



**POLITECHNIKA  
RZESZOWSKA**  
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ  
BUDOWY MASZYN  
I LOTNICTWA**  
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

# **Badanie wpływu konfiguracji robota przemysłowego na drgania rezonansowe**

**Autor:** mgr inż. Paulina Pietruś

**Promotor:** dr hab. inż. Piotr Gierlak, prof. uczelni

**Promotor pomocniczy:** dr hab. inż. Dariusz Szybicki, prof. uczelni

**Rzeszów 2026**



Składam serdeczne podziękowania:  
Promotorowi **dr. hab. inż. Piotrowi Gierlakowi, prof. uczelni**  
oraz Promotorowi pomocniczemu **dr. hab. inż. Dariuszowi Szybickiemu, prof. uczelni**  
za nieocenioną pomoc, opiekę naukową, poświęcony czas  
oraz okazaną mi życzliwość.



## Spis treści

<b>1. Wstęp</b> .....	9
<b>2. Analiza istniejących rozwiązań</b> .....	11
<b>3. Motywacja, cel i zakres pracy</b> .....	21
3.1. Motywacja podjęcia tematu pracy.....	21
3.2. Cel pracy.....	21
3.3. Zakres pracy.....	21
3.4. Oryginalne elementy pracy.....	23
<b>4. Model robota</b> .....	25
4.1. Założenia modelowe.....	25
4.2. Kinematyka robota.....	27
4.3. Dynamiczne równania ruchu robota.....	31
4.4. Parametry modelu.....	42
<b>5. Rozwiązanie analityczne</b> .....	47
5.1. Częstotliwości własne.....	45
5.2. Postaci drgań własnych.....	52
<b>6. Analiza numeryczna drgań</b> .....	61
<b>7. Badania eksperymentalne</b> .....	69
7.1. Stanowisko badawcze.....	69
7.2. Pomiar przyspieszeń drgań robota.....	74
7.3. Wizyjny pomiar drgań ramienia robota.....	88
<b>8. Analiza wyników</b> .....	95
8.1. Częstotliwości drgań robota.....	95
8.2. Postacie drgań robota.....	101
<b>9. Podsumowanie</b> .....	105
9.1. Podsumowanie pracy.....	105
9.2. Wnioski.....	106
9.3. Kierunki dalszych prac badawczych.....	106
<b>Bibliografia</b> .....	109
<b>Dodatki</b> .....	123
<b>Spis ilustracji</b> .....	147
<b>Spis tabel</b> .....	149



## Spis ważniejszych symboli

- $\beta_i$  - kąt i-tego członu robota,
- $\alpha_i$  - współrzędna opisująca drgania i-tego członu robota,
- $\mathbf{A}_{i-1}^i$  - macierz transformacji,
- $\mathbf{RotZ}_{q_i}$  - macierz rotacji wokół osi Z i-członu,
- $\mathbf{TransZ}_{d_i}$  - macierz translacji w osi Z i-członu,
- $\mathbf{RotX}_{\alpha_i}$  - macierz rotacji wokół osi X i-członu,
- $\mathbf{TransX}_{a_i}$  - macierz translacji w osi X i-członu,
- $q$  - wektor współrzędnych konfiguracyjnych,
- $\mathbf{R}_{i-1}^j$  - macierz rotacji j-tego układu względem układu (i-1),
- $p_{i-1}^j$  - wektor translacji układu j-tego względem układu (i-1),
- $J^b(q)$  - jacobian geometryczny w układzie ciała,
- $\mathbf{M}$  - macierz bezwładności,
- $m_i$  - masa i-tego członu,
- $\mathbf{I}_i$  - macierz masowych momentów bezwładności względem układu odniesienia i-tego członu,
- $\mathbf{J}_i^v$  - macierz jacobianowa stosowana do określenia prędkości środka masy,
- $\mathbf{J}_i^\omega$  - macierz jacobianowa stosowana do określenia prędkości kątowej i-tego członu w funkcji prędkości przegubowej,
- $s_{mi}$  - wektor pozycji środka masy i-tego członu w globalnym układzie odniesienia,
- $c_{ijk}$  - symbole Christoffela (pierwszego rodzaju),
- $A_i$  - wartość amplitudy drgań i-tego członu,
- $l_i$  - długość i-tego członu robota,
- $l_{ci}$  - odległość środka masy członu i-tego robota od i-tego złącza,
- $k_i$  - współczynnik sprężystości skrętnej i-tego złącza robota,
- $V_{ki}$  - potencjał i-tego sprężystego złącza,
- $\mathbf{T}_{i-1}^j$  - macierz transformacji j-tego układu względem układu (i-1).



## 1. Wstęp

Współczesne systemy zrobotyzowane odgrywają kluczową rolę w różnorodnych dziedzinach przemysłu, medycyny, nauki i codziennego życia. W przypadku niektórych operacji obróbczych roboty przemysłowe stanowią ekonomiczną i elastyczną alternatywę dla standardowych obrabiarek CNC (Computer Numerical Control) [1-3]. W zastosowaniach przemysłowych, roboty różnią się od maszyn CNC zarówno pod względem konstrukcji, jak i funkcji. Maszyny CNC są zazwyczaj sztywnymi urządzeniami przeznaczonymi do wykonywania precyzyjnych operacji obróbczych, takich jak frezowanie, toczenie czy wiercenie, przy użyciu ustalonego narzędzia skrawającego. Charakteryzują się wysoką sztywnością i precyzją, co pozwala na minimalizowanie drgań i osiągnięcie bardzo dokładnych wyników obróbki. W przeciwieństwie do nich, roboty są bardziej elastyczne i wszechstronne, mogą wykonywać różnorodne zadania dzięki możliwości programowania złożonych trajektorii ruchu. Roboty są również przewidziane do interakcji z otoczeniem i mogą być używane w szerokim zakresie aplikacji przemysłowych [4-7].

W kontekście zastosowania robotów w przemyśle, prowadzone są badania, które w większości bazują na modelach robotów sztywnych. Ostatnio jednak coraz więcej szczegółowych badań przeprowadzanych jest dla robotów z podatnymi złączami. Umożliwia to analizę zjawisk drganiowych towarzyszących działaniu robotów. Analiza modalna jest tu jednym z kluczowych narzędzi stosowanych do badania dynamiki robotów. Polega ona na identyfikacji parametrów modalnych, takich jak częstotliwości własne, kształty modów i współczynniki tłumienia, które opisują zachowanie systemu. Podstawowym celem analizy modalnej jest opisanie, jak struktura reaguje na różne wymuszenia dynamiczne, co jest niezbędne do przewidywania i kontrolowania drgań oraz zapewnienia stabilności systemu. Badania dotyczące analizy modalnej robotów przemysłowych, w tym robotów ABB, zostały szeroko omówione w literaturze naukowej [8]. Identyfikacja parametrów modalnych robotów w różnych ustawieniach ujawnia wpływ pozycji ramienia na jego właściwości dynamiczne, głównie drganiowe. Kolejne prace [9, 10] rozwijały problematykę drgań robotów zależną od konfiguracji podczas procesu obróbki. Przeprowadzone analizy modalne umożliwiły określenie krytycznych ustawień ramion robotów, w których występowały niepożądane drgania prowadzące nawet do niestabilności układów. Badania obejmowały także próby opracowania metod pozwalających na ocenę stabilności obróbki w zależności od konfiguracji robota.

Innym podejściem jest wykorzystanie metod analitycznych do modelowania drgań robotów. W celu uzyskania modelu w formie analitycznej stosuje się np. równania Eulera-Lagrange'a lub Newtona-Eulera [11-13]. W literaturze omawiane są różnice między metodą Eulera-Lagrange'a a metodą Newtona-Eulera, z naciskiem na ich zastosowanie

w modelowaniu i analizie dynamiki robotów przemysłowych [14, 15]. Istotnym problemem w obydwóch metodach jest trudność w uwzględnieniu wszystkich istotnych zjawisk fizycznych mających wpływ na zjawiska drganiowe. Niewątpliwą korzyścią jest jednak możliwość uzyskania modelu w postaci równań matematycznych opisujących zachowanie układu w dowolnych ustawieniach ramienia robota w całej przestrzeni roboczej. Niniejsza rozprawa bazuje właśnie na podejściu analitycznym.

## 2. Analiza istniejących rozwiązań

### Metody budowy modeli robotów

Modele dynamiczne robotów stanowią podstawę analizy ich właściwości, w tym zjawisk drganiowych oraz projektowania układów sterowania. W literaturze najczęściej wykorzystywane są dwie klasyczne metody wyprowadzania równań ruchu: formalizm Newtona–Eulera oraz formalizm Lagrange’a [16-19]. Podejście Newtona–Eulera umożliwia rekurencyjne wyznaczanie sił i momentów działających na poszczególne ogniwa robota, co czyni je efektywnym obliczeniowo i szczególnie przydatnym w układach o dużej liczbie stopni swobody [14]. Z kolei formalizm Lagrange’a pozwala na sformułowanie równań ruchu w zwartej i ogólnej postaci poprzez uwzględnienie energii kinetycznej i potencjalnej układu oraz sił uogólnionych. W ramach tego podejścia często stosuje się symbole Christoffela [20-24] do opisu zależności pomiędzy elementami macierzy bezwładności, a wektorem sił Coriolisa i odśrodkowych. Równania ruchu grupowane są zwykle w postaci macierzowej, obejmującej macierz bezwładności, wektor sił Coriolisa i odśrodkowych oraz wektor sił grawitacyjnych.

Niezależnie od przyjętej metody wyprowadzania równań ruchu, kluczowe znaczenie mają założenia dotyczące właściwości mechanicznych elementów robota, w szczególności stopnia sztywności członów i przegubów. To właśnie one determinują zdolność modelu do odwzorowania zjawisk takich jak drgania własne, rezonans czy utrata precyzji w zadaniach technologicznych [11, 25-28]. Na podstawie analizy literatury [23, 29-47] można wyróżnić trzy zasadnicze klasy modeli dynamiki robotów: modele z elementami sztywnymi, modele uwzględniające podatność przegubów lub członów oraz modele mieszane, łączące oba podejścia.

Najprostszą klasę stanowią modele sztywne, w których wszystkie człony i przeguby traktowane są jako idealnie sztywne. W takim ujęciu liczba stopni swobody odpowiada liczbie osi robota, a dynamika opisywana jest zwykle za pomocą równań ruchu wyprowadzanych metodą Lagrange’a lub metodą Newtona–Eulera. W opracowaniu [36] dokonano przeglądu metod modelowania i sterowania robotów, wskazując, że modele sztywne pozostają podstawowym narzędziem w analizach kinematycznych, projektowaniu regulatorów oraz symulacjach ruchu. Alternatywne podejście do wyprowadzania równań ruchu zaprezentowano w [46], gdzie zastosowano formalizm Kane’a do modelowania pięcioosiowego robota przemysłowego, uzyskując zwartą postać równań i zmniejszenie złożoności obliczeniowej istotnej w implementacjach w systemach czasu rzeczywistego.

Modele sztywne znajdują również zastosowanie w analizach energetycznych i optymalizacji trajektorii. W pracy [41] zaproponowano metodę minimalizacji zużycia energii poprzez odpowiedni dobór profili prędkości, natomiast w [48] przeprowadzono analizę zużycia energii dla robota ABB IRB 140 podczas realizacji zadanej trajektorii. W obu przypadkach

wykorzystano klasyczny model dynamiczny w postaci macierzowej, potwierdzając jego użyteczność w zagadnieniach optymalizacyjnych. Dodatkowo w [23] zaproponowano efektywny algorytm rekurencyjnego wyznaczania symboli Christoffela, redukujący koszt obliczeniowy modeli dynamicznych, a w [34] wykazano, że ich wykorzystanie w strukturze sterownika neuronowego poprawia jakość kompensacji nieliniowości dynamicznych.

Pomimo swojej prostoty i szerokiego zastosowania, modele sztywne nie pozwalają na odwzorowanie zjawisk wynikających z odkształceń konstrukcji. W zastosowaniach technologicznych, takich jak frezowanie, wiercenie czy montaż, podatność członów i przegubów wpływa na dokładność pozycjonowania, generowanie drgań własnych oraz występowanie zjawisk rezonansowych [47]. Analizy przedstawione w [40, 49] wykazały silną zależność poziomu drgań podczas frezowania robotycznego od konfiguracji robota i jego sztywności strukturalnej. Podobne wnioski sformułowano w [30], opracowując model dynamiczny umożliwiający predykcję drgań w procesach wytwórczych, natomiast w [39] wykazano, że optymalizacja konfiguracji robota może istotnie ograniczać drgania podczas procesu [29, 41, 49]. Wysoka precyzja realizacji zadań wymaga zatem uwzględnienia efektów dynamicznych wykraczających poza założenie idealnej sztywności [13, 30].

W konsekwencji rozwój modeli dynamicznych robotów ewoluował w kierunku uwzględniania rzeczywistych właściwości sprężystych konstrukcji. W zależności od źródła podatności wyróżnia się modele z podatnymi złączami, modele z podatnymi członami oraz modele mieszane.

W modelach z podatnymi złączami sprężystość przypisywana jest elementom napędowym, takim jak przekładnie, wały czy elementy sprzęgające silnik z ramieniem robota [50]. Podejście to prowadzi do zwiększenia liczby stopni swobody i umożliwia analizę oscylacji skrętnych oraz sprzężeń dynamicznych pomiędzy napędem a strukturą robota. Tego typu rozwiązania przedstawiono m.in. w [51].

Modele z podatnymi członami uwzględniają odkształcenia poprzeczne i skrętne ramion robota. W pracy [37] zaprezentowano analizę numeryczną robota z podatnymi członami z wykorzystaniem formalizmu Lagrange'a rozszerzonego o dodatkowe współrzędne opisujące odkształcenia sprężyste. Wcześniej w [38] zaproponowano połączenie metody elementów skończonych z formalizmem Lagrange'a, co umożliwiło modelowanie robotów o znacznej podatności strukturalnej. Dalsze badania, oparte na analizach modalnych i metodzie elementów skończonych [52], potwierdziły istotną zależność częstotliwości własnych robota od jego konfiguracji geometrycznej, co bezpośrednio wpływa na ryzyko rezonansu podczas pracy.

Modele mieszane, łączące sztywną kinematykę z modalnym opisem odkształceń sprężystych, stanowią kompromis pomiędzy dokładnością odwzorowania zjawisk dynamicznych, a złożonością obliczeniową. Pozwalają one na analizę wpływu konfiguracji robota na zjawiska drganiowe oraz stanowią podstawę projektowania strategii tłumienia drgań

i układów sterowania w zastosowaniach przemysłowych wymagających wysokiej dokładności i stabilności dynamicznej.

Podsumowując należy stwierdzić, że prawidłowe modelowanie dynamiki robotów wymaga odpowiedniego oszacowania wpływu podatności konstrukcyjnej elementów, takich jak człony i złącza napędowe. Modele sztywne stanowią co prawda podstawę w analizach kinematycznych i sterowaniu, jednak nie oddają zjawisk drganiowych oraz efektów rezonansowych istotnych w zastosowaniach przemysłowych. Uwzględnienie podatności członów i złączy, a także zastosowanie podejść mieszanych, pozwala na uwzględnienie zjawisk drganiowych i wyznaczenie częstotliwości i postaci drgań oraz wpływu konfiguracji robota na jego stabilność dynamiczną. Takie podejście jest obecnie rozwijane i coraz częściej uwzględniane w projektowaniu układów sterowania i strategii tłumienia drgań w procesach technologicznych. Jednocześnie należy podkreślić, że przedmiotem analizy dynamiki robotów jest określenie charakteru występujących drgań, który decyduje o doborze odpowiednich metod pomiarowych, diagnostycznych oraz działań tłumiących. Z tego względu w kolejnym podrozdziale przedstawiono klasyfikację i rodzaje drgań charakterystycznych dla robotów przemysłowych.

### **Rodzaje drgań występujących w robotach przemysłowych**

Drgania występujące w robotach przemysłowych mogą mieć różny charakter oraz odmienne mechanizmy powstawania, co przekłada się na ich wpływ na dokładność pracy robotów oraz trwałość konstrukcji. Ich prawidłowa identyfikacja jest kluczowa z punktu widzenia diagnostyki układu i utrzymania stabilności procesów technologicznych, takich jak frezowanie czy polerowanie [53].

W literaturze wyróżnia się przede wszystkim drgania swobodne, które powstają jako reakcja układu na krótkotrwałe pobudzenie i rozwijają się zgodnie z jego właściwościami modalnymi. Częstotliwości własne i odpowiadające im postacie drgań odzwierciedlają cechy konstrukcyjne robota, takie jak podatność przegubów czy podatność członów [54-55]. W rzeczywistych robotach drgania te mają najczęściej postać tłumioną, co wynika z oporów tarcia oraz tłumienia materiałowego i sterowania [13]. Analiza modalna stanowi podstawowe narzędzie oceny takich zachowań dynamicznych, a automatyczne metody identyfikacji modalnej znajdują coraz szersze zastosowanie w przemyśle [56].

Kolejną grupę stanowią drgania wymuszone, wywołane przez zewnętrzne pobudzenia pochodzące m.in. z napędów, niedoskonałości sterowania czy oddziaływania procesu skrawania [30]. W sytuacji, gdy częstotliwość wymuszenia zbliży się do częstotliwości własnej robota, może dojść do gwałtownego wzrostu amplitudy drgań, czyli rezonansu. Zjawisko to prowadzi do utraty dokładności pozycjonowania, a nawet do przeciążenia struktury mechanicznej robota [13, 30, 43].

Szczególnie niebezpieczne są drgania samowzbudne, zwłaszcza w procesach obróbki skrawaniem. Drgania te mogą być podtrzymywane przez sprzężenie zwrotne pomiędzy narzędziem, a materiałem obrabianym, a ich rozwój prowadzi do pogorszenia jakości powierzchni, zwiększenia sił i hałasu, a nawet uszkodzenia narzędzia [57-59]. Mechanizmy stojące za tym zjawiskiem są przedmiotem licznych analiz teoretycznych i eksperymentalnych wskazujących, że dominujące tryby drgań mogą wynikać zarówno z elastyczności przegubów, jak i konfiguracji robota w przestrzeni roboczej [54, 58]. Badania pokazują, że roboty stosowane w obróbce są bardziej podatne na tego typu zjawiska niż tradycyjne obrabiarki CNC, ze względu na mniejszą sztywność konstrukcji [40, 57]. W celu predykcji zachowania dynamicznego robotów opracowywane są modele uwzględniające elastyczność napędów i złączy, co pozwala lepiej odwzorować rzeczywiste przebiegi drgań [30, 60].

Podsumowując, dynamika robotów przemysłowych obejmuje szerokie spektrum zjawisk drganiowych: od drgań swobodnych i tłumionych, przez wymuszone i rezonansowe, aż po drgania samowzbudne prowadzące do niestabilności procesu. Ich rozpoznanie i klasyfikacja stanowią podstawę opracowywania metod ograniczania ich negatywnego wpływu na precyzję oraz niezawodność pracy robotów [13, 30, 55, 57]. Pogłębiona znajomość właściwości dynamicznych robotów umożliwia projektowanie bardziej stabilnych procesów technologicznych, optymalizację parametrów pracy oraz rozwój konstrukcji o zwiększonej sztywności i trwałości.

Na podstawie przedstawionego stanu wiedzy można stwierdzić, że analiza modalna stanowi jedną z ważniejszych metod analizy drgań robotów. Jednocześnie coraz większą rolę odgrywają metody umożliwiające ocenę modów drgań w warunkach rzeczywistej pracy robota, co jest niezbędne w przypadku drgań samowzbudnych i operacyjnych. Dlatego w kolejnym podrozdziale omówiono stosowane w literaturze i przemyśle podejścia do identyfikacji modalnej robotów, uwzględniające zmienność ich konfiguracji kinematycznej i warunków obciążenia.

### **Przegląd metod identyfikacji modalnej robotów**

Identyfikacja modalna stanowi kluczowy etap analizy dynamicznej robotów oraz innych układów mechanicznych, umożliwiając wyznaczenie ich częstości własnych, współczynników tłumienia oraz postaci modów drgań. W przypadku robotów przemysłowych szczególnym wyzwaniem jest zmienność właściwości dynamicznych w zależności od konfiguracji kinematycznej, co wymaga prowadzenia badań w różnych ustawieniach roboczych.

W literaturze podkreśla się również, że podatność członów i przegubów robotów ma istotny wpływ na ich dynamikę oraz stabilność sterowania. Wyniki badań dotyczące sterowania robotami z podatnymi przegubami przedstawione w pracach [61, 62] wskazują, że poprawne odwzorowanie właściwości dynamicznych układu, w tym drgań własnych, jest kluczowe dla

skutecznego projektowania algorytmów sterowania, co uzasadnia potrzebę stosowania metod identyfikacji modalnej.

Analiza modalna jest przedmiotem badań od wielu dekad, a stosowane metody ewoluowały wraz z rozwojem technik pomiarowych i obliczeniowych. Jednym z pierwszych podejść była eksperymentalna analiza modalna (EMA – Experimental Modal Analysis). Metoda ta opiera się na pomiarze funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF – Frequency Response Function) uzyskiwanej poprzez wymuszenie drgań, najczęściej przy użyciu młotka modalnego lub wzbudnika elektromagnetycznego [63-65]. Na podstawie charakterystyk FRF możliwe jest wyznaczenie parametrów modalnych, takich jak częstości własne, współczynniki tłumienia oraz postacie drgań [66-68]. Techniki EMA były szeroko stosowane w latach 80. i 90. XX wieku zarówno w badaniach laboratoryjnych, jak i przemysłowych, co znajduje odzwierciedlenie w klasycznych opracowaniach z zakresu analizy modalnej [63, 65, 67].

