}_i\ \times\mathbf{S}_{i+1})\,, \tag{6.5}$$

gdzie a_0 jest odległością jonów magnetycznych, E_{EX} jest stałą wymiany, E_{SO} jest stałą spin-orbita, $\mathbf{e}_{i,i+1}$ to wektor jednostkowy łączący sąsiednie spiny $\mathbf{S}_i$, $\mathbf{S}_{i+1}$. Wyrażenie to odpowiada efektywnemu oddziaływaniu DM, generowanemu przez sprzężenie spin–orbita. Wprowadzając stałą sprzężenia magnetoelektrycznego $g_{ME} = -E_{EX}\frac{eq}{E_{SO}}$, człon ten można interpretować jako oddziaływanie pola elektrycznego z chiralnością spinową.

Pole elektryczne rezonatora kwantujemy w standardowy sposób:

$$\mathbf{E} = i\,\mathbf{U}\sum_k\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right), \tag{6.6}$$

gdzie $\hat{a}_k^\dagger$, $\hat{a}_k$ są operatorami kreacji i anihilacji fotonów, a funkcja modowa $\mathbf{U}(\mathbf{r})$ spełnia równanie Helmholtza.

Ze względu na geometrię struktury ($L_y \gg L_{x,z}$) dominujący mod ma składową U_y. Ponieważ magnetyzacja skierowana jest wzdłuż osi $\mathbf{x}$, istotny wkład do sprzężenia pochodzi z x-składowej chiralności $(\mathbf{S}_i\ \times\mathbf{S}_{i+1})_x$.

W konsekwencji człon magnetoelektryczny przyjmuje uproszczoną postać

$$\hat{H}_{DM} = \frac{D_0}{2}\sum_{i,k}(\mathbf{S}_i\ \times\mathbf{S}_{i+1})_x\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right), \tag{6.7}$$

gdzie $D_0 = U_y g_{ME}$ jest efektywną stałą oddziaływania DM.

Przechodząc do reprezentacji bozonowej (transformacja Holsteina–Primakoffa) oraz do przestrzeni pędu, otrzymujemy efektywny człon sprzężenia

$$\hat{H}_{DM} = D_0\sum_{q,k}\sin(qa_0)\,\hat{m}_q^\dagger\hat{m}_q\left(\hat{a}_k - \hat{a}_k^\dagger\right). \tag{6.8}$$

Hamiltonian ten jest liniowy względem operatorów fotonowych, lecz nieliniowy względem podukładu magnonowego, ponieważ zależy od operatora liczby magnonów $\hat{m}_q^\dagger\hat{m}_q$. Dla wybranego modu kondensatu $q = Q$ Hamiltonian przyjmuje postać

$$\hat{H}_{DM} = iD_0\sin(Qa_0)\,\hat{m}^\dagger\hat{m}\left(\hat{a}\ - \hat{a}^\dagger\right). \tag{6.9}$$

Otrzymane sprzężenie ma charakter intensywnościowy: pole fotonowe oddziałuje z gęstością magnonów. W przeciwieństwie do standardowego liniowego sprzężenia typu Jaynes–Cummings, nie prowadzi ono do bezpośredniej wymiany kwantów między podukładami, lecz moduluje efektywną dynamikę poprzez zależność od obsadzenia

kondensatu. Jak zostanie pokazane w dalszej części rozdziału, po przejściu do przybliżenia półklasycznego struktura ta generuje istotne efekty nieliniowe i wpływa na topologię przestrzeni fazowej układu.

6.2. Całkowity Hamiltonian układu

Rozważany układ stanowi hybrydowy kryształ fotonowo–magnonowy z periodyczną strukturą otworów. Struktura ta pełni podwójną rolę: kształtuje pasmowe widmo magnonowe oraz definiuje rezonator fotonowy o częstotliwości strojonej parametrami geometrycznymi. Całkowity hamiltionian stanowi sumę składowych pochodzących od podukładu magnetycznego ($\hat{H}_M$), podukładu fotonowego ($\hat{H}_F$), sprzężenie foton-magnon ($\hat{H}_{DM}$) oraz pola pompującego ($\hat{H}_P$)

$$\hat{H}_{tot} = \hat{H}_M + \hat{H}_F + \hat{H}_{DM} + \hat{H}_P. \tag{6.10}$$

Podukład magnetyczny. Widmo magnonowe jest szerokie, jednak analizowany jest wyłącznie mod kondensatu odpowiadający głębokiemu minimum dyspersji dla $q = Q$. Dla typowych parametrów pola zewnętrznego częstotliwość tego modu wynosi $\omega_c \approx 2\,\mathrm{GHz}$. Po redukcji do jednego modu Hamiltonian magnetyczny (6.3) ma postać

$$\hat{H}_m = \omega \hat{m}^\dagger \hat{m} + K(\hat{m}^\dagger \hat{m})^2. \tag{6.11}$$

Podukład fotonowy. Periodyczna struktura otworów tworzy jednowymiarowy rezonator fotoniczny o pasmowej strukturze widma. Szczegółowa analiza dyspersji została przedstawiona w pracy [115]. W niniejszej rozprawie ograniczono się do pojedynczego modu rezonansowego o częstotliwości ω_f, bliskiej częstotliwości kondensatu ($\omega_f \approx \omega_c$). Hamiltonian fotonowy przyjmuje postać

$$\hat{H}_F = \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a}\ . \tag{6.12}$$

Sprzężenie foton–magnon. Oddziaływanie wynika z efektu magnetoelektrycznego i ma strukturę efektywnego oddziaływania typu Działoszyńskiego-Morii. W dalszych rozważaniach, ze względu na korzystanie z jednostek bezwymiarowych, przyjęto $a_0 = 1$ co pozwala zapisać równanie (6.9) w postaci

$$\hat{H}_{DM} = \mathrm{i}D\hat{m}^\dagger \hat{m}\left(\hat{a}\ - \hat{a}^\dagger\right), \tag{6.13}$$

gdzie $D = D_0 \sin(Q)$ jest efektywną stałą sprzężenia. Człon ten jest proporcjonalny do liczby magnonów, co nadaje oddziaływaniu charakter intensywnościowy.

Pole pompujące. Układ jest dodatkowo pobudzany oscylującym polem magnetycznym o amplitudzie B i częstotliwości ω_0, co prowadzi do członu

$$\hat{H}_P = \mathrm{i}B\left(\hat{m}^\dagger e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} - \hat{m}e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\right). \tag{6.14}$$

Całkowity Hamiltonian. Sumując wszystkie wkłady, otrzymano efektywny model jedno-modowy

$$\begin{aligned}\hat{H}_{tot} = {} & \omega_f \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega \hat{m}^\dagger \hat{m} + K(\hat{m}^\dagger \hat{m})^2 \\ & + \mathrm{i}B\left(\hat{m}^\dagger e^{-\mathrm{i}\omega_0 t} - \hat{m}e^{\mathrm{i}\omega_0 t}\right) + \mathrm{i}D\hat{m}^\dagger \hat{m}(\hat{a} \ - \hat{a}^\dagger).\end{aligned} \tag{6.15}$$

W dalszej analizie wykorzystano wielkości bezwymiarowe, skalując czas przez częstotliwość kondensatu ω_c oraz energię przez $\hbar\omega_c$. Stałe sprzężenia przeskalowane są jako

$$K \to \frac{K'}{\hbar\omega_c}, \qquad D \to \frac{D'}{\hbar\omega_c}, \qquad \omega_f \to \frac{\omega_f'}{\omega_c}, \qquad \omega \to \frac{\omega'}{\omega_c}, \qquad B \to \frac{\gamma_e B'}{\omega_c}.$$

Hamiltonian (6.15) stanowi minimalny efektywny model opisujący nieliniową dynamikę hybrydowego układu foton–magnon. Struktura sprzężenia, proporcjonalna do liczby magnonów, prowadzi do dynamicznej modulacji rezonatora fotonowego i jest formalnie analogiczna do oddziaływania typu ciśnienie promieniowania znanego z optomechaniki kwantowej. W dalszej części analizy przedstawiono opis półklasyczny, badając strukturę punktów stałych, bifurkacje oraz topologię przestrzeni fazowej układu.

6.3. Dynamika nieliniowa

Nieliniowość w rozważanym układzie wynika z dwóch źródeł: wewnątrzpasmowej nieliniowości typu Kerra ($K(\hat{m}^\dagger \hat{m})^2$) oraz intensywnościowego sprzężenia foton–magnon ($i\ D\hat{m}^\dagger \hat{m}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$). W obecności napędu zewnętrznego oraz tłumienia prowadzi to do bogatej dynamiki poza równowagą.

6.3.1. Od kwantowych równań Langevina do opisu nieliniowego

Dynamika rozważanego układu jest determinowana przez oddziaływanie między podukładem fotonowym i magnonowym, zewnętrzne pole pompujące oraz procesy strat. Ponieważ układ jest otwarty, jego ewolucja nie może być opisana wyłącznie równaniem Schrödingera. Naturalnym formalizmem są kwantowe równania Langevina, które uwzględniają zarówno tłumienie, jak i fluktuacje kwantowe oraz termiczne.

Punktem wyjścia są równania

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}(t)}{dt} &= -i\left[\hat{a}(t),\hat{H}_{tot}\right]-\gamma_f\hat{a}(t)+\sqrt{2\gamma_f}\hat{a}_{in}(t),\\ \frac{d\hat{m}(t)}{dt} &= -i\left[\hat{m}(t),\hat{H}_{tot}\right]-\gamma_m\hat{m}(t)+\sqrt{2\gamma_m}\hat{m}_{in}(t).\end{aligned} \tag{6.16}$$

Pierwszy człon po prawej stronie opisuje unitarną ewolucję generowaną przez Hamiltonian $\hat{H}_{tot}$, drugi odpowiada za dysypację energii z szybkościami γ_f oraz γ_m, natomiast trzeci wprowadza operatory szumu wejściowego. Operatory szumu spełniają relacje korelacyjne

$$\begin{aligned}\langle a_{in}^{\dagger}(t)a_{in}(t')\rangle &= N_a(\omega_f)\delta(t-t'),\\ \langle m_{in}^{\dagger}(t)m_{in}(t')\rangle &= N_m(\omega)\delta(t-t'),\end{aligned} \tag{6.17}$$

gdzie $N(\omega) = [\exp[\hbar\omega/k_BT]-1]^{-1}$ jest rozkładem Bosego–Einsteina. Równania te stanowią pełny kwantowy opis otwartego układu foton–magnon.

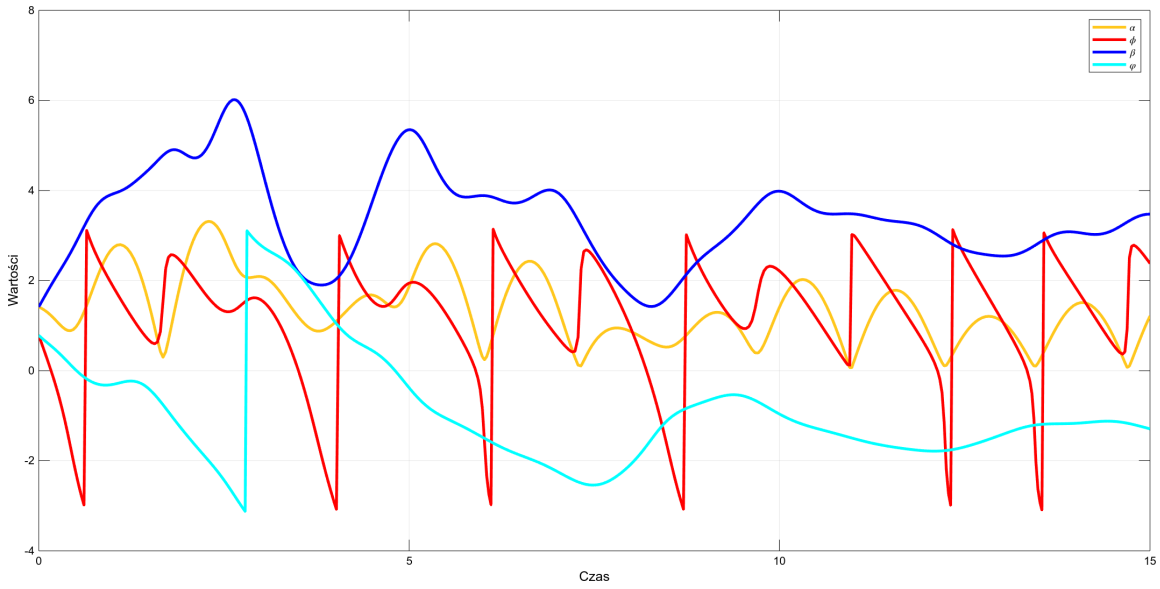
Celem niniejszej analizy jest zbadanie globalnej struktury przestrzeni fazowej, lokalizacji punktów stałych oraz możliwych bifurkacji, dlatego przejście do opisu półklasycznego jest naturalne. Zakłada się, że w stanie stacjonarnym obsadzenia modów mają charakter makroskopowy, co pozwala zastąpić operatory ich wartościami średnimi: $O = \langle\hat{O}\rangle$. Stosuje się ponadto przybliżenie faktoryzacyjne $\langle\hat{m}^{\dagger}\hat{m}\rangle = |m|^2$ oraz pomija fluktuacje kwantowe, koncentrując się na deterministycznej części dynamiki układu.

Aby usunąć jawną zależność czasową pochodzącą od pola pompującego, przechodzi się do obrazu rotującego zgodnie z transformacją $\hat{m} \to \hat{m}\,e^{-i\omega_0 t}$. Następnie wprowadza się reprezentację amplitudowo-fazową: $a = \alpha\,e^{i\phi}$ oraz $m = \beta\,e^{i\varphi}$, gdzie α i β oznaczają amplitudy, natomiast ϕ i φ odpowiadają fazom pól.

Po wykonaniu powyższych operacji kwantowe równania Langevina redukują się do zamkniętego układu czterech nieliniowych równań różniczkowych

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= -D\beta^2\cos\phi-\gamma_f\alpha,\\ \dot{\phi} &= -\omega_f+\frac{D\beta^2}{\alpha}\sin\phi,\\ \dot{\beta} &= -\gamma_m\beta+B\cos\varphi,\\ \dot{\varphi} &= \omega-\omega_0+2D\alpha\sin\phi-2K\beta^2-\frac{B\sin\varphi}{\beta}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Rozwiązanie numeryczne układu równań pozwala uzyskać przebieg zmiennych w czasie (rys. 6.2). Z przedstawionych zależności wyraźnie wynika, że zarówno średnia liczba magnonów β, jak i liczba fotonów α zmieniają się nieregularnie, natomiast fazy ϕ i φ



Rys. 6.2. Zależność średniej wartości magnonów β (linia niebieska), liczba fotonów α (linia żółta) oraz ich faz ϕ (linia czerwona), φ (linia cyjanowa). Widoczna jest złożona nieliniowa charakterystyka układu [115].

ulegają gwałtownym skokom. Zachowanie to wskazuje na występowanie złożonej, nieliniowej dynamiki układu.

Otrzymany układ stanowi czterowymiarowy, nieliniowy system dynamiczny zależny parametrycznie od D, K, B, γ_f oraz γ_m. Nieliniowość pochodzi zarówno od członu Kerra ($-2K\beta^2$), jak i od intensywnościowego sprzężenia ($D\beta^2$), co prowadzi do amplitudowej modyfikacji częstości efektywnej. W rezultacie dynamika faz i amplitud jest wzajemnie sprzężona, a układ może wykazywać bistabilność, przeskoki liczby magnonów oraz złożoną strukturę przestrzeni fazowej. Równania te stanowią punkt wyjścia do dalszej analizy stabilności rozwiązań stacjonarnych oraz badania bifurkacji w funkcji parametrów kontrolnych.

6.3.2. Punkty stałe i struktura przestrzeni fazowej

Dalsza analiza koncentruje się na nieliniowym układzie równań (6.18), który stanowi półklasyczny opis dynamiki układu foton–magnon. Układ ten jest równoważny ze standardowym podejściem w zmiennych kanonicznych stosowanej w literaturze, gdzie wprowadza się współrzędne i pędy w postaci

$$q_m = \sqrt{2}\beta\cos\varphi, \quad p_m = \sqrt{2}\beta\sin\varphi$$

dla modów magnonowych oraz

$$q_a = -\frac{\sqrt{2}D\gamma_f}{\omega_f^2+\gamma_f^2}\beta^2, \quad p_a = -\frac{\sqrt{2}D\omega_f}{\omega_f^2+\gamma_f^2}\beta^2$$

dla modów fotonowych. Transformacja ta pokazuje bezpośrednią korespondencję pomiędzy zaproponowanym tutaj opisem amplitudowo–fazowym a formalizmem stosowanym w analizie splątania.

W większości prac poświęconych splątaniu magnon–foton punktem wyjścia jest linearyzacja równań ruchu wokół stanu stacjonarnego. Procedura ta polega na rozkładzie operatorów na część średnią oraz fluktuacje, np. $\hat{m} = \langle\hat{m}\rangle + \delta\hat{m}$, $\hat{a} = \langle\hat{a}\rangle + \delta\hat{a}$, przy założeniu faktoryzacji $\langle\hat{m}^\dagger\hat{m}\rangle = \langle\hat{m}^\dagger\rangle\langle\hat{m}\rangle$. Następnie przechodzi się do zmiennych kanonicznych $\hat{x}_m = (\hat{m}^\dagger + \hat{m})/2$, $\hat{p}_m = i(\hat{m}^\dagger - \hat{m})/2$ oraz analogicznych dla modów fotonowych i linearyzuje dynamikę względem fluktuacji w otoczeniu rozwiązania stacjonarnego. W tym podejściu stan stacjonarny definiuje średnią liczbę fotonów i magnonów, wokół której analizowane są korelacje kwantowe.

Należy jednak podkreślić, że stan stacjonarny jest w istocie punktem stałym nieliniowego układu dynamicznego. W ogólności punkty stałe mogą mieć różny charakter: mogą być stabilnymi węzłami, spiralami, punktami siodłowymi lub niestabilnymi ogniskami. W układach nieliniowych to właśnie punkty stałe dzielą przestrzeń fazową na obszary o odmiennej dynamice. Charakter splątania w układzie może zatem zależeć od tego, w jakim reżimie dynamicznym znajduje się system, czyli od typu punktu stałego.

Przed przejściem do konstrukcji macierzy kowariancji i analizy splątania, konieczne jest zbadanie struktury przestrzeni fazowej oraz klasyfikacja punktów stałych układu (6.18). W tym celu wykorzystano metody teorii układów dynamicznych.

Punkty stałe wyznaczono z warunku zaniku pochodnych czasowych. Otrzymano układ równań stacjonarnych:

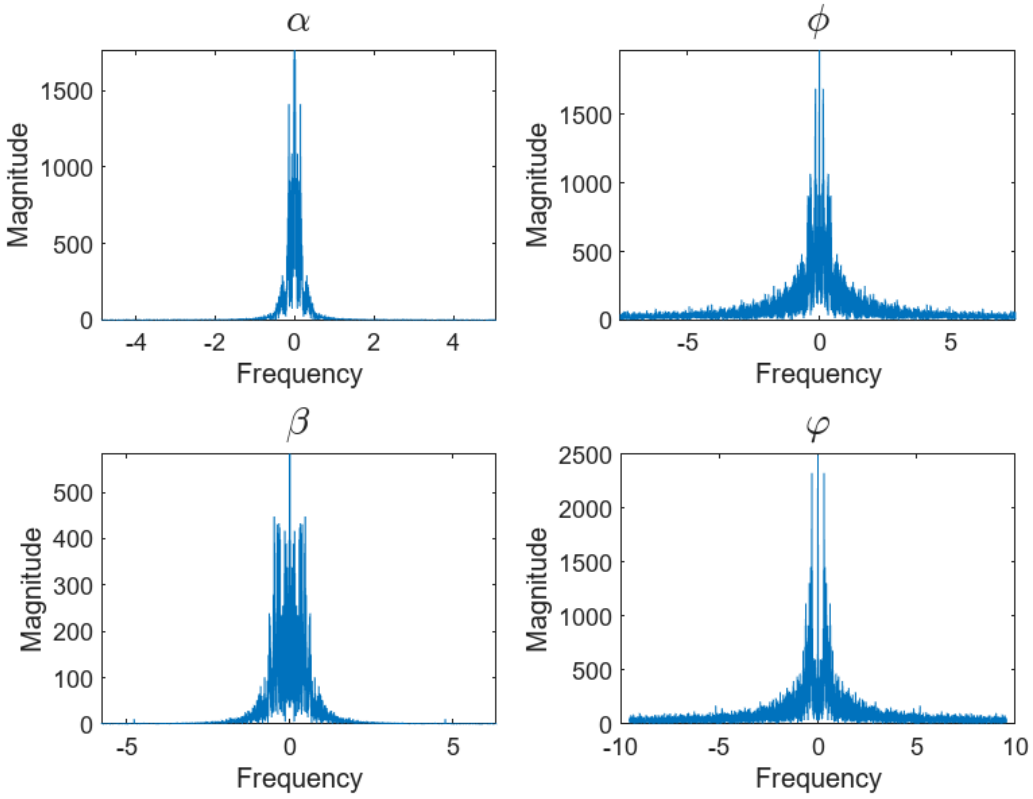
$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= \frac{D\beta^4}{\omega_f^2+\gamma_f^2}, \\
\phi &= -\arctan(\omega_f/\gamma_f), \\
\Delta_m\left[\gamma_m^2 + (\omega_0 - \omega + \Delta_m)^2\right] &= \delta_K B^2, \\
\tan\varphi &= \frac{\omega_0 - \omega + 2D\alpha\sin\phi - 2K\beta^2}{\gamma_m},
\end{aligned} \tag{6.19}$$

gdzie wprowadzono oznaczenia $\Delta_m = \beta^2\delta_K$ oraz $\delta_K = \left(\frac{2D^2\omega_f}{\omega_f^2+\gamma_f^2} - 2K\right)$.