W praktyce przemysłowej metody EMA znalazły zastosowanie m.in. w identyfikacji modalnej wrzecion, konstrukcji nośnych obrabiarek oraz robotów wykorzystywanych w procesach skrawania [69, 70]. Stosowano je również w monitoringu dynamiki wrzecion z wykorzystaniem czujników montowanych bezpośrednio na korpusie [71]. W przypadku robotów przemysłowych szczególnie istotne było określenie pobudzanych częstotliwości drgań oraz ocena sztywności konstrukcji w zależności od konfiguracji robota [9, 72]. Badania te miały istotne znaczenie w analizie stabilności procesów obróbczych, gdzie właściwości dynamiczne robota wpływają na jakość obróbki oraz ryzyko wystąpienia zjawiska chatteru [8, 73-77]. Szeroki przegląd zagadnień związanych z zastosowaniem robotów przemysłowych w procesach obróbki przedstawiono również w pracy [78].

W ostatnich latach badania nad EMA koncentrują się na doskonaleniu metod estymacji funkcji odpowiedzi częstotliwościowej. W pracy [79] przeprowadzono analizę porównawczą różnych metod wyznaczania FRF dla robota sześcioposiowego, natomiast w artykułach [80] zaproponowano ulepszone podejście do projektowania eksperymentów w dziedzinie częstotliwości, pozwalające na zwiększenie dokładności identyfikacji modalnej robotów przemysłowych. Istotnym ograniczeniem EMA jest konieczność stosowania kontrolowanych wymuszeń oraz wyłączenia badanego obiektu z normalnej eksploatacji. W przypadku robotów przemysłowych oznacza to brak możliwości prowadzenia badań w trakcie rzeczywistej pracy robota [63, 70, 71]. Ograniczenie to stało się impulsem do rozwoju operacyjnej analizy modalnej (OMA – Operational Modal Analysis), w której identyfikacja parametrów modalnych odbywa się wyłącznie na podstawie sygnałów odpowiedzi układu, bez konieczności znajomości sygnałów wejściowych [7, 66, 81].

Metody OMA umożliwiają prowadzenie identyfikacji w warunkach rzeczywistej eksploatacji, co jest szczególnie istotne w przypadku robotów przemysłowych, których właściwości dynamiczne zmieniają się wraz z konfiguracją kinematyczną. Do najczęściej stosowanych technik należą metody dekompozycji w dziedzinie częstotliwości

(FDD – Frequency Domain Decomposition), identyfikacji podprzestrzeni stochastycznych (SSI – Stochastic Subspace Identification) oraz algorytm (ERA - Eigensystem Realization Algorithm) [81-84]. Metoda FDD opiera się na analizie macierzy gęstości widmowej sygnałów i wykorzystuje dekompozycję wartości osobliwych do identyfikacji dominujących modów drgań. Z kolei metoda SSI bazuje na modelach przestrzeni stanów i umożliwia precyzyjne wyznaczanie parametrów modalnych w dziedzinie czasu. Algorytm ERA wykorzystuje analizę odpowiedzi impulsowej układu do rekonstrukcji jego modelu dynamicznego [85-88].

W ostatnich latach metody OMA rozwijane są w kierunku integracji z technikami uczenia maszynowego oraz metodami statystycznymi. W pracy [89] zaproponowano wariant SSI wspomagany algorytmami uczenia maszynowego, zwiększający odporność identyfikacji na zakłócenia pomiarowe. W artykule [90] przedstawiono autonomiczną metodę OMA uwzględniającą zmienność warunków pracy robotów przemysłowych. Badania [8, 91, 92] wykazały natomiast, że podejście OMA jest szczególnie przydatne w analizie robotów w procesach frezarskich, w których właściwości dynamiczne zmieniają się wraz z konfiguracją roboczą.

Kolejnym kierunkiem rozwoju metod identyfikacji modalnej są podejścia oparte na funkcjach transmitancji (TFB – Transmissibility Function Based). W metodach tych analizuje się relacje pomiędzy odpowiedziami drganiowymi mierzonymi w różnych punktach konstrukcji, co pozwala na eliminację konieczności znajomości sygnału wymuszającego [93, 94]. Podejście to jest szczególnie przydatne w środowisku przemysłowym, gdzie pełna kontrola nad wymuszeniami jest często niemożliwa. W pracy [95] zaproponowano połączenie funkcji transmitancji z technikami separacji źródeł sygnału (Blind Source Separation), co umożliwiło skuteczniejsze oddzielenie dominujących modów drgań od zakłóceń.

Istotnym kierunkiem rozwoju współczesnej analizy modalnej są również metody probabilistyczne, które umożliwiają uwzględnienie niepewności pomiarowej oraz zmienności warunków pracy układu. W podejściu tym parametry modalne traktowane są jako zmienne losowe, a identyfikacja prowadzi do określenia rozkładów prawdopodobieństwa częstości własnych i współczynników tłumienia [96-98]. Metody te znajdują zastosowanie m.in. w analizie robotów wykorzystywanych w procesach obróbczych, gdzie zmienność konfiguracji robota i obciążenia narzędzia powoduje istotne zmiany właściwości dynamicznych [48, 99].

Oprócz technik eksperymentalnych duże znaczenie w analizie modalnej robotów odgrywają metody numeryczne oparte na metodzie elementów skończonych (MES) oraz procedurach aktualizacji modeli (model updating). MES umożliwia modelowanie właściwości dynamicznych już na etapie projektowania konstrukcji, jednak dokładność uzyskanych wyników zależy od poprawnego odwzorowania parametrów materiałowych oraz warunków brzegowych. Z tego względu często stosuje się procedury aktualizacji modeli polegające na dostrajaniu parametrów numerycznych na podstawie wyników eksperymentalnych [100-103].

W literaturze można znaleźć liczne przykłady zastosowania MES w analizie modalnej robotów przemysłowych. W pracy [30] przedstawiono model dynamiczny robota wykorzystywanego w procesach wytwórczych, natomiast w artykule [72] przeprowadzono analizę modalną robota o pięciu stopniach swobody. Podejścia numeryczne stosowano również w analizach robotów typu delta [104] oraz konstrukcji typu hexapod [105], gdzie porównanie wyników symulacji MES z eksperymentalną analizą modalną pozwoliło na ocenę zgodności modeli dynamicznych.

W badaniach nad robotami przemysłowymi coraz częściej stosuje się także metody interpolacyjne umożliwiające estymację parametrów modalnych w różnych konfiguracjach roboczych robota. Jednym z przykładów jest metoda odwrotnej odległości ważonej (IDW – Inverse Distance Weighted), pozwalająca na aproksymację częstości własnych i innych parametrów dynamicznych na podstawie ograniczonej liczby pomiarów [100]. Podejście to znajduje zastosowanie zwłaszcza w analizach przestrzennej zmienności właściwości dynamicznych robotów [106, 107].

Dynamiczny rozwój metod obliczeniowych doprowadził również do wykorzystania sztucznej inteligencji w identyfikacji modalnej. Algorytmy optymalizacyjne inspirowane naturą, takie jak Particle Swarm Optimization czy Genetic Algorithms, wykorzystywane są do dostrajania parametrów modeli dynamicznych oraz wspomagania procedur aktualizacji modeli MES [108-110]. Sieci neuronowe i metody uczenia głębokiego stosowane są do predykcji częstości własnych oraz automatycznej identyfikacji postaci modów drgań na podstawie danych pomiarowych [111-113]. W pracach [114-116] przedstawiono metodę identyfikacji parametrów dynamicznych opartą na głębokim uczeniu.

Przedstawione metody pokazują ewolucję podejść do identyfikacji modalnej robotów, od klasycznych technik eksperymentalnych, przez operacyjne metody identyfikacji, aż po nowoczesne rozwiązania probabilistyczne, numeryczne i oparte na sztucznej inteligencji. Metody numeryczne umożliwiają modelowanie właściwości dynamicznych już na etapie projektowania, natomiast techniki eksperymentalne pozwalają na weryfikację i aktualizację modeli. Warunkiem praktycznego wykorzystania wyników tych analiz konieczne było zastosowanie odpowiednich metod pomiaru drgań robotów.

### **Metody pomiaru drgań**

W literaturze wyróżnia się trzy podstawowe grupy metod stosowanych w pomiarze drgań: kontaktowe, bezkontaktowe oraz pośrednie. Wybór zastosowanej metody zależy od wymaganej dokładności pomiaru, warunków pracy robota oraz ograniczeń konstrukcyjnych badanego układu.

Metody kontaktowe obejmują przede wszystkim pomiary za pomocą akcelerometrów piezoelektrycznych, czujników tensometrycznych oraz innych sensorów montowanych bezpośrednio na konstrukcji [23, 43, 52]. Akcelerometry umożliwiają bezpośredni pomiar

przyspieszeń drgań w wybranych punktach konstrukcji. Tego typu czujniki są szeroko wykorzystywane m.in. w klasycznych badaniach modalnych wrzecion i robotów przemysłowych [63, 70, 71, 117]. Stosowane są także czujniki tensometryczne, które umożliwiają rejestrację lokalnych odkształceń konstrukcji i pośrednie wyznaczanie naprężeń dynamicznych w elementach nośnych robota. Istotną grupę stanowią także czujniki siły i momentu (najczęściej przetworniki sześciosiowe), montowane w pobliżu końcówki roboczej lub w podstawie robota. Umożliwiają one pomiar trzech składowych siły oraz trzech składowych momentu, co pozwala na pełną charakterystykę przestrzennego wektora obciążeń dynamicznych działających na robota. Rejestrowane sygnały stanowią podstawę do analizy zjawisk dynamicznych w układzie mechanicznym, a w szczególności do identyfikacji zjawisk rezonansowych wywołanych siłami skrawania lub innymi oddziaływaniami kontaktowymi. Liczne badania potwierdzają skuteczność takiego podejścia. W pracy [9] przeprowadzono analizę dynamiczną sześciosiowego robota obróbkowego, natomiast w artykule [69] dokonano modalnej identyfikacji jednostki wrzeciono - narzędzie. W badaniach [8, 73] analizowano stabilność pracy robotów w procesach frezowania, wskazując na zależność właściwości dynamicznych od konfiguracji przestrzennej. Z kolei w pracach [31, 39] pokazano, że wibracje podczas wiercenia i frezowania można skutecznie ograniczać poprzez optymalizację konfiguracji robota. Metody kontaktowe zapewniają wysoką precyzję identyfikacji modalnej, jednak są związane z koniecznością montażu elementów pomiarowych.

Metody bezkontaktowe bazują na technikach optycznych i laserowych, umożliwiając pomiar drgań bez fizycznej ingerencji w konstrukcję robota. Najczęściej wykorzystywanym narzędziem jest laserowy wibrometr dopplerowski (LDV), który umożliwia bardzo dokładny pomiar prędkości drgań, a na tej podstawie wyznaczenie amplitudy przemieszczeń. Technikę tę zastosowano m.in. w pracy [118], w której analizowano dynamiczną sztywność robotów przemysłowych. Kolejną grupę stanowią systemy wizyjne. Analiza obrazu z wykorzystaniem metod takich jak Digital Image Correlation (DIC) czy algorytmy śledzenia punktów umożliwia wyznaczenie przemieszczeń, częstotliwości własnych oraz postaci drgań. W pracy [119] przedstawiono badania robota ABB IRB 1600/1.45 z zastosowaniem systemu wizyjnego oraz oprogramowania RDI Motion Amplification. Celem analiz było określenie wpływu konfiguracji kątowej robota na jego właściwości drganiowe.

Zgodnie z klasycznymi opracowaniami dotyczącymi analizy modalnej [63, 65, 67], a także z nowszymi badaniami [66, 81-83, 90, 93-96, 120] tego typu techniki umożliwiają identyfikację częstotliwości własnych oraz postaci modów na podstawie odpowiedzi w warunkach eksploatacyjnych, przy zastosowaniu metody OMA. Ich szczególną zaletą jest możliwość monitorowania drgań w czasie rzeczywistym, bez konieczności stosowania dodatkowych wymuszeń czy ingerencji w strukturę. Nowe rozwiązania, takie jak metody autonomicznej analizy modalnej [90] czy techniki oparte na rozkładzie źródeł sygnału [95], wskazują, że pomiary bezkontaktowe są jednym z najbardziej perspektywicznych kierunków badań.

Metody pośrednie polegają na analizie sygnałów procesowych i systemowych. Przykładem jest monitoring prądów silników, w których obecność rezonansów ujawnia się w postaci charakterystycznych fluktuacji. Takie podejście zaprezentowano w pracach [93, 94], gdzie zaproponowano odpowiednie projektowanie eksperymentów i wykorzystanie sygnałów układu sterowania do identyfikacji modalnej robotów. Częstotliwości drgań mogą być także określane na podstawie sygnałów z enkoderów lub emisji akustycznej generowanej podczas pracy robota i procesów obróbczych. W badaniach [73, 99] podkreślono znaczenie takiego podejścia w analizie robotów frezujących. Wśród tego typu metod znajdują się m.in. podejścia oparte na iteracyjnym uczeniu się [23], kształtowaniu wejścia (input shaping) [33] czy filtracji czasowo-opóźnionej [106]. Ich istotną zaletą jest możliwość tłumienia drgań w czasie rzeczywistym bez konieczności stosowania dodatkowych sensorów. W pracach [23, 33] wykazano, że sterowanie oparte na takich algorytmach pozwala na skuteczną redukcję drgań w robotach przemysłowych. Dodatkowo, rozwiązania wykorzystujące kompensację podatności węzłów [51] lub aktywne unikanie drgań w procesach spawania [43] wskazują, że tego typu metody mogą nie tylko identyfikować, ale także minimalizować wpływ częstotliwości rezonansowych.

Coraz częściej stosowane są także podejścia hybrydowe, łączące różne techniki pomiarowe, np. zestawienie danych z akcelerometrów i wibrometru laserowego w celu kalibracji wyników lub wykorzystanie mobilnych czujników MEMS w systemach IoT do monitorowania stanu dynamicznego w czasie rzeczywistym.

Podsumowując, rozwój metod identyfikacji i pomiaru pobudzanych częstotliwości drgań w robotach przemysłowych przebiega od klasycznych pomiarów kontaktowych, poprzez techniki bezkontaktowe, aż po metody pośrednie wykorzystujące sygnały sterujące oraz algorytmy uczenia maszynowego [56, 110, 121]. Współczesne podejścia jednoznacznie wskazują, że pełnemu odwzorowaniu dynamiki robota sprzyja podejście hybrydowe, łączące modele analityczne, eksperymentalne oraz numeryczne, a także wykorzystanie zaawansowanych metod identyfikacji modalnej i procedur aktualizacji modelu. Takie podejście pozwala na wiarygodną charakterystykę drganiową robotów przemysłowych, a tym samym na zwiększenie ich precyzji i niezawodności w zastosowaniach przemysłowych.

Reasumując przegląd istniejących rozwiązań należy zauważyć, że początkowo badania w obszarze modelowania dynamicznego robotów przemysłowych w dużej mierze opierały się na uproszczonym założeniu sztywnych połączeń między członami [9, 48, 69-71, 79 - 81, 91, 122]. Takie założenie ograniczało możliwość wiernego odwzorowania rzeczywistych właściwości dynamicznych robotów. Wprawdzie nowsze prace [30, 31, 39, 51, 72, 104, 105, 118] podjęły próbę uwzględnienia podatności złączy i konstrukcji, jednak ich zakres koncentrował się głównie na robotach o dużym zasięgu, układach delta lub hexapodach oraz zastosowaniach w obróbce skrawaniem. W literaturze brakuje natomiast badań, które

w sposób kompleksowy analizowałyby wpływ podatności przegubów, elementów mocujących oraz osprzętu pomiarowego na właściwości drganiowe robota.

Prezentowana w niniejszej pracy koncepcja uzupełnia tę lukę badawczą poprzez opracowanie modelu robota o pięciu stopniach swobody, złożonego z trzech członów poruszających się w jednej płaszczyźnie, systemu mocowania czujnika, czujnika siły i momentu oraz narzędzia. Ponadto istnieje jeszcze jedna nisza badawcza, związana z problemem stabilności zrobotyzowanej obróbki mechanicznej i zjawiskami drganiowymi. Chodzi o drgania samowzбудne nazywane chatterem, które w zrobotyzowanej obróbce mechanicznej stanowią obecnie stosunkowo niszowy, lecz bardzo perspektywiczny obszar badań. W przeciwieństwie do klasycznych obrabiarek CNC, roboty przemysłowe charakteryzują się znacznie mniejszą sztywnością oraz silnie zmiennymi właściwościami dynamicznymi zależnymi od konfiguracji kinematycznej. Powoduje to, że analiza stabilności procesu skrawania jest znacznie bardziej złożona niż w konwencjonalnych układach obróbkowych. W literaturze można znaleźć liczne prace dotyczące chatteru w obrabiarkach CNC, jednak zagadnienie chatteru w robot machining nadal pozostaje słabo opisane i nie posiada ugruntowanych metod analitycznych. Szczególnym problemem jest wyznaczenie częstotliwości chatterowych, które w przypadku robotów nie są stałe, lecz zależą od aktualnej pozycji i orientacji robota. Zmieniająca się konfiguracja robota powoduje bowiem zmianę częstotliwości własnych oraz charakterystyk dynamicznych całego układu. W praktyce oznacza to, że proces stabilny w jednej części przestrzeni roboczej może stać się niestabilny po zmianie położenia ramion robota. Z tego względu kluczowym elementem analizy chatteru jest wcześniejsza znajomość częstotliwości rezonansowych układu dla różnych konfiguracji robota, gdyż częstotliwości chatteru zależą od częstotliwości rezonansowych. Czyni to temat badania właściwości drganiowych robota w funkcji konfiguracji kinematycznej szczególnie interesującym zarówno z punktu widzenia dynamiki robotów, jak i nowoczesnych procesów obróbki skrawaniem [123].

### **3. Motywacja, cel i zakres pracy**

#### **3.1. Motywacja podjęcia tematu pracy**

W Katedrze Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej od 2013 roku prowadzone były prace badawcze i wdrożeniowe dotyczące zrobotyzowanych procesów obróbki mechanicznej na rzecz sektora lotniczego, motoryzacyjnego i odlewniczego. W toku tych prac ujawniły się liczne problemy z doбором parametrów procesów obróbki, między innymi ze względu na występujące niestabilności o charakterze drganiowym. Drgania ramion robotów miały negatywny wpływ na trwałość narzędzi oraz jakość obrabianych powierzchni. Zaobserwowane problemy były motywacją do podjęcia tematyki modelowania i analizy drgań robotów przemysłowych, którą zrealizowano na przykładzie robota ABB IRB 1600/1.45.

#### **3.2. Cel pracy**

Z przeprowadzonego studium literatury naukowej oraz przedstawionej motywacji wynika główny cel pracy jakim jest sformułowanie modelu matematycznego robota przemysłowego ze szczególnym uwzględnieniem zjawiska drgań mechanicznych. Z głównego celu pracy wynikają następujące szczegółowe cele badawcze:

1. Sformułowanie analitycznego modelu drgań ramienia robota uwzględniającego podatność złączy, systemu mocowania narzędzia i czujnika siły.
2. Analiza właściwości dynamicznych robota obejmujących zjawiska drganiowe na podstawie sformułowanego modelu analitycznego, w szczególności wyznaczenie częstotliwości rezonansowych, postaci drgań oraz ocena wpływu konfiguracji robota na te wielkości.
3. Badanie jakości modelu matematycznego opisującego główne zjawiska fizyczne, w celu określenia możliwości jego wykorzystania w szybkiej analizie dynamicznej i predykcji właściwości drganiowych robota.
4. Eksperymentalne badania walidacyjne opracowanych modeli robota obejmujące pomiary odpowiedzi dynamicznych układu oraz porównanie wyników eksperymentalnych z rezultatami uzyskanymi na drodze modelowania analitycznego i numerycznego.

#### **3.3. Zakres pracy**

Zakres pracy obejmuje analizę wpływu konfiguracji robota przemysłowego z podatnymi złączami na występowanie drgań rezonansowych, przy wykorzystaniu metod analitycznych do opisu dynamiki. We wstępie wskazano, że elastyczność robotów w porównaniu do sztywnych maszyn CNC wymaga precyzyjnego modelowania zjawisk dynamicznych w celu zapewnienia stabilności i wysokiej jakości procesów przemysłowych. W rozdziale drugim wykonano

przeгляд istniejących rozwiązań oraz przedstawiono aktualny stan wiedzy dotyczący metod modelowania robotów. Omówiono rodzaje drgań występujących w robotach przemysłowych, ze szczególnym uwzględnieniem drgań rezonansowych, a także metody ich pomiaru i analizy. W rozdziale trzecim przedstawiono uzasadnienie podjęcia tematu badań poprzez identyfikację luki badawczej związanej z brakiem kompleksowych analiz wpływu podatności przegubów, elementów mocujących oraz osprzętu na właściwości dynamiczne i drganiowe robota. W rozdziale tym określono również cel i zakres pracy. Zakres dalszej części pracy wynika z realizacji szczegółowych celów badawczych. Rozdział czwarty dotyczył budowy modelu robota trójczłonowego wyposażonego w czujnik siły oraz narzędzie. Rozdział ten zawiera opis kinematyki oraz dynamiki. Opis dynamiki sformułowano wykorzystując równania Eulera–Lagrange’a. Następnie stosując metody eksperymentalne oraz numeryczne wyznaczono parametry fizyczne modelu. W rozdziale piątym przedstawiono rozwiązanie analityczne, wyznaczając częstotliwości drgań własnych w zależności od ustawienia kąтового członów robota. Dodatkowo zaprezentowano dla każdej z pięciu częstotliwości odpowiadające im postaci drgań własnych. Rozdział szósty poświęcono rozwiązaniu numerycznemu dla opracowanego modelu robota. Rozdział siódmy przedstawia charakterystykę stanowiska badawczego na którym przeprowadzono pomiary drgań robota z zastosowaniem akcelerometru zamontowanego na narzędziu. Badania przeprowadzono w zadanym zakresie zmian kątów, wyznaczając widma częstotliwościowe przyspieszeń. Wyniki pomiarów wykorzystano do określenia charakterystyk częstotliwościowych przemieszczeń. Dla wybranego ustawienia ramion robota przeprowadzono analizy z zastosowaniem systemu wizyjnego. Przedstawiono porównanie wyników uzyskanych z obu niezależnych systemów pomiarowych, wykazując ich zgodność. W rozdziale ósmym zestawiono wyniki uzyskane w procesie modelowania (rozwiązanie analityczne oraz numeryczne) z rezultatami badań eksperymentalnych dla zbudowanego stanowiska badawczego. Dla wybranego ustawienia robota przedstawiono graficzną postać drgań ramienia robota dla trzech pierwszych modów drgań z zastosowaniem układu wizyjnego. Wyznaczono błąd względny pomiędzy wynikami z układu pomiarowego oraz badań modelowych, co umożliwiło ocenę zgodności wyników pomiarowych i obliczeniowych. W rozdziale dziewiątym zamieszczono podsumowanie pracy, sformułowano wnioski końcowe oraz wskazano kierunki dalszych badań. Praca zawiera również bibliografię oraz dodatki obejmujące szczegółowe wyniki obliczeń i dane źródłowe wykorzystane podczas analizy. Zawarte w nich tabele stanowią podstawę do opracowania wykresów błędów względnych, częstotliwości oraz postaci drgań własnych.

### 3.4. Oryginalne elementy pracy

Do oryginalnych osiągnięć, autorka pracy zalicza następujące elementy:

1. sformułowanie opisu matematycznego robota ABB IRB 1600/1.45 z uwzględnieniem czujnika siły, narzędzia oraz podatności połączeń;
2. skonfigurowanie platformy badawczej obejmującej robota przemysłowego z systemami akwizycji danych;
3. opracowanie i walidacja modelu matematycznego do szybkiego wyznaczania wartości częstotliwości rezonansowych w całym zakresie zmian współrzędnych złączowych;
4. analiza wpływu konfiguracji robota na zjawiska rezonansowe.

Uzyskane wyniki pozwalają stwierdzić, że opracowane rozwiązanie stanowi istotny wkład w rozwój modelowania drgań robotów, a zaproponowane podejście może znaleźć zastosowanie w badaniach robotów o innych strukturach kinematycznych.

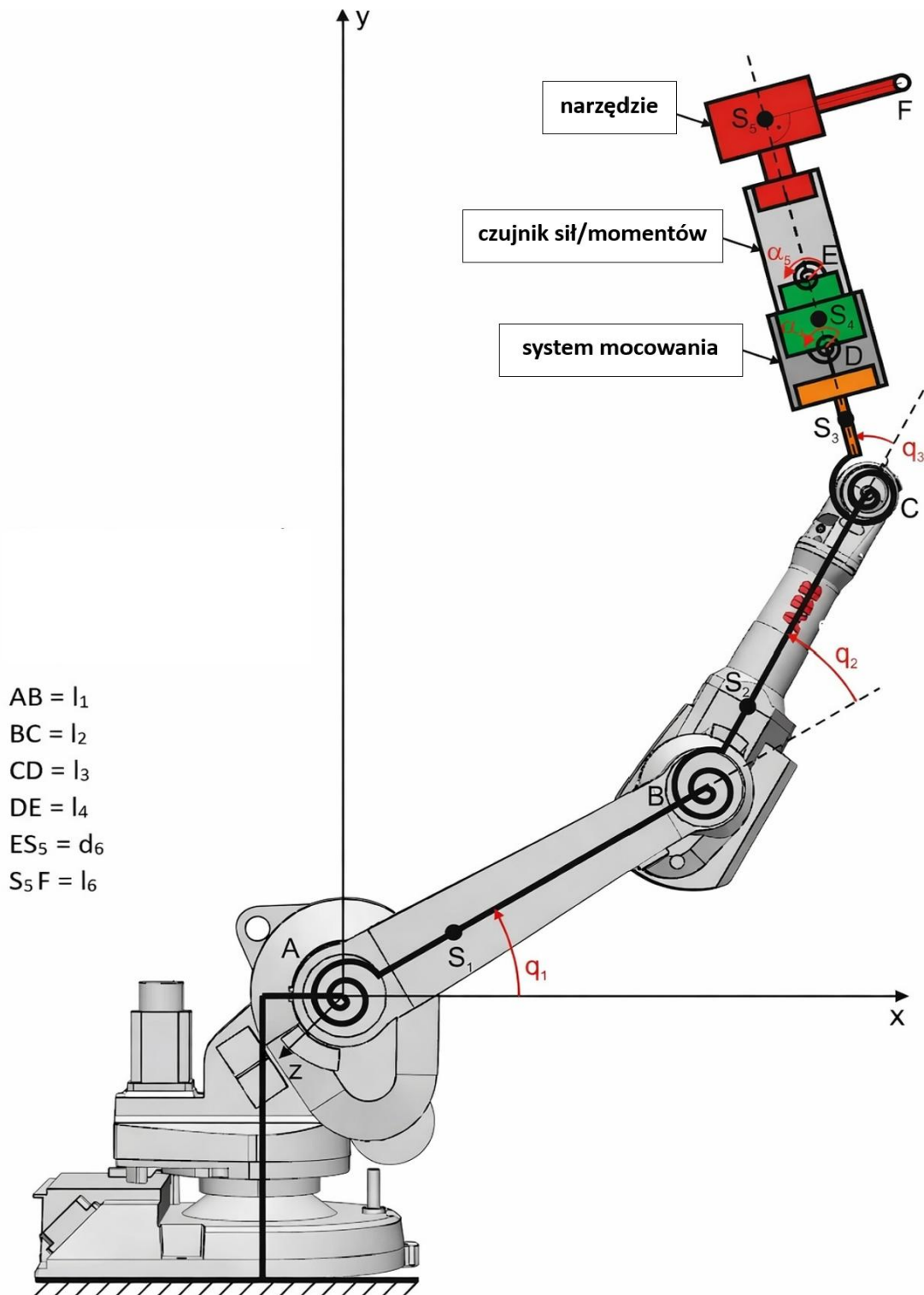
Uzyskane w ramach pracy wyniki umożliwiają wybór odpowiedniego, z punktu widzenia minimalizacji wpływu drgań, obszaru przestrzeni roboczej do realizacji zrobotyzowanych procesów. Znając częstotliwości sił wymuszających występujących podczas procesów, można na podstawie opracowanego modelu wybrać taki obszar przestrzeni roboczej, w którym nie nastąpi zsynchronizowanie częstotliwości rezonansowych z częstotliwościami wymuszeń.



## 4. Model robota

### 4.1. Założenia modelowe

W celu analizy wpływu konfiguracji robota na zjawiska drganiowe, przyjęto model robota trójczłonowego z czujnikiem siły i narzędziem, którego schemat pokazano na rys. 4.1. Przyjęty model robota jest modelem płaskim, dlatego pominięto ruchy obrotowe członów 1, 4 i 6. W związku z tym pierwszy człon w modelu odpowiada drugiemu ogniwu ramienia robota, drugi człon odpowiada trzeciemu ogniwu ramienia robota, natomiast trzeci człon odpowiada piątemu ogniwu ramienia robota. Zatem model robota składa się z trzech członów połączonych przegubowo poruszających się w jednej płaszczyźnie, systemu mocowania czujnika, czujnika siły i momentu oraz narzędzia. W modelu uwzględniono podatność w przegubach ramienia A B i C, podatność w miejscu mocowania czujnika do kiści robota (punkt D), oraz podatność skrętną czujnika sił/momentów w punkcie E. Te podatności są przyczyną drgań niskoczęstotliwościowych robota. Człony AB, BC i CD to trzy człony ramienia robota, których ruch jest opisany przez współrzędne  $q_1$ ,  $q_2$  i  $q_3$ . Czwarty człon DE stanowi system mocowania czujnika wraz z przymocowaną do niego obudową czujnika a jego ruch jest opisany przez współrzędną  $\alpha_4$ . Ostatni, piąty człon stanowi narzędzie wraz z ruchomą częścią czujnika. Podatność czujnika powoduje, że człon 5 może obracać się w płaszczyźnie ramienia robota o kąt  $\alpha_5$ . Punkt E jest końcowym punktem narzędzia, które może wchodzić w interakcję z otoczeniem. Gdy narzędzie wchodzi w kontakt z otoczeniem, na punkt E nakładane są ograniczenia stosowne do rodzaju interakcji. Punkty  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  to środki mas członów robota, systemu mocowania i narzędzia.



Rys. 4.1. Robot z parami kinematycznymi obrotowymi, czujnikiem sił/momentów i narzędziem

Drgania niskoczęstotliwościowe robotów wynikają z podatności w złączach, systemie mocowania czujnika oraz na czujniku, czyli w punktach A, B, C, D i E. Drgania ramienia polegają na obrotowym ruchu oscylacyjnym członów względem punktów A, B, i C. Aby je uwzględnić, można przyjąć, że każdą współzrzedną konfiguracyjną ramienia, tzn.  $q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) można

wyrazić jako sumę dwóch wartości kątowych. Wzorem (4.1) określono wartości współrzędnych konfiguracyjnych ramienia robota

$$\begin{cases} q_1 = \beta_1 + \alpha_1 \\ q_2 = \beta_2 + \alpha_2 \\ q_3 = \beta_3 + \alpha_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

gdzie  $\beta_i$  to wartości opisujące położenia członów robota, względem których zachodzą oscylacje tych członów wyrażone przez zmienne  $\alpha_i$ . W idealnym przypadku, kiedy nie zachodzą drgania ramienia robota,  $\beta_i$  są po prostu tożsame ze współrzędnymi konfiguracyjnymi  $q_i$ . W przypadku uwzględnienia podatności w przegubach,  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  są wolnozmiennymi wartościami, których zmiany wynikają z realizacji trajektorii ruchu, natomiast  $\alpha_i$  są wartościami szybkozmiennymi związanymi ze zjawiskami drganiowymi towarzyszącymi ruchowi. Ponadto współrzędne  $\alpha_4, \alpha_5$  opisują ruch drganiowy czujnika i narzędzia.

Pełny wektor współrzędnych opisujących położenie analizowanego systemu określa równanie (4.2), w którym uwzględniono zależność (4.1)

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 \\ \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Wektor współrzędnych (4.2) zastosowano w opisie kinematyki przedstawionym w podrozdziale 4.2.

## 4.2. Kinematyka robota

Pierwszym etapem budowy modelu matematycznego robota jest sformułowanie równań kinematyki. Ponieważ opis zadań kinematyki robotów jest często skomplikowany, co wiąże się z zawilnością struktur kinematycznych oraz liczbą stopni swobody, metody opisu kinematyki robotów są przedmiotem licznych publikacji [17-19, 124-126]. W tym podrozdziale przedstawiono opis kinematyki analizowanego robota ABB IRB 1600/1.45 z zastosowaniem notacji Denavida-Hartenberga (D-H) [18, 126-128]. Zgodnie z metodą, każdemu  $i$ -temu członowi robota przyporządkowano  $i$ -ty lokalny układ współrzędnych. Układy te zostały zdefiniowane według następujących reguł:

- oś  $z_i$  jest zgodna z kierunkiem ruchu  $i$ -tego członu;
- oś  $x_i$  jest prostopadła do osi  $z_i$  oraz  $z_{i-1}$ ;
- układy współrzędnych (lokalne) są definiowane jako układy prawoskrętne [129, 130].

Macierz przekształcenia jednorodnego  $A_{i-1}^i$  opisuje przejście z układu współrzędnych  $i$  do układu  $i - 1$ . Jest ona zbudowana jako iloczyn przekształceń „podstawowych” [16]:

$$A_{i-1}^i = \mathbf{Rot}Z_{q_i} \mathbf{Trans}Z_{d_i} \mathbf{Rot}X_{\alpha_i} \mathbf{Trans}X_{a_i} \quad (4.3)$$

gdzie  $\mathbf{RotZ}_{q_i}$  – macierz rotacji o kąt  $q_i$  wokół osi Z i-członu,  $\mathbf{TransZ}_{d_i}$  – macierz translacji o parametr  $d_i$  w osi Z i-członu,  $\mathbf{RotX}_{\alpha_i}$  – macierz rotacji o kąt  $\alpha_i$  wokół osi X i-członu,  $\mathbf{TransX}_{a_i}$  – macierz translacji o wartość  $a_i$  w osi X i-członu,  $a_i$  – długość i-tego członu,  $d_i$  – odsunięcie przegubu,  $q_i$  – kat przegubu,  $\alpha_i$  – skręcenie członu. Macierze z równania (4.3) mają następującą postać

$$\mathbf{RotZ}_{q_i} = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) & 0 & 0 \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\mathbf{TransZ}_{d_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

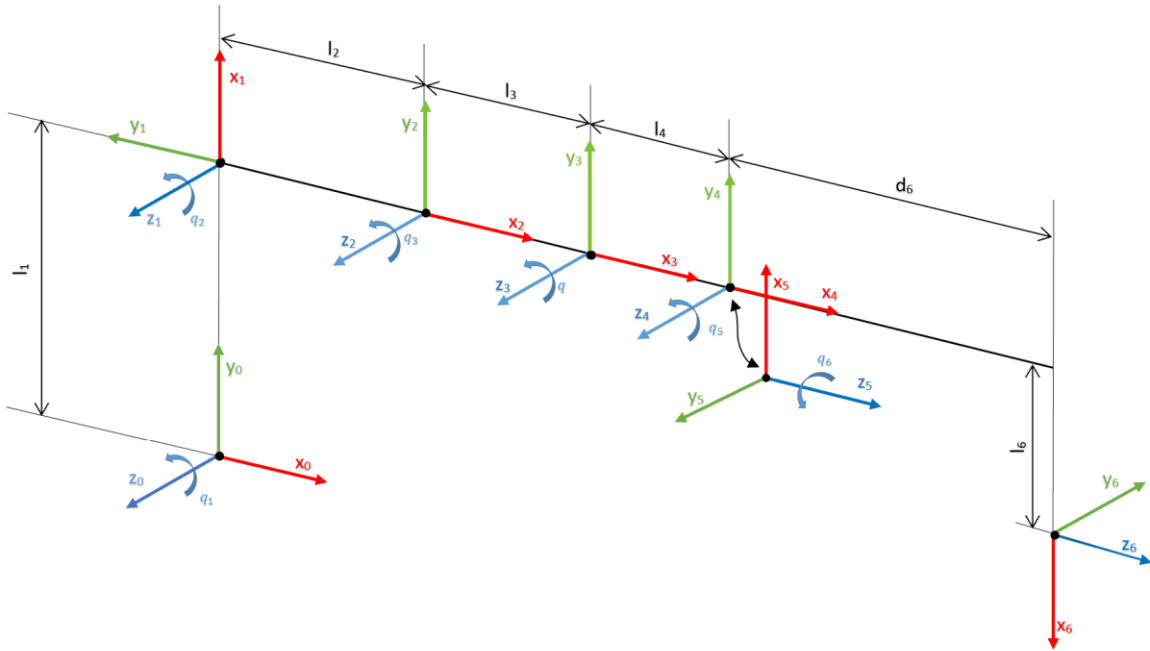
$$\mathbf{TransX}_{a_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{RotX}_{\alpha_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Macierz transformacji, po uwzględnieniu macierzy (4.4) – (4.7) wyraża się w następującej formie

$$\mathbf{A}_{i-1}^i = \begin{bmatrix} \cos(q_i) & -\sin(q_i) \cos(\alpha_i) & \sin(q_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(q_i) \\ \sin(q_i) & \cos(q_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(q_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(q_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Parametry kinematyczne robota według notacji D-H oznaczono na rys. 4.2, a ich wartości przedstawiono w tabeli 4.1. W zastosowanej notacji D-H przyjęto, że wartość  $a_5 = 0$  oraz wartość kąta  $q_6 = 0$ . Dodatkowy układ współrzędnych został wprowadzony w celu spełnienia formalnych wymogów metody D-H, umożliwiając prawidłowe zdefiniowanie orientacji i położenia ostatniego członu względem poprzedniego.



Rys. 4.2. Schemat robota IRB 1600 z układami współrzędnych i parametrami według notacji D-H

Tabela 4.1. Parametry robota według notacji D-H

Człon(i)	$q_i$	$d_i$	$l_i$	$\alpha_i$
1	$q_1 + \frac{\pi}{2}$	0	$l_1 = 700[\text{mm}]$	0
2	$q_2 - \frac{\pi}{2}$	0	$l_2 = 600[\text{mm}]$	0
3	$q_3$	0	$l_3 = 94.5[\text{mm}]$	0
4	$q_4$	0	$l_4 = 27.7[\text{mm}]$	0
5	$q_5 + \frac{\pi}{2}$	0	0	$+\frac{\pi}{2}$
6	$q_6 + \pi$	$d_6 = 80.8[\text{mm}]$	$l_6 = 135[\text{mm}]$	0

Macierze przekształceń jednorodnych po uwzględnieniu parametrów według notacji D-H przyjmują następujące postaci

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} -\sin q_1 & -\cos q_1 & 0 & -l_1 \sin q_1 \\ \cos q_1 & -\sin q_1 & 0 & l_1 \cos q_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} -\sin q_2 & -\cos q_2 & 0 & l_2 \sin q_2 \\ \cos q_2 & -\sin q_2 & 0 & -l_2 \cos q_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$\mathbf{A}_2^3 = \begin{bmatrix} \cos q_3 & -\sin q_3 & 0 & l_3 \cos q_3 \\ \sin q_3 & \cos q_3 & 0 & l_3 \sin q_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{A}_3^4 = \begin{bmatrix} \cos q_4 & -\sin q_4 & 0 & l_4 \cos q_4 \\ \sin q_4 & \cos q_4 & 0 & l_4 \sin q_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$\mathbf{A}_4^5 = \begin{bmatrix} -\sin q_5 & \cos q_5 & 0 & 0 \\ \cos q_5 & \sin q_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\mathbf{A}_5^6 = \begin{bmatrix} -\cos q_6 & \sin q_6 & 0 & -l_6 \cos q_6 \\ -\sin q_6 & -\cos q_6 & 0 & -l_6 \sin q_6 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Przedstawione macierze przekształceń jednorodnych pozwalają określić transformację układu j-tego do układu (i-1), oznaczoną jako  $\mathbf{T}_{i-1}^j$ . Ogólny wzór pozwalający wyznaczyć taką transformację określono równaniem (4.15)

$$\mathbf{T}_{i-1}^j = \prod_{k=i}^j \mathbf{A}_{k-1}^k \quad (4.15)$$

gdzie ogólną postać macierzy  $\mathbf{T}_{i-1}^j$  można wyrazić wzorem (4.16)

$$\mathbf{T}_{i-1}^j = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{i-1}^j & \mathbf{p}_{i-1}^j \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

w którym  $\mathbf{R}_{i-1}^j$  jest macierzą rotacji układu j-tego względem układu (i-1),  $\mathbf{p}_{i-1}^j$  jest wektorem translacji układu j-tego względem układu (i-1). W rozpatrywanym przypadku macierz transformacji  $\mathbf{T}_0^6$  została wyznaczona jako iloczyn macierzy opisanych równaniami (4.9) - (4.14), czyli

$$\mathbf{T}_0^6 = \mathbf{A}_0^1 \mathbf{A}_1^2 \mathbf{A}_2^3 \mathbf{A}_3^4 \mathbf{A}_4^5 \mathbf{A}_5^6 \quad (4.17)$$

Ze względu na rozbudowaną formę, pełna postać macierzy  $\mathbf{T}_0^6$  nie została przedstawiona. W dalszej części pracy została ona wykorzystana do określenia macierzy jacobianowej.

Macierz jacobianowa (macierz Jakobiego) jest ważnym elementem w wielu aspektach modelowania oraz sterowania robotem. W robotyce często nazywana jest ona jacobianem. W literaturze przedmiotu definiuje się kilka rodzajów jacobianów. W pracy przedstawione zostaną obliczenia dla jacobianu geometrycznego w ciele, który posłuży do wyznaczenia elementów macierzy bezwładności.