Równania (6.19) stanowią istotę problemu nieliniowego, ponieważ amplitudy α oraz β są rozwiązaniami równań algebraicznych wyższych rzędów zależnych parametrycznie od D, B oraz K. W szczególności trzecie równanie ma charakter efektywnego równania

rezonansowego z nieliniowym przesunięciem częstości zależnym od obsadzenia magnonowego. Oznacza to, że detuning efektywny zależy od samego rozwiązania, co jest typową cechą oscylatora Duffinga.

Numeryczne rozwiązania równań (6.18) pokazują, że poza obszarem stabilnego punktu stałego dynamika może być nieregularna, z widocznym poszerzeniem widma Fouriera (rys. 6.3). Wskazuje to na obecność chaosu deterministycznego, co dodatkowo podkreśla konieczność pełnej analizy nieliniowej przed zastosowaniem formalizmu liniowego.



Rys. 6.3. Wykresy szybkiej transformaty Fouriera dla średniej liczby magnonów β, liczby fotonów α oraz ich faz ϕ, φ. Widoczne poszerzenie widma oznacza występowanie chaosu w systemie [115].

6.3.3. Charakterystyka amplitudowo–częstotliwościowa i bifurkacje

Istotną informację o strukturze nieliniowego rezonansu dostarcza analiza charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowej, czyli zależności stacjonarnej amplitudy magnonowej β od detuningu $\delta\omega = \omega_0 - \omega$. Punkty osobliwe tej charakterystyki wyznaczane są przez warunek zaniku pochodnej względem detuningu, co odpowiada ekstremom krzywej rezonansowej oraz pojawieniu się punktów zwrotnych prowadzących do bistabilności:

$$\frac{d}{d\delta\omega}\left\{\Delta_m\left[\gamma_m^2 + (\Delta_m + \delta\omega)^2\right]\right\} = 0. \tag{6.20}$$

Korzystając z zależności $\Delta_m = \beta^2\delta_K$, równanie określające nachylenie charakterystyki przyjmuje postać:

$$\frac{d\beta^2}{d\delta\omega} = -\frac{2\beta(\delta_K\beta^2 + \delta\omega)}{3(\delta_K\beta^2)^2 + 4\delta_K\beta^2\delta\omega + \gamma_m^2 + \delta\omega^2}. \tag{6.21}$$

Punkty osobliwe odpowiadają przypadkowi, w którym mianownik powyższego wyrażenia znika, czyli gdy

$$3(\delta_K\beta^2)^2 + 4\delta_K\beta^2\delta\omega + \gamma_m^2 + \delta\omega^2 = 0. \tag{6.22}$$

Warunek ten prowadzi do dwóch charakterystycznych wartości detuningu

$$\delta\omega_{1,2} = -2\delta_K\beta^2 \mp \sqrt{(\delta_K\beta^2)^2 - \gamma_m^2}. \tag{6.23}$$

W granicy słabej nieliniowości $\delta_K \ll 1$ układ redukuje się do rezonansu liniowego. Wówczas rozwiązanie punktu stałego przyjmuje postać

$$\beta_{01}^2 = \frac{B^2}{\delta\omega^2 + \gamma_m^2}, \tag{6.24}$$

co odpowiada klasycznej krzywej Lorentza. Odpowiadające wielkości fotonowe wynikają bezpośrednio z równań stacjonarnych:

$$\alpha_{01}^2 = \frac{D\beta_{01}^4}{\omega_f^2 + \gamma_f^2}, \tag{6.25}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2}, \tag{6.26}$$

$$\varphi_{01} = \arctan\left(\frac{\delta\omega - 2D\alpha_{01} - 2K\beta_{01}^2}{\gamma_m}\right). \tag{6.27}$$

Warunek $\delta_K = 0$ definiuje szczególną wartość pola elektrycznego (a zatem sprzężenia magnetoelektrycznego), dla której efektywna nieliniowość zanika i dynamika układu staje się liniowa.

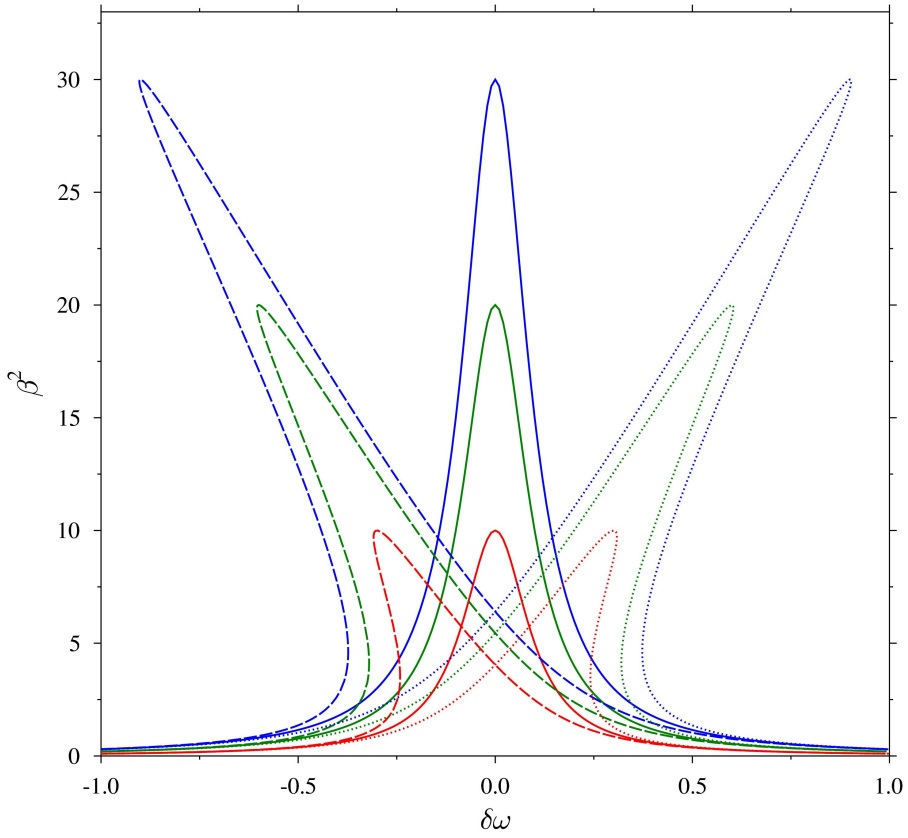
Dla $\delta_K \neq 0$ charakterystyka amplitudowo–częstotliwościowa przestaje być jednoznaczna. Częstości pola pompującego odpowiadające punktom zwrotnym wynoszą

$$\omega_0^{(1,2)} = \omega - 2\delta_K\beta^2 \mp \sqrt{(\delta_K\beta^2)^2 - \gamma_m^2}. \tag{6.28}$$

Pełny układ równań opisujących charakterystykę rezonansową ma postać

$$\begin{aligned} \delta\omega_{1,2} &= -2\delta_K\beta^2 \mp \sqrt{(\delta_K\beta^2)^2 - \gamma_m^2}, \\ \beta^2\left[\gamma_m^2 + (\delta_K\beta^2 + \delta\omega)^2\right] &= B^2. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Dla danego detuningu $\delta\omega$ równania te mogą posiadać dwa stabilne rozwiązania $\beta^{\pm}_{1,2}(\delta\omega)$ odpowiadające różnym wartościom średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2 = \langle\hat{m}^\dagger\hat{m}\rangle$. Zależność tą pokazano na rys. 6.4.



Rys. 6.4. Zależmość średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$ od detuningu $\delta\omega$ dla różnych wartości pola magnetycznego B oraz δ_K. Linie ciągłe odpowiadają $\delta_K = 0$, przerywane $\delta_K = 0,03$, kropkowe $\delta_K = -0,03$, natomiast kolory oznaczają $B^2 = 0,1$ (czerwony), $B^2 = 0,1$ (zielony), $B^2 = 0,3$ (niebieski) [115].

Skoki między rozwiązaniami

$$\Delta\beta^2 = [\beta^+_{1,2}(\delta\omega)]^2 - [\beta^-_{1,2}(\delta\omega)]^2 = \Delta n_m(1,2) \tag{6.30}$$

odpowiadają skokom średniej liczby magnonów w punktach bifurkacyjnych. Wielkość tych skoków zależy od detuningu oraz parametrów nieliniowości. Widoczna jest również symetria względem transformacji $\delta_K \to -\delta_K$, która odzwierciedla zmianę charakteru przesunięcia nieliniowego.

Ponieważ wartość punktu stałego bezpośrednio określa średnią liczbę magnonów w układzie, bifurkacyjne skoki $\Delta\beta^2$ przekładają się na skokową zmianę parametrów liniaryzowanej dynamiki. Oznacza to, że właściwości splątania magnon–foton mogą ulegać istotnym zmianom w pobliżu punktów bifurkacyjnych. W dalszej części pracy analizowane jest zachowanie splątania w otoczeniu obu punktów bifurkacji oraz zależność średniej liczby magnonów od amplitudy pola magnetycznego B.

6.3.4. Wielomian równowagowy i granica obszaru niestabilności

Podstawiając rozwiązania stacjonarne (6.19) do równania dla amplitudy magnonowej, otrzymano zamknięte równanie algebraiczne dla równowagowej liczby magnonów $n_m = \beta^2$. Równanie to można zapisać w postaci wielomianu trzeciego stopnia względem zmiennej $x \equiv \beta^2$:

$$R(\beta) = \delta_K^2\beta^6 + 2\delta\omega\delta_K\beta^4 + (\gamma_m^2 + \delta\omega^2)\beta^2 - B^2 = 0. \tag{6.31}$$

Równanie to stanowi podstawowe równanie równowagi układu i w pełni określa możliwe wartości średniej liczby magnonów w stanie stacjonarnym. Warunek granicy stabilności wyznaczamy analizując jednocześnie równania $R(x) = 0$ oraz $\partial_x R(x) = 0$.

Pochodna względem $x = \beta^2$ ma postać

$$\frac{dR(\beta^2)}{d\beta^2} = 3\delta_K^2\beta^4 + 4\delta\omega\delta_K\beta^2 + (\gamma_m^2 + \delta\omega^2). \tag{6.32}$$

Dla $\delta\omega^2 \geqslant 3\gamma_m^2$ równanie to posiada dwa rzeczywiste pierwiastki:

$$\beta_{1,2}^2 = -\frac{2\delta\omega}{3\delta_K} \pm \frac{1}{3\delta_K}\sqrt{\delta\omega^2 - 3\gamma_m^2}. \tag{6.33}$$

Wartości te odpowiadają punktom, w których nachylenie charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowej znika. Podstawiając je do wielomianu (6.31), obliczany jest warunek określający zależność między parametrami w pobliżu granicy stabilności:

$$R\left(\beta_{1,2}^2\right) = -\frac{2}{27\delta_K}\delta\omega(\delta\omega^2 + 9\gamma_m^2) \pm \frac{2}{27\delta_K}\left(\delta\omega^2 - 3\gamma_m^2\right)^{3/2} - B^2 = 0. \tag{6.34}$$

Stąd krytyczne wartości pola magnetycznego wynoszą

$$B_{1,2}^2 = \frac{2\left(-\delta\omega(\delta\omega^2 + 9\gamma_m^2) \pm (\delta\omega^2 - 3\gamma_m^2)^{3/2}\right)}{27\delta_K}. \tag{6.35}$$

Równania te wyznaczają granicę obszaru niestabilności w przestrzeni parametrów. Równanie brzegu obszaru niestabilności w przestrzeni $\left(\delta\omega, D/\sqrt{\omega_f^2+\gamma_f^2}\right)$:

$$\Sigma(\delta\omega) = \delta\omega^4 + \frac{B^2\delta_K}{\gamma_m^2}\delta\omega^3 + 2\gamma_m^2\delta\omega^2 + 9B^2\delta_K\delta\omega + \frac{27}{4\gamma_m^2}(B^2\delta_K)^2 + \gamma_m^4. \tag{6.36}$$

Równanie (6.36) posiada dwa pierwiastki rzeczywiste dla

$$\delta_K \leqslant \frac{8\sqrt{3}\gamma_m^3}{9B^2}, \tag{6.37}$$

natomiast poza tym obszarem pierwiastki stają się zespolone, co oznacza zanik bistabilności.

Skok średniej liczby magnonów na granicy obszaru niestabilności wynosi

$$\Delta n_m = \Delta\beta^2 = \frac{\sqrt{\delta\omega^2 - 3\gamma_m^2}}{\delta_K}. \tag{6.38}$$

Widać zatem, że wielkość skoku rośnie wraz ze wzrostem nieliniowości efektywnej δ_K i maleje wraz ze wzrostem tłumienia γ_m. Granica $\delta_K = 0$ odpowiada przejściu do reżimu liniowego, w którym wielomian (6.31) redukuje się do równania pierwszego stopnia względem β^2 i układ nie wykazuje wielowartościowości rozwiązania.

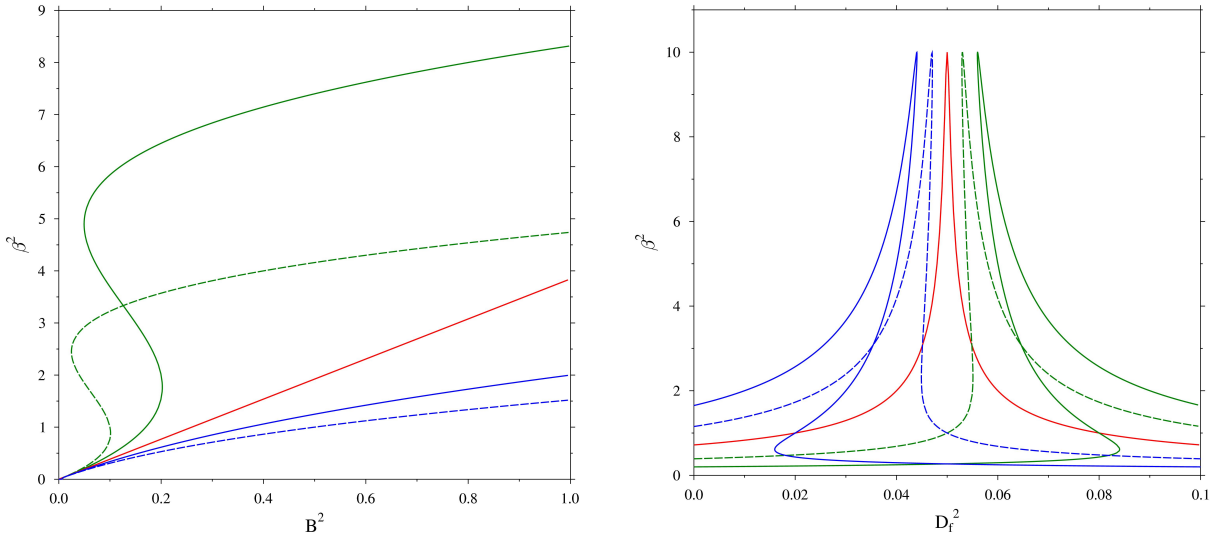
Zależność $n_m(B) = \beta^2(B)$ (rys. 6.5a) ujawnia typową strukturę histerezy: dla pewnego zakresu parametrów jednej wartości pola magnetycznego odpowiadają dwie stabilne wartości liczby magnonów. Równanie (6.31) wykazuje symetrię względem jednoczesnych transformacji $\delta\omega \to -\delta\omega$ oraz $\delta_K \to -\delta_K$, co oznacza, że dla dodatniego i ujemnego detuningu role reżimów liniowego i nieliniowego ulegają zamianie.

Analogicznie, analiza zależności $n_m(D)$ (rys. 6.5b) pokazuje, że poprzez odpowiednie strojenie pola elektrycznego (a zatem parametru sprzężenia magnetoelektrycznego) możliwe jest silne zwiększenie obsadzenia magnonowego. Oznacza to, że pole elektryczne może pełnić rolę efektywnego parametru sterującego przejściem między reżimem liniowym a nieliniowym oraz kontrolować amplitudę skoków bifurkacyjnych.

Dla lepszego zobrazowania złożoności systemu przedstawiono wykresy trójwymiarowe zależności średniej liczby magnonów od zewnętrznych pól: magnetycznego i elektrycznego. Rozróżniono dwa przypadki: w przybliżeniu liniowa zależność liczby magnonów od wartości pól (rys. 6.6) oraz obszar w którym może występować więcej niż jedna liczba magnonów (rys. 6.7) oznacza to, że odpowiednio dobierając parametry systemu możliwe jest przełączanie się pomiędzy średnią liczbą magnonów.

Punkt stały układu nieliniowego wyznacza stan stacjonarny, jednak z fizycznego punktu widzenia nie trzeba ograniczać się wyłącznie do analizy rozwiązań równowagowych, ponieważ poprzez pompowanie układu za pomocą nanoanteny można wprowadzić do niego

a) b)



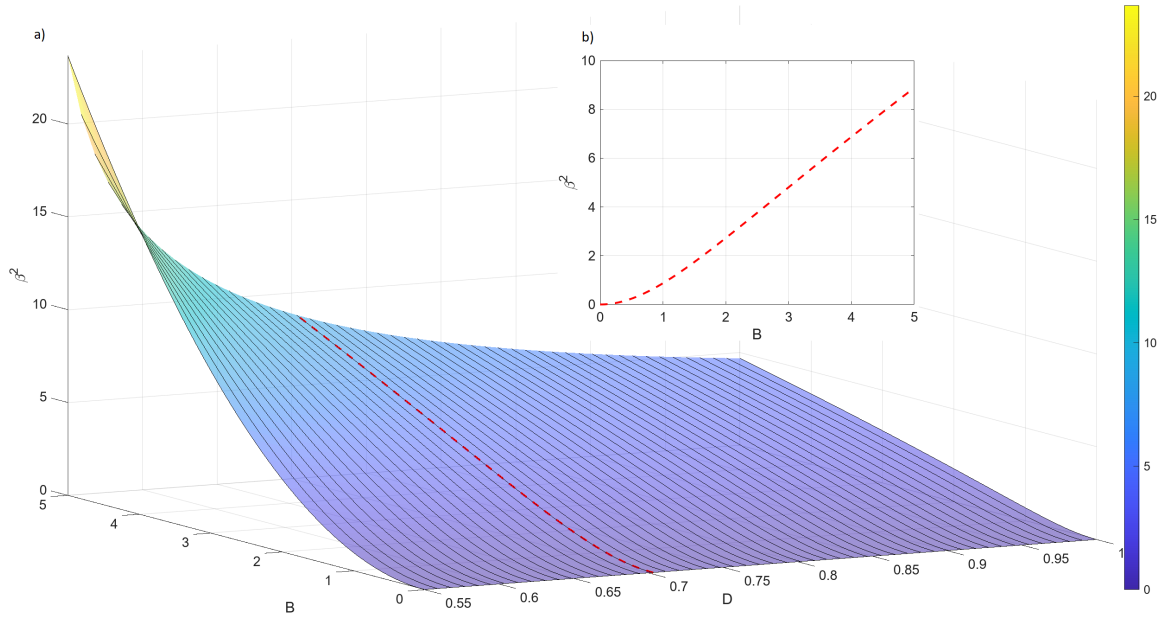
Rys. 6.5. Wykresy zależności średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$ od zewnętrznego pola magnetycznego B oraz zewnętrznego pola elektrycznego, oddziałującego za pomocą sprzężenia magnetoelektrycznego. **a)** Zależność średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$ od zewnętrznego pola magnetycznego B dla stałego detuningu i różnych wartości δ_K: $\delta_K = 0$ linia czerwona, $\delta_K = -0,1$ linia zielona ciągła, $\delta_K = -0,2$ linia zielona przerywana, $\delta_K = 0,1$ linia niebieska ciągła, $\delta_K = 0,2$ linia niebieska przerywana. **b)** Zależność średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$ od zewnętrznego pola elektrycznego przy stałym polu magnetycznym i różnych wartościach detuningu $\delta\omega = 0$ linia czerwona ciągła, $\delta\omega = -0,6$ linia zielona ciągła, $\delta\omega = -0,3$ linia zielona przerywana, $\delta\omega = 0,3$ linia niebieska przerywana, $\delta\omega = 0,6$ linia niebieska ciągła [115].

dowolną liczbę magnonów i przygotować stan nierównowagowy. Efekty nierównowagowe stanowią istotny element dynamiki badanego systemu, dlatego analiza nieliniowa nie może ograniczać się do lokalnego badania w pobliżu punktu stałego odpowiadającego stanowi ustalonemu, lecz powinna obejmować ogólniejszą strukturę przestrzeni fazowej oraz ewolucję trajektorii w otoczeniu stanów nierównowagowych.