Jakobian geometryczny w układzie ciała  $J^b(\mathbf{q})$ , nazywany w skrócie jakobianem geometrycznym w ciele zdefiniowano m.in. w pracy [17]. Jakobian geometryczny w ciele robota n-członowego składa się z kolumn  $J_i^b$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  więc

$$J^b(\mathbf{q}) = [J_1^b \dots J_i^b \dots J_n^b] \quad (4.18)$$

gdzie kolumnę  $J_i^b$ , w przypadku, gdy przegub i-ty jest obrotowy, określa się według wzoru

$$J_i^b = \begin{bmatrix} [R_{i-1}^{nT}]_{3kol} \times R_{i-1}^{nT} p_{i-1}^n \\ [R_{i-1}^{nT}]_{3kol} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

a w przypadku, gdy przegub i-ty jest pryzmatyczny, wyznacza się ją następująco

$$J_i^b = \begin{bmatrix} [R_{i-1}^{nT}]_{3kol} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Do wyznaczenia jakobianu geometrycznego w ciele konieczne jest określenie macierzy transformacji  $T_0^6$ . Zastosowanie notacji D-H do wyznaczenia macierzy  $T_0^6$  pozwala na uzyskanie zarówno macierzy rotacji, jak i wektora translacji. Uzyskane w ten sposób wielkości umożliwiają wyznaczenie jakobianu geometrycznego w ciele, zgodnie ze wzorami (4.19) – (4.20). Wartości funkcji trygonometrycznych  $\cos$  oraz  $\sin$  zastąpiono symbolami  $c$  i  $s$  ze względu na złożoność otrzymanych wzorów. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń oraz zaprezentowanych wzorów, jakobian geometryczny w ciele dla robota ABB IRB 1600/1.45 zapisano w następującej formie

$$J^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -d_6 - \partial_2 - l_1 s \partial_1 - \partial_5 & -d_6 - \partial_2 - \partial_5 & -d_6 - l_3 c \partial_3 - \partial_5 & -d_6 - \partial_5 & -d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \partial_4 + \partial_2 - l_1 c \partial_1 + l_6 & \partial_4 + \partial_2 + l_6 & \partial_4 + l_3 s \partial_3 + l_6 & \partial_4 + l_6 & l_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

gdzie  $\partial_1 = q_2 + q_3 + q_4 + q_5$ ,  $\partial_2 = l_2 c(q_3 + q_4 + q_5) + l_3 c(q_4 + q_5)$ ,  $\partial_3 = q_4 + q_5$ ,  $\partial_4 = l_4 s q_5$ ,  $\partial_5 = l_4 c q_5$ .

### 4.3. Dynamiczne równania ruchu robota

W celu wyznaczenia dynamicznych równań ruchu analizowanego robota o pięciu stopniach swobody zastosowano równania Eulera-Lagrange'a [126]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (4.22)$$

gdzie wektor współrzędnych uogólnionych jest zdefiniowany równaniem (4.2). W celu wyznaczenia równań ruchu sformułowano lagrangian układu, który jest różnicą energii kinetycznej i potencjalnej układu. Energia kinetyczna robota może być wyrażona z zastosowaniem macierzy bezwładności w następujący sposób [16]

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^T \mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (4.23)$$

gdzie  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \in R^{n \times n}$  – macierz bezwładności, która jest dodatnio określona i symetryczna dla każdego  $\boldsymbol{\alpha} \in R^n$ ,  $m_{ij}$  – elementy macierzy bezwładności. Macierz bezwładności definiuje się według wzoru [3]

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{J}_i^{vT} m_i \mathbf{J}_i^v + \mathbf{J}_i^{\omega T} \mathbf{I}_i \mathbf{J}_i^\omega) \quad (4.24)$$

gdzie  $m_i$  – masa i-tego członu,  $\mathbf{I}_i$  – macierz bezwładności i-tego członu,  $\mathbf{J}_i^v \in R^{3 \times n}$  oraz  $\mathbf{J}_i^\omega \in R^{3 \times n}$  – macierze jacobianowe stosowane do określenia prędkości środka masy oraz prędkości kątowej i-tego członu w funkcji prędkości przegubowej.

Wyznaczenie macierzy bezwładności wymaga określenia macierzy jacobianowej  $\mathbf{J}_i^v$ , którą opisano zależnością

$$\mathbf{J}_i^v = \frac{\partial s_{mi}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad (4.25)$$

gdzie  $s_{mi}$  oznacza wektor pozycji środka masy i-tego członu w globalnym układzie odniesienia. W tym celu wyznaczono współrzędne środków mas poszczególnych członów robota oraz środka masy narzędzia w punkcie  $S_5$ , które zapisano w globalnym układzie odniesienia.

$$s_{m1} = \begin{bmatrix} x_{m1} \\ y_{m1} \\ z_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1} \sin(\partial_1) \\ l_{c1} \cos(\partial_1) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$s_{m2} = \begin{bmatrix} x_{m2} \\ y_{m2} \\ z_{m2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\partial_1) + l_{c2} \cos(\partial_2) \\ l_1 \cos(\partial_1) + l_{c2} \sin(\partial_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$s_{m3} = \begin{bmatrix} x_{m3} \\ y_{m3} \\ z_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\partial_1) + l_2 \cos(\partial_2) + l_{c3} \cos(\partial_3) \\ l_1 \cos(\partial_1) + l_2 \sin(\partial_2) + l_{c3} \sin(\partial_3) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$s_{m4} = \begin{bmatrix} x_{m4} \\ y_{m4} \\ z_{m4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\partial_1) + l_2 \cos(\partial_2) + l_3 \cos(\partial_3) + l_{c4} \cos(\partial_4) \\ l_1 \cos(\partial_1) + l_2 \sin(\partial_2) + l_3 \sin(\partial_3) + l_{c4} \sin(\partial_4) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$s_{m5} = \begin{bmatrix} x_{m5} \\ y_{m5} \\ z_{m5} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$= \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\partial_1) + l_2 \cos(\partial_2) + l_3 \cos(\partial_3) + l_4 \cos(\partial_4) + d_{c5} \cos(\partial_5) \\ l_1 \cos(\partial_1) + l_2 \sin(\partial_2) + l_3 \sin(\partial_3) + l_4 \sin(\partial_4) + d_{c5} \sin(\partial_5) \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie  $\beta_{ij} = \beta_i + \beta_j$ ,  $\alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j$ ,  $\beta_{ijk} = \beta_i + \beta_j + \beta_k$ ,  $\alpha_{ijk} = \alpha_i + \alpha_j + \alpha_k$ ,  $\partial_1 = \beta_1 + \alpha_1$ ,  $\partial_2 = \beta_{12} + \alpha_{12}$ ,  $\partial_3 = \beta_{123} + \alpha_{123}$ ,  $\partial_4 = \beta_{123} + \alpha_{123} + \alpha_4$ ,  $\partial_5 = \beta_{123} + \alpha_{123} + \alpha_4 + \alpha_5$ ,  $l_{ci}$  to odległość środka masy  $i$ -tego członu robota od złącza ( $i = 1, 2, 3, 4$ ),  $d_{c5}$  to odległość środka masy członu 5 robota od złącza. Na podstawie równania (4.25), uwzględniając współrzędne środków mas  $s_{mi}$  określone w równaniach (4.26) - (4.30), wyznaczono macierze jacobianowe  $J_i^v$

$$J_1^v = \begin{bmatrix} -l_{c1} c(\partial_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_{c1} s(\partial_1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$J_2^v = \begin{bmatrix} -l_1 c(\partial_1) - l_{c2} s(\partial_2) & -l_{c2} s(\partial_2) & 0 & 0 & 0 \\ -l_1 s(\partial_1) + l_{c2} c(\partial_2) & l_{c2} c(\partial_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$J_3^v = \begin{bmatrix} -l_1 c(\partial_1) - l_2 s(\partial_2) - l_{c3} s(\partial_3) & -l_2 s(\partial_2) - l_{c3} s(\partial_3) & -l_{c3} s(\partial_3) & 0 & 0 \\ -l_1 s(\partial_1) + l_2 c(\partial_2) + l_{c3} c(\partial_3) & l_2 c(\partial_2) + l_{c3} c(\partial_3) & l_{c3} c(\partial_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$J_4^v = \begin{bmatrix} e_1 & -l_2 s(\partial_2) - l_3 s(\partial_3) - l_{c4} s(\partial_4) & -l_3 s(\partial_3) - l_{c4} s(\partial_4) & -l_{c4} s(\partial_4) & 0 \\ e_2 & l_2 c(\partial_2) + l_3 c(\partial_3) + l_{c4} c(\partial_4) & l_3 c(\partial_3) + l_{c4} c(\partial_4) & l_{c4} c(\partial_4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$J_5^v = \begin{bmatrix} e_3 & e_3 + l_1 c(\partial_1) & e_3 + l_1 c(\partial_1) + l_2 s(\partial_2) & -l_4 s(\partial_4) - l_{c5} s(\partial_5) & -l_{c5} s(\partial_5) \\ e_4 & e_4 + l_1 s(\partial_1) & e_4 + l_1 s(\partial_1) - l_2 c(\partial_2) & l_4 c(\partial_4) + l_{c5} c(\partial_5) & l_{c5} c(\partial_5) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

gdzie

$$\begin{aligned} e_1 &= -l_1 c(\partial_1) - l_2 s(\partial_2) - l_3 s(\partial_3) - l_{c4} s(\partial_4) \\ e_2 &= -l_1 s(\partial_1) + l_2 c(\partial_2) + l_3 c(\partial_3) + l_{c4} c(\partial_4) \\ e_3 &= -l_1 c(\partial_1) - l_2 s(\partial_2) - l_3 s(\partial_3) - l_4 s(\partial_4) - l_{c5} s(\partial_5) \\ e_4 &= -l_1 s(\partial_1) + l_2 c(\partial_2) + l_3 c(\partial_3) + l_4 c(\partial_4) + l_{c5} c(\partial_5) \end{aligned}$$

Kolejnym elementem macierzy bezwładności była macierz jacobianowa  $J_i^\omega$ . Wyznaczono ją korzystając z dolnej części formuły (4.19) lub (4.20), która określa  $i$ -tą kolumnę jacobianu geometrycznego w ciele. Jacobian  $J_i^\omega$  składa się z kolumn  $J_{ij}^\omega$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , czyli

$$J_i^\omega = [J_{i1}^\omega \dots J_{ij}^\omega \dots J_{in}^\omega] \quad (4.36)$$

W przypadku gdy przegub  $i$ -ty jest obrotowy, stosuje się zależność

$$\begin{cases} J_{ij}^\omega = [R_{i-1}^{nT}]_{3kol} & \text{dla } j \leq i \\ J_{ij}^\omega = 0 & \text{dla } j > i \end{cases} \quad (4.37)$$

Natomiast dla przegubu pryzmatycznego wykorzystuje się zależność

$$J_{ij}^{\omega} = 0 \quad (4.38)$$

W przypadku analizowanego robota, posiadającego pary kinematyczne obrotowe, jacobiany  $J_i^{\omega}$  określono na podstawie zależności (4.37), i mają one następującą postać

$$J_1^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$J_2^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$J_3^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$J_4^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

$$J_5^{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Macierz bezwładności  $\mathbf{M}$  wyznaczono według wzoru (4.24) uwzględniając w równaniu podstawienie elementów macierzy  $J_i^v$  oraz  $J_i^{\omega}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = & m_1 J_1^{vT} J_1^v + m_2 J_2^{vT} J_2^v + m_3 J_3^{vT} J_3^v + m_4 J_4^{vT} J_4^v + m_5 J_5^{vT} J_5^v \\ & + J_1^{\omega T} I_A^{(1)} J_1^{\omega} + J_2^{\omega T} I_{S_2}^{(2)} J_2^{\omega} + J_3^{\omega T} I_{S_3}^{(3)} J_3^{\omega} + J_4^{\omega T} I_{S_4}^{(4)} J_4^{\omega} + J_5^{\omega T} I_{S_5}^{(5)} J_5^{\omega} \end{aligned} \quad (4.44)$$

gdzie  $I_A^{(1)}$  to masowy moment bezwładności członu 1 określony względem punktu A,  $I_{S_2}^{(2)}$  to masowy moment bezwładności członu 2 określony względem środka masy członu 2,  $I_{S_3}^{(3)}$  to masowy moment bezwładności członu 3 określony względem środka masy członu 3,  $I_{S_4}^{(4)}$  to masowy moment bezwładności członu 4 określony względem środka masy członu 4,  $I_{S_5}^{(4)}$  to masowy moment bezwładności członu 5 określony względem środka masy członu 5.

Kolejnym etapem było określenie energii potencjalnej układu. W rozważanym przypadku jest ona niezależna od prędkości, a jedynie od położenia układu. Dodatkowo pominięto potencjał od siły grawitacji, zakładając, że obciążenia od sił ciężkości członów w bardzo małym stopniu wpływają na wektor  $\boldsymbol{\beta}$ , czyli na położenie członów względem, których zachodzą drgania układu. Nie wpływają one natomiast w istotny sposób na drgania układu. Reasumując, energia potencjalna robota jest równa sumie energii potencjalnych wszystkich jego podatnych złączy

$$V = V_{k1} + V_{k2} + V_{k3} + V_{k4} + V_{k5} \quad (4.45)$$

gdzie  $V_{k1}, V_{k2}, V_{k3}, V_{k4}, V_{k5}$  to potencjały sprężystych złączy robota. Zakładając liniowość sprężystych złączy, energię potencjalną robota zapisano następująco

$$V = \frac{1}{2}k_1\alpha_1^2 + \frac{1}{2}k_2\alpha_2^2 + \frac{1}{2}k_3\alpha_3^2 + \frac{1}{2}k_4\alpha_4^2 + \frac{1}{2}k_5\alpha_5^2 \quad (4.46)$$

Dalsza analiza dynamiki skupia się na zjawisku drgań ramienia robota i prezentuje obliczenia dotyczące przypadku quasi-statycznego, w którym uwzględniono ruchy członów zdefiniowane przez zmienne  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  względem położeń opisanych przez współrzędne  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Wartości współrzędnych  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  traktowane są jako stałe, gdyż ich zmiany wynikające z planowego ruchu ramienia są wielokrotnie wolniejsze od zmian kątów  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  opisujących szybkie zjawiska drganiowe. Na podstawie przyjętych założeń oraz równania (4.1), prędkości kątowe członów przedstawiono następująco

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{\beta}_1 + \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_1 \\ \dot{q}_2 &= \dot{\beta}_2 + \dot{\alpha}_2 = \dot{\alpha}_2 \\ \dot{q}_3 &= \dot{\beta}_3 + \dot{\alpha}_3 = \dot{\alpha}_3 \\ \dot{q}_4 &= \dot{\alpha}_4 \\ \dot{q}_5 &= \dot{\alpha}_5 \end{aligned} \quad (4.47)$$

gdzie założono, że  $\beta_i = const., i = 1:3$ .

Uzyskane wielkości kinematyczne (jakobian geometryczny) i energetyczne (energia kinetyczna i potencjalna) stanowią podstawę do dalszego sformułowania modelu matematycznego opisującego drgania robota. Model ten pozwolił odwzorować wpływ pozycji ramienia robota i podatności w złączach na właściwości dynamiczne układu, co jest najistotniejszym celem dalszych analiz.

Równanie Eulera-Lagrange'a dla zaprezentowanego układu zostało wyprowadzone w następujący sposób. Lagrangian układu ma następującą formę

$$L = E - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^n m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j - V(\boldsymbol{\alpha}) \quad (4.48)$$

Jego pochodna względem prędkości jest następująca

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_k} = \sum_j m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_j \quad (4.49)$$

a pochodna z równania (4.49) względem czasu to

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_k} &= \sum_j m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \ddot{\alpha}_j + \sum_j \frac{d}{dt} m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_j \\ &= \sum_j m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \ddot{\alpha}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \end{aligned} \quad (4.50)$$

Pochodna Lagrangianu względem współrzędnej jest następująca

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j - \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} \quad (4.51)$$

Na podstawie równań (4.50) i (4.51), równania Eulera-Lagrange'a mogą zostać zapisane jako

$$\sum_j m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \ddot{\alpha}_j + \sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j - \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = 0 \quad (4.52)$$

gdzie  $k = 1 \dots n$ . Zmiana kolejności sumowania oraz zastosowanie symetrii wskazuje, że

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left( \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \\ = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial m_{ki}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j \end{aligned} \quad (4.53)$$

gdzie otrzymane wyrażenia

$$c_{ijk} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial m_{ki}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \quad (4.54)$$

są znane pod nazwą symboli Christoffela (pierwszego rodzaju) [16, 17, 20-22, 131]. Warto zauważyć, że dla ustalonego wskaźnika  $k$  zachodzi  $c_{ijk} = c_{jik}$ . Zastosowanie powyższego ustalenia redukuje wyznaczenie wszystkich symboli prawie o połowę. Następnie, definiując

$$\phi_k = \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} \quad (4.55)$$

równanie Eulera-Lagrange'a zapisano jako

$$\sum_j m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \ddot{\alpha}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_i \dot{\alpha}_j + \phi_k = 0, \quad k = 1 \dots n \quad (4.56)$$

gdzie dla przyjętej funkcji energii potencjalnej mamy

$$\phi_k = \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = k_k \alpha_k \quad (4.57)$$

Równanie (4.56) zapisano w postaci macierzowej

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0} \quad (4.58)$$

gdzie element  $kj$  macierzy  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})$  jest równy

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) \dot{\alpha}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{kj}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial m_{ki}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial m_{ij}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_k} \right) \dot{\alpha}_i \quad (4.59)$$

Na podstawie zamieszczonych wyprowadzeń, elementy macierzy w równaniu (4.58) zostały zapisane w następujący sposób

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} & m_{45} \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & m_{54} & m_{55} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_5 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Wyznaczenie poszczególnych elementów macierzy z zastosowaniem przedstawionych formuł umożliwiło zapisanie dynamicznych równań ruchu oscylacyjnego ramienia w postaci

$$m_{11}\ddot{\alpha}_1 + m_{12}\ddot{\alpha}_2 + m_{13}\ddot{\alpha}_3 + m_{14}\ddot{\alpha}_4 + m_{15}\ddot{\alpha}_5 + c_{11}\dot{\alpha}_1 + c_{12}\dot{\alpha}_2 + c_{13}\dot{\alpha}_3 + c_{14}\dot{\alpha}_4 + c_{15}\dot{\alpha}_5 + k_1\alpha_1 = 0 \quad (4.64)$$

$$m_{21}\ddot{\alpha}_1 + m_{22}\ddot{\alpha}_2 + m_{23}\ddot{\alpha}_3 + m_{24}\ddot{\alpha}_4 + m_{25}\ddot{\alpha}_5 + c_{21}\dot{\alpha}_1 + c_{22}\dot{\alpha}_2 + c_{23}\dot{\alpha}_3 + c_{24}\dot{\alpha}_4 + c_{25}\dot{\alpha}_5 + k_2\alpha_2 = 0 \quad (4.65)$$

$$m_{31}\ddot{\alpha}_1 + m_{32}\ddot{\alpha}_2 + m_{33}\ddot{\alpha}_3 + m_{34}\ddot{\alpha}_4 + m_{35}\ddot{\alpha}_5 + c_{31}\dot{\alpha}_1 + c_{32}\dot{\alpha}_2 + c_{33}\dot{\alpha}_3 + c_{34}\dot{\alpha}_4 + c_{35}\dot{\alpha}_5 + k_3\alpha_3 = 0 \quad (4.66)$$

$$m_{41}\ddot{\alpha}_1 + m_{42}\ddot{\alpha}_2 + m_{43}\ddot{\alpha}_3 + m_{44}\ddot{\alpha}_4 + m_{45}\ddot{\alpha}_5 + c_{41}\dot{\alpha}_1 + c_{42}\dot{\alpha}_2 + c_{43}\dot{\alpha}_3 + c_{44}\dot{\alpha}_4 + c_{45}\dot{\alpha}_5 + k_4\alpha_4 = 0 \quad (4.67)$$

$$m_{51}\ddot{\alpha}_1 + m_{52}\ddot{\alpha}_2 + m_{53}\ddot{\alpha}_3 + m_{54}\ddot{\alpha}_4 + m_{55}\ddot{\alpha}_5 + c_{51}\dot{\alpha}_1 + c_{52}\dot{\alpha}_2 + c_{53}\dot{\alpha}_3 + c_{54}\dot{\alpha}_4 + c_{55}\dot{\alpha}_5 + k_5\alpha_5 = 0 \quad (4.68)$$

Wartości elementów  $m_{kj}$  występujących w równaniach (4.64) - (4.68) opisują wzory (4.69-4.93).

$$\begin{aligned} m_{11} = & a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + 2m_2l_1l_{c2}c(\beta_2 + \alpha_2) \\ & + 2m_3l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) \\ & + 2m_3l_1l_{c3}c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ & + 2m_3l_2l_{c3}c(\beta_3 + \alpha_3) \\ & + 2m_4l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) \\ & + 2m_4l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + 2m_4l_1l_{c4}c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + 2m_4l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) + 2m_4l_2l_{c4}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2m_4l_3l_{c4}c(\alpha_4) \\ & + 2m_5l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) \\ & + 2m_5l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + 2m_5l_1l_4c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + 2m_5l_1l_{c5}c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) \\ & + 2m_5l_2l_4c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2m_5l_3l_4c(\alpha_4) \\ & + 2m_5l_3l_{c5}c(\alpha_4 + \alpha_5) \\ & + 2m_5l_2l_{c5}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5l_4l_{c5}c(\alpha_5) \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} m_{12} = & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + m_2l_1l_{c2}c(\beta_2 + \alpha_2) \\ & + m_3l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) + m_3l_1l_{c3}c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ & + 2m_3l_2l_{c3}c(\beta_3 + \alpha_3) \\ & + m_4l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) + m_4l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4l_1l_{c4}c(\beta_{23} \\ & + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + 2m_4l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) + 2m_4l_2l_{c4}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2m_4l_3l_{c4}c(\alpha_4) + m_5l_1l_2c(\beta_2 + \alpha_2) + m_5l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ & + m_5l_1l_4c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + m_5l_1l_{c5}c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) \\ & + 2m_5l_2l_4c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2m_5l_3l_4c(\alpha_4) \\ & + 2m_5l_3l_{c5}c(\alpha_4 + \alpha_5) \\ & + 2m_5l_2l_{c5}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5l_4l_{c5}c(\alpha_5) \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} m_{13} = & a_3 + a_4 + a_5 + m_3l_1l_{c3}c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ & + m_3l_2l_{c3}c(\beta_3 + \alpha_3) + m_4l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ & + m_4l_3^2 + m_4l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) + m_4l_1l_{c4}c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + m_4l_2l_{c4}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + 2m_4l_3l_{c4}c(\alpha_4) \\ & + m_5l_1l_3c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_5l_1l_4c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ & + m_5l_1l_{c5}c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5l_2l_3c(\beta_3 + \alpha_3) \\ & + m_5l_2l_4c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ & + 2m_5l_3l_4c(\alpha_4) + 2m_5l_3l_{c5}c(\alpha_4 + \alpha_5) \\ & + m_5l_2l_{c5}c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5l_4l_{c5}c(\alpha_5) \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned}
m_{14} = & a_4 + a_5 + m_4 l_1 l_{c4} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_1 l_4 c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
& + m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.72}$$

$$\begin{aligned}
m_{15} = & m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5
\end{aligned} \tag{4.73}$$

$$\begin{aligned}
m_{21} = & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + m_2 l_1 l_{c2} c(\beta_2 + \alpha_2) \\
& + m_3 l_1 l_2 c(\beta_2 + \alpha_2) + m_3 l_1 l_{c3} c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
& + 2m_3 l_2 l_{c3} c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_4 l_1 l_2 c(\beta_2 + \alpha_2) + m_4 l_1 l_3 c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_{c4} c(\beta_{23} \\
& + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) + 2m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_1 l_2 c(\beta_2 + \alpha_2) + m_5 l_1 l_3 c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
& + m_5 l_1 l_4 c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
& + m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + 2m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

$$\begin{aligned}
m_{22} = & a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + 2m_3 l_2 l_{c3} c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + 2m_4 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) + 2m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + 2m_5 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + 2m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

$$\begin{aligned}
m_{23} = & a_3 + a_4 + a_5 + m_3 l_2 l_{c3} c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_4 l_2 l_3 \cos(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
m_{24} = & a_4 + a_5 + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) \\
& + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
m_{25} = & m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5
\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
m_{31} = & m_3 l_1 l_{c3} c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + a_3 + a_4 + a_5 \\
& + m_3 l_2 l_{c3} c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_4 l_1 l_3 c(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_4 l_1 l_{c4} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_1 l_3 c(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
& + m_5 l_1 l_4 c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
& + m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
m_{32} = & m_3 l_2 l_{c3} c(\beta_3 + \alpha_3) + a_3 + a_4 + a_5 \\
& + m_4 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_2 l_3 c(\beta_3 + \alpha_3) \\
& + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
m_{33} = & a_3 + a_4 + a_5 + 2m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) \\
& + 2m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + 2m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
m_{34} = & a_4 + a_5 + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

$$m_{35} = m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5 \tag{4.83}$$

$$\begin{aligned}
m_{41} = & a_4 + a_5 + m_4 l_1 l_{c4} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_1 l_4 c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
& + m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

$$\begin{aligned}
m_{42} = & a_4 + a_5 + m_4 l_2 l_{c4} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) \\
& + m_5 l_2 l_4 c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
& + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.85}$$

$$\begin{aligned}
m_{43} = & a_4 + a_5 + m_4 l_3 l_{c4} c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_4 c(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5)
\end{aligned} \tag{4.86}$$

$$m_{44} = a_4 + a_5 + 2m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) \tag{4.87}$$

$$m_{45} = a_5 + m_5 l_{c5} l_4 c(\alpha_5) \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
m_{51} = & m_5 l_1 l_{c5} c(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) \\
& + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5
\end{aligned} \tag{4.89}$$

$$m_{52} = m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} c(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5 \quad (4.90)$$

$$m_{53} = m_5 l_3 l_{c5} c(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_4 l_{c5} c(\alpha_5) + a_5 \quad (4.91)$$

$$m_{54} = a_5 + m_5 l_{c5} l_4 c(\alpha_5) \quad (4.92)$$

$$m_{55} = a_5 \quad (4.93)$$

gdzie

$$\begin{aligned} a_1 &= I_A^{(1)} + m_2 l_1^2 + m_3 l_1^2 + m_4 l_1^2 \\ a_2 &= m_2 l_{c2}^2 + I_{S2}^{(2)} + m_3 l_2^2 + m_4 l_2^2 + m_5 l_2^2 \\ a_3 &= m_3 l_{c3}^2 + I_{S3}^{(3)} + m_4 l_3^2 + m_5 l_3^2 \\ a_4 &= m_4 l_{c4}^2 + I_{S4}^{(4)} + m_5 l_4^2 \\ a_5 &= m_5 l_{c5}^2 + I_{S5}^{(5)} \\ a_6 &= m_5 l_1^2 \end{aligned} \quad (4.94)$$

Wartości tych parametrów zamieszczono w tabeli 4.2. Elementy macierzy C wyznaczone według równania (4.59) rozpisano następująco

$$\left\{ \begin{aligned} c_{11} &= c_{111} \dot{\alpha}_1 + c_{121} \dot{\alpha}_2 + c_{131} \dot{\alpha}_3 + c_{141} \dot{\alpha}_4 + c_{151} \dot{\alpha}_5 \\ c_{12} &= c_{211} \dot{\alpha}_1 + c_{221} \dot{\alpha}_2 + c_{231} \dot{\alpha}_3 + c_{241} \dot{\alpha}_4 + c_{251} \dot{\alpha}_5 \\ c_{13} &= c_{311} \dot{\alpha}_1 + c_{321} \dot{\alpha}_2 + c_{331} \dot{\alpha}_3 + c_{341} \dot{\alpha}_4 + c_{351} \dot{\alpha}_5 \\ c_{14} &= c_{411} \dot{\alpha}_1 + c_{421} \dot{\alpha}_2 + c_{431} \dot{\alpha}_3 + c_{441} \dot{\alpha}_4 + c_{451} \dot{\alpha}_5 \\ c_{15} &= c_{511} \dot{\alpha}_1 + c_{521} \dot{\alpha}_2 + c_{531} \dot{\alpha}_3 + c_{541} \dot{\alpha}_4 + c_{551} \dot{\alpha}_5 \\ c_{21} &= c_{112} \dot{\alpha}_1 + c_{122} \dot{\alpha}_2 + c_{132} \dot{\alpha}_3 + c_{142} \dot{\alpha}_4 + c_{152} \dot{\alpha}_5 \\ c_{22} &= c_{212} \dot{\alpha}_1 + c_{222} \dot{\alpha}_2 + c_{232} \dot{\alpha}_3 + c_{242} \dot{\alpha}_4 + c_{252} \dot{\alpha}_5 \\ c_{23} &= c_{312} \dot{\alpha}_1 + c_{322} \dot{\alpha}_2 + c_{332} \dot{\alpha}_3 + c_{342} \dot{\alpha}_4 + c_{352} \dot{\alpha}_5 \\ c_{24} &= c_{412} \dot{\alpha}_1 + c_{422} \dot{\alpha}_2 + c_{432} \dot{\alpha}_3 + c_{442} \dot{\alpha}_4 + c_{452} \dot{\alpha}_5 \\ c_{25} &= c_{512} \dot{\alpha}_1 + c_{522} \dot{\alpha}_2 + c_{532} \dot{\alpha}_3 + c_{542} \dot{\alpha}_4 + c_{552} \dot{\alpha}_5 \\ c_{31} &= c_{113} \dot{\alpha}_1 + c_{123} \dot{\alpha}_2 + c_{133} \dot{\alpha}_3 + c_{143} \dot{\alpha}_4 + c_{153} \dot{\alpha}_5 \\ c_{32} &= c_{213} \dot{\alpha}_1 + c_{223} \dot{\alpha}_2 + c_{233} \dot{\alpha}_3 + c_{243} \dot{\alpha}_4 + c_{253} \dot{\alpha}_5 \\ c_{33} &= c_{313} \dot{\alpha}_1 + c_{323} \dot{\alpha}_2 + c_{333} \dot{\alpha}_3 + c_{343} \dot{\alpha}_4 + c_{353} \dot{\alpha}_5 \\ c_{34} &= c_{413} \dot{\alpha}_1 + c_{423} \dot{\alpha}_2 + c_{433} \dot{\alpha}_3 + c_{443} \dot{\alpha}_4 + c_{453} \dot{\alpha}_5 \\ c_{35} &= c_{513} \dot{\alpha}_1 + c_{523} \dot{\alpha}_2 + c_{533} \dot{\alpha}_3 + c_{543} \dot{\alpha}_4 + c_{553} \dot{\alpha}_5 \\ c_{41} &= c_{114} \dot{\alpha}_1 + c_{124} \dot{\alpha}_2 + c_{134} \dot{\alpha}_3 + c_{144} \dot{\alpha}_4 + c_{154} \dot{\alpha}_5 \\ c_{42} &= c_{214} \dot{\alpha}_1 + c_{224} \dot{\alpha}_2 + c_{234} \dot{\alpha}_3 + c_{244} \dot{\alpha}_4 + c_{254} \dot{\alpha}_5 \\ c_{43} &= c_{314} \dot{\alpha}_1 + c_{324} \dot{\alpha}_2 + c_{334} \dot{\alpha}_3 + c_{344} \dot{\alpha}_4 + c_{354} \dot{\alpha}_5 \\ c_{44} &= c_{414} \dot{\alpha}_1 + c_{424} \dot{\alpha}_2 + c_{434} \dot{\alpha}_3 + c_{444} \dot{\alpha}_4 + c_{454} \dot{\alpha}_5 \\ c_{45} &= c_{514} \dot{\alpha}_1 + c_{524} \dot{\alpha}_2 + c_{534} \dot{\alpha}_3 + c_{544} \dot{\alpha}_4 + c_{554} \dot{\alpha}_5 \\ c_{51} &= c_{115} \dot{\alpha}_1 + c_{125} \dot{\alpha}_2 + c_{135} \dot{\alpha}_3 + c_{145} \dot{\alpha}_4 + c_{155} \dot{\alpha}_5 \\ c_{52} &= c_{215} \dot{\alpha}_1 + c_{225} \dot{\alpha}_2 + c_{235} \dot{\alpha}_3 + c_{245} \dot{\alpha}_4 + c_{255} \dot{\alpha}_5 \\ c_{53} &= c_{315} \dot{\alpha}_1 + c_{325} \dot{\alpha}_2 + c_{335} \dot{\alpha}_3 + c_{345} \dot{\alpha}_4 + c_{355} \dot{\alpha}_5 \\ c_{54} &= c_{415} \dot{\alpha}_1 + c_{425} \dot{\alpha}_2 + c_{435} \dot{\alpha}_3 + c_{445} \dot{\alpha}_4 + c_{455} \dot{\alpha}_5 \\ c_{55} &= c_{515} \dot{\alpha}_1 + c_{525} \dot{\alpha}_2 + c_{535} \dot{\alpha}_3 + c_{545} \dot{\alpha}_4 + c_{555} \dot{\alpha}_5 \end{aligned} \right. \quad (4.95)$$

Elementy  $c_{ijk}$  charakteryzują się rozbudowaną strukturą, dlatego szczegółowe wyniki przedstawiono w dodatku 1.

#### 4.4. Parametry modelu

W celu określenia parametrów modelu robota zastosowano metody eksperymentalne i numeryczne. Ze względu na niewystarczającą dokładność modeli CAD dostarczonych przez producenta opracowano własny, możliwie najdokładniejszy model CAD na podstawie rysunków technicznych zawartych w dokumentacji oraz pomiarów wykonanych na rzeczywistym robocie. Model ten posłużył do wyznaczenia mas poszczególnych członów robota oraz ich masowych momentów bezwładności. W tym celu wykorzystano środowisko SolidWorks, w którym poszczególne elementy robota zdefiniowano jako bryły wykonane z jednorodnego materiału.

Pomiaru mas ogniw  $m_4$  i  $m_5$  dokonano przy użyciu wagi laboratoryjnej. Długości ogniw określono na podstawie specyfikacji technicznej robota [137].

Współczynniki sprężystości  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  określono eksperymentalnie. Ramię robota obciążano znanymi, stopniowo wzrastającymi obciążeniami, a przemieszczenia liniowe wybranych punktów każdego członu robota zmierzono za pomocą absolutnego trackera laserowego Leica AT 960 (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Pomiar przemieszczeń ogniów robota pod obciążeniami z zastosowaniem absolutnego trackera laserowego Leica AT 960

Następnie wyznaczono przemieszczenia kątowe członów robota w funkcji momentów obciążających złącza. Charakterystyki aproksymowano funkcjami liniowymi, co pozwoliło na przyjęcie stałych wartości współczynników sztywności podanych w tabeli 4.2. Wartości współczynników sprężystości  $k_4$  i  $k_5$  zostały określone na podstawie analiz modeli ogniów w środowisku CAD. Parametry fizyczne robota ABB IRB1600/1.45 zestawiono w tabeli 4.2.

Tabela 4.2. Wartości współczynników modelu robota IRB1600/1.45

Współczynnik	Jednostka	Wartość
$I_A^{(1)}$	kgm <sup>2</sup>	1.15
$I_{S2}^{(2)}$	kgm <sup>2</sup>	1.75
$I_{S3}^{(3)}$	kgm <sup>2</sup>	0.045
$I_{S4}^{(4)}$	kgm <sup>2</sup>	0.015
$I_{S5}^{(5)}$	kgm <sup>2</sup>	0.05
$m_2$	kg	50.58
$m_3$	kg	1.29
$m_4$	kg	0.76
$m_5$	kg	2.13
$l_1$	m	0.7
$l_{c2}$	m	0.13
$l_2$	m	0.6
$l_{c3}$	m	0.0315
$l_3$	m	0.0945
$l_{c4}$	m	0.01385
$l_4$	m	0.0277
$l_{c5}$	m	0.08
$k_1$	Nm/rad	510000
$k_2$	Nm/rad	400000
$k_3$	Nm/rad	170000
$k_4$	Nm/rad	22000
$k_5$	Nm/rad	14000

## 5. Rozwiązanie analityczne

### 5.1. Częstotliwości własne

W celu analitycznego wyznaczenia częstotliwości rezonansowych robota, wprowadzono uproszczenia do równań ruchu (4.58) otrzymując równania liniowe. Uzyskano to pomijając wyrażenie  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \dot{\boldsymbol{\alpha}})\dot{\boldsymbol{\alpha}}$  zawierające kwadratowe formy prędkości. Ponadto pominięto wpływ wektora  $\boldsymbol{\alpha}$  na macierz  $\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ , uzasadniając to stosunkowo niewielkim wpływem kątów  $\alpha_i$  na zjawiska związane z bezwładnością ogniów w porównaniu z wpływem kątów na zjawiska związane z elastycznością wyrażoną składnikiem  $\mathbf{K}\boldsymbol{\alpha}$ . W ten sposób otrzymano równanie ruchu w postaci liniowej

$$\mathbf{M}_0\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (5.1)$$

gdzie  $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\beta})$ . Macierz  $\mathbf{M}_0$  jest stała w danej konfiguracji określonej przez wektor współrzędnych  $\boldsymbol{\beta}$ . Rozwiązanie równania (5.1) zgodnie z teorią układów liniowych ma następującą postać

$$\alpha_i = A_i \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.2)$$

Podstawiając to rozwiązanie i jego drugą pochodną do równania (5.1) otrzymano następujące równanie algebraiczne:

$$(-\omega_0^2 \mathbf{M}_0 + \mathbf{K})\mathbf{A} = 0 \quad (5.3)$$

gdzie  $\mathbf{A} = [A_1 \dots A_n]^T$  jest wektorem amplitud przemieszczeń kątowych członów robota. Równanie (5.3) jest spełnione, jeżeli

$$\det(-\omega_0^2 \mathbf{M}_0 + \mathbf{K}) = 0 \quad (5.4)$$

Jest to równanie częstości drgań własnych układu. W analizowanym przypadku układu o pięciu stopniach swobody, ma ono formę wielomianu dziesiątego stopnia, który uproszczono do wielomianu piątego stopnia poprzez podstawienie

$$z = \omega_0^2 \quad (5.5)$$

otrzymano

$$\det(-z\mathbf{M}_0 + \mathbf{K}) = 0 \quad (5.6)$$

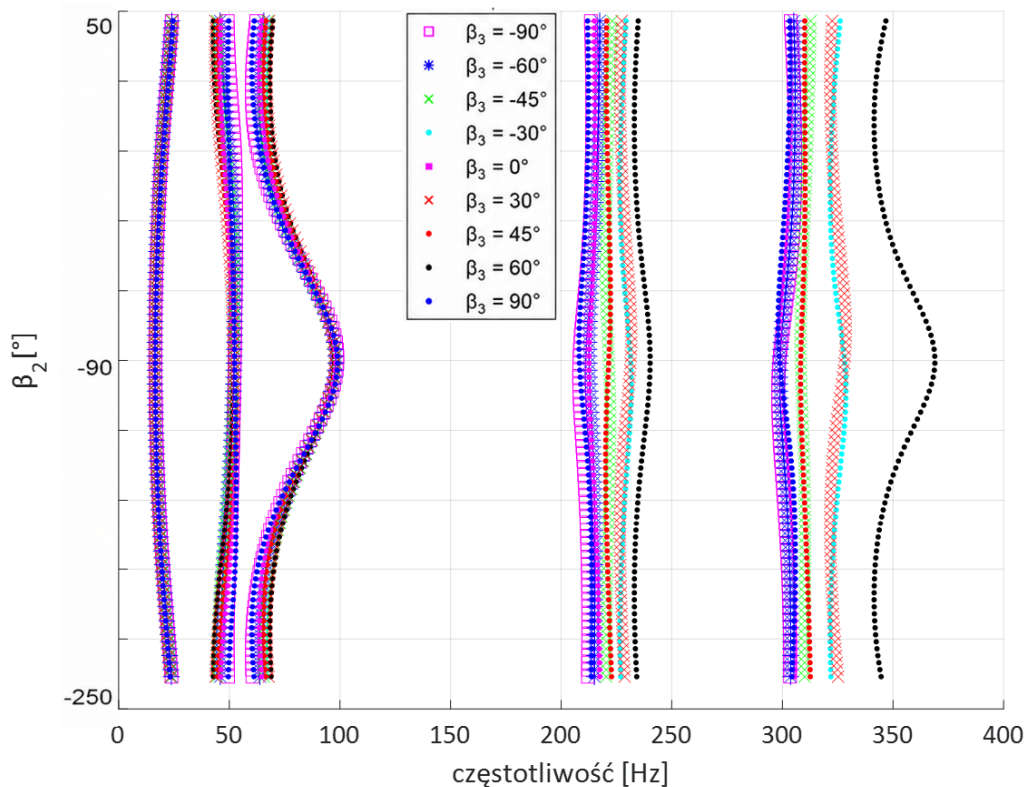
Ze względu na złożoność obliczeń zastosowano program numeryczny do wyznaczenia rozwiązań  $z_i$  równania (5.6). Następnie, przechodząc na powrót do zmiennej  $\omega_0$ , na mocy równania (5.5), przyjmując jako wartości częstości własnych jedynie dodatnie rozwiązania, uzyskano

$$\omega_{0i} = \sqrt{z_i} \quad (5.7)$$

W celu obliczenia wartości częstotliwości własnych wyrażonych w Hz, każdą uzyskaną wartość  $\omega_{0i}$  przeliczono według wzoru

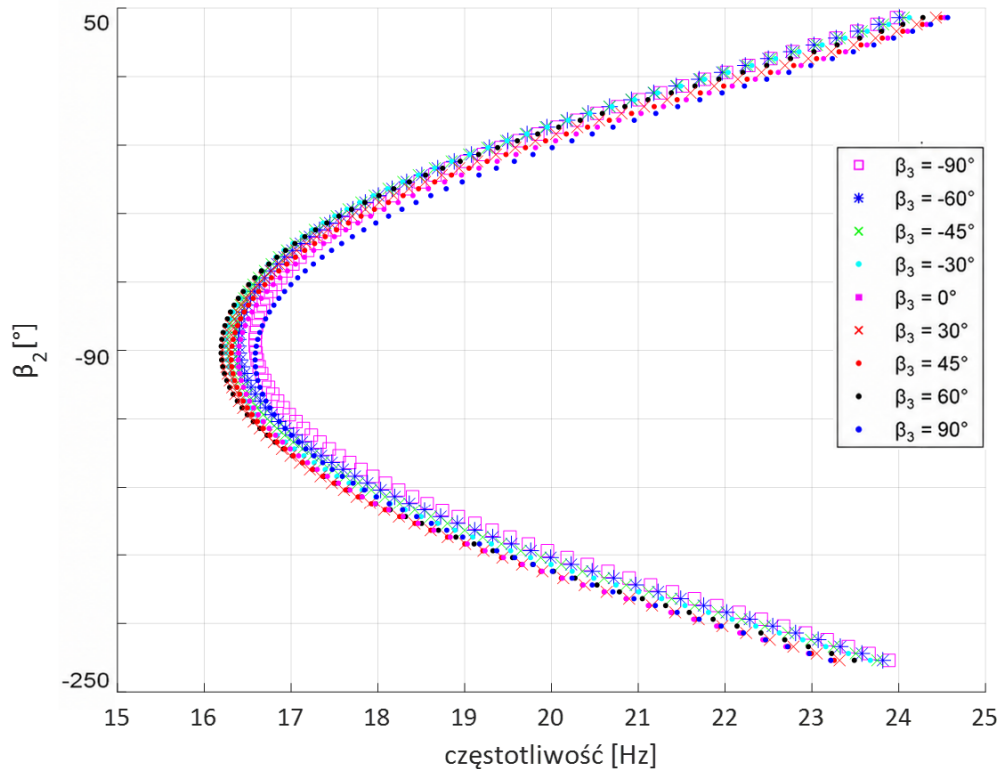
$$f_i = \frac{\omega_{0i}}{2\pi}, i = 1, \dots, 5 \quad (5.8)$$

Uzyskane wyniki obliczeń częstotliwości własnych przedstawiono w postaci wykresu. Ponieważ postać macierzy  $\mathbf{M}_0$  jest taka, że nie zależy ona od kąta  $\beta_1$ , a jedynie od kątów  $\beta_2$  i  $\beta_3$ , to wartości częstotliwości własnych zależą również od kątów  $\beta_2$  i  $\beta_3$ . Dlatego na rys. 5.1 zaprezentowano zależność wartości częstotliwości własnych w funkcji kąta  $\beta_2$  dla różnych wartości kąta  $\beta_3$ . Z uwagi na szeroki zakres przedstawionych danych, w dalszej części zamieszczono szczegółowe przybliżenia dla poszczególnych częstotliwości własnych.