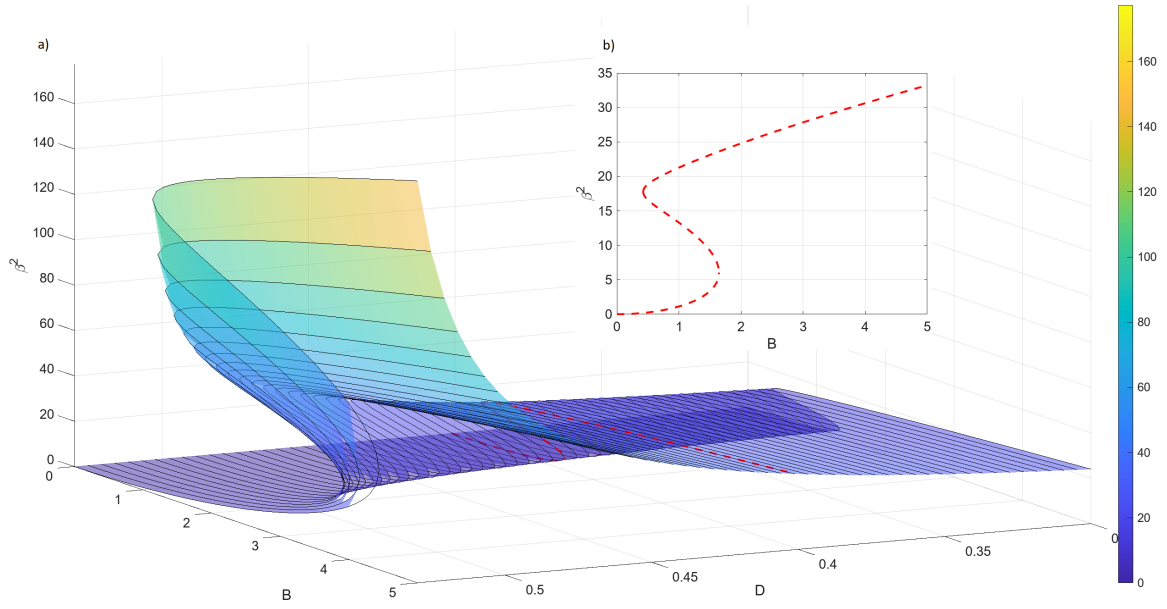
W związku z tym dalsza analiza dotyczy przestrzeni fazowej czterowymiarowego układu dynamicznego opisanego równaniami półklasycznymi. W pierwszym kroku wykonano linearyzacje układu w pobliżu wybranego punktu równowagi i zapisano go w zwartej postaci wektorowej jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} = \{\alpha, \phi, \beta, \varphi\}. \tag{6.39}$$

Ponieważ wymiar przestrzeni fazowej wynosi $n = 4$, klasyfikacja lokalnej topologii trajektorii w otoczeniu punktu stałego prowadzi do $n + 2$ jakościowo różnych typów zachowań. Jeden z nich odpowiada regularnemu punktowi stałemu, natomiast pozostałe $n + 1$ przypadków związane są z punktami wyjątkowymi, takimi jak siodła, węzły oraz ogniska stabilne i niestabilne. Zgodnie z klasyfikacją wprowadzoną przez [55] oznaczono je



Rys. 6.6. Zależność średniej liczb magnonów β^2 od zewnętrznych pól: magnetycznego B i elektrycznego D. Miniatura pokazuje zależność β^2 od B dla stałej wartości $D = 0,7$. Dobrze widoczna liniowa zależność [115].



Rys. 6.7. Zależność średniej liczb magnonów β^2 od zewnętrznych pól: magnetycznego B i elektrycznego D. Miniatura pokazuje zależność β^2 od B dla stałej wartości $D = 0,4$. W tym przypadku zależność jest złożona, widoczny jest obszar, w którym może występować więcej niż jedna liczba magnonów [115].

symbolem $\mathcal{O}^{p,q}$, gdzie $p = 0, 1, \ldots, n$ oraz $p + q = n$. Punkty spełniające warunek $p \neq n$ mają charakter siodłowy, co oznacza współistnienie kierunków stabilnych i niestabilnych w ich otoczeniu.

Punkty stałe wyznaczane są z warunku zaniku pola wektorowego, czyli z równania

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = 0, \tag{6.40}$$

gdzie $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*[B, D, K]$ zależy parametrycznie od zewnętrznego pola magnetycznego B oraz parametrów sprzężenia i nieliniowości D i K. W celu określenia charakteru punktu stałego analizujemy równanie charakterystyczne macierzy Jacobiego

$$\chi(\lambda) = \mathrm{Det}\left|\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j} - \delta_{ij}\lambda\right|\right| = 0, \tag{6.41}$$

gdzie δ_{ij} jest symbolem Kroneckera, a wartości własne λ determinują lokalną stabilność rozwiązania.

Granica obszaru stabilności wyznaczona jest przez warunek zaniku części urojonej wartości własnej przy $\lambda = i\Omega$, co prowadzi do równania

$$\mathrm{Im}(\lambda = i\Omega) = 0. \tag{6.42}$$

Równanie to definiuje hiperpłaszczyznę $\mathcal{N}_\Omega$ w przestrzeni parametrów. Szczególną rolę odgrywa hiperpłaszczyzna $\mathcal{N}_0$, odpowiadająca przypadkowi $\Omega = 0$, której przekroczenie prowadzi do zaniku punktu siodłowego $\mathcal{O}^{p,q}$ wskutek jego zlania się z punktami $\mathcal{O}^{p+1,q-1}$ lub $\mathcal{O}^{p-1,q+1}$. W przeciwieństwie do tego, przekroczenie powierzchni $\mathcal{N}_\Omega$ przy $\Omega \neq 0$ może prowadzić do zmiany charakteru stabilności bez anihilacji punktu stałego, co jest typowe dla bifurkacji oscylacyjnych.

Aby zastosować powyższy schemat do analizowanego układu, zlinearyzowano równania półklasyczne w otoczeniu dowolnego punktu stałego $(\alpha_1, \phi_1, \beta_1, \varphi_1)$, wprowadzając odchylenia $\delta\alpha = \alpha - \alpha_1$, $\delta\phi = \phi - \phi_1$, $\delta\beta = \beta - \beta_1$, $\delta\varphi = \varphi - \varphi_1$ oraz wektor zaburzeń $\mathbf{X} = (\delta\alpha, \delta\phi, \delta\beta, \delta\varphi)^T$. Otrzymano liniowe równanie macierzowe

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = J, \mathbf{X}, \tag{6.43}$$

gdzie macierz J jest macierzą Jacobiego wyznaczoną w punkcie stałym i w postaci jawnej dana jest przez

$$J = \begin{pmatrix} -\gamma_f & D\beta_1^2 \sin\phi_1 & -2D\beta_1 \cos\phi_1 & 0 \\ -\frac{D\beta_1^2}{\alpha_1^2} \sin\phi_1 & \frac{D\beta_1^2}{\alpha_1} \cos\phi_1 & 2\frac{D\beta_1}{\alpha_1} \sin\phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_m & -B\sin\varphi_1 \\ 2D\sin\phi_1 & 2D\alpha_1\cos\phi_1 & \frac{B}{\beta_1^2}\sin\varphi_1 - 4K\beta_1 & -\frac{B}{\beta_1}\cos\varphi_1 \end{pmatrix}. \tag{6.44}$$

Spektrum wartości własnych macierzy J jednoznacznie określa lokalną strukturę przestrzeni fazowej w otoczeniu analizowanego rozwiązania. W szczególności znak części rzeczywistych wartości własnych decyduje o stabilności amplitud i faz, natomiast pojawienie się pary sprzężonych wartości zespolonych o zerowej części rzeczywistej sygnalizuje możliwość bifurkacji typu Hopfa oraz powstania stabilnych lub niestabilnych cykli granicznych. W ten sposób formalizm liniaryzacji stanowi pomost pomiędzy jawną postacią nieliniowych równań ruchu a topologiczną klasyfikacją reżimów dynamicznych badanego układu.

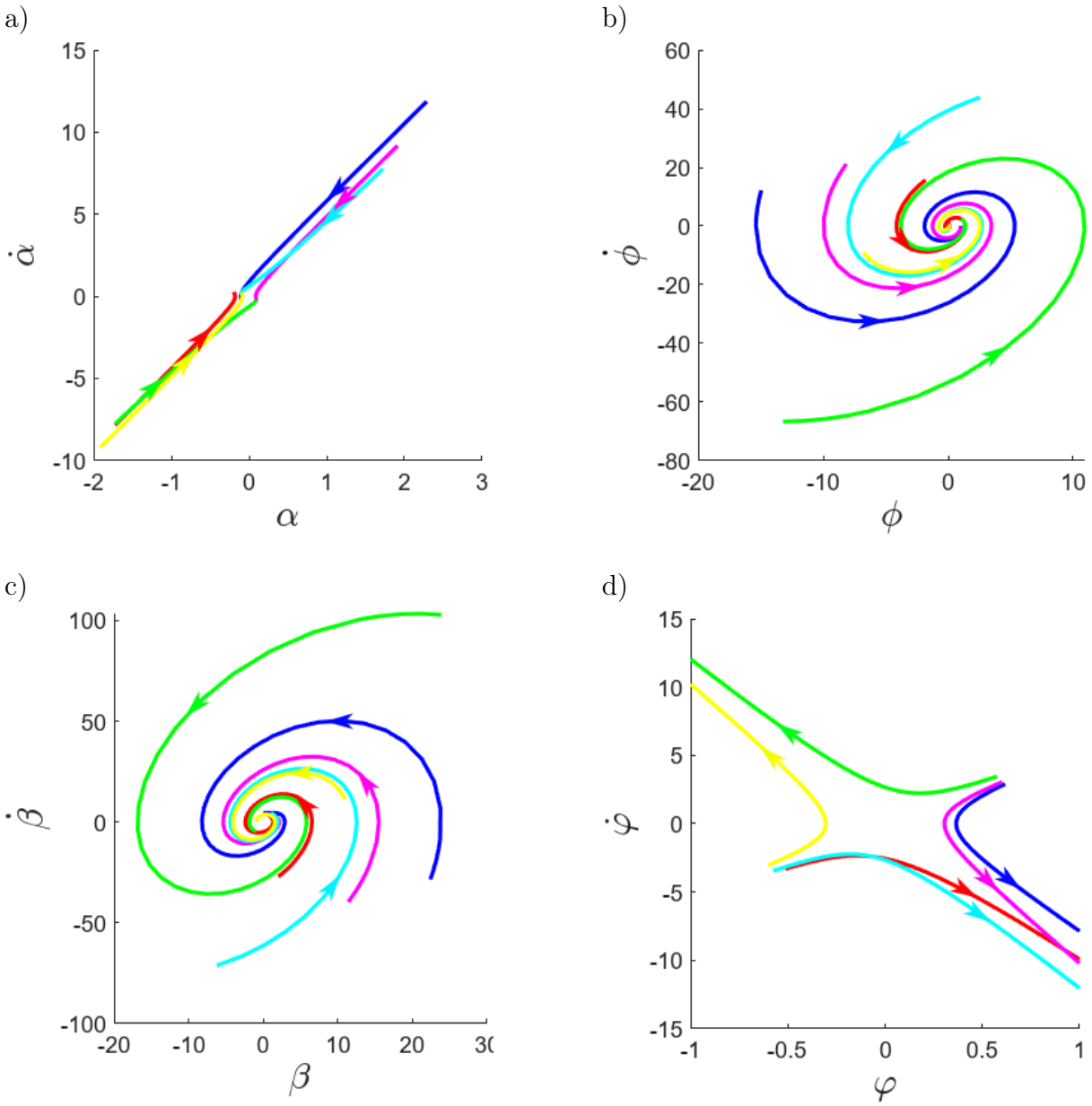
Na rysunku 6.8 przedstawiono portrety fazowe wyznaczone na podstawie zlinearyzowanego równania macierzowego (6.43), odpowiadające różnym obszarom przestrzeni fazowej oraz zestawom parametrów. Analiza ta pozwala bezpośrednio powiązać strukturę wartości własnych macierzy Jacobiego z geometrycznym charakterem trajektorii w otoczeniu punktów stałych. W szczególności pokazano poniżej, że splątanie magnon–foton osiąga wartości maksymalne w obszarze granicznym pomiędzy stabilnym węzłem (rys. 6.8a) a obszarami stabilnej spirali (rys. 6.8b) i (rys. 6.8c), co wskazuje na szczególną rolę reżimu przejściowego między monotonicznym a oscylacyjnym relaksowaniem do stanu ustalonego.

Jawne wyrażenia na pierwiastki równania charakterystycznego macierzy (6.44) można otrzymać analitycznie w przypadku równych tłumień $\gamma_m = \gamma_f = \gamma_0$, co stanowi fizycznie uzasadnione przybliżenie dla wielu eksperymentalnych realizacji. Wówczas wartości własne przyjmują postać

$$\lambda_{\pm,\pm} = \frac{p \pm \sqrt{\Delta_\pm}}{2}, \tag{6.45}$$

gdzie $\Delta_\pm = p^2 - 4q_\pm$, $p = -2\gamma_0$, natomiast $q_\pm = \gamma_0^2 - (\chi_1 \pm \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2})/2$. Wprowadzono tu wielkości pomocnicze $\chi_1 = -\omega_f^2 - \delta\omega + (\delta_k - 4K)n_m$ oraz $\chi_2 = -4\omega_f 4D^2 n_m + \omega_f(\delta\omega + (\delta_k - 4K)n_m)$, przy czym $\delta_k = \left(\frac{2D^2\omega_f}{\omega_f^2+\gamma_f^2} - 2K\right)$, a $n_m = \beta_1^2$ oznacza równowagową średnią liczbę magnonów.

Uwzględniając powyższe definicje można wyróżnić trzy podstawowe przypadki istotne z punktu widzenia dynamiki badanego układu.



Rys. 6.8. Portrety fazowe dla różnych typów trajektorii. Strzałki wskazują kierunki trajektorii [115]. **a)** stabilny węzeł, **b)** stabilna spirala, **c)** stabilna spirala, **d)** punkt siodłowy.

I. Punkt siodłowy. Zachodzi dla $p < 0$, $\Delta_\pm > 0$, $q_\pm < 0$ oraz $\chi_1 \pm \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2} > \gamma_0^2$. W tym reżimie co najmniej jedna z wartości własnych ma dodatnią część rzeczywistą, co implikuje niestabilność rozwiązania stacjonarnego i obecność kierunków rozbieżnych w przestrzeni fazowej.

II. Stabilny węzeł. Odpowiada warunkom $p < 0$, $\Delta_\pm > 0$, $q_\pm > 0$ oraz $0 < \chi_1 \pm \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2} < \gamma_0^2$. Wszystkie wartości własne są rzeczywiste i ujemne, a trajektorie relaksują monotonicznie do punktu stałego bez oscylacji.

III. Stabilna spirala. Występuje dla $p < 0$, $\Delta_\pm < 0$, $q_\pm > 0$ oraz $\chi_1 \pm \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2} < 0$. W tym przypadku pojawiają się sprzężone pary zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych, co prowadzi do tłumionych oscylacji amplitud i faz przy zbieżności do punktu równowagi.

Dla ilustracji, przestrzenie fazowe odpowiadające różnym zestawom parametrów przedstawiono na rys. 6.8 oraz rys. 6.9. Widać wyraźnie, że dominującą część przestrzeni parametrów zajmuje obszar stabilnych spiral, co oznacza, że oscylacyjny charakter relaksacji jest typowy dla analizowanego układu.

Zmiana znaku detuningu z ujemnego $\delta\omega = \omega_0 - \omega = -0.2$ na dodatni $\delta\omega = 0.2$ powoduje przesunięcie obszarów stabilnego węzła i stabilnej spirali z niewielkich dodatnich wartości parametru nieliniowości δ_k w kierunku niewielkich wartości ujemnych. Oznacza to, że dynamika układu może być skutecznie kontrolowana poprzez częstotliwość zewnętrznego pola magnetycznego ω_0 oraz amplitudę zewnętrznego pola elektrycznego $E = D/g_{\mathrm{ME}}$. Wraz ze wzrostem detuningu, co pokazano na rys. 6.9, obszar punktu siodłowego ulega rozszerzeniu, jednak symetria względem jednoczesnej transformacji $\delta\omega \to -\delta\omega$ oraz $\delta_k \to -\delta_k$ pozostaje zachowana.

Szczególne znaczenie ma przypadek $\chi_1^2 + \chi_2 < 0$, w którym pierwiastki równania charakterystycznego przyjmują postać zespoloną

$$\lambda_{\pm,\pm} = \mathrm{Re}(\lambda_{\pm,\pm}) + i, \mathrm{Im}(\lambda_{\pm,\pm}), \tag{6.46}$$

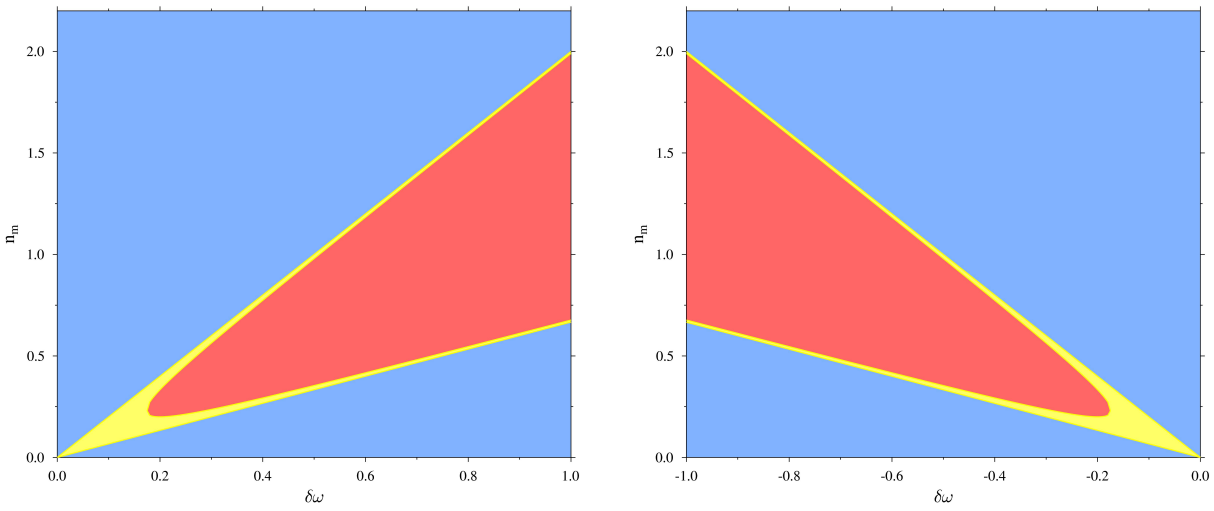
gdzie

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}(\lambda_{\pm,\pm}) &= \frac{1}{2}\left(p \pm \sqrt{|\Delta' \pm|^2 + |\Delta'' \pm|}\cos\xi\right), \\ \mathrm{Im}(\lambda_{\pm,\pm}) &= \frac{1}{2}\sqrt{|\Delta' \pm|^2 + |\Delta'' \pm|}\sin\xi, \end{aligned}$$

a $\Delta'\pm = \chi_1/2$, $\Delta''\pm = \sqrt{|\chi_1^2 + \chi_2|}/2$ oraz $\xi = \arctan(\Delta'' \pm /\Delta'\pm)$.

Bifurkacja Hopfa. Dochodzi do niej w momencie, gdy część rzeczywista $\mathrm{Re}(\lambda_{\pm,\pm})$ zmienia znak z ujemnego na dodatni i para sprzężonych pierwiastków przekracza oś urojoną.

a) b)



Rys. 6.9. Mapa występowania przestrzeni fazowych w zależności od detuningu $\delta\omega$ oraz średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$. Obszar punktów siodłowych (kolor czerwony), obszar stabilnych węzłów (kolor żółty), obszar stabilnych spiral (kolor niebieski). **a)** $\delta_K = -0,5$ **b)** $\delta_K = 0,5$ [115].

Wówczas punkt stały traci stabilność na rzecz rozwiązania okresowego, co w kontekście układu magnon–foton oznacza pojawienie się samowzbudnych oscylacji amplitud i faz.

Rozpatrując przypadek $D = \sqrt{3K(\omega_f^2 + \gamma_f^2)/\omega_f}$ przy spełnionym warunku $\chi_1^2 + \chi_2 < 0$ otrzymuje się nierówność

$$D^2 > \frac{\omega_f^4 + \delta\omega^2(\delta\omega + \delta_k n_m)^2}{16 n_m \omega_f (\delta\omega + \delta_k n_m)} - \frac{\omega_f^2 \delta\omega}{8 n_m}, \tag{6.47}$$

która w przypadku rezonansowym $\delta\omega = 0$ upraszcza się do

$$D > \frac{\omega_f \sqrt{\omega_f}}{4 n_m \sqrt{\delta_k}}. \tag{6.48}$$

W połączeniu z warunkiem $D = \sqrt{3K(\omega_f^2 + \gamma_f^2)/\omega_f}$ równania te wyznaczają bifurkacyjne wartości stałej oddziaływania DM, przy których następuje przejście do reżimu oscylacyjnego.

6.4. Splątanie

Aby wyznaczyć stacjonarne, odporne na zaburzenia splątanie foton–magnon, korzystamy ze standardowej miary zwanej logarytmiczną negatywnością [1, 94]. Miara ta ma bardzo prostą interpretację: jeśli jest równa zero, układ nie jest splątany, natomiast jeśli przyjmuje wartość dodatnią, oznacza to obecność splątania.

Definiowana jest jako

$$E_N = \max\left[0, -\ln(2\eta^-)\right]. \tag{6.49}$$

Wielkość η^- jest liczbą wyznaczaną z macierzy kowariancji i decyduje o tym, czy stan jest splątany. W praktyce można ją traktować jako pewien „efektywny poziom fluktuacji" w układzie po sprawdzeniu, czy korelacje między magnonem i fotonem mają charakter czysto klasyczny, czy już kwantowy. Jeżeli $\eta^- < 1/2$, wtedy pojawia się splątanie i $E_N > 0$. Jeśli $\eta^- \geqslant 1/2$, splątanie zanika.

Wartość η^- wyraża się przez wyznaczniki bloków macierzy kowariancji:

$$\eta^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Sigma(V_1) - \left[\Sigma(V_1)^2 - 4\det V_1\right]^{1/2}\}^{1/2}, \tag{6.50}$$

gdzie

$$\Sigma(V_1) = \det G_1 + \det B_1 - 2\det C_1. \tag{6.51}$$

Macierz kowariancji $\mathbf{V}_1$ opisuje siłę fluktuacji oraz korelacji między wielkościami opisującymi pole fotonowe i magnonowe. Ma ona postać blokową

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1 & \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_1^T & \mathbf{B}_1 \end{pmatrix}. \tag{6.52}$$

Bloki $\mathbf{G}_1$ i $\mathbf{B}_1$ odpowiadają za fluktuacje w podukładzie fotonowym i magnonowym z osobna, natomiast blok $\mathbf{C}_1$ opisuje korelacje między nimi. To właśnie obecność silnych korelacji w $\mathbf{C}_1$ może prowadzić do splątania. Gdy korelacje znikają, splątanie również zanika.

Stacjonarną macierz kowariancji wyznaczamy z równania

$$\boldsymbol{J}\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_1\boldsymbol{J}^T = \mathbf{W}. \tag{6.53}$$

Równanie to wynika z równań ruchu dla małych odchyleń od stanu równowagi. Macierz $\boldsymbol{J}$ opisuje, w jaki sposób niewielkie zaburzenia ewoluują w czasie, natomiast macierz $\mathbf{W}$ zawiera informację o szumach pochodzących od otoczenia. Jej elementy zależą od temperatury poprzez rozkład Bosego–Einsteina $N(\omega) = [\exp(\hbar\omega/k_BT) - 1]^{-1}$, co oznacza, że wraz ze wzrostem temperatury rosną fluktuacje w układzie, a to zwykle prowadzi do osłabienia splątania.

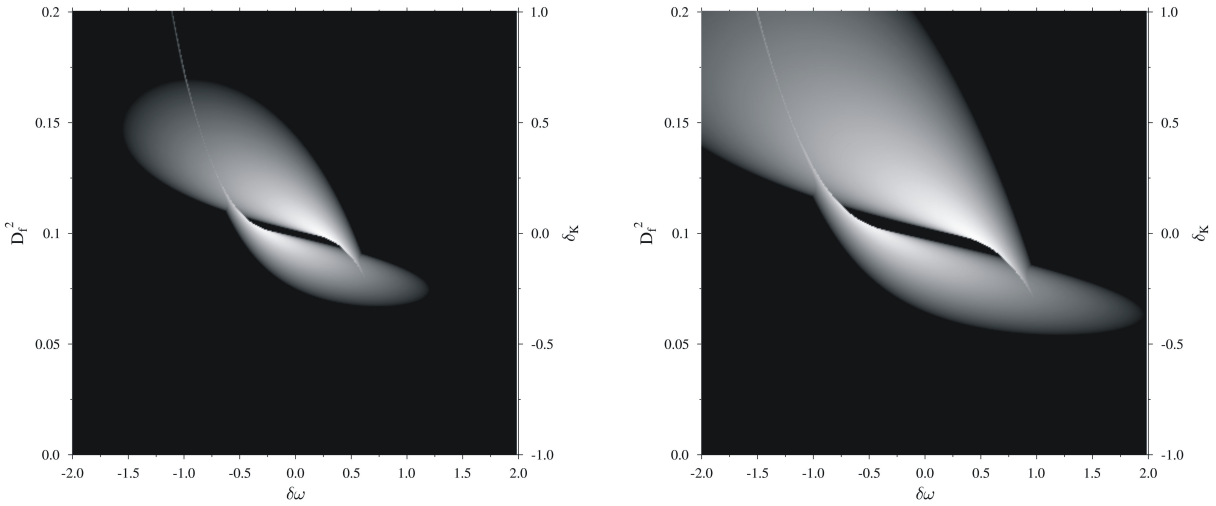
Chociaż samo równanie macierzy kowariancji ma postać liniową, nieliniowość układu odgrywa kluczową rolę. Wynika to z faktu, że macierz $\boldsymbol{J}$ zależy od stanu równowagi, a ten

wyznaczany jest przez pełne, nieliniowe równania ruchu. W różnych obszarach przestrzeni parametrów, odpowiadających różnym typom punktów stałych (np. stabilnym węzłom, stabilnym spiralom czy punktom siodłowym), zmienia się sposób, w jaki układ reaguje na małe zaburzenia. To z kolei wpływa na strukturę macierzy kowariancji, siłę korelacji między magnonem i fotonem oraz ostatecznie na wartość splątania.

Można więc powiedzieć, że splątanie w badanym układzie jest wrażliwe na strukturę klasycznej dynamiki. Granice między różnymi obszarami stabilności, wyznaczone wcześniej w analizie nieliniowej, pojawiają się tutaj jako obszary, w których splątanie gwałtownie się zmienia lub zanika. W ten sposób właściwości klasyczne i kwantowe układu są ze sobą ściśle powiązane.

Wyniki obliczeń numerycznych dla splątania przedstawiono na rysunku 6.10. Widoczne

a) b)

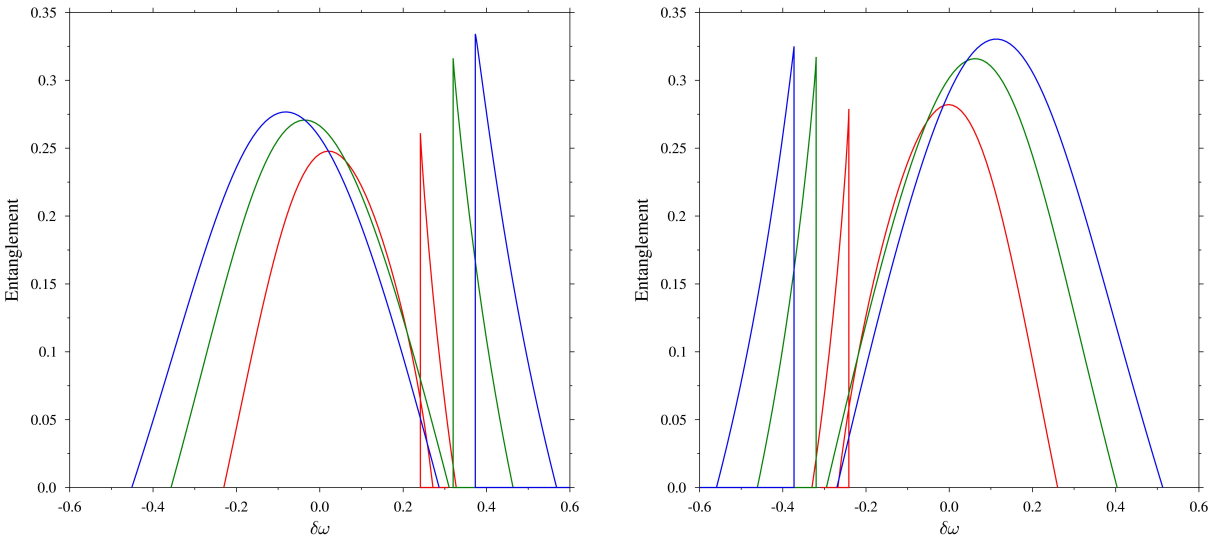


Rys. 6.10. Wykresy zależności splątania od detuningu $\delta\omega$, parametru δ_K oraz zewnętrznego pola elektrycznego D_f^2, gdzie $D_f = D/\sqrt{\omega_f^2 + \gamma_f^2}$. Białe obszary oznaczają niezerową wartość splątania. **a)** $B^2 = 0,2$ **b)** $B^2 = 0,5$ [115].

są dwa obszary o charakterystycznym kształcie kropli, w których splątanie przyjmuje wartości niezerowe. Zaskakującą cechą otrzymanych rezultatów jest złamanie symetrii względem jednoczesnej transformacji znaków $(\delta\omega, \delta_k) \to (-\delta\omega, -\delta_k)$. W przeciwieństwie do przypadku klasycznego, gdzie równanie (6.31) wykazywało określoną symetrię względem tej transformacji, w analizie kwantowej rozmiary obu obszarów splątania różnią się istotnie. Źródłem tej asymetrii jest fakt, że o właściwościach kwantowych decyduje nie tylko detuning $\delta\omega = \omega_0 - \omega$, lecz również bezwzględna wartość częstotliwości magnonowej ω, która wchodzi jawnie do elementów macierzy szumów poprzez funkcję $N_m(\omega)$. W konsekwencji opis splątania nie może zostać zredukowany wyłącznie do parametru detuningu, a kwantowa struktura układu charakteryzuje się niższą symetrią niż odpowiadający jej opis klasyczny.

Zielone linie przedstawione na rysunku 6.11 odpowiadają przekrojom centralnej części rys. 6.10a dla $\delta_k = -0.03$ (rys. 6.11a) oraz $\delta_k = 0.03$ (rys. 6.11b). Szerokie maksimum

a) b)



Rys. 6.11. Wykresy zależności splątania od detuningu $\delta\omega$, dla różnych wartości zewnętrengo pola magnetycznego: $B^2 = 0,1$ (linie czerwone), $B^2 = 0,2$ (linie zielone), $B^2 = 0,3$ (linie niebieskie), **a)** $\delta_K = -0,03$ **b)** $\delta_K = 0,03$ [115].

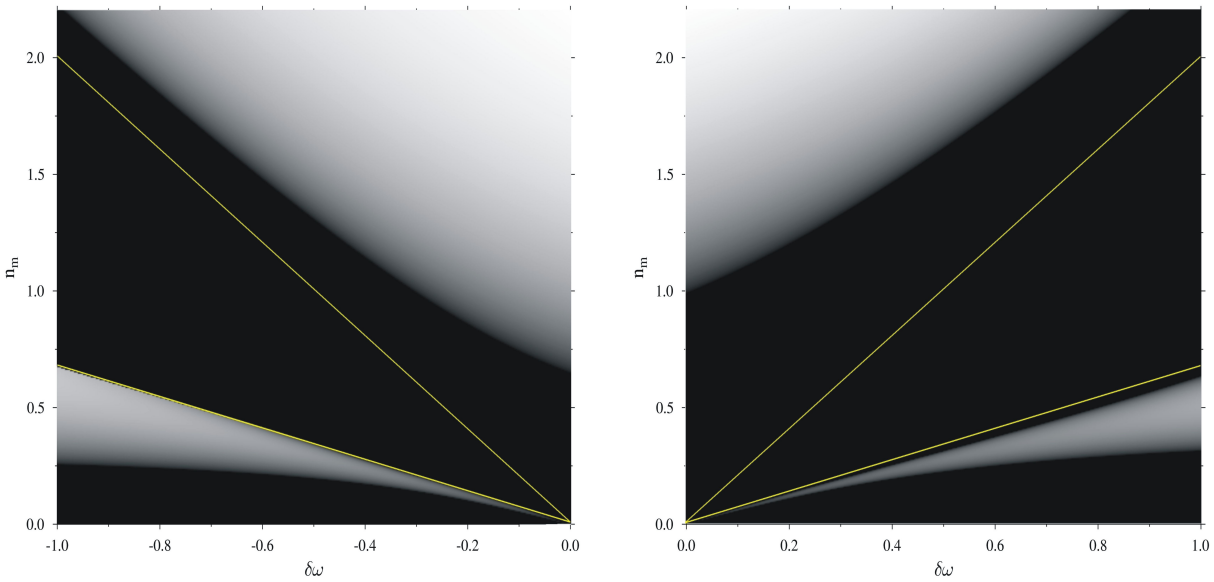
centralne splątania związane jest z przypadkiem małego detuningu $|\delta\omega| < 0{,}2$, natomiast ostre maksimum boczne w pobliżu $\delta\omega = \pm 0{,}4$ ma charakter mniej intuicyjny i wskazuje na istotną rolę rezonansów efektywnych generowanych przez nieliniowe sprzężenie. Po zmianie znaku detuningu maksymalna wartość splątania odpowiadająca przypadkowi znacznego rozstrojenia pozostaje niemal taka sama, co sugeruje, że w tym reżimie decydującą rolę odgrywa moduł detuningu, a nie jego znak.

Porównując rozkłady splątania z rys. 6.10 i rys. 6.11 z portretami fazowymi układu przedstawionymi na rys. 6.9, określono jednoznacznie, że największe wartości logarytmicznej negatywności pojawiają się w pobliżu granicy pomiędzy obszarem stabilnej spirali a obszarem stabilnego węzła. Oznacza to, że maksymalne korelacje kwantowe są generowane w reżimie przejściowym pomiędzy monotoniczną a oscylacyjną relaksacją do stanu ustalonego. W obszarze czerwonym, odpowiadającym punktowi siodłowemu, logarytmiczna negatywność przyjmuje wartości urojone, co oznacza, że w tym reżimie splątanie nie jest zdefiniowane w sensie stacjonarnej macierzy kowariancji, gdyż punkt stały jest niestabilny.

Analizując zależność splątania od zewnętrznego pola magnetycznego oraz pola elektrycznego okazuje się, że dla słabego pola elektrycznego splątanie zanika, co wskazuje na konieczność odpowiednio silnego sprzężenia magnetoelektrycznego do wygenerowania istotnych korelacji kwantowych. Dodatkowo znak detuningu wpływa na położenie obszaru

niezerowego splątania w przestrzeni parametrów. Maksima splątania układają się wzdłuż jednej z linii brzegowych obszaru bistabilności, a na rys. 6.10 widoczny jest również ślad granicy bistabilności. Oznacza to, że silne korelacje kwantowe pojawiają się w bezpośrednim sąsiedztwie przejść dynamicznych pomiędzy różnymi stanami stacjonarnymi.

a) b)



Rys. 6.12. Wykresy zależności splątania od detuningu $\delta\omega$ i średniej liczby magnonów $n_m = \beta^2$, białe obszary oznaczają niezerową wartość splątania. Żółte linie odpowiadają granicom pomiędzy stabilnymi spiralami a punktem siodłowym (6.9 **a)** $B^2 = 0,5$, $\delta_K = 0,5$ **b)** $B^2 = 0,5$, $\delta_K = -0,5$ [115].

Żółte linie na rysunku rys. 6.12 odpowiadają granicy pomiędzy obszarami stabilnej spirali i stabilnego węzła pokazanymi na rys. 6.9. Jak wynika z rys. 6.12, splątanie zanika po przekroczeniu dolnej granicy obszaru stabilnego węzła i pojawia się ponownie dopiero po przekroczeniu górnej żółtej linii. Szczególnie interesujący jest czarny obszar pomiędzy tymi liniami, w którym splątanie jest równe zeru. Obszar ten charakteryzuje się osobliwościami macierzy kowariancji określonej równaniem (6.52), a jednocześnie odpowiada regionowi punktu siodłowego w dynamice klasycznej przedstawionej na rys. 6.9. Zbieżność ta podkreśla ścisły związek pomiędzy niestabilnością klasyczną a zanikiem stacjonarnych korelacji kwantowych.

Zależność splątania od temperatury można odczytać z rysunku rys. 6.12. Przypadek temperatury zerowej $k_B T = 0$ przedstawiono na rys. 6.12a dla $\delta_K = -0.5$ oraz na rys. 6.12b dla $\delta_K = 0.5$. Rysunki 6.12c i 6.12d odpowiadają przypadkowi temperatury niezerowej dla tych samych wartości parametru δ_K. Wraz ze wzrostem temperatury obszar niezerowego splątania wyraźnie się kurczy, co jest bezpośrednią konsekwencją

wzrostu fluktuacji termicznych opisanych przez rozkład Bosego–Einsteina. Fluktuacje te zwiększają elementy diagonalne macierzy szumów, prowadząc do redukcji korelacji między podukładami i ostatecznie do zaniku splątania. Otrzymany wynik potwierdza, że generacja trwałych korelacji magnon–foton wymaga nie tylko odpowiedniego doboru parametrów dynamicznych, lecz także pracy w reżimie niskotemperaturowym.

6.5. Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przeanalizowano teoretyczny układ bazujący na krysztale foton–magnon oparty na warstwie YIG z periodycznie wywierconymi otworami powietrznymi. Periodyczna modulacja struktury nadaje układowi właściwości kryształu fotonicznego, natomiast uwięzienie wzbudzeń magnonowych uzyskano dzięki kondensacji magnonów oraz wewnątrzpasmowym oddziaływaniom magnon–magnon wynikającym z prostopadłej anizotropii magnetokrystalicznej (PMA) oraz domieszkowania bizmutem warstwy YIG. W stanie skondensowanym oddziaływanie międzypasmowe w kondensacie magnonowym prowadzi do efektywnej nieliniowości typu Kerra. W konsekwencji widmo magnonowe wykazuje wyraźne minimum, które umożliwia skuteczne przestrzenne ograniczenie modów magnonowych. Uwięzione mody magnonowe i fotonowe oddziałują ze sobą poprzez efekt magnetoelektryczny obserwowany wcześniej w strukturach YIG.

W celu ilościowego opisu korelacji kwantowych między modami magnonowymi i fotonowymi zastosowano logarytmiczną negatywność wyznaczoną na podstawie kwantowych równań Langevina z uwzględnieniem szumów termicznych. W odróżnieniu od standardowego podejścia polegającego wyłącznie na linearyzacji równań ruchu wokół stanu stacjonarnego, w pierwszym etapie przeprowadzono szczegółową analizę nieliniowej dynamiki półklasycznej układu. Wykazano, że w przypadku nieliniowym istotną rolę odgrywa faza kondensatu magnonowego, która może prowadzić do niestabilności oraz przejść między różnymi reżimami dynamicznymi.

Poprzez konstrukcję przestrzeni fazowej zidentyfikowano punkty stałe o różnym charakterze, takie jak punkty siodłowe, stabilne spirale oraz stabilne węzły. Wykazano, że metody jakościowej teorii równań różniczkowych nieliniowych są użyteczne również w analizie splątania foton–magnon. Stwierdzono, że w obszarze odpowiadającym punktom siodłowym splątanie nie jest zdefiniowane z powodu osobliwości macierzy kowariancji. Jednocześnie maksymalne wartości splątania występują w pobliżu granicy między obszarami stabilnego węzła i stabilnej spirali. Oznacza to bezpośredni związek między strukturą klasycznej przestrzeni fazowej a właściwościami kwantowymi układu.

Dla wybranej geometrii kryształu foton–magnon wyznaczono również mody fotonowe oraz przeanalizowano charakterystyki amplitudowo–częstotliwościowe układu. Wykazano,

że obecność obszarów niestabilności umożliwia efektywne przełączanie średniej liczby magnonów w układzie, co stanowi mechanizm sterowania splątaniem. Zbadano także wpływ temperatury na splątanie magnon–foton i pokazano, że wraz ze wzrostem temperatury obszar niezerowego splątania ulega zawężeniu. W szczególności splątanie występuje w obszarze odpowiadającym stabilnej spirali, co zostało zilustrowane schematycznie na odpowiednim rysunku.

Uzyskane wyniki wskazują na silne powiązanie między nieliniową dynamiką klasyczną a korelacjami kwantowymi w kryształach foton–magnon oraz pokazują, że inżynieria struktury przestrzeni fazowej może stanowić skuteczne narzędzie kontroli splątania w hybrydowych układach magnonowych.

Rozdział 7.

Atom dwupoziomowy jako wskaźnik termalizacji wielomodowych światłowodów optycznych

W poprzednich rozdziałach przeanalizowano dwa komplementarne aspekty dynamiki nieliniowej w układach hybrydowych. W Rozdziale 2 zbadano deterministyczną dynamikę układu magnetoelektrycznie sprzężonego, wykazując, że odpowiednio dobrane sprzężenie prowadzi do przejść między ruchem regularnym, rezonansami nieliniowymi oraz chaosem deterministycznym. Szczególną rolę odgrywała tutaj struktura przestrzeni fazowej oraz jej rekonstrukcja w wyniku zmiany parametrów zewnętrznych.

W Rozdziale 6 analizowano kryształ foton–magnon, w którym nieliniowość kondensatu magnonowego oraz efekt magnetoelektryczny prowadziły do powstania silnych korelacji kwantowych między modami. Wykazano, że właściwości splątania są bezpośrednio powiązane ze strukturą klasycznej przestrzeni fazowej: maksymalne splątanie pojawia się w pobliżu granic stabilności, natomiast w obszarach odpowiadających punktom siodłowym nie jest ono zdefiniowane. Otrzymane wyniki potwierdziły, że analiza jakościowa dynamiki nieliniowej stanowi skuteczne narzędzie przewidywania właściwości kwantowych układów hybrydowych.