Rys. 5.1. Wartości częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

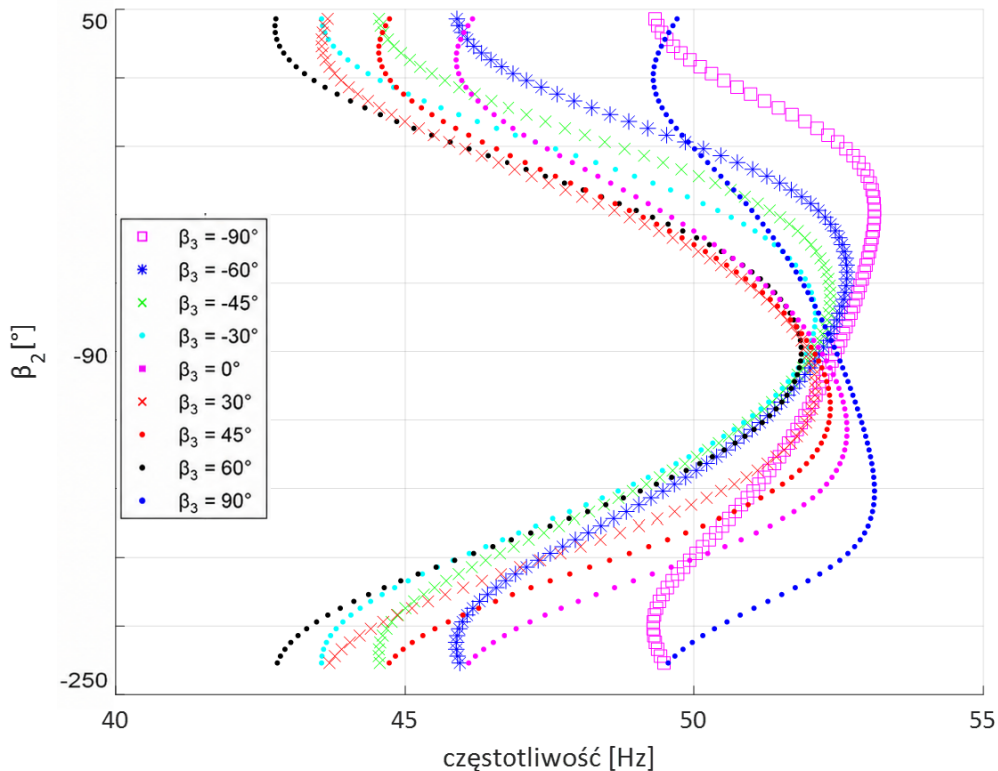
Przybliżenie dla pierwszej częstotliwości własnej dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w całym zakresie zmian kąta  $\beta_2$  przedstawiono na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

Analiza wykresu (rys. 5.2) wskazuje, że dolna granica wartości częstotliwości własnych występuje przy około 17 Hz dla wartości kąta  $\beta_2 \approx -90^\circ$ . Wraz ze zmianą kąta  $\beta_2$  w obu kierunkach względem tej wartości obserwuje się wzrost wartości częstotliwości własnych, które w skrajnych zakresach osiągają wartość około 24 Hz. Różnice pomiędzy wartościami częstotliwości własnych wynikają ze zmiany kąta  $\beta_3$  są niewielkie i mieszczą się w granicach około 1–2 Hz.

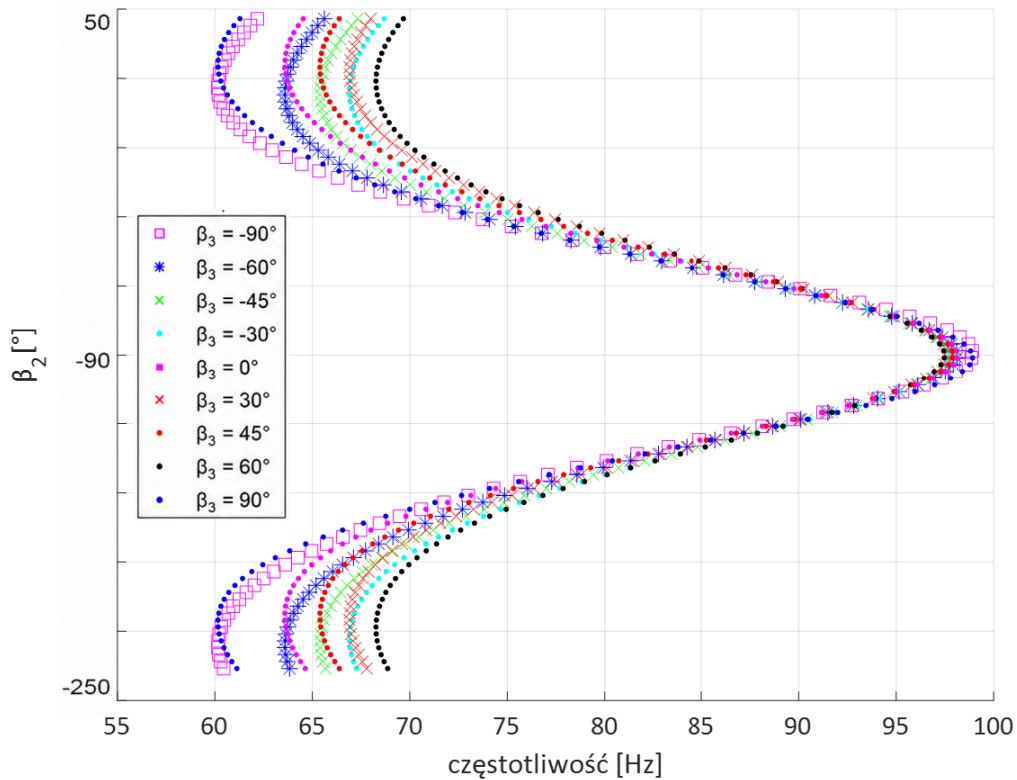
Rys. 5.3 przedstawia przebieg wartości drugiej częstotliwości własnej w zależności od wartości kąta  $\beta_3$  w pełnym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ .



Rys. 5.3. Wartości drugiej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

Na rys. 5.3 można zauważyć wyraźny wpływ kąta  $\beta_2$  oraz  $\beta_3$  na kształty charakterystyk. Analizując wpływ kąta  $\beta_2$  można stwierdzić, że różnica pomiędzy minimalną i maksymalną wartością częstotliwości dla poszczególnych charakterystyk wynosi od około 3 Hz do nawet 10 Hz. Dolna granica analizowanych przebiegów mieści się w zakresie od 42-48 Hz, natomiast górna granica charakterystyk znajduje się w przedziale 51-53Hz, w zależności od kąta  $\beta_3$ . Wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej kąta  $\beta_3$  charakterystyki ulegają poszerzeniu oraz odkształceniu. Dla skrajnych wartości, tj.  $\beta_3 = \pm 90^\circ$ , krzywe przyjmują postać o najwęższym paśmie zmian częstotliwości około 3 Hz oraz najbardziej odkształconym profilu.

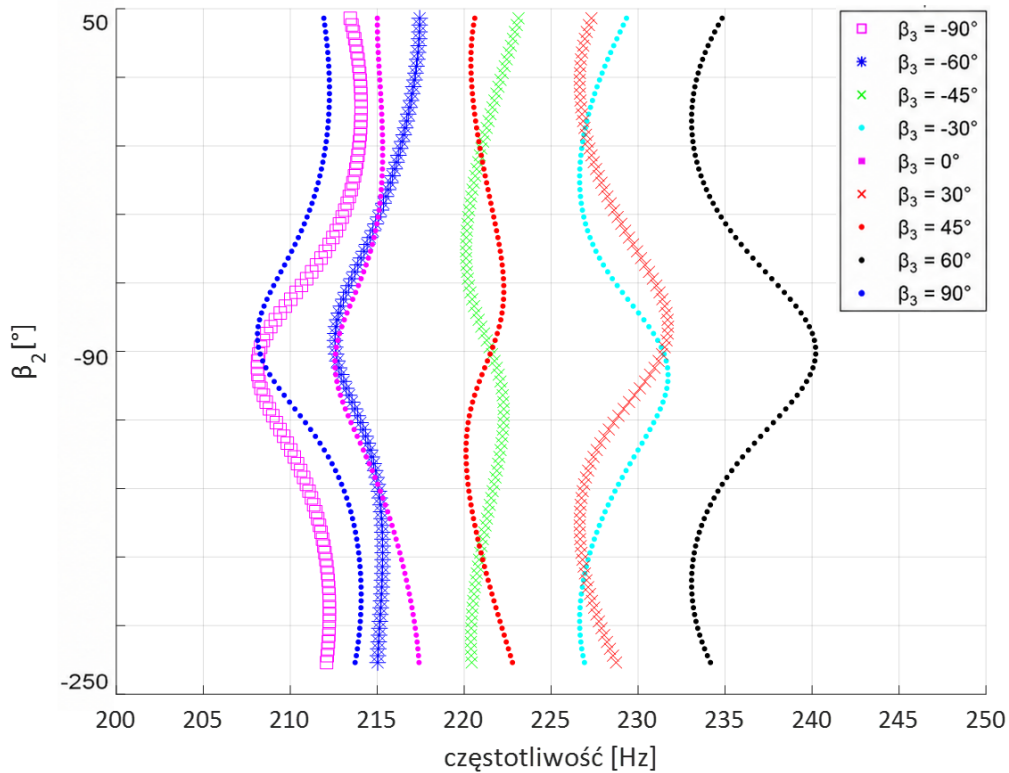
Na rys. 5.4 przedstawia przebieg wartości trzeciej częstotliwości własnej w zależności od wartości kąta  $\beta_3$  w pełnym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ .



Rys. 5.4. Wartości trzeciej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

Na rys. 5.4 można zauważyć, że dolna granica wartości analizowanych przebiegów mieści się w zakresie od 60-68 Hz, natomiast górna granica wartości charakterystyk mieści się w przedziale 94-98 Hz. W zaprezentowanym zakresie zmian kąta  $\beta_2$  można stwierdzić, że różnica pomiędzy minimalną i maksymalną wartością częstotliwości dla poszczególnych charakterystyk wynosi od około 27 Hz do nawet 37 Hz. Krzywe zachowują zbliżony kształt dla wszystkich analizowanych wartości kąta  $\beta_3$ .

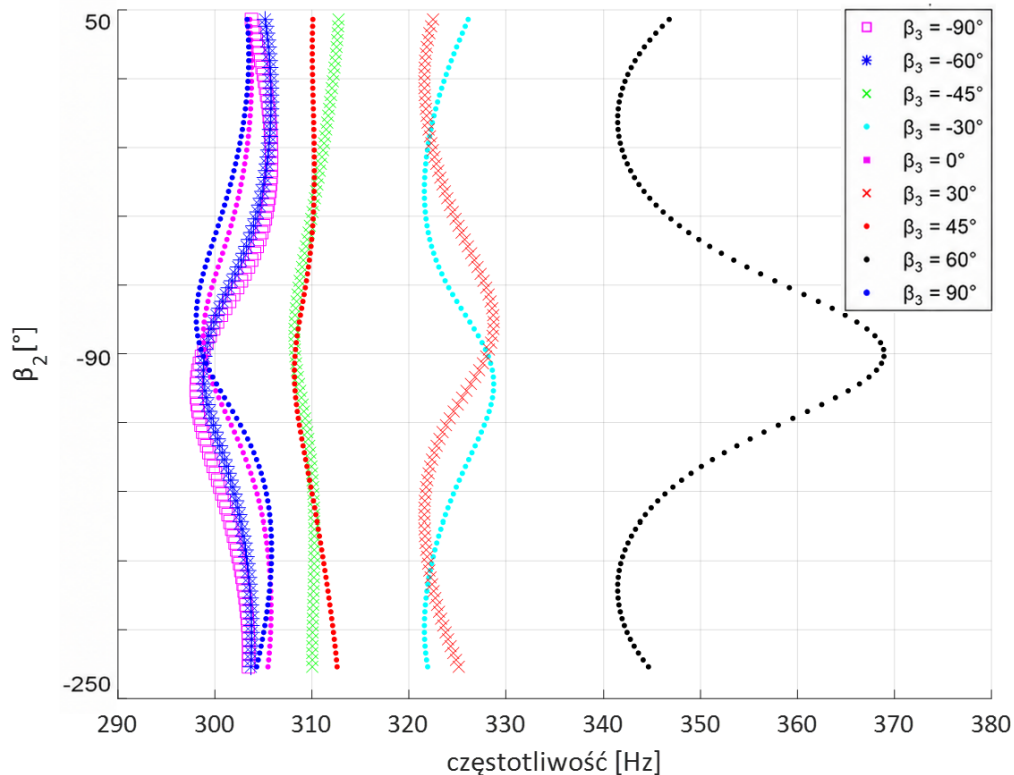
Rys. 5.5 przedstawia przebieg wartości czwartej częstotliwości własnej w zależności od wartości kąta  $\beta_3$  w pełnym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ .



Rys. 5.5. Wartości czwartej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

Na rys. 5.5 widać, że zmiana kąta  $\beta_3$  powoduje przesunięcie charakterystyki częstotliwościowej. W przypadku wartości ujemnych kąta  $\beta_3$  wartości częstotliwości drgań mieszczą się w zakresie od ok. 210-225 Hz, natomiast dla dodatnich wartości kąta  $\beta_3$  krzywe przesuwają się w kierunku wyższych wartości, do ok. 240Hz. W porównaniu do poprzednich charakterystyk należy zauważyć, że są one mało wrażliwe na zmiany kąta  $\beta_2$ , natomiast są bardzo wrażliwe na zmiany kąta  $\beta_3$ .

Rys. 5.6 przedstawia przebieg wartości piątej częstotliwości własnej w zależności od wartości kąta  $\beta_3$  w pełnym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ .



Rys. 5.6. Wartości piątej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta  $\beta_3$  w funkcji kąta  $\beta_2$

W zaprezentowanym zakresie zmian kąta  $\beta_2$  można stwierdzić, że różnica pomiędzy minimalną i maksymalną wartością częstotliwości wynosi od około 3 Hz do nawet 27 Hz. Dla wartości ujemnych kąta  $\beta_3$  częstotliwości mieszczą się w zakresie około 300-330 Hz, natomiast dla wartości dodatnich kąta  $\beta_3$  następuje przesunięcie charakterystyk ku wyższym wartościom częstotliwości sięgającym około 370 Hz i rośnie jednocześnie wrażliwość charakterystyk na zmiany kąta  $\beta_2$ .

Przeprowadzona analiza charakterystyk częstotliwości drgań własnych wskazuje, że układ w niższych pasmach częstotliwości (pierwsza–trzecia częstotliwość) charakteryzuje się wysoką wrażliwością na zmianę konfiguracji kątowej związanej z kątem  $\beta_2$ . Jednocześnie zmiana kąta  $\beta_3$  nie ma tak istotnego wpływu na wartości trzech pierwszych częstotliwości. Zakres różnic jest niewielki i mieści się w granicach kilku Hz. W przypadku czwartej i piątej częstotliwości własnej sytuacja jest odwrotna. Wartości tych częstotliwości własnych mocniej zależą od wartości kąta  $\beta_3$ , natomiast ich wrażliwość na zmiany kąta  $\beta_2$  jest mniejsza, jakkolwiek zmienna w funkcji kąta  $\beta_3$ .

## 5.2. Postaci drgań własnych

Analiza postaci drgań własnych stanowi podstawowe narzędzie w badaniu dynamicznych właściwości układów mechanicznych, w tym również robotów przemysłowych i robotów wieloczłonowych [126, 132, 133].

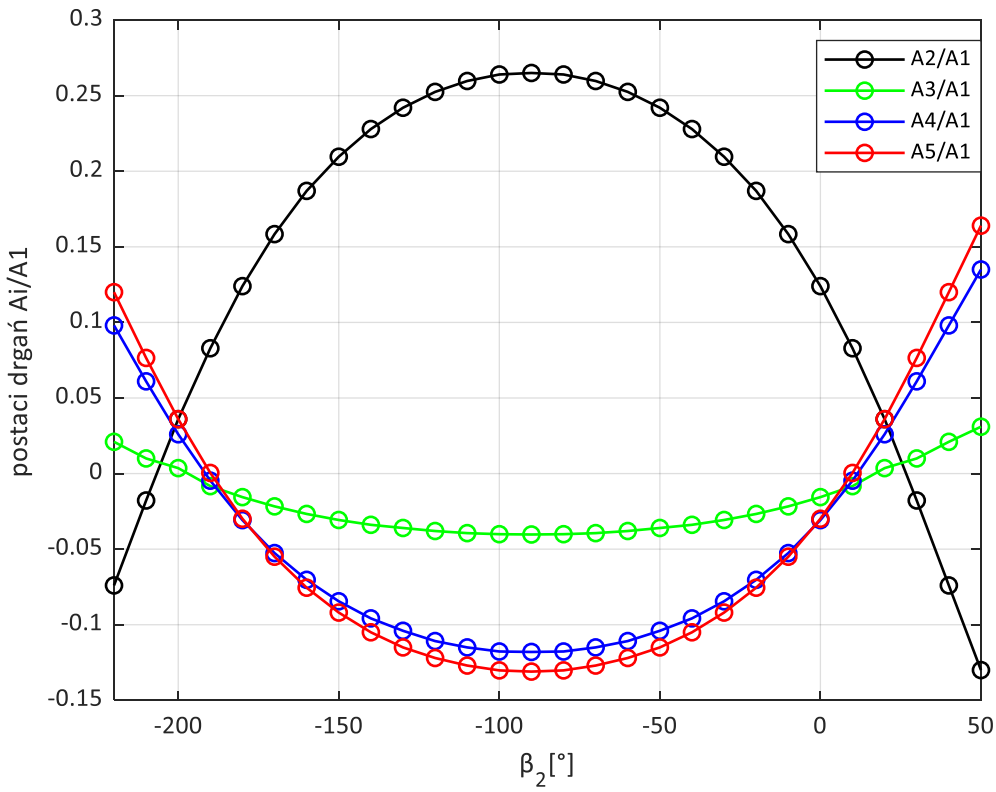
Równanie (5.3) zapisano w następującej postaci

$$\begin{cases} -m_{11}A_1\omega_0^2 - m_{12}A_2\omega_0^2 - m_{13}A_3\omega_0^2 - m_{14}A_4\omega_0^2 - m_{15}A_5\omega_0^2 + k_1A_1 = 0 \\ -m_{21}A_2\omega_0^2 - m_{22}A_2\omega_0^2 - m_{23}A_3\omega_0^2 - m_{24}A_4\omega_0^2 - m_{25}A_5\omega_0^2 + k_2A_2 = 0 \\ -m_{31}A_1\omega_0^2 - m_{32}A_2\omega_0^2 - m_{33}A_3\omega_0^2 - m_{34}A_4\omega_0^2 - m_{35}A_5\omega_0^2 + k_3A_3 = 0 \\ -m_{41}A_1\omega_0^2 - m_{42}A_2\omega_0^2 - m_{43}A_3\omega_0^2 - m_{44}A_4\omega_0^2 - m_{45}A_5\omega_0^2 + k_4A_4 = 0 \\ -m_{51}A_1\omega_0^2 - m_{52}A_2\omega_0^2 - m_{53}A_3\omega_0^2 - m_{54}A_4\omega_0^2 - m_{55}A_5\omega_0^2 + k_5A_5 = 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

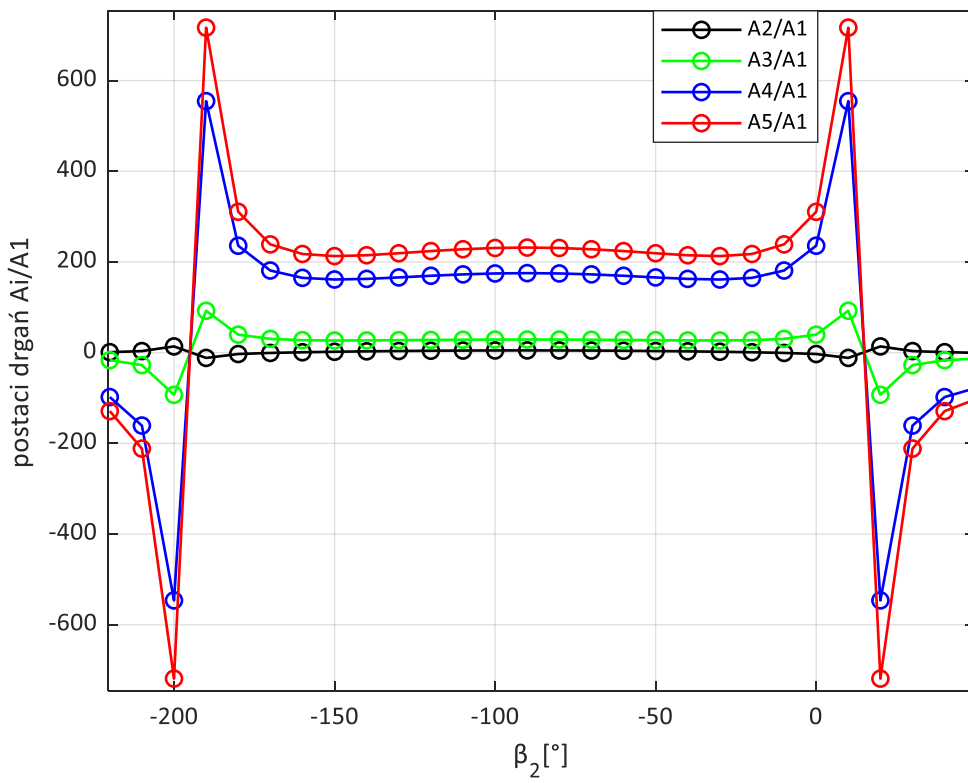
gdzie elementy  $m_{ij}$  w tym podrozdziale są rozumiane jako elementy macierzy  $\mathbf{M}_0$ . Układu równań (5.9) nie można jednoznacznie rozwiązać ze względu na współczynniki  $A_i$ . Rozwiązanie jest możliwe jedynie przy założeniu istnienia określonych relacji pomiędzy współczynnikami  $A_i$ . Można zatem ten układ równań przekształcić, dzieląc każde z równań np. przez współczynnik  $A_1$ , uzyskując układ pięciu równań z czterema niewiadomymi:  $\frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_1}, \frac{A_4}{A_1}, \frac{A_5}{A_1}$ , czyli

$$\begin{cases} (-m_{11}\omega_0^2 + k_1) - m_{12}\omega_0^2 \frac{A_2}{A_1} - m_{13}\omega_0^2 \frac{A_3}{A_1} - m_{14}\omega_0^2 \frac{A_4}{A_1} - m_{15}\omega_0^2 \frac{A_5}{A_1} = 0 \\ -m_{21}\omega_0^2 + (-m_{22}\omega_0^2 + k_2) \frac{A_2}{A_1} - m_{23}\omega_0^2 \frac{A_3}{A_1} - m_{24}\omega_0^2 \frac{A_4}{A_1} - m_{25}\omega_0^2 \frac{A_5}{A_1} = 0 \\ -m_{31}\omega_0^2 - m_{32}\omega_0^2 \frac{A_2}{A_1} + (-m_{33}\omega_0^2 + k_3) \frac{A_3}{A_1} - m_{34}\omega_0^2 \frac{A_4}{A_1} - m_{35}\omega_0^2 \frac{A_5}{A_1} = 0 \\ -m_{41}\omega_0^2 - m_{42}\omega_0^2 \frac{A_2}{A_1} - m_{43}\omega_0^2 \frac{A_3}{A_1} + (-m_{44}\omega_0^2 + k_4) \frac{A_4}{A_1} - m_{45}\omega_0^2 \frac{A_5}{A_1} = 0 \\ -m_{51}\omega_0^2 - m_{52}\omega_0^2 \frac{A_2}{A_1} - m_{53}\omega_0^2 \frac{A_3}{A_1} - m_{54}\omega_0^2 \frac{A_4}{A_1} + (-m_{55}\omega_0^2 + k_5) \frac{A_5}{A_1} = 0 \end{cases} \quad (5.10)$$

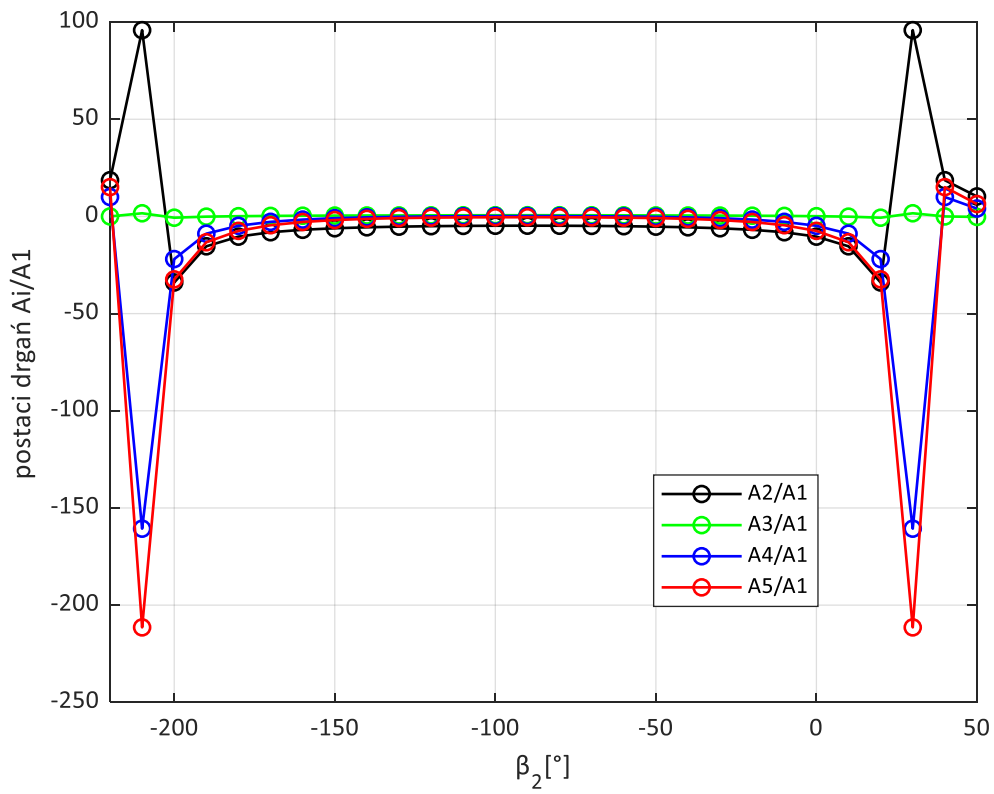
Układ równań (5.10) rozwiązano dla każdej z pięciu wartości częstości własnych przy uwzględnieniu zależności elementów  $m_{ij}$  od wartości wektora  $\beta$ . Rozwiązania przedstawione graficznie na rysunkach od rys. 5.7 do rys. 5.11 dotyczą przypadku dla  $\beta_2 \in (-220 \div 50)^\circ$ ,  $\beta_3 = 0^\circ$ . Szczegółowe zestawienie danych wykorzystanych do sporządzenia wykresów przedstawiono w dodatku 4.



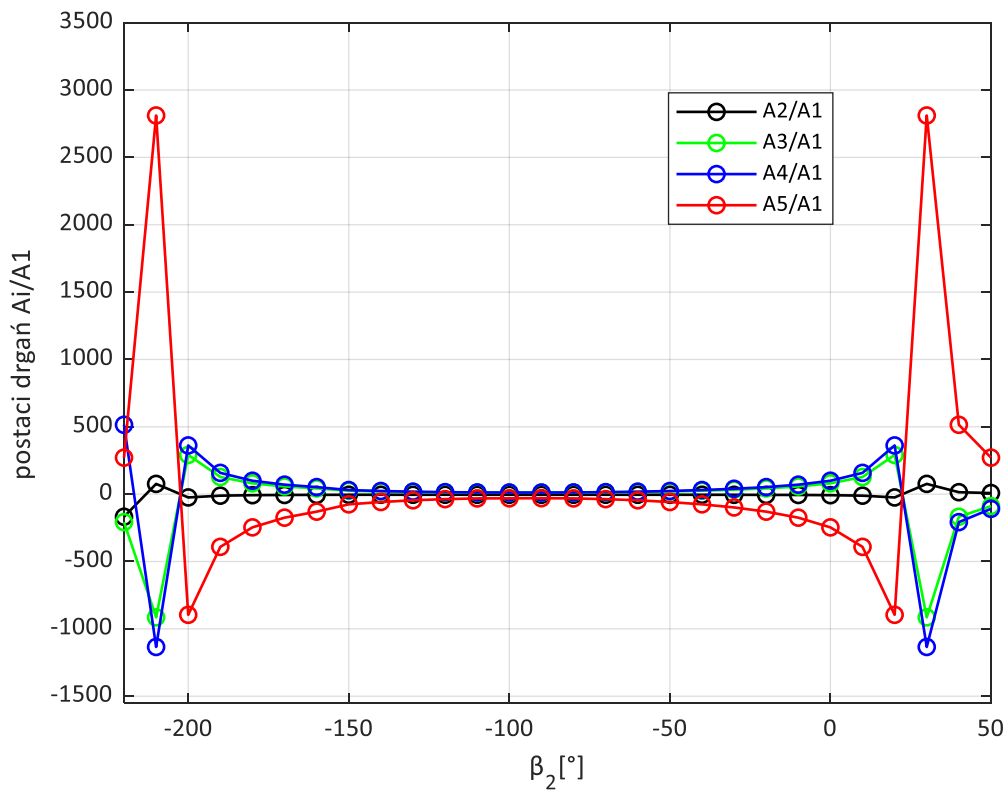
Rys. 5.7. Postaci drgań dla 1 częstotliwości



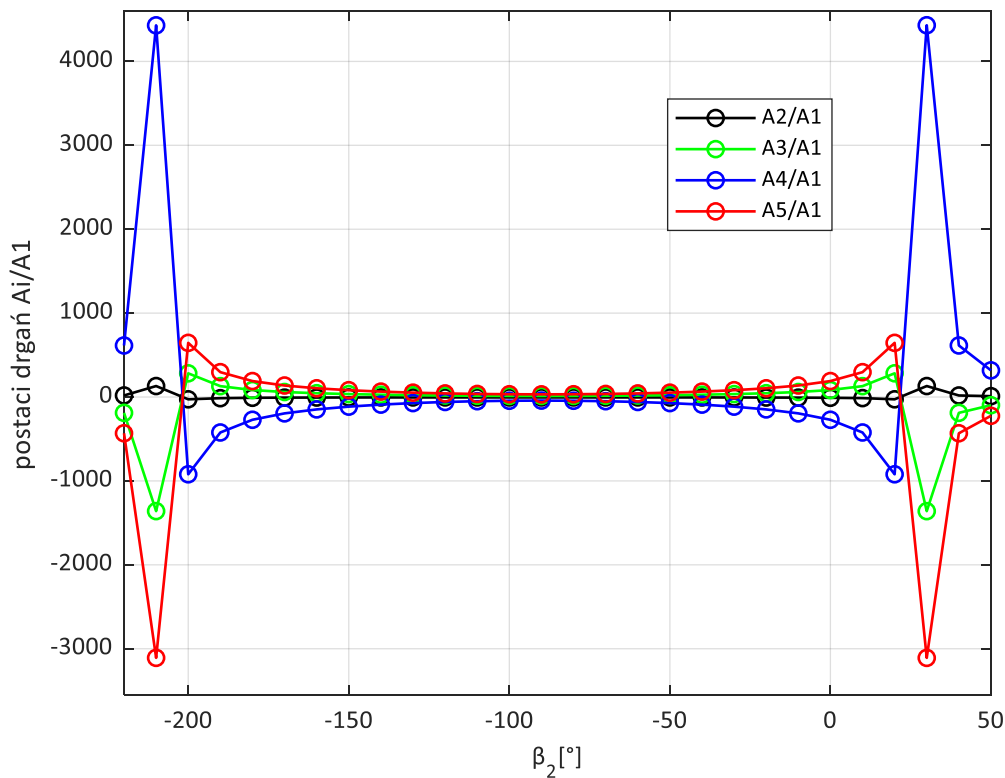
Rys. 5.8. Postaci drgań dla 2 częstotliwości



Rys. 5.9. Postaci drgań dla 3 częstotliwości



Rys. 5.10. Postaci drgań dla 4 częstotliwości



Rys. 5.11. Postaci drgań dla 5 częstotliwości

Na rysunkach (rys. 5.7 do rys. 5.11) przedstawiono postaci drgań dla każdej z pięciu częstotliwości. Na podstawie wykresów prezentujących przebiegi współczynników  $\frac{A_i}{A_1}$  stwierdzono, że wszystkie analizowane charakterystyki postaci drgań wykazują symetrię względem wartości kąta  $\beta_2 = -90^\circ$ .

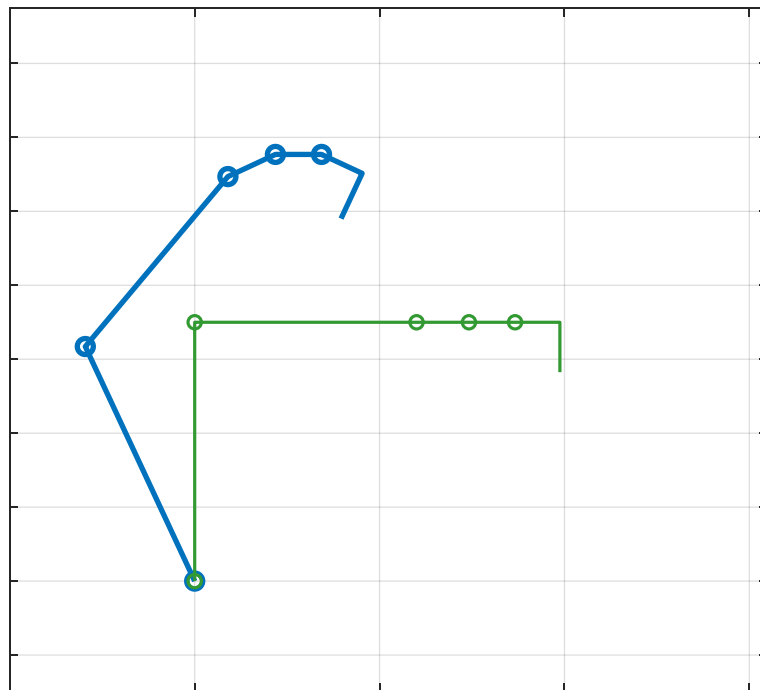
Na podstawie analizy przebiegów współczynników  $\frac{A_i}{A_1}$  można zauważyć, w pierwszej postaci drgań największe amplitudy drgań wykazuje człon pierwszy. W kolejnych postaciach drgań współczynniki  $\frac{A_i}{A_1}$ , w większości badanego zakresu, mają wartości znacząco większe od 1, co oznacza, że amplitudy drgań członu pierwszego były znacząco mniejsze od amplitud drgań pozostałych członów. Generalizując, można stwierdzić, że im wyższy numer członu, tym jego amplitudy drgań względem amplitud drgań członu pierwszego są większe. Ponadto wraz ze wzrostem numeru postaci drgań własnych, rosną wartości tych postaci, czyli współczynników  $\frac{A_i}{A_1}$ .

Na wszystkich wykresach widoczne były punkty przecięcia charakterystyk  $\frac{A_i}{A_1}$ , które odpowiadają zmianom kierunku drgań oraz przejściu pomiędzy ruchem zgodnym i przeciwnym względem pierwszego członu. Analiza wykazała również tendencję do tworzenia się grup członów o podobnym zachowaniu dynamicznym, co objawia się niemal identycznymi charakterystykami wybranych współczynników. Zjawisko to świadczy o występowaniu

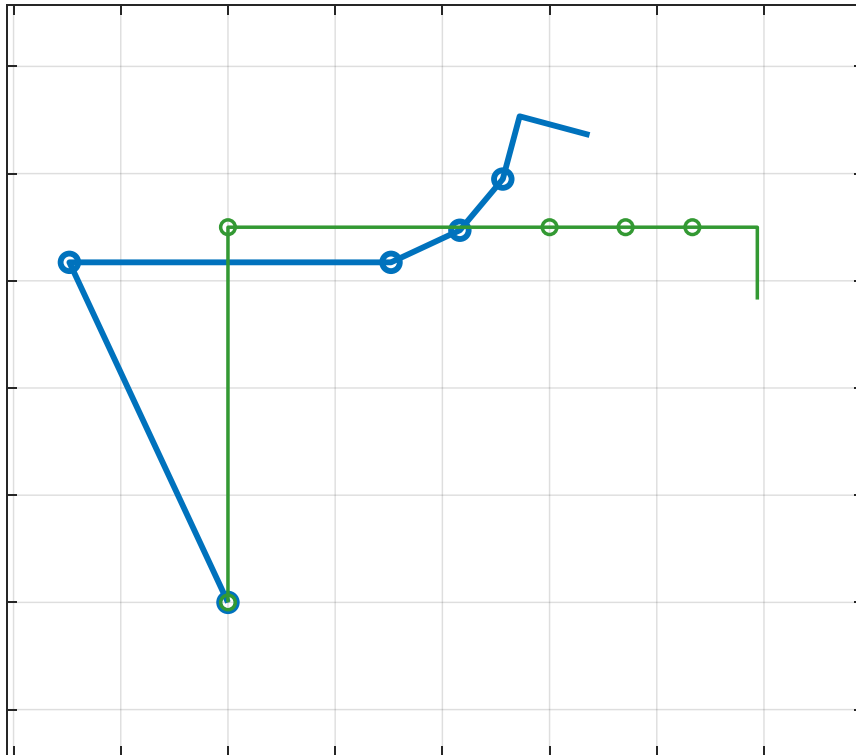
sprzężeń dynamicznych pomiędzy segmentami robota oraz o wspólnym udziale tych elementów w przenoszeniu energii drgań.

Wzrost wartości współczynników dla wyższych częstotliwości wskazuje na możliwość występowania znacznych obciążeń dynamicznych w określonych konfiguracjach kątowych. Z punktu widzenia eksploatacji robota oznacza to konieczność unikania pracy w pobliżu konfiguracji odpowiadających wysokim wartościom postaci drgań.

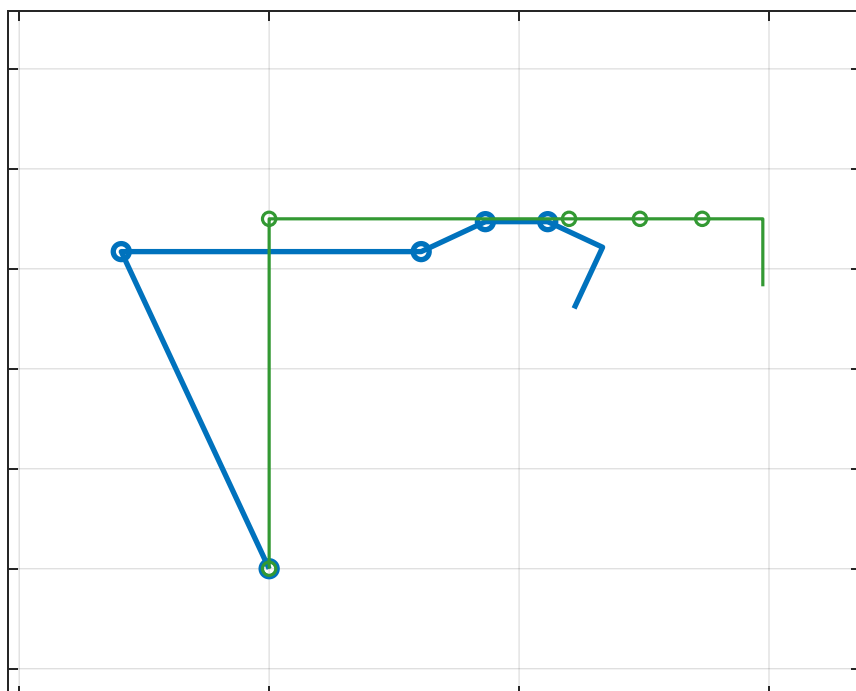
Na rys. 5.12 – rys. 5.16 pokazano pozycje ramienia robota w poszczególnych postaciach drgań dla wartości kątów  $\beta_2 = 0^\circ$ ,  $\beta_3 = 0^\circ$ . Na wykresach zaprezentowano zarówno pozycję neutralną ramienia robota (linia zielona), jak i pozycje odpowiadające poszczególnym postaciom drgań (linia niebieska). Takie podejście pozwoliło na jednoznaczne określenie, które części konstrukcji podlegają największym przemieszczeniom w danej postaci drgań oraz jak ustawienie kątowe robota wpłynęło na przebieg drgań rezonansowych. Dla celów wizualizacji przyjęto dodatkowo, że wartość jednostkowa odpowiada kątowi  $25^\circ$ , natomiast długości członów (od trzeciego do piątego) robota zostały odpowiednio zwiększone. Umożliwiło to wyraźniejsze przedstawienie kolejnych postaci drgań własnych.