Oba te kierunki badań wskazują na fundamentalne znaczenie nieliniowości oraz sprzężenia między stopniami swobody — zarówno dla struktury przestrzeni fazowej, jak i dla emergentnych efektów kwantowych. Naturalnym kolejnym krokiem jest zbadanie sytuacji, w której liczba stopni swobody ulega istotnemu zwiększeniu i pojawia się problem redystrybucji energii pomiędzy wieloma modami.

W niniejszym rozdziale analizowany jest wielomodowy układ optyczny sprzężony z układem dwupoziomowym w oparciu o artykuł [116], w którym autor niniejszej rozprawy pełnił rolę pierwszego autora. W przeciwieństwie do wcześniejszych prac, punkt ciężkości zostaje przesunięty z lokalnej struktury przestrzeni fazowej na zagadnienie kolektywnej dynamiki wielu modów oraz jej konsekwencji dla zachowania pojedynczego układu kwantowego. Badane jest, w jaki sposób nieliniowa redystrybucja energii pomiędzy modami wpływa na dynamikę atomu oraz czy możliwe jest wnioskowanie o stanie wielomodowego środowiska na podstawie jego ewolucji.

Tak zarysowana problematyka domyka logiczną sekwencję przedstawionych badań: od deterministycznej dynamiki nieliniowej i chaosu, poprzez analizę splątania w układach hybrydowych, aż po zagadnienie wielomodowej dynamiki i jej konsekwencji dla efektywnej termalizacji oraz dekoherencji układu kwantowego.

7.1. Model rozważanego układu

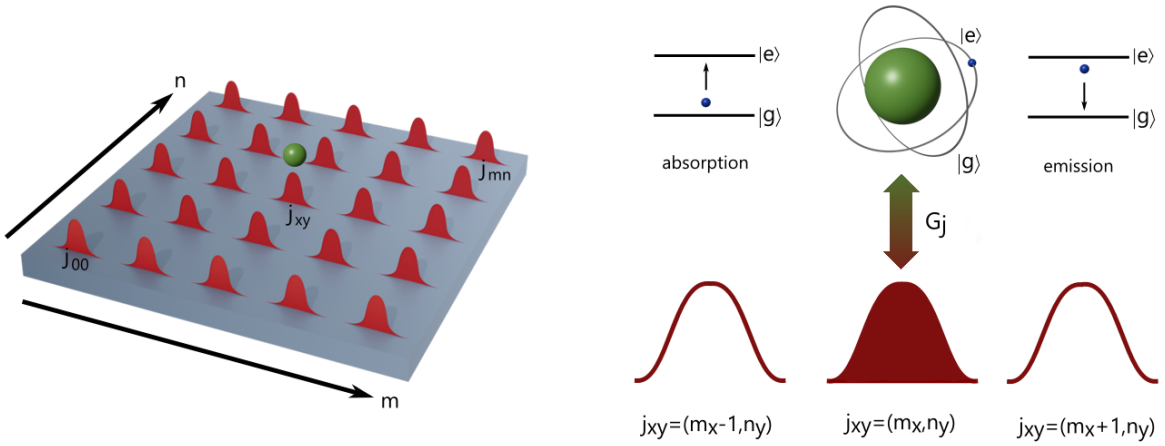
W celu zbadania wpływu wielomodowej dynamiki nieliniowej na ewolucję pojedynczego układu kwantowego rozważany jest hybrydowy system składający się z dwupoziomowego atomu sprzężonego z wielomodowym układem optycznym. Konstrukcja ta stanowi naturalne rozszerzenie analiz przedstawionych w poprzednich rozdziałach, w których wykazano fundamentalną rolę sprzężenia oraz nieliniowości w kształtowaniu zarówno dynamiki klasycznej, jak i właściwości kwantowych układów hybrydowych.

Wielomodowy układ optyczny modelowany jest jako dwuwymiarowa sieć sprzężonych światłowodów optycznych tworzących prostokątną kratę w płaszczyźnie XOY. Każdemu węzłowi kratowemu o współrzędnych (n, m), gdzie $n \in [1, N]$, $m \in [1, N]$, odpowiada jeden mod optyczny. Całkowita liczba modów wynosi $M = N^2$, a w analizowanych przykładach przyjmowana jest wartość $M = 400$, umożliwiająca stosowanie opisu statystycznego. Każdy mod charakteryzuje się własną energią (częstością) ε_j, gdzie indeks j jednoznacznie odpowiada parze współrzędnych (n, m). Oś z pełni w tym formalizmie szczególną rolę – w propagacji fali odpowiada ona "czasowi". Oznacza to, że ewolucja układu wzdłuż światłowodu jest analogiczna do ewolucji czasowej w standardowych zagadnieniach mechaniki kwantowej.

Nieliniowość ośrodka prowadzi do redystrybucji energii pomiędzy modami. W zależności od parametrów układu oraz energii początkowej możliwe są dwa jakościowo odmienne scenariusze dynamiki: zachowanie koherentnej superpozycji modów lub ich efektywna termalizacja. W pierwszym przypadku amplitudy i fazy poszczególnych modów zachowują informację o warunkach początkowych. W drugim przypadku rozkład energii przyjmuje charakter statystyczny, a opis układu wymaga wprowadzenia wielkości efektywnych, takich jak temperatura czy potencjał chemiczny.

Dwupoziomowy atom opisany jest przez stany własne $|e\rangle$ (stan wzbudzony) oraz $|g\rangle$ (stan podstawowy). Atom sprzężony jest jednocześnie ze wszystkimi modami pola optycznego. Sprzężenie z j-tym modem opisane jest stałą G_j, określającą siłę oddziaływania między dipolem atomowym a polem danego modu. W rezultacie atom oddziałuje z kolektywną superpozycją modów, a jego dynamika zależy od globalnej struktury amplitud w całej sieci. Schematyczne przedstawienie analizowanego układu zostało pokazane na rys. 7.1.

a) b)



Rys. 7.1. Schemat proponowanego układu. **a)** Wielomodowy układ optyczny, w którym j_{xy} oznacza pojedynczy mod, przy czym n i m są liczbami całkowitymi od 1 do N. **b)** Ilustracja oddziaływania G_j między atomem typu Jaynesa–Cumminga (układ dwupoziomowy) a wybranym modem. Stany $|e\rangle$ i $|g\rangle$ odpowiadają stanowi wzbudzonemu i podstawowemu atomu. Ponieważ nie jest znany konkretny tryb, z którym sprzężony jest atom, dynamikę populacji poziomów energetycznych atomu uśredniono po całym zbiorze wszystkich modów. (Na podstawie [116]).

7.1.1. Opis pola elektrycznego w światłowodzie

Punktem wyjścia do opisu matematycznego są równania Maxwella. Dla ośrodka z polaryzacją nieliniową, wektor indukcji elektrycznej ma postać $\mathbf{D}_{ind} = \epsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}$. Równanie falowe wyprowadzone z równań Maxwella to:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}_{ind}}{\partial t^2}, \tag{7.1}$$

gdzie ϵ_0 i μ_0 to przenikalność elektryczna i magnetyczna próżni, $\mathbf{E}$ pole elektryczne, a $\mathbf{P}$ to polaryzacja ośrodka.

Rozwiązania tego równania poszukuje się w szczególnej postaci, która uwzględnia strukturę światłowodu:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_{m,n} \Psi_{m,n}(z, t)\Phi_{m,n}(x, y)e^{-i\Omega t - k_0 z}, \tag{7.2}$$

funkcje $\Phi_{m,n}(x, y)$ opisują rozkład pola w przekroju poprzecznym światłowodu – jest to mod fundamentalny dla światłowodu o indeksach (m, n). Czynnik $e^{-i\Omega t}$ odpowiada za oscylacje czasowe z częstością Ω fotonów, a $e^{-ik_0 z}$ za propagację wzdłuż światłowodu ze średnią stałą propagacji k_0. Kluczową rolę odgrywają funkcje $\Psi_{m,n}(z, t)$, które opisują

powoli zmieniające się amplitudy modów – to właśnie one niosą informację o rozkładzie energii między modami.

7.1.2. Wyprowadzenie dyskretnego nieliniowego równania Schrödingera

Podstawiając równanie (7.2) do równania (7.1) można wyliczyć funkcje $\Psi_{m,n}$. W tym celu konieczne jest wykorzystanie właściwości modów fundamentalnych, które spełniają równanie własne:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_{m,n}=-\beta_{m,n}\Phi_{m,n}. \tag{7.3}$$

Założono, że zmiany amplitud $\Psi_{m,n}$ wzdłuż światłowodu są powolne w porównaniu z oscylacjami $e^{ik_0 z}$, dzięki temu można pominąć drugie pochodne po z .

Uwzględniając sprzężenie między sąsiednimi światłowodami. Foton propagujący się w jednym światłowodzie może "przeskoczyć" do sąsiedniego dzięki nakładaniu się pól – zjawisko to opisuje parametr β:

$$\beta=\int\Phi_{m,n}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Phi_{m+1,n}dxdy. \tag{7.4}$$

Uwzględniając również nieliniowość ośrodka, w polu o dużym natężeniu pojawia się nieliniowa polaryzacja trzeciego rzędu, proporcjonalna do podatności χ . Prowadzi to do członu nieliniowego z parametrem:

$$n_2\equiv\frac{3\chi\ \Omega}{4\epsilon_0}. \tag{7.5}$$

Ostatecznie otrzymano dyskretne nieliniowe równanie Schrödingera:

$$2i\frac{\partial\Psi_{m,n}}{\partial z}+\frac{\beta}{k_0}\Big(\Psi_{n-1,m}+\Psi_{n+1,m}+\Psi_{n,m-1}+\Psi_{n,m+1}\Big)+n_2|\Psi_{m,n}|^2\Psi_{m,n}=0. \tag{7.6}$$

Równanie to ma głęboką analogię z równaniem Schrödingera w mechanice kwantowej. Człon z pochodną po z odpowiada ewolucji czasowej, człon ze sprzężeniami między sąsiednimi węzłami odpowiada energii kinetycznej (przeskoki między węzłami sieci), a człon nieliniowy odpowiada oddziaływaniu.

7.1.3. Widmo modów liniowych

Rozpatrując część liniową równania (7.6) z pominięciem członu nieliniowego, wprowadza się wektor stanu $|\Psi\rangle = (a_1, a_2, \ldots, a_M)^T$, co pozwala zapisać:

$$i\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial z} + \hat{H}|\Psi\rangle = 0. \tag{7.7}$$

Rozwiązań poszukuje się w postaci fal biegnących: $\Psi_{m,n} \sim \exp[i(\epsilon z \ - pn - qm)]$. Podstawiając do równania liniowego, otrzymuje się zależność dyspersyjną: $\epsilon = \delta k(\cos p + \cos q)$, gdzie $\delta k = \frac{\beta}{k_0}$. Warunki brzegowe w skończonej sieci $N \times N$ kwantyzują dopuszczalne wartości p i q:

$$p = \frac{\pi\ n}{N}, \quad q = \frac{\pi\ m}{N}, \quad n, m = 1, 2, \ldots, N.$$

Stąd otrzymuje się widmo częstości modów:

$$\omega_j = \delta k \left(\cos\frac{\pi\ n_j}{N} + \cos\frac{\pi\ m_j}{N}\right), \tag{7.8}$$

gdzie indeks j numeruje wszystkie możliwe pary (n, m). Dla dużych N, wartości ω_j wypełniają pasmo od $-2\delta k$ do $2\delta k$.

Całkowite rozwiązanie dla modu j ma postać:

$$\psi_j = c_j e^{-i(\Omega t - k_0 z - \omega_j z)}. \tag{7.9}$$

Wielkości $|c_j|^2$ interpretuje się jako obsadzenia modów – to one podlegają termalizacji.

7.1.4. Hamiltonian Jaynesa-Cummingsa dla atomu dwupoziomowego

Atom dwupoziomowy jest najprostszym nietrywialnym układem kwantowym – ma tylko dwa stany: podstawowy $|g\rangle$ i wzbudzony $|e\rangle$. Jego oddziaływanie z polem kwantowym opisuje model Jaynesa-Cummingsa [51].

Hamiltonian dla atomu oddziałującego z pojedynczym modem j ma postać:

$$\hat{H}_j = \hbar\Omega\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z + G_j(z)(\hat{\sigma}\hat{a}^+ + \hat{\sigma}^+\hat{a}). \tag{7.10}$$

Poszczególne człony tego hamiltonianu określają kolejno:

- $\hbar\Omega\hat{a}^+\hat{a}$ – energię pola elektromagnetycznego, gdzie $\hat{a}^+$ i $\hat{a}$ to operatory kreacji i anihilacji fotonów, a Ω to częstość fotonów.

- $\frac{1}{2}\hbar\omega\hat{\sigma}_z$ – energię atomu, gdzie $\hat{\sigma}_z$ jest macierzą Pauliego, a ω to częstość przejścia atomowego (różnica energii między stanem wzbudzonym a podstawowym podzielona przez $\hbar$).
- $G_j(z)(\hat{\sigma}\hat{a}^+ + \hat{\sigma}^+\hat{a})$ – człon oddziaływania. Operator $\hat{\sigma}^+ = |e\rangle\langle g|$ podnosi atom do stanu wzbudzonego kosztem anihilacji fotonu, a $\hat{\sigma} = |g\rangle\langle e|$ opuszcza atom do stanu podstawowego z kreacją fotonu.

Stała sprzężenia $G_j(z)$ zależy od modu, z którym oddziałuje atom:

$$G_j(z) = \hbar g|c_j|\cos[(k_0 + \omega_j)z]. \tag{7.11}$$

Występuje tu zależność od amplitudy modu $|c_j|$ – im silniej obsadzony mod, tym silniejsze sprzężenie. Czynnik cosinusowy odzwierciedla oscylacyjną naturę sprzężenia wzdłuż światłowodu.

7.2. Wyprowadzenie równań opisujących dynamikę układu

Do rozwiązania równania (7.6) niezbędne jest określenie stanu początkowego układu. Założono, że atom i pole są początkowo niezależne, a pole jest przygotowane w stanie koherentnym:

$$|\Psi(0)\rangle = |\Psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_f = [c_e|e\rangle + c_g|g\rangle] \otimes \sum_{n=0}^{\infty} w_n|n\rangle \tag{7.12}$$

Stan koherentny jest kwantowym odpowiednikiem klasycznej fali – opisuje pole o dobrze określonej amplitudzie i fazie. Współczynniki w_n mają rozkład Poissona:

$$w_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-|\alpha|^2/2}, \tag{7.13}$$

gdzie $|n\rangle$ to stan Focka o n fotonach (ściśle określonej liczbie fotonów), a $|\alpha|^2$ to średnia liczba fotonów w stanie koherentnym. Dla dużych $|\alpha|^2$, rozkład Poissona staje się wąski, a stan koherentny dobrze przybliża klasyczne pole.

7.2.1. Rozwiązanie równania Schrödingera

Ewolucja czasowa układu dana jest równaniem Schrödingera:

$$i\frac{\partial|\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \tag{7.14}$$

Rozwiązanie można przedstawić w bazie stanów własnych hamiltonianu. Dla modelu Jaynesa-Cummingsa, hamiltonian można diagonalizować w podprzestrzeniach o ustalonej całkowitej liczbie wzbudzeń. Dla stanu początkowego (7.12), rozwiązanie przyjmuje postać:

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n(t)|e,n\rangle + B_n(t)|g,n+1\rangle\right]. \tag{7.15}$$

gdzie $|e,n\rangle$ oznacza atom w stanie wzbudzonym i n fotonów, a $|g,n+1\rangle$ – atom w stanie podstawowym i $n+1$ fotonów.

Funkcje $A_n(t)$ i $B_n(t)$ wyznacza się z równań ruchu:

$$\begin{aligned} i\dot{A}_n &= \frac{\omega}{2}A_n + \sqrt{n+1}G_j e^{-i\Omega t}B_n \\ i\dot{B}_n &= -\frac{\omega}{2}B_n + \sqrt{n+1}G_j e^{i\Omega t}A_n. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Po odjęciu szybkich oscylacji (przejście do obrazu oddziaływania) otrzymuje się układ równań ze stałymi współczynnikami, który można rozwiązać dokładnie.

Kluczową rolę odgrywa częstość Rabiego:

$$\lambda_{j,n} = \sqrt{(\omega-\Omega)^2 + 4(n+1)G_j^2(z)}. \tag{7.17}$$

Jest to częstość oscylacji populacji między stanem wzbudzonym a podstawowym. Dla rezonansu $\omega = \Omega$, częstość Rabiego jest proporcjonalna do pierwiastka z liczby fotonów i stałej sprzężenia.

7.2.2. Konstrukcja macierzy gęstości

Znając pełny stan układu $|\Psi(t)\rangle$, skonstruowano macierz gęstości: $\hat{\rho}^j(t) = |\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|$. Interesującym podukładem jest jednak tylko atom. Aby go opisać, okreslono ślad po stanach pola:

$$\hat{\rho}_a^j(t) = \mathrm{Tr}_f(\hat{\rho}^j(t)) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\hat{\rho}^j(t)|n\rangle \tag{7.18}$$

Obliczenia prowadzą do następujących wyrażeń na elementy macierzowe:

$$\begin{aligned} \rho_{a,11}^j(t) &= \rho_{00}(0)[1-\alpha(t)] + \rho_{11}(0)\beta(t) \\ \rho_{a,00}^j(t) &= \rho_{00}(0)\alpha(t) + \rho_{11}(0)[1-\beta(t)] \\ \rho_{a,10}^j(t) &= \rho_{10}(0)\gamma(t) \\ \rho_{a,01}^j(t) &= \rho_{01}(0)\gamma^*(t) \end{aligned} \tag{7.19}$$

Indeksy 11 i 00 odpowiadają stanom wzbudzonemu i podstawowemu atomu. Wprowadzone funkcje $\alpha(t)$, $\beta(t)$ i $\gamma(t)$ wyrażają się przez funkcje $C_n(t)$:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= e^{i(\omega-\Omega)t/2}\left[\cos(\lambda_{j,n}t/2) - i\frac{(\omega-\Omega)}{\lambda_n}\sin(\lambda_{j,n}t/2)\right] \\ \alpha(t) &= \sum_n C_n^*(t)C_n(t) \\ \beta(t) &= \sum_n C_{n+1}^*(t)C_{n+1}(t) \\ \gamma(t) &= \sum_n C_n(t)C_{n+1}(t) \end{aligned} \tag{7.20}$$

7.2.3. Inwersja atomowa

Szczególnie interesującą wielkością jest inwersja atomowa, czyli różnica obsadzeń stanu wzbudzonego i podstawowego

$$\mathcal{W} = \rho_{11} - \rho_{00}. \tag{7.21}$$

Korzystając z (7.18) i zakładając dla prostoty, że początkowo atom jest w stanie wzbudzonym ($\rho_{11}(0) = 1, \rho_{00}(0) = 0$), otrzymano

$$\mathcal{W} = \beta(t) - \alpha(t). \tag{7.22}$$

Po podstawieniu wyrażeń na $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ i wykonaniu sumowania po n, inwersję zapisano w postaci

$$\mathcal{W} = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}(t), \tag{7.23}$$

gdzie część stała wynosi

$$\mathcal{A}_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}\frac{|\alpha|^{2n}e^{-|\alpha|^2}}{M\cdot n!}\frac{(\omega-\Omega)^2}{\lambda_n^2}, \tag{7.24}$$

a część zależna od czasu

$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{M}\frac{|\alpha|^{2n}e^{-|\alpha|^2}}{M\cdot n!}\frac{2(n+1)(\hbar g)^2}{\lambda_n^2} \times |c_j|^2(1+\cos[2(k_0+\omega_j)z])\cos(\lambda_n t). \tag{7.25}$$

W $\mathcal{A}_0$ pojawia się tylko kwadrat częstości Rabiego w mianowniku – to człon niezależny od czasu, który określa średnią wartość inwersji. W $\mathcal{A}(t)$ występują natomiast oscylacje cosinusowe z częstościami λ_n, modulowane przez człon związany z propagacją wzdłuż światłowodu $(1+\cos[2(k_0+\omega_j)z])$.

W proponowanym układzie atom oddziałuje z losowo wybranym modem. Dlatego konieczne jest uśrednienie wyników po wszystkich modach. Dla elementów

pozadiagonalnych

$$\rho_{a,10} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\rho_{a,10}^{j}(t), \quad \rho_{a,01} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M}\rho_{a,01}^{j}(t). \tag{7.26}$$

Dla inwersji atomowej, uśrednienie jest już zawarte w równaniach (7.24) i (7.25) poprzez sumę po j.

Korzystając z inwersji atomowej, zdefiniowano efektywną temperaturę atomu. W równowadze termodynamicznej, stosunek obsadzeń stanów dany jest czynnikiem Boltzmanna:

$$\frac{\rho_{11}}{\rho_{00}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T_a}}, \tag{7.27}$$

co prowadzi do wzoru na temperaturę atomu

$$T_a = \frac{\hbar\omega}{k_B \ln\left[\frac{1+\mathcal{W}}{1-\mathcal{W}}\right]}. \tag{7.28}$$

Gdy $\mathcal{W} \to 0$ (równe obsadzenia poziomów), temperatura dąży do nieskończoności. Gdy $\mathcal{W} \to 1$ (tylko stan wzbudzony), temperatura dąży do 0 od strony ujemnej – w układach dwupoziomowych możliwa jest populacja odwrócona, która odpowiada ujemnym temperaturom bezwzględnym.

7.3. Termalizacja modów optycznych

Nieliniowe oddziaływania między modami, opisane członem $n_2|\Psi_{m,n}|^2\Psi_{m,n}$ w równaniu (7.6), prowadzą do termalizacji układu. Początkowo energia może być zgromadzona w kilku modach. Na skutek oddziaływań nieliniowych, fotony mogą być rozpraszane między modami, podobnie jak cząstki w gazie zderzają się i wymieniają energię. Proces ten trwa aż do ustalenia się równowagi statystycznej.

Osiągnięcie równowagi oznacza, że rozkład energii między modami nie zmienia się już w czasie (średnio), a dalsza ewolucja polega na fluktuacjach wokół stanu równowagi. Taki stan można opisać za pomocą kilku parametrów makroskopowych, takich jak temperatura i potencjał chemiczny.

Do wyprowadzenia rozkładu równowagowego stosuje się metody termodynamiki statystycznej. Całkowita energia wewnętrzna układu modów to wartość oczekiwana hamiltonianu liniowego:

$$U = -\langle\Psi|\hat{H}_L|\Psi\rangle = -\sum_{j=1}^{M}\omega_j|c_j|^2. \tag{7.29}$$

Całkowita moc (całkowita liczba fotonów) to:

$$\mathcal{P} = \sum_{j=1}^{M} |c_j|^2. \tag{7.30}$$

W równowadze termodynamicznej, układ dąży do maksymalizacji entropii przy zadanych wartościach U i $\mathcal{P}$. Entropię układu modów można zapisać jako:

$$S = -\sum_{j=1}^{M} [|c_j|^2 \ln |c_j|^2 - (1 + |c_j|^2) \ln(1 + |c_j|^2)] \tag{7.31}$$

Jest to entropia dla modów bozonowych w przybliżeniu klasycznym (pominięto efekty kwantowe związane z nieprzemiennością operatorów).

Maksymalizacja entropii przy warunkach $U = \text{const}$ i $\mathcal{P} = \text{const}$ prowadzi do równania:

$$\frac{\partial}{\partial |c_j|^2} [S + \beta(U - \mu\mathcal{P})] = 0$$

gdzie $\beta = 1/T$ (w jednostkach, gdzie $k_B = 1$), a μ to potencjał chemiczny. Obliczając pochodną, otrzymano

$$\ln\left(\frac{1 + |c_j|^2}{|c_j|^2}\right) = \beta(\omega_j + \mu), \tag{7.32}$$

Rozwiązując równanie (7.32) względem $|c_j|^2$ otrzymano

$$|c_j|^2 = \frac{1}{e^{\beta(\omega_j + \mu)} - 1}. \tag{7.33}$$

Jest to rozkład Bosego-Einsteina. W granicy wysokiej temperatury ($\beta \to 0$), rozwija się $e^{\beta(\omega_j+\mu)} \approx 1 + \beta(\omega_j + \mu)$c co pozwala na zapisanie w postaci

$$|c_j|^2 \approx \frac{1}{\beta(\omega_j + \mu)} = -\frac{T}{\omega_j + \mu} \tag{7.34}$$

Dla dodatniej temperatury, aby $|c_j|^2$ było dodatnie, musi zachodzić $\omega_j + \mu < 0$, czyli $\mu < -\omega_j$ dla wszystkich j. Potencjał chemiczny musi być ujemny i większy co do modułu niż największe ω_j.

7.3.1. Równania stanu

Równania stanu wiążące temperaturę i potencjał chemiczny z zachowanymi wielkościami U i $\mathcal{P}$ otrzymuje się, podstawiając rozkład (7.34) do równań (7.29) i (7.30)

$$\begin{aligned} U &= -\sum_{j=1}^{M} \omega_j \left(-\frac{T}{\omega_j + \mu} \right) = T \sum_{j=1}^{M} \frac{\omega_j}{\omega_j + \mu}, \\ \mathcal{P} &= \sum_{j=1}^{M} \left(-\frac{T}{\omega_j + \mu} \right) = -T \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\omega_j + \mu}. \end{aligned} \tag{7.35}$$

Można je przekształcić do wygodniejszej postaci. Zauważając, że:

$$\frac{\omega_j}{\omega_j + \mu} = 1 - \frac{\mu}{\omega_j + \mu}, \tag{7.36}$$

wówczas

$$U = T \sum_{j=1}^{M} \left(1 - \frac{\mu}{\omega_j + \mu} \right) = MT - \mu T \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\omega_j + \mu}. \tag{7.37}$$

Korzystając z $\sum_j \frac{1}{\omega_j + \mu} = -\mathcal{P}/T$ równanie (7.37) przyjmuje postać:

$$U - \mu \mathcal{P} = MT, \tag{7.38}$$

gdzie

$$\mathcal{P} = -T \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{\omega_j + \mu}. \tag{7.39}$$

Te dwa równania pozwalają wyznaczyć T i μ dla zadanych U i $\mathcal{P}$.

7.3.2. Granica wysokiej temperatury

Gdy temperatura jest bardzo wysoka ($T \gg \max(\omega_j)$), to w mianowniku $\omega_j + \mu$ dominuje μ, które również musi być duże co do modułu ($|\mu| \gg \max(\omega_j)$). Wówczas:

$$|c_j|^2 \approx -\frac{T}{\mu} = \text{const} \tag{7.40}$$

Wszystkie mody są obsadzone jednakowo. Jest to granica, w której efekty dyskretnej struktury widma przestają być istotne.

7.3.3. Interpretacja temperatury ujemnej

W układach optycznych możliwa jest również temperatura ujemna. Odpowiada ona sytuacji, gdy wyższe mody (o większych ω_j) są silniej obsadzone niż niższe. Wówczas

w rozkładzie (7.34) musi zachodzić $\omega_j + \mu > 0$, a $T < 0$. Taka sytuacja jest możliwa, ponieważ widmo modów jest ograniczone z góry i z dołu, a układ może znajdować się w stanie z odwróceniem obsadzeń.

7.4. Wpływ termalizacji modów na dynamikę atomu dwupoziomowego

7.4.1. Przypadek nietermalizowanych modów

Gdy mody optyczne nie są termalizowane, atom dwupoziomowy oddziałuje z koherentną superpozycją wszystkich modów. Wówczas stała sprzężenia w hamiltonianie (7.10) ma postać sumy:

$$G(z) = \sum_{j=1}^{M} \hbar g |c_j| \cos[(k_0 + \omega_j)z] \tag{7.41}$$

Jest to suma oscylacji o różnych częstościach przestrzennych $k_0 + \omega_j$. Hamiltonian (7.10) z takim sprzężeniem jest nadal hamiltonianem Jaynesa-Cummingsa, ale z modulowanym w z sprzężeniem.

Dynamika takiego układu jest charakterystyczna dla modelu Jaynesa-Cummingsa – występują w niej kwantowe powroty (ang. *quantum revivals*). Zjawisko to polega na tym, że po początkowym zaniku oscylacji Rabiego, po pewnym czasie oscylacje pojawiają się ponownie. Jest to konsekwencja dyskretnej natury widma częstości Rabiego – dla stanu koherentnego, częstości λ_n dla różnych n są nieproporcjonalne, co prowadzi do okresowej rekonstrukcji fazy.

Matematycznie, kwantowe powroty wynikają z sumowania w wyrażeniu (7.24) po wszystkich n. Dla ustalonego j, funkcja $\mathcal{A}(t)$ jest sumą oscylacji z częstościami λ_n. Dla dużych $|\alpha|^2$, zakres istotnych n jest szeroki, a częstości λ_n w przybliżeniu liniowo zależą od $\sqrt{n+1}$. Taka quasi-okresowa struktura prowadzi do powrotów.

7.4.2. Przypadek termalizowanych modów

Gdy mody optyczne uległy termalizacji, sytuacja ulega zmianie. Amplitudy $|c_j|^2$ nie są już dowolne. W równaniach (7.24) i (7.25) występuje suma po wszystkich modach j, równania te przyjmują postać

$$\mathcal{A}_0 = \sum_{j=1}^{M} \frac{(\omega - \Omega)^2}{(\omega - \Omega)^2 + 4|\alpha|^2 G_j^2(z)}, \tag{7.42}$$

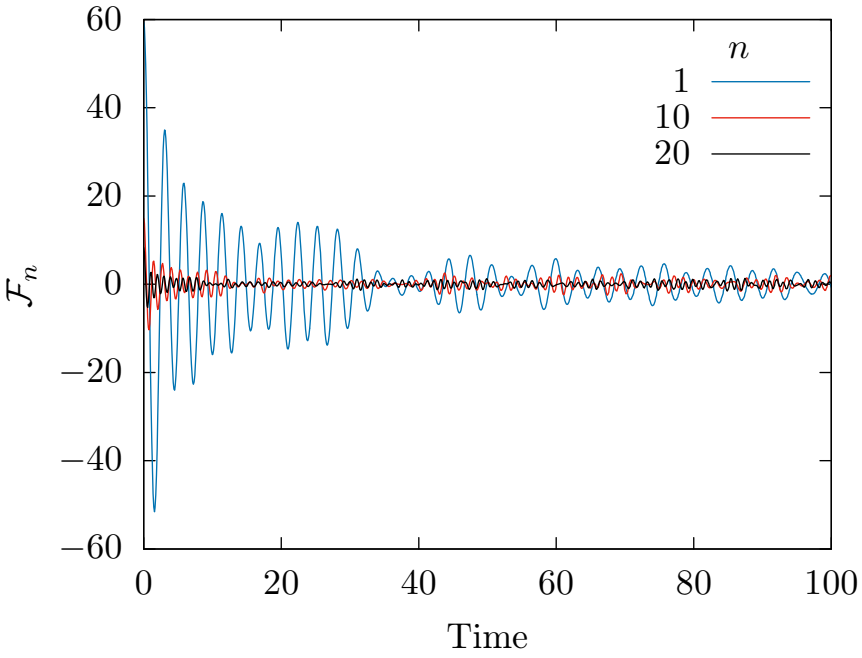
$$\mathcal{A}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(\hbar g)^2 (n+1)|\alpha|^{2n} e^{-|\alpha|^2}}{M \cdot n!} \mathcal{F}_n(t), \tag{7.43}$$

gdzie dla dużych M

$$\mathcal{F}_n(t) = \sum_{j=1}^{M} \frac{|c_j|^2}{\lambda_n^2} \left(1 + \cos[2(k_0 + \omega_j)z]\right) \cos(\lambda_n t). \tag{7.44}$$

$\mathcal{F}_n(t)$ zachowuje się jak funkcja losowa. Jej wartość oczekiwana po zespole modów dąży do zera dla $t \to \infty$, a fluktuacje są rzędu $1/\sqrt{M}$. W przypadku termalizowanych modów, fazy poszczególnych składowych są przypadkowe – każdy mod ma swoją częstość ω_j i amplitudę $|c_j|^2$ wynikającą z rozkładu termicznego. Suma wielu oscylacji o przypadkowych fazach daje w wyniku funkcję zanikającą do zera. To jest właśnie istota termalizacji – uśrednienie po zespole prowadzi do zachowań typowych dla układów statystycznych.

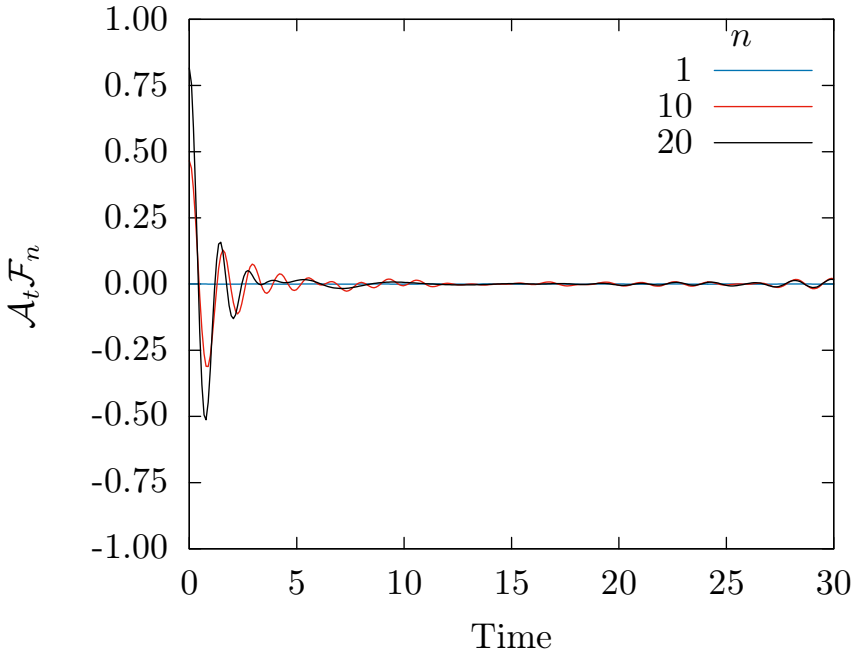
Proces termalizacji atomu opisany jest przez część zależną od czasu inwersji, daną równaniem (7.43). Wyniki przedstawiono na rys. 7.2 oraz 7.3. Jak wynika z przedstawionych



Rys. 7.2. Zanik składowych cząstkowych $\mathcal{F}_n(t)$ zdefiniowanych we wzorze (7.43), odpowiadających stanom o określonej liczbie fotonów $|n\rangle$, dla różnych wartości n. Średnia liczba fotonów wynosi $|\alpha|^2 = 10$. Początkowa moc: $\mathcal{P} = 200$ [116].

wykresów, część dynamiczna inwersji $\mathcal{A}(t)$ zanika w czasie. W przeciwieństwie do przypadku zerowej temperatury nie obserwujemy wyraźnych odrodzeń kwantowych, lecz jedynie niewielkie fluktuacje wokół zera.

Funkcja $\mathcal{F}_n(t)$ (rys. 7.2) opisuje zanik cząstkowych wkładów w równaniu (7.43), odpowiadających stanom z ustaloną liczbą fotonów $|n\rangle$. Z kolei wielkość $\mathcal{A}(t)$ (rys. 7.3) uwzględnia sumaryczny wkład wszystkich sektorów liczby fotonów.



Rys. 7.3. Czasowa zależność sumy inwersji poziomów $\mathcal{A}(t)$ (z równania (7.43)) po stanach o liczbie fotonów od 1 do 20 włącznie. Średnia liczba fotonów $|\alpha|^2 = 10$, moc $P = 200$ [116].

Zanik $\mathcal{A}(t)$ w granicy długich czasów oznacza, że inwersja atomowa sprowadza się do części stacjonarnej $\mathcal{A}_0$. W efekcie dynamika przechodzi od odwracalnej, koherentnej ewolucji do efektywnego zachowania termicznego, w którym populacje poziomów opisane są jedynie przez temperaturę efektywną T_a.

7.4.3. Granica wysokiej temperatury – wyprowadzenie analityczne

W granicy wysokiej temperatury modów, gdy $|c_j|^2 = \text{const} = c^2$, można wykonać sumowanie po modach analitycznie. Otrzymuje się wówczas:

$$\mathcal{W}(t) = \frac{e^{-\alpha^2}(1+\cos(\lambda_0 t))c^2}{2M} - \frac{e^{-\alpha^2}(1-\cos(\lambda_0 t))c^2}{2Mz\sqrt{2\xi\ +1}}\left(\arctan\left[\frac{\tan[zc^2+k_0]}{\sqrt{2\xi\ +1}}\right] - \arctan\left[\frac{\tan[k_0]}{\sqrt{2\xi\ +1}}\right]\right) \quad (7.45)$$

gdzie wprowadzono oznaczenie $\xi\ = \frac{2(\hbar g)^2 c^2}{(\omega-\Omega)^2}$.

Dla $M \gg 1$ i $|\alpha|^2 \gg 1$, pierwszy człon jest rzędu $1/M$ i zanika. Drugi człon również zawiera czynnik $1/M$, więc w granicy dużych M otrzymuje się $\mathcal{W}(t) \to 0$. Oznacza to, że inwersja atomowa dąży do zera – oba poziomy atomowe są jednakowo obsadzone.

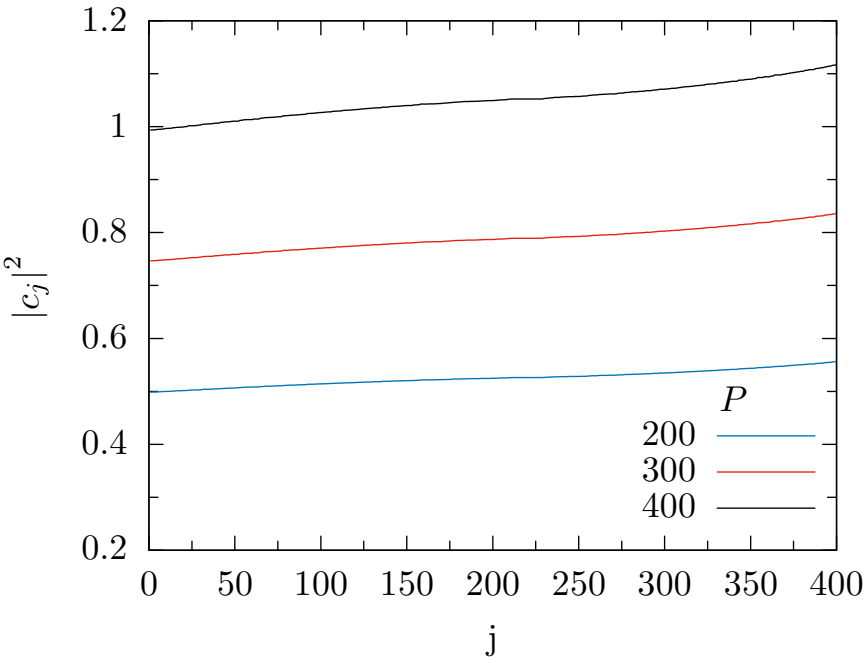
Podstawiając $\mathcal{W} = 0$ do wzoru (7.28) na temperaturę atomu, otrzymuje się:

$$T_a = \frac{\hbar\omega}{k_B \ln\left[\frac{1+0}{1-0}\right]} = \frac{\hbar\omega}{k_B \cdot 0} \to \infty$$

Czyli temperatura atomu dąży do nieskończoności wraz z temperaturą modów.

W przypadku skończonej temperatury modów temperatura atomu T_a nie musi pokrywać się z temperaturą układu wielomodowego T. Oznacza to, że nawet jeżeli pole optyczne osiągnęło stan termiczny, atom dwupoziomowy może znajdować się jeszcze poza równowagą efektywną.

Na rys. 7.4 przedstawiono rozkład amplitud modów $|c_j|^2$ po procesie termalizacji. Amplitudy zostały uporządkowane zgodnie z energią modów, tak że $\varepsilon_{j+1} > \varepsilon_j$. Widoczny wzrost wartości $|c_j|^2$ wraz z indeksem j wskazuje na ujemny potencjał chemiczny układu wielomodowego. Wraz ze wzrostem mocy $\mathcal{P}$, czyli energii pompowanej do modów



Rys. 7.4. Rozkład przechowywanych amplitud modów $|c_j|^2$. Niewielki wzrost wartości $|c_j|^2$ wraz ze wzrostem indeksu j wskazuje na ujemną wartość potencjału chemicznego modów [116].

optycznych, rozkład amplitud staje się coraz bardziej jednorodny. Odpowiada to granicy

$$T \gg \max(\varepsilon_j), \qquad |\mu| \gg \max(\varepsilon_j),$$

w której obsadzenia modów zbliżają się do wartości stałej.

W układach optycznych możliwa jest również temperatura ujemna. Odpowiada ona sytuacji, gdy wyższe mody (o większych ω_j) są silniej obsadzone niż niższe. Wówczas w rozkładzie (7.34) musi zachodzić $\omega_j + \mu > 0$, a $T < 0$. Taka sytuacja jest możliwa,

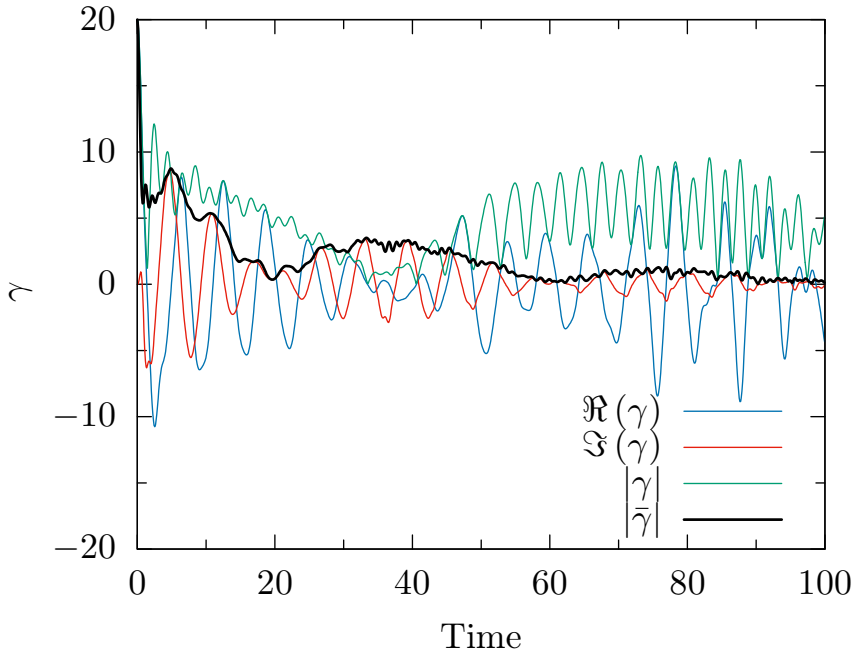
ponieważ widmo modów jest ograniczone z góry i z dołu, a układ może znajdować się w stanie z odwróceniem obsadzeń.