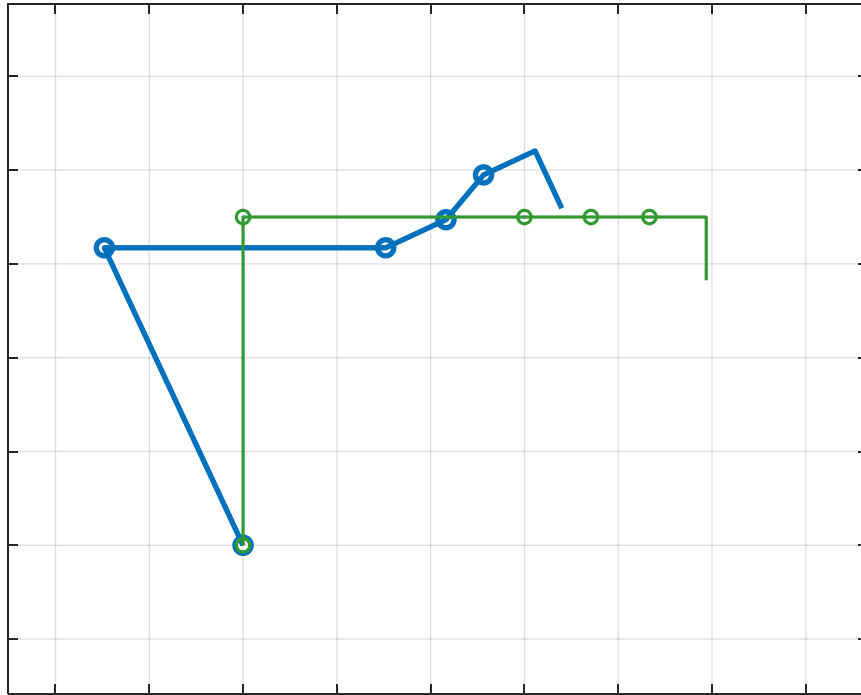
Rys. 5.12. Pierwsza postać drgań robota w analizowanej pozycji



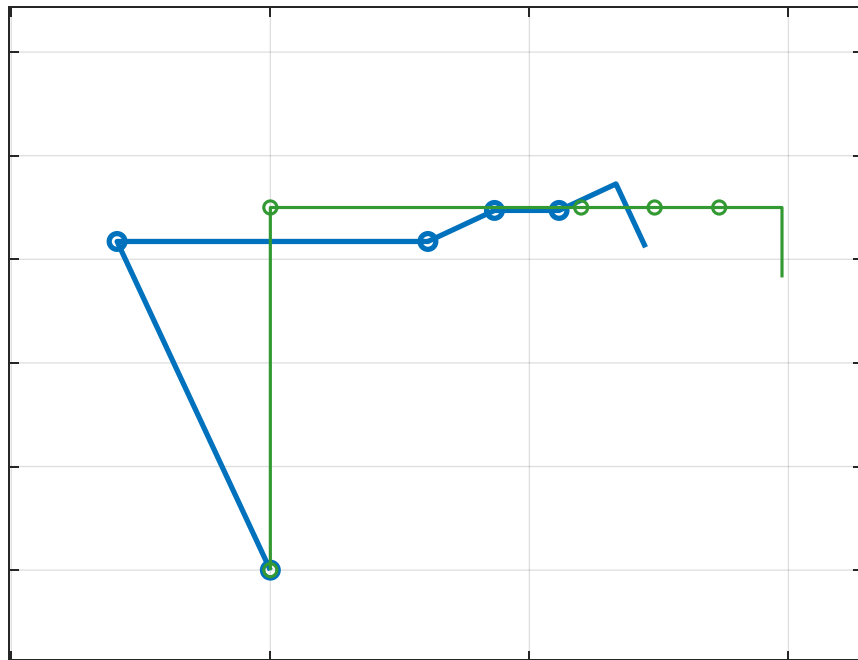
Rys. 5.13. Druga postać drgań robota w analizowanej pozycji



Rys. 5.14. Trzecia postać drgań robota w analizowanej pozycji



Rys. 5.15. Czwarta postać drgań robota w analizowanej pozycji



Rys. 5.16. Piąta postać drgań robota w analizowanej pozycji

Na podstawie rys. 5.12 widać, że dla pierwszej postaci drgań pierwsze dwa człony robota poruszały się zgodnie, co potwierdzał dodatni znak współczynnika  $\frac{A_2}{A_1}$ . Niewielkie wartości ujemne współczynników  $\frac{A_3}{A_1}, \frac{A_4}{A_1}, \frac{A_5}{A_1}$  wskazują na nieznaczne przemieszczenia kolejnych członów, przy czym człony wykonują ruch w tym samym kierunku.

Dla drugiej postaci drgań (rys. 5.13) pierwszy człon robota charakteryzuje się dodatnim znakiem współczynnika amplitudy. Drugi człon porusza się w przeciwnym kierunku, co potwierdza ujemna wartość współczynnika  $\frac{A_2}{A_1}$ . Znaczące wartości współczynników  $\frac{A_3}{A_1}$ ,  $\frac{A_4}{A_1}$ ,  $\frac{A_5}{A_1}$  wskazują na istotne przemieszczenia kolejnych członów.

Na rys. 5.14 – rys. 5.16 przedstawiono kolejno trzecią, czwartą i piątą postać drgań. W każdym przypadku pierwszy człon robota posiada dodatni znak współczynnika amplitudy. Z kolei drugie człony robota poruszają się w przeciwnych kierunkach o czym świadczy ujemny współczynnik  $\frac{A_2}{A_1}$ . Dla trzeciej postaci drgań kolejne człony wykazują niewielkie przemieszczenia, natomiast w czwartej oraz piątej postaci drgań obserwuje się przemieszczenia o znacznie większych amplitudach.



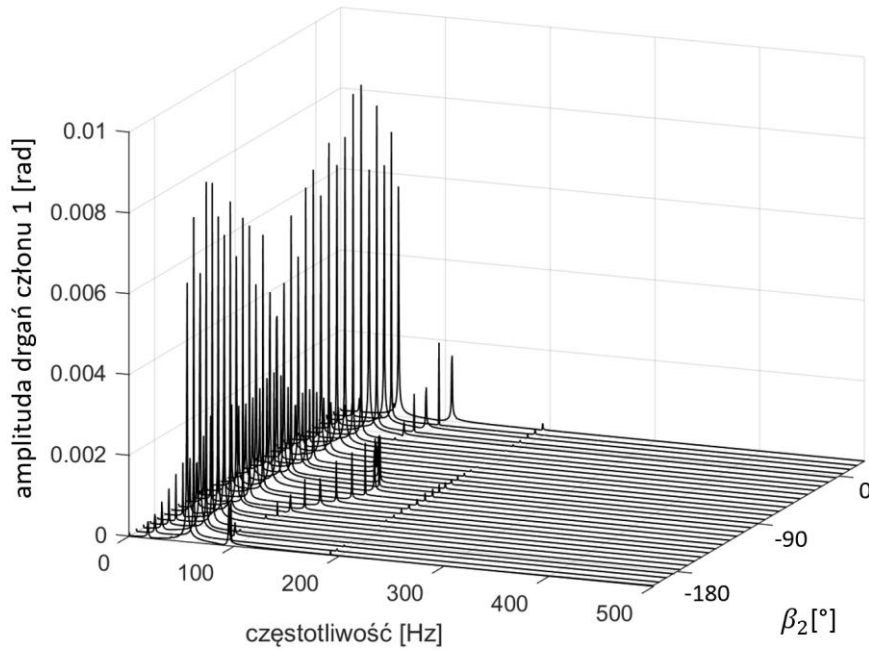
## 6. Analiza numeryczna drgań

Ze względu na zawartość równań ruchu, nawet po ich uproszczeniu, nie można uzyskać rozwiązań w formie analitycznej. Ponadto rozwiązania uproszczonych równań ruchu są rozwiązaniami przybliżonymi. Aby można było oszacować poziom dokładności rozwiązań liniowych równań ruchu, a tym samym ich przydatność w analizach zjawisk drganiowych, przeprowadzono numeryczne symulacje drgań robota na podstawie równania (4.58). W tym celu zostało ono przekształcone do następującej formy

$$\ddot{\alpha} = -M^{-1}(\beta, \alpha)[C(\beta, \alpha, \dot{\alpha})\dot{\alpha} + K\alpha] \quad (6.1)$$

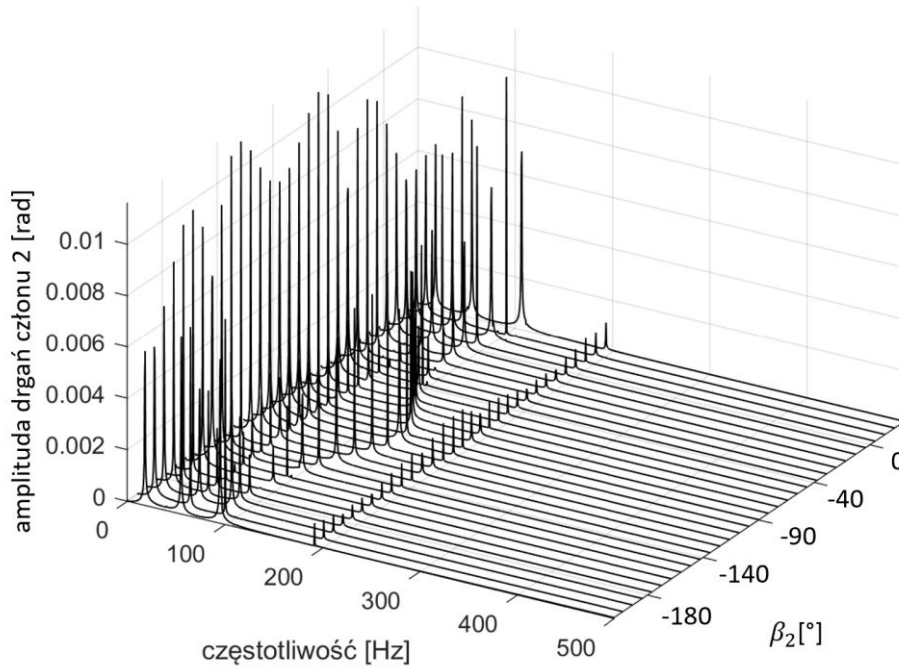
a następnie rozwiązane przy założonych niezerowych warunkach początkowych, które powodują drgania z częstotliwościami rezonansowymi. W badaniach symulacyjnych wykorzystano, podobnie jak w analizie równań liniowych, dane odpowiadające robotowi ABB IRB 1600/1.45 (tabela 4.2). Badania numeryczne wykonano dla różnych konfiguracji, uzyskując rozwiązania w zależności od ustawienia ramienia robota. Następnie obliczono szybką transformatę Fouriera rozwiązań równania (6.1) otrzymując widma częstotliwościowe drgań ramienia robota. Otrzymane rozwiązania posłużyły do wyznaczenia wykresów częstotliwości, które umożliwiły określenie częstotliwości rezonansowych ramienia robota w funkcji konfiguracji ramienia.

Rysunki od rys. 6.1 do rys. 6.6 przedstawiają widma częstotliwościowe drgań poszczególnych członów robota w funkcji ustawienia ramienia określonego przez współrzędną kątową  $\beta_2$ , która opisuje ustawienie członu 2 względem członu 1. Prezentowane wykresy dotyczą przypadku, w którym współrzędna  $\beta_3$ , opisująca ustawienie członu 3 względem członu 2, jest równa 0. Analiza widm pozwoliła określić, w jaki sposób zmiana konfiguracji ramienia wpływa na wartości częstotliwości rezonansowych i jaka jest intensywność drgań członów, wyrażona amplitudą przemieszczeń kątowych, w poszczególnych strefach rezonansu.



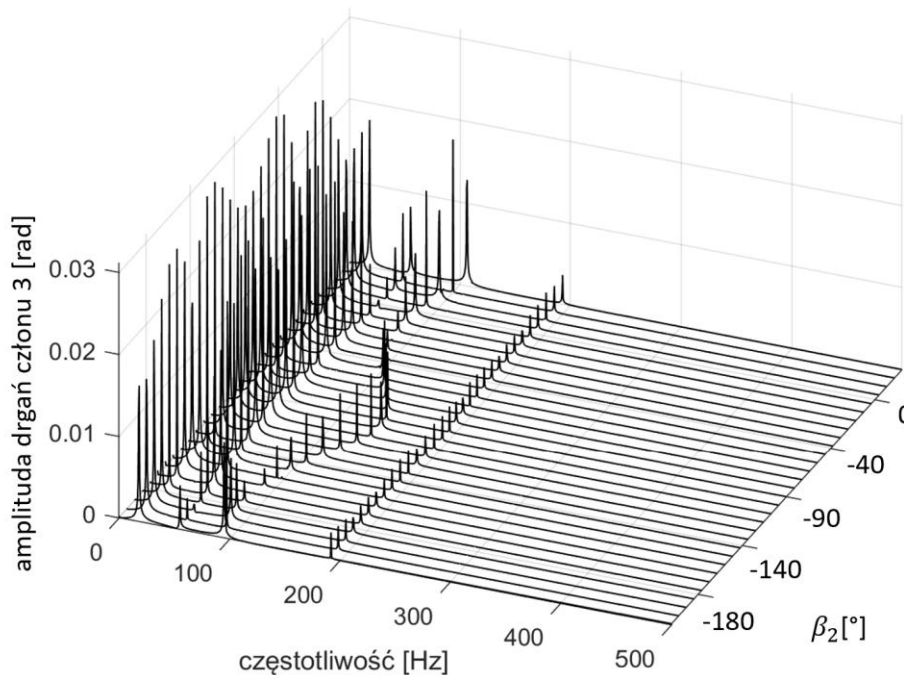
Rys. 6.1. Widma częstotliwościowe drgań członu 1 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$

Na rys. 6.1 zaprezentowano zależność amplitudy drgań pierwszego członu robota od częstotliwości oraz ustawienia ramienia określonego przez współrzędną kątową  $\beta_2$ . Wyraźnie widoczne są piki amplitudy odpowiadające częstotliwościom rezonansowym. Położenie tych częstotliwości zmieniało się wraz z ze zmianą kąta  $\beta_2$ , co świadczy o silnej zależności drgań członu od konfiguracji całego układu. Największe wartości amplitudy obserwowane są dla niższych częstotliwości, co jest typowe dla pierwszych modów drgań rezonansowych. Wraz ze wzrostem częstotliwości obserwuje się stopniowy spadek amplitudy drgań. Jednocześnie piki rezonansowe stają się coraz mniej wyraźne w widmie częstotliwościowym. Można więc stwierdzić, że zmiana wartości  $\beta_2$  wpływa nie tylko na położenie pasm rezonansowych, ale także na ich intensywność.



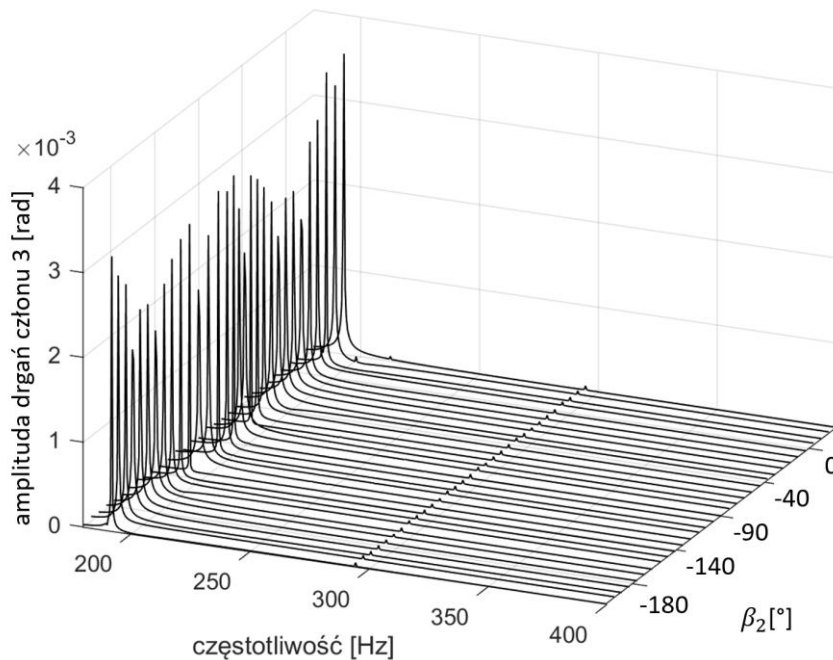
Rys. 6.2. Widma częstotliwościowe drgań członu 2 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$

Na rys. 6.2 przedstawiono widma częstotliwościowe drgań drugiego członu robota. Widoczne są piki amplitud odpowiadające częstotliwościom rezonansowym, których położenie zmienia się wraz ze zmianą kąta  $\beta_2$ . W porównaniu do pierwszego członu, widmo drgań drugiego elementu charakteryzuje się większą liczbą wyraźnych pasm rezonansowych o zróżnicowanej intensywności. Największe wartości amplitudy występują w zakresie niższych częstotliwości, co odpowiada pierwszym modom drgań rezonansowych. Zmiana kąta  $\beta_2$  istotnie wpływa na przesunięcia częstotliwości rezonansowych, co wskazuje na silną zależność właściwości dynamicznych od konfiguracji robota.



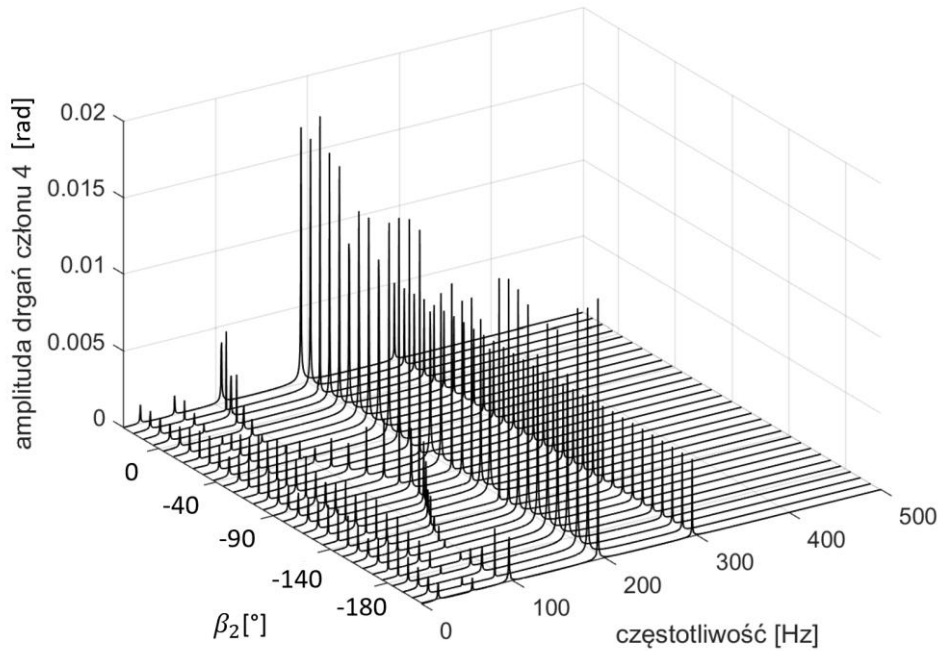
Rys. 6.3. Widma częstotliwościowe drgań członu 3 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$

Na rys. 6.3 przedstawiono zależność amplitudy drgań trzeciego członu robota od częstotliwości oraz kąta  $\beta_2$ . Charakteryzuje się on licznymi pasmami rezonansowymi, z których część osiągała znacznie wyższe amplitudy niż w przypadku członów pierwszego i drugiego. Największe wartości drgań są bliskie 0.03 rad, co wskazuje na większą podatność tego członu na pobudzone częstotliwości w określonych konfiguracjach. Piki rezonansowe są szczególnie intensywne w niższych zakresach częstotliwości, jednak występują również w pasmach wyższych. Świadczy to o złożonej strukturze modów drgań rezonansowych. Zmiany kąta  $\beta_2$  powodują zarówno przesunięcia częstotliwości rezonansowych, jak i wyraźne zmiany amplitud, co potwierdza duży wpływ położenia robota na jego zachowanie dynamiczne.



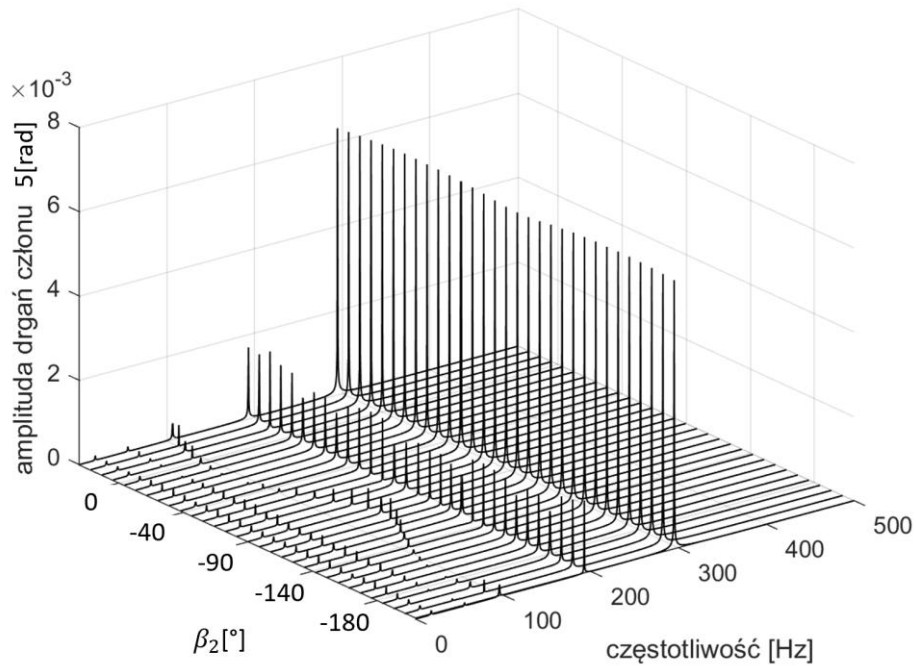
Rys. 6.4. Powiększenie fragmentu widma częstotliwościowego drgań członu 3 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$  w wybranym zakresie częstotliwości

Wykres (rys. 6.4) przedstawia szczegółową charakterystykę drgań w zakresie częstotliwości 190 - 410 Hz. Widoczne są liczne, wyraźnie rozdzielone piki rezonansowe. Ich amplitudy są mniejsze niż 0.004 rad. Ponadto widoczne jest pasmo rezonansowe (około 290 Hz) związane z piątą częstotliwością rezonansową. Jednak amplitudy drgań rezonansowych w tym paśmie są znacząco mniejsze w porównaniu do drgań w pozostałych pasmach rezonansowych.



Rys. 6.5. Widma częstotliwościowe drgań członu 4 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$

Wykres na rys. 6.5 przedstawia zależność amplitudy drgań czwartego członu od częstotliwości oraz kąta  $\beta_2$ . Widoczne są liczne piki rezonansowe o umiarkowanych amplitudach, z maksymalnymi wartościami sięgającymi