7.4.4. Dekoherencja w układzie

Elementy pozadiagonalne macierzy gęstości atomu $\rho_{a,10}$ i $\rho_{a,01}$ niosą informację o koherencjach kwantowych. Ich zanik świadczy o dekoherencji – utracie spójności fazowej między stanami kwantowymi. Proces dekoherencji analizowany jest poprzez zachowanie elementów pozadiagonalnych zredukowanej macierzy gęstości. Na rys. 7.5 przedstawiono czasową ewolucję elementu $\rho^j_{a,10}(t)$ przed uśrednieniem, a także części rzeczywistej $\Re(\gamma)$, urojonej $\Im(\gamma)$ oraz modułu $|\gamma|$. Następnie wykonano uśrednienie po wszystkich modach,

$$\rho_{a,10}(t) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \rho^j_{a,10}(t), \tag{7.46}$$

otrzymując wielkość $|\bar{\gamma}|$. Obie krzywe zostały znormalizowane do tych samych warunków



Rys. 7.5. Przebieg czasowy pozadiagonalnego elementu zredukowanej macierzy gęstości dla pojedynczego moda $\rho^j_{a,10}(t)$ oraz odpowiadających mu wielkości $\Re(\gamma)$, $\Im(\gamma)$, $|\gamma|$, a następnie po uśrednieniu po M modach falowodu: $\rho_{a,10}(t) = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} \rho^j_{a,10}(t)$ i $|\bar{\gamma}|$. Przyjęto $P = 200$, $|\alpha|^2 = 10$ [116].

początkowych. Widać, że przed uśrednieniem element pozadiagonalny wykazuje oscylacje charakterystyczne dla koherentnej dynamiki. Po uśrednieniu po zbiorze modów amplituda $|\bar{\gamma}|$ ulega jednak szybkiemu zanikowi. Zanik ten jest bezpośrednią sygnaturą dekoherencji wywołanej rozkładem częstości Rabiego w ztermalizowanym układzie wielomodowym.

7.5. Podsumowanie rozdziału

W niniejszym rozdziale przeanalizowano dynamikę atomu dwupoziomowego sprzężonego z wielomodowym układem optycznym w kontekście procesu termalizacji modów. Atom potraktowano jako czułą sondę lokalną, której obserwowalne – w szczególności populacje poziomów energetycznych oraz elementy pozadiagonalne zredukowanej macierzy gęstości – pozwalają wnioskować o stanie statystycznym całego układu wielomodowego.

W przypadku braku termalizacji modów (odpowiadającym zerowej temperaturze efektywnej pola) dynamika układu opisana jest standardowym modelem Jaynesa–Cummingsa. Ewolucja ma wówczas charakter w pełni koherentny: obserwowane są oscylacje Rabiego oraz odrodzenia kwantowe, a część zależna od czasu inwersji nie zanika w granicy długich czasów. Układ pozostaje odwracalny, a atom nie wykazuje cech termalizacji.

Sytuacja ulega zasadniczej zmianie w przypadku skończonej temperatury modów. Uśrednienie po ztermalizowanym rozkładzie amplitud $|c_j|^2$ prowadzi do rozmycia częstości Rabiego i interferencji wielu nieskorelowanych składników dynamicznych. W konsekwencji elementy pozadiagonalne zredukowanej macierzy gęstości ulegają szybkiemu zanikowi, co stanowi jednoznaczną sygnaturę dekoherencji. Jednocześnie część zależna od czasu inwersji $\mathcal{A}(t)$ zanika w granicy długich czasów, a dynamika atomu redukuje się do części stacjonarnej $\mathcal{A}_0$.

Wykazano, że wraz ze wzrostem temperatury modów T oraz średniej liczby fotonów $|\alpha|^2$ wartość $\mathcal{A}_0$ dąży do zera, co odpowiada wyrównaniu populacji poziomów atomowych. Z definicji temperatury efektywnej wynika wówczas, że $T_a \to \infty$. Oznacza to, że atom dwupoziomowy sprzężony z wystarczająco „gorącym" układem wielomodowym sam przechodzi do stanu efektywnie termicznego.

Kluczowym rezultatem rozdziału jest zatem wykazanie, że lokalny, mikroskopowy stopień swobody może pełnić rolę świadka procesu termalizacji zachodzącego w rozległym układzie wielomodowym. Mechanizm ten nie wymaga wprowadzenia jawnej dyssypacji ani sprzężenia z zewnętrznym rezerwuarem – efektywne zachowanie termiczne wynika wyłącznie z rozkładu częstości i interferencji wielu modów.

Przedstawiona analiza łączy opis mikroskopowej dynamiki kwantowej z makroskopowym pojęciem temperatury i stanowi pomost między formalizmem modelu Jaynesa–Cummingsa a statystycznym opisem ztermalizowanego układu optycznego.

Podsumowanie i wnioski

Celem niniejszej rozprawy było zbadanie roli nieliniowości, sprzężeń hybrydowych oraz wielomodowości w kształtowaniu złożonej dynamiki układów fizycznych – od deterministycznego chaosu, przez korelacje kwantowe, aż po efektywną termalizację. Trzy przedstawione prace, choć dotyczą różnych realizacji fizycznych, tworzą spójną narrację badawczą koncentrującą się na pytaniu: w jaki sposób struktura nieliniowej dynamiki wpływa na właściwości kolektywne i kwantowe układów złożonych oraz jak można tę dynamikę kontrolować?

W pierwszej pracy przeanalizowano nieliniową dynamikę hybrydowego układu magnetoelektrycznego złożonego z ferroelektryka i magnetycznego nanodysku. Wykazano, że sprzężenie magnetoelektryczne stanowi skuteczny mechanizm sterowania przejściami pomiędzy ruchem regularnym, rezonansami nieliniowymi oraz chaosem deterministycznym. Zastosowanie narzędzi teorii układów dynamicznych – twierdzenia KAM, analizy bifurkacji Hopfa oraz wykładników Lapunowa – pozwoliło na pełną charakterystykę scenariuszy niestabilności. Szczególnie istotnym wynikiem było wykazanie, że przejście ferroelektryka do potencjału dwudolinowego znacząco zwiększa podatność układu na chaos oraz umożliwia transfer chaotycznej dynamiki między podsystemami. Pokazano również, że temperatura prowadzi do renormalizacji parametrów efektywnych, nie zmieniając jednak fundamentalnych mechanizmów bifurkacyjnych.

Druga praca rozszerza tę problematykę na poziom kwantowy, analizując kryształ foton–magnon z periodyczną modulacją. Wykazano, że kondensat magnonowy z efektywną nieliniowością typu Kerra umożliwia przestrzenne uwięzienie modów i silne sprzężenie z modami fotonowymi. Kluczowym rezultatem było wykazanie bezpośredniego związku między klasyczną strukturą przestrzeni fazowej a wielkością splątania foton–magnon mierzonego logarytmiczną negatywnością. Maksymalne splątanie pojawia się w pobliżu granic obszarów stabilnych rozwiązań, natomiast w reżimie punktów siodłowych korelacje kwantowe ulegają degradacji. Oznacza to, że inżynieria nieliniowej dynamiki klasycznej może stanowić narzędzie kontroli właściwości kwantowych w hybrydowych układach magnonowych. Wykazano również, że temperatura ogranicza obszar występowania splątania, lecz nie zmienia jakościowego związku między stabilnością dynamiczną a korelacjami kwantowymi.

Trzecia praca dotyczyła zagadnienia termalizacji w wielomodowym układzie optycznym sondowanym przez atom dwupoziomowy. Pokazano, że w przypadku braku termalizacji dynamika ma charakter w pełni koherentny i opisana jest modelem Jaynesa–Cummingsa

z obecnością odrodzeń kwantowych. W reżimie skończonej temperatury modów interferencja wielu częstości prowadzi do efektywnej dekoherencji oraz zaniku części dynamicznej inwersji. W granicy wysokiej temperatury populacje poziomów atomowych ulegają wyrównaniu, co odpowiada nieskończonej temperaturze efektywnej atomu. Wykazano zatem, że lokalny stopień swobody może pełnić rolę świadka procesu termalizacji zachodzącego w układzie wielomodowym, bez konieczności wprowadzania jawnej dyssypacji.

Łącznie przedstawione wyniki prowadzą do następujących ogólnych wniosków:

- Nieliniowość jest fundamentalnym mechanizmem kształtującym zarówno dynamikę klasyczną, jak i właściwości kwantowe układów hybrydowych.
- Struktura przestrzeni fazowej – w szczególności obecność bifurkacji, torusów niezmienniczych oraz obszarów niestabilności – ma bezpośrednie przełożenie na obserwowalne wielkości fizyczne, takie jak splątanie czy efektywna temperatura.
- Wielomodowość może pełnić rolę wewnętrznego rezerwuaru prowadzącego do dekoherencji i efektywnego zachowania termicznego w ramach jednostkowej ewolucji kwantowej.
- Sprzężenia magnetoelektryczne oraz inżynieria strukturalna (periodyczna modulacja, kontrola potencjału ferroelektrycznego) stanowią realistyczne narzędzia sterowania dynamiką i korelacjami w układach skondensowanej materii.

Rozprawa pokazuje, że metody nieliniowej teorii układów dynamicznych, formalizm kwantowych równań Langevina oraz analiza modeli wielomodowych tworzą spójne narzędzia opisu zjawisk zachodzących na styku dynamiki klasycznej, korelacji kwantowych i statystyki. Otrzymane rezultaty mogą stanowić podstawę dalszych badań nad kontrolą chaosu, inżynierią splątania w układach hybrydowych oraz mechanizmami emergencji zachowania termodynamicznego w systemach kwantowych bez jawnej dyssypacji.

Bibliografia

[1] Adesso, G., Illuminati, F., Entanglement in continuous-variable systems: recent advances and current perspectives, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **2007**, 40(28):7821.

[2] Ait Bassou, A., Figueiras, F. G., Fernandes, J. R., Tavares, P. B., Photo-ferroelectric oxides for photovoltaic applications: Insights, challenges and opportunities, *Applied Materials Today*, **2024**, 41:102465.

[3] Annapureddy, V., Palneedi, H., Hwang, G.-T., Peddigari, M., Jeong, D.-Y., Yoon, W.-H., Kim, K.-H., Ryu, J., Magnetic energy harvesting with magnetoelectrics: an emerging technology for self-powered autonomous systems, *Sustainable Energy & Fuels*, **2017**, 1(10):2039–2052.

[4] Arnol'd, V. I., *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60, Springer Science & Business Media, **2013**.

[5] Astrov, D. N., The magnetoelectric effect in antiferromagnets, *Soviet Physics JETP*, **1960**, 11(3):708–709, Original Russian: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 38, 984 (1960).

[6] Azimi, M., Chotorlishvili, L., Mishra, S., Greschner, S., Vekua, T., Berakdar, J., Helical multiferroics for electric field controlled quantum information processing, *Physical Review B*, **2014**, 89(2):024424.

[7] Azimi, M., Chotorlishvili, L., Mishra, S. K., Vekua, T., Hübner, W., Berakdar, J., Quantum otto heat engine based on a multiferroic chain working substance, *New Journal of Physics*, **2014**, 16(6):063018.

[8] Balédent, V., Chattopadhyay, S., Fertey, P., Lepetit, M., Greenblatt, M., Wanklyn, B., Saouma, F., Jang, J., Foury-Leylekian, P., Evidence for room temperature electric polarization in rm n 2 o 5 multiferroics, *Physical review letters*, **2015**, 114(11):117601.

[9] Basini, M., Pancaldi, M., Wehinger, B., Udina, M., Unikandanunni, V., Tadano, T., Hoffmann, M. C., Balatsky, A. V., Bonetti, S., Terahertz electric-field-driven dynamical multiferroicity in srtio3, *Nature*, **2024**, 628(8008):534–539.

[10] Bauer, G. E., Saitoh, E., Van Wees, B. J., Spin caloritronics, *Nature materials*, **2012**, 11(5):391–399.

[11] Béa, H., Gajek, M., Bibes, M., Barthélémy, A., Spintronics with multiferroics, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **2008**, 20(43):434221.

[12] Bibes, M., Barthélémy, A., Towards a magnetoelectric memory, *Nature materials*, **2008**, 7(6):425–426.

[13] Bogoliubov, N. N., Mitropolski, Y. A., Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, **1961**.

[14] Bukharaev, A. A., Zvezdin, A. K., Pyatakov, A. P., Fetisov, Y. K., Straintronics: a new trend in micro-and nanoelectronics and materials science, *Physics-Uspekhi*, **2018**, 61(12):1175.

[15] Chaudhuri, A., Mandal, K., Large magnetoelectric properties in cofe2o4: Batio3 core–shell nanocomposites, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **2015**, 377:441–445.

[16] Chaudron, A., Li, Z., Finco, A., Marton, P., Dufour, P., Abdelsamie, A., Fischer, J., Collin, S., Dkhil, B., Hlinka, J., et al., Electric-field-induced multiferroic topological solitons, *Nature Materials*, **2024**, 23(7):905–911.

[17] Chauleau, J.-Y., Chirac, T., Fusil, S., Garcia, V., Akhtar, W., Tranchida, J., Thibaudeau, P., Gross, I., Blouzon, C., Finco, A., et al., Electric and antiferromagnetic chiral textures at multiferroic domain walls, *Nature materials*, **2020**, 19(4):386–390.

[18] Cheong, S.-W., Mostovoy, M., Multiferroics: a magnetic twist for ferroelectricity, *Nature materials*, **2007**, 6(1):13–20.

[19] Chotorlishvili, L., Azimi, M., Stagraczyński, S., Toklikishvili, Z., Schüler, M., Berakdar, J., Superadiabatic quantum heat engine with a multiferroic working medium, *Physical Review E*, **2016**, 94(3):032116.

[20] Chotorlishvili, L., Khomeriki, R., Sukhov, A., Ruffo, S., Berakdar, J., Dynamics of localized modes in a composite multiferroic chain, *Physical Review Letters*, **2013**, 111(11):117202.

[21] Chotorlishvili, L., Ugulava, A., Mchedlishvili, G., Komnik, A., Wimberger, S., Berakdar, J., Nonlinear dynamics of two coupled nano-electromechanical resonators, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **2011**, 44(21):215402.

[22] Chotorlishvili, L., Etesami, S., Berakdar, J., Khomeriki, R., Ren, J., Electromagnetically controlled multiferroic thermal diode, *Physical Review B*, **2015**, 92(13):134424.

[23] Chotorlishvili, L., Jia, C., Rata, D. A., Brandt, L., Woltersdorf, G., Berakdar, J., Magnonic magnetoelectric coupling in ferroelectric/ferromagnetic composites, *physica status solidi (b)*, **2020**, 257(7):1900750.

[24] Chu, Y.-H., Martin, L. W., Holcomb, M. B., Gajek, M., Han, S.-J., He, Q., Balke, N., Yang, C.-H., Lee, D., Hu, W., et al., Electric-field control of local ferromagnetism using a magnetoelectric multiferroic, *Nature materials*, **2008**, 7(6):478–482.

[25] Curie, P., Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique, *Journal de physique théorique et appliquée*, **1894**, 3(1):393–415.

[26] Dey, K., Indra, A., Mukherjee, S., Majumdar, S., Strempfer, J., Fabelo, O., Mossou, E., Chatterji, T., Giri, S., Natural ferroelectric order near ambient temperature in the orthoferrite hofeo 3, *Physical Review B*, **2019**, 100(21):214432.

[27] Dong, S., Liu, J.-M., Cheong, S.-W., Ren, Z., Multiferroic materials and magnetoelectric physics: symmetry, entanglement, excitation, and topology, *Advances in Physics*, **2015**, 64(5-6):519–626.

[28] Duan, C.-G., Jaswal, S. S., Tsymbal, E. Y., Predicted magnetoelectric effect in fe/batio 3 multilayers:<? format?> ferroelectric control of magnetism, *Physical Review Letters*, **2006**, 97(4):047201.

[29] Duong, G. V., Grössinger, R., Schoenhart, M., Bueno-Basques, D., The lock-in technique for studying magnetoelectric effect, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **2007**, 316(2):390–393.

[30] Dzyaloshinski, I. E., On the magneto-electrical effect in antiferromagnets, *Soviet Physics JETP*, **1959**, 10(3):628–629, Original Russian: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 37, 881 (1959).

[31] Eerenstein, W., Mathur, N., Scott, J. F., Multiferroic and magnetoelectric materials, *nature*, **2006**, 442(7104):759–765.

[32] Fetisov, Y. K., Preobrazhenskii, V., Pernod, P., Bistability in a nonlinear magnetoacoustic resonator, *Journal of communications technology and electronics*, **2006**, 51:218–230.

[33] Fiebig, M., Revival of the magnetoelectric effect, *Journal of physics D: applied physics*, **2005**, 38(8):R123.

[34] Fiebig, M., Lottermoser, T., Fröhlich, D., Goltsev, A. V., Pisarev, R. V., Observation of coupled magnetic and electric domains, *Nature*, **2002**, 419(6909):818–820.

[35] Fiebig, M., Lottermoser, T., Meier, D., Trassin, M., The evolution of multiferroics, *Nature Reviews Materials*, **2016**, 1(8):1–14.

[36] Folen, V. J., Rado, G. T., Stalder, E. W., Anisotropy of the magnetoelectric effect in cr_2o_3, *Physical Review Letters*, **1961**, 6(11):607–608, doi: 10.1103/PhysRevLett.6.607.

[37] Frostad, T., Pirro, P., Serga, A. A., Hillebrands, B., Brataas, A., Qaiumzadeh, A., Anisotropy-assisted magnon condensation in ferromagnetic thin films, Jan , **2024**, 6:L012011, doi: 10.1103/PhysRevResearch.6.L012011.

[38] Gammaitoni, L., Hänggi, P., Jung, P., Marchesoni, F., Stochastic resonance, *Reviews of modern physics*, **1998**, 70(1):223.

[39] Gao, J., Jiang, Z., Zhang, S., Mao, Z., Shen, Y., Chu, Z., Review of magnetoelectric sensors, w: *Actuators*, volume 10, s. 109, MDPI, **2021**.

[40] Gao, J., Li, B., Liu, Q., Shen, Y., Chu, Z., Chang, J., Dong, S., Hu, Z., Liu, M., Magnetoelectric sensors: A review, *IEEE Transactions on Magnetics*, **2025**.

[41] Gehring, G., On the microscopic theory of the magnetoelectric effect, *Ferroelectrics*, **1994**, 161(1):275–285.

[42] Ghosez, P., Cockayne, E., Waghmare, U., Rabe, K., Lattice dynamics of batio 3, pbtio 3, and pbzro 3: A comparative first-principles study, *Physical Review B*, **1999**, 60(2):836.

[43] Grassberger, P., Procaccia, I., Characterization of strange attractors, Jan , **1983**, 50:346–349, doi: 10.1103/PhysRevLett.50.346.

[44] Grotel, J., Pikula, T., Mech, R., Application of the lock-in technique in magnetoelectric coupling measurements of the pzt/terfenol-d composite, *Applied Sciences*, **2023**, 13(17):9543.

[45] Gupta, R., Kotnala, R., A review on current status and mechanisms of room-temperature magnetoelectric coupling in multiferroics for device applications, *Journal of Materials Science*, **2022**, 57(27):12710–12737.

[46] Haertling, G. H., Ferroelectric ceramics: history and technology, *Journal of the American Ceramic Society*, **1999**, 82(4):797–818.

[47] Heron, J., Bosse, J., He, Q., Gao, Y., Trassin, M., Ye, L., Clarkson, J., Wang, C., Liu, J., Salahuddin, S., et al., Deterministic switching of ferromagnetism at room temperature using an electric field, *Nature*, **2014**, 516(7531):370–373.

[48] Hornreich, R., Shtrikman, S., Theory of gyrotropic birefringence, *Physical Review*, **1968**, 171(3):1065.

[49] Jandieri, V., Khomeriki, R., Watanabe, K., Erni, D., Werner, D. H., Berakdar, J., Chiral optical solitons in an electrically active multiferroic guiding structure, *Optics Express*, **2024**, 32(3):4327–4333.

[50] Jartych, E., Pikula, T., Kowal, K., Dzik, J., Guzdek, P., Czekaj, D., Magnetoelectric effect in ceramics based on bismuth ferrite, *Nanoscale research letters*, **2016**, 11(1):234.

[51] Jaynes, E. T., Cummings, F. W., Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proceedings of the IEEE*, **1963**, 51(1):89–109.

[52] Jiang, B., Iocozzia, J., Zhao, L., Zhang, H., Harn, Y.-W., Chen, Y., Lin, Z., Barium titanate at the nanoscale: controlled synthesis and dielectric and ferroelectric properties, *Chemical Society Reviews*, **2019**, 48(4):1194–1228.

[53] Jordan, D., Smith, P., *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction for scientists and engineers*, Number 10, Oxford University Press, **2007**.

[54] Kaplan, J. L., Yorke, J. A., Chaotic behavior of multidimensional difference equations, w: *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points: Proceedings, Bonn, July 1978*, s. 204–227, Springer, **2006**.

[55] Katok, A., Katok, A., Hasselblatt, B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Number 54, Cambridge university press, **1995**.

[56] Katsura, H., Nagaosa, N., Balatsky, A. V., Spin current and magnetoelectric effect in noncollinear magnets, *Physical review letters*, **2005**, 95(5):057205.

[57] Khomeriki, R., Chotorlishvili, L., Malomed, B., Berakdar, J., Creation and amplification of electromagnon solitons by electric field in nanostructured multiferroics, *Physical Review B*, **2015**, 91(4):041408.

[58] Khomeriki, R., Chotorlishvili, L., Tralle, I., Berakdar, J., Positive–negative birefringence in multiferroic layered metasurfaces, *Nano Letters*, **2016**, 16(11):7290–7294.

[59] Khomskii, D. I., Multiferroics: Different ways to combine magnetism and ferroelectricity, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **2006**, 306(1):1–8.

[60] Kiwi, M., Exchange bias theory, *Journal of Magnetism and Magnetic materials*, **2001**, 234(3):584–595.

[61] Kosub, T., Kopte, M., Hühne, R., Appel, P., Shields, B., Maletinsky, P., Hübner, R., Liedke, M. O., Fassbender, J., Schmidt, O. G., et al., Purely antiferromagnetic magnetoelectric random access memory, *Nature communications*, **2017**, 8(1):13985.

[62] Kovalenko, O., Pezeril, T., Temnov, V. V., New concept for magnetization switching by ultrafast acoustic pulses, Jun , **2013**, 110:266602, doi: 10.1103/PhysRevLett.110.266602.

[63] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Course of theoretical physics*, Elsevier, **2013**.

[64] Lee, J., Sai, N., Cai, T., Niu, Q., Demkov, A. A., Interfacial magnetoelectric coupling in tricomponent superlattices, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, **2010**, 81(14):144425.

[65] Li, N., Ren, J., Wang, L., Zhang, G., Hänggi, P., Li, B., Colloquium: Phononics: Manipulating heat flow with electronic<? format?> analogs and beyond, *Reviews of Modern Physics*, **2012**, 84(3):1045–1066.

[66] Liang, C.-Y., Keller, S. M., Sepulveda, A. E., Sun, W.-Y., Cui, J., Lynch, C. S., Carman, G. P., Electrical control of a single magnetoelastic domain structure on a clamped piezoelectric thin film—analysis, *Journal of Applied Physics*, **2014**, 116(12).

[67] Lines, M. E., Glass, A. M., *Principles and applications of ferroelectrics and related materials*, Oxford university press, **2001**.

[68] Liu, T., Vignale, G., Electric control of spin currents and spin-wave logic, Jun , **2011**, 106:247203, doi: 10.1103/PhysRevLett.106.247203.

[69] Lorenz, E. N., Deterministic nonperiodic flow 1, w: *Universality in Chaos, 2nd edition*, s. 367–378, Routledge, **2017**.

[70] Meier, D., Maringer, M., Lottermoser, T., Becker, P., Bohatỳ, L., Fiebig, M., Observation and coupling of domains in a spin-spiral multiferroic, *Physical review letters*, **2009**, 102(10):107202.

[71] Meiklejohn, W. H., Bean, C. P., New magnetic anisotropy, *Physical review*, **1956**, 102(5):1413.

[72] Menzel, M., Mokrousov, Y., Wieser, R., Bickel, J. E., Vedmedenko, E., Blügel, S., Heinze, S., von Bergmann, K., Kubetzka, A., Wiesendanger, R., Information transfer by vector spin chirality in finite magnetic chains, *Physical review letters*, **2012**, 108(19):197204.

[73] Meyerheim, H., Klimenta, F., Ernst, A., Mohseni, K., Ostanin, S., Fechner, M., Parihar, S., Maznichenko, I., Mertig, I., Kirschner, J., Structural secrets of multiferroic interfaces, *Physical Review Letters*, **2011**, 106(8):087203.

[74] Moriya, T., Anisotropic superexchange interaction and weak ferromagnetism, *Physical review*, **1960**, 120(1):91.

[75] Mostovoy, M., Ferroelectricity in spiral magnets, *Physical review letters*, **2006**, 96(6):067601.

[76] Nan, C.-W., Bichurin, M., Dong, S., Viehland, D., Srinivasan, G., Multiferroic magnetoelectric composites: Historical perspective, status, and future directions, *Journal of applied physics*, **2008**, 103(3).

[77] Newnham, R. E., *Properties of materials: anisotropy, symmetry, structure*, OUP Oxford, **2004**.

[78] Nogués, J., Schuller, I. K., Exchange bias, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **1999**, 192(2):203–232.

[79] O'Dell, T. H., The electrodynamics of magneto-electric media, *Philosophical Magazine*, **1962**, 7(82):1653–1669.

[80] Pantel, D., Goetze, S., Hesse, D., Alexe, M., Reversible electrical switching of spin polarization in multiferroic tunnel junctions, *Nature materials*, **2012**, 11(4):289–293.

[81] Park, S., Choi, Y., Zhang, C., Cheong, S.-W., Ferroelectricity in an s= 1/2 chain cuprate, *Physical review letters*, **2007**, 98(5):057601.

[82] Pradhan, D. K., Kumari, S., Rack, P. D., Magnetoelectric composites: applications, coupling mechanisms, and future directions, *Nanomaterials*, **2020**, 10(10):2072.

[83] Qian, W., Wu, H., Yang, Y., Ferroelectric batio3 based multi-effects coupled materials and devices, *Advanced Electronic Materials*, **2022**, 8(10):2200190.

[84] Rabe, K. M., Dawber, M., Lichtensteiger, C., Ahn, C. H., Triscone, J.-M., Modern physics of ferroelectrics: Essential background, w: *Physics of Ferroelectrics: A Modern Perspective*, s. 1–30, Springer, **2007**.

[85] Raeliarijaona, A., Fu, H., Ferromagnetism in ferroelectric batio 3 induced by vacancies: Sensitive dependence on charge state, origin of magnetism, and temperature range of existence, *Physical Review B*, **2017**, 96(14):144431.

[86] Raj, D., Manjusha, M., A comprehensive overview of magnetic energy storage applications of barium titanate nanoparticles: A review, *The Food-Energy-Water Triangle for Sustainable Development*, **2025**, s. 233–244.

[87] Ramesh, R., Spaldin, N. A., Multiferroics: progress and prospects in thin films, *Nature materials*, **2007**, 6(1):21–29.

[88] Ryu, J., Priya, S., Uchino, K., Kim, H.-E., Magnetoelectric effect in composites of magnetostrictive and piezoelectric materials, *Journal of electroceramics*, **2002**, 8(2):107–119.

[89] Sahoo, S., Polisetty, S., Duan, C.-G., Jaswal, S. S., Tsymbal, E. Y., Binek, C., Ferroelectric control of magnetism in ba ti o 3/ fe heterostructures via interface strain coupling, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, **2007**, 76(9):092108.

[90] Schrettle, F., Krohns, S., Lunkenheimer, P., Hemberger, J., Büttgen, N., Krug von Nidda, H.-A., Prokofiev, A., Loidl, A., Switching the ferroelectric polarization in the s= 1/ 2 chain cuprate li cu vo 4 by external magnetic fields, *Physical Review B—Condensed Matter and Materials Physics*, **2008**, 77(14):144101.

[91] Seidel, J., Fu, D., Yang, S.-Y., Alarcón-Lladó, E., Wu, J., Ramesh, R., Ager III, J. W., Efficient photovoltaic current generation at ferroelectric domain walls, *Physical review letters*, **2011**, 107(12):126805.

[92] Seki, S., Yu, X., Ishiwata, S., Tokura, Y., Observation of skyrmions in a multiferroic material, *Science*, **2012**, 336(6078):198–201.

[93] Shukla, R. K., Chotorlishvili, L., Mishra, S. K., Iemini, F., Prethermal floquet time crystals in chiral multiferroic chains and applications as quantum sensors of ac fields, *Physical Review B*, **2025**, 111(2):024315.

[94] Simon, R., Peres-horodecki separability criterion for continuous variable systems, Mar , **2000**, 84:2726–2729, doi: 10.1103/PhysRevLett.84.2726.

[95] Singh, A. K., Chotorlishvili, L., Srivastava, S., Tralle, I., Toklikishvili, Z., Berakdar, J., Mishra, S. K., Generation of coherence in an exactly solvable nonlinear nanomechanical system, Mar , **2020**, 101:104311, doi: 10.1103/PhysRevB.101.104311.

[96] Singh, A., Chotorlishvili, L., Toklikishvili, Z., Tralle, I., Mishra, S., Hybrid quantum–classical chaotic nems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **2022**, 439:133418.

[97] Spaldin, N. A., Fiebig, M., The renaissance of magnetoelectric multiferroics, *Science*, **2005**, 309(5733):391–392.

[98] Spaldin, N. A., Ramesh, R., Advances in magnetoelectric multiferroics, *Nature materials*, **2019**, 18(3):203–212.

[99] Stolichnov, I., Riester, S., Trodahl, H., Setter, N., Rushforth, A., Edmonds, K., Campion, R., Foxon, C., Gallagher, B., Jungwirth, T., Non-volatile ferroelectric control of ferromagnetism in (ga, mn) as, *Nature materials*, **2008**, 7(6):464–467.

[100] Strogatz, S. H., *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering (studies in nonlinearity)*, volume 1, Westview press, **2001**.

[101] Trybus, M., Chotorlishvili, L., Jartych, E., Dielectric and magnetoelectric properties of tgs–magnetite composite, *Molecules*, **2024**, 29(6):1378.

[102] Tu, C., Chu, Z.-Q., Spetzler, B., Hayes, P., Dong, C.-Z., Liang, X.-F., Chen, H.-H., He, Y.-F., Wei, Y.-Y., Lisenkov, I., et al., Mechanical-resonance-enhanced thin-film magnetoelectric heterostructures for magnetometers, mechanical antennas, tunable rf inductors, and filters, *Materials*, **2019**, 12(14):2259.

[103] Valdés Aguilar, R., Mostovoy, M., Sushkov, A., Zhang, C., Choi, Y., Cheong, S., Drew, H., Origin of electromagnon excitations in multiferroic r mno 3, *Physical review letters*, **2009**, 102(4):047203.

[104] Van Den Boomgaard, J., Van Run, A., Suchtelen, J. V., Magnetoelectricity in piezoelectric-magnetostrictive composites, *Ferroelectrics*, **1976**, 10(1):295–298.

[105] Vedral, V., Classical correlations and entanglement in quantum measurements, *Physical review letters*, **2003**, 90(5):050401.

[106] Verma, H., Chotorlishvili, L., Berakdar, J., Mishra, S. K., Qubit (s) transfer in helical spin chains, *Europhysics Letters*, **2017**, 119(3):30001.

[107] Vijayan, V., Chotorlishvili, L., Ernst, A., Parkin, S., Katsnelson, M., Mishra, S., Topological dynamical quantum phase transition in a quantum skyrmion phase, *Physical Review B*, **2023**, 107(10):L100419.

[108] Vopson, M. M., Fundamentals of multiferroic materials and their possible applications, *Critical Reviews in Solid State and Materials Sciences*, **2015**, 40(4):223–250.

[109] Wang, J., Neaton, J., Zheng, H., Nagarajan, V., Ogale, S., Liu, B., Viehland, D., Vaithyanathan, V., Schlom, D., Waghmare, U., et al., Epitaxial bifeo3 multiferroic thin film heterostructures, *science*, **2003**, 299(5613):1719–1722.

[110] Wang, K., Liu, J.-M., Ren, Z., Multiferroicity: the coupling between magnetic and polarization orders, *Advances in Physics*, **2009**, 58(4):321–448.

[111] Wang, X.-G., Chotorlishvili, L., Arnold, N., Dugaev, V., Maznichenko, I., Barnaś, J., Buczek, P., Parkin, S. S., Ernst, A., Plasmonic skyrmion lattice based on the magnetoelectric effect, *Physical Review Letters*, **2020**, 125(22):227201.

[112] Wang, X.-G., Chotorlishvili, L., Dugaev, V. K., Ernst, A., Maznichenko, I. V., Arnold, N., Jia, C., Berakdar, J., Mertig, I., Barnaś, J., The optical tweezer of skyrmions, *npj Computational Materials*, **2020**, 6(1):140.

[113] Wang, Y., Hu, J., Lin, Y., Nan, C.-W., Multiferroic magnetoelectric composite nanostructures, *NPG asia materials*, **2010**, 2(2):61–68.

[114] Wang, Y., Gao, J., Li, M., Shen, Y., Hasanyan, D., Li, J., Viehland, D., A review on equivalent magnetic noise of magnetoelectric laminate sensors, *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **2014**, 372(2009):20120455.

[115] Wanic, M., Jasiukiewicz, C., Toklikishvili, Z., Jandieri, V., Trybus, M., Jartych, E., Mishra, S., Chotorlishvili, L., Entanglement properties of photon-magnon crystal from nonlinear perspective, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **2025**, s. 134699.

[116] Wanic, M., Khomeriki, R., Stagraczyński, S., Katsnelson, M., Toklikishvili, Z., Chotorlishvili, L., Two-level atom witness of thermalization of multimode optical fibers, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **2025**, 35(8).

[117] Wanic, M., Toklikishvili, Z., Mishra, S., Trybus, M., Chotorlishvili, L., Magnetoelectric fractals, magnetoelectric parametric resonance and hopf bifurcation, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **2024**, 467:134257.

[118] WANIC, M., Magnetoelectric multiferroics: From fundamentals to transformative applications–a mini review, *Physics for Economy*, **2025**, 7:61–80.

[119] Yang, S., Seidel, J., Byrnes, S., Shafer, P., Yang, C.-H., Rossell, M., Yu, P., Chu, Y.-H., Scott, J., Ager, J., et al., Above-bandgap voltages from ferroelectric photovoltaic devices, *Nature nanotechnology*, **2010**, 5(2):143–147.

[120] Yarar, E., Salzer, S., Hrkac, V., Piorra, A., Höft, M., Knöchel, R., Kienle, L., Quandt, E., Inverse bilayer magnetoelectric thin film sensor, *Applied Physics Letters*, **2016**, 109(2).

[121] Yuan, Y., Xiao, Z., Yang, B., Huang, J., Arising applications of ferroelectric materials in photovoltaic devices, *Journal of Materials chemistry A*, **2014**, 2(17):6027–6041.

[122] Zaeimbashi, M., Nasrollahpour, M., Khalifa, A., Romano, A., Liang, X., Chen, H., Sun, N., Matyushov, A., Lin, H., Dong, C., et al., Ultra-compact dual-band smart nems magnetoelectric antennas for simultaneous wireless energy harvesting and magnetic field sensing, *Nature communications*, **2021**, 12(1):3141.

[123] Zaslavsky, G. M., *The physics of chaos in Hamiltonian systems*, world scientific, **2007**.

[124] Zhang, Q., Jeong, W., Kang, D. J., Lock-in amplifiers as a platform for weak signal measurements: Development and applications, *Current Applied Physics*, **2024**, 66:95–109.

[125] Zheng, H., Wang, J., Lofland, S. E., Ma, Z., Mohaddes-Ardabili, L., Zhao, T., Salamanca-Riba, L., Shinde, S. R., Ogale, S. B., Bai, F., Viehland, D., Jia, Y., Schlom, D. G., Wuttig, M., Roytburd, A., Ramesh, R., Multiferroic batio₃-cofe₂o₄ nanostructures, *Science*, **2004**, 303(5658):661–663, doi: 10.1126/science.1094207.

NIELINIOWE EFEKTY DYNAMIKI KWANTOWEJ I KLASYCZNEJ WYWOŁANE SPRZĘŻENIEM MAGNETOELEKTRYCZNYM W UKŁADACH HYBRYDOWYCH

Streszczenie

Rozprawa doktorska poświęcona jest analizie wybranych układów hybrydowych, w których sprzężenie pomiędzy różnymi stopniami swobody prowadzi do powstawania złożonych zjawisk dynamicznych o charakterze klasycznym i kwantowym. Głównym celem pracy było zbadanie roli nieliniowości oraz oddziaływań magnetoelektrycznych i optycznych w kształtowaniu emergentnych własności układów fizycznych, takich jak chaos deterministyczny, splątanie kwantowe oraz efektywna termalizacja.

W pierwszej części pracy przeanalizowano nieliniową dynamikę układu magnetoelektrycznie sprzężonego, składającego się z ferroelektrycznego kryształu oraz magnetycznego nanodysku. Wykazano, że sprzężenie magnetoelektryczne może prowadzić do powstawania rezonansów parametrycznych, bifurkacji oraz chaosu deterministycznego. Zastosowanie narzędzi analitycznych, takich jak formalizm zmiennych akcja–kąt, teoria KAM, pozwoliło na identyfikację warunków przejścia od dynamiki regularnej do chaotycznej. Wykazano również, że odpowiedni dobór parametrów zewnętrznych umożliwia kontrolę dynamiki układu.

W drugiej części pracy rozważono hybrydowy układ foton–magnon o strukturze kryształu fotonicznego. Przeprowadzono analizę nieliniowej dynamiki półklasycznej oraz zbadano własności kwantowe układu z wykorzystaniem logarytmicznej negatywności jako miary splątania. Wykazano istnienie bezpośredniego związku pomiędzy strukturą przestrzeni fazowej a generacją korelacji kwantowych. Stwierdzono, że maksymalne splątanie występuje w pobliżu granic stabilności odpowiadających przejściom pomiędzy różnymi typami punktów stałych.

W trzeciej części pracy przeanalizowano dynamikę atomu dwupoziomowego sprzężonego z wielomodowym układem optycznym. Wykazano, że atom może pełnić rolę lokalnej sondy procesu termalizacji modów. w przypadku braku termalizacji obserwuje się koherentną dynamikę z odrodzeniami kwantowymi, natomiast w przypadku skończonej temperatury modów dochodzi do dekoherencji oraz zaniku części zależnej od czasu inwersji. w granicy wysokich temperatur układ dąży do stanu równowagi z równomiernym obsadzeniem poziomów energetycznych.

Uzyskane wyniki wskazują, że sprzężenie pomiędzy różnymi stopniami swobody w układach hybrydowych prowadzi do pojawienia się zjawisk emergentnych, które mogą być kontrolowane poprzez odpowiedni dobór parametrów fizycznych. Praca stanowi spójne ujęcie przejścia od deterministycznej dynamiki nieliniowej do efektów kolektywnych i statystycznych w układach złożonych.

Słowa kluczowe: układy hybrydowe, sprzężenie magnetoelektryczne, dynamika nieliniowa, chaos deterministyczny, splątanie kwantowe, układy foton–magnon, termalizacja, dekoherencja, model Jaynesa–Cummingsa

NONLINEAR EFFECTS OF QUANTUM AND CLASSICAL DYNAMICS DUE TO THE MAGNETO-ELECTRIC COUPLING IN HYBRID SYSTEMS

Summary

This doctoral dissertation is devoted to the study of selected hybrid systems in which coupling between different degrees of freedom gives rise to complex dynamical phenomena of both classical and quantum nature. The main objective of this work was to investigate the role of nonlinearity as well as magnetoelectric and optical interactions in the emergence of phenomena such as deterministic chaos, quantum entanglement, and effective thermalization.

In the first part of the dissertation, the nonlinear dynamics of a magnetoelectrically coupled system composed of a ferroelectric crystal and a magnetic nanodisk is analyzed. It is demonstrated that magnetoelectric coupling can induce parametric resonances, bifurcations, and deterministic chaos. Analytical tools such as the action–angle formalism, KAM theory, are employed to identify the transition from regular to chaotic dynamics. It is further shown that external control parameters enable tuning of the system's dynamical behavior.

The second part focuses on a hybrid photon–magnon system with a photonic crystal structure. The semiclassical nonlinear dynamics is analyzed, and quantum correlations are investigated using logarithmic negativity as a measure of entanglement. A direct relationship between the phase-space structure and the generation of quantum correlations is established. It is found that maximal entanglement occurs near the boundaries separating different types of stationary points.

In the third part, the dynamics of a two-level atom coupled to a multimode optical system is studied. The atom is shown to act as a local probe of the thermalization process of optical modes. In the absence of thermalization, coherent dynamics with quantum revivals is observed, while for finite mode temperature decoherence and decay of the time-dependent part of the inversion occur. In the high-temperature limit, the system approaches an equilibrium state with equal population of atomic levels.

The obtained results demonstrate that coupling between different degrees of freedom in hybrid systems leads to the emergence of collective phenomena that can be controlled by appropriate choice of physical parameters. The dissertation provides a unified perspective on the transition from deterministic nonlinear dynamics to collective and statistical behavior in complex systems.

Keywords: hybrid systems, magnetoelectric coupling, nonlinear dynamics, deterministic chaos, quantum entanglement, photon–magnon systems, thermalization, decoherence, Jaynes–Cummings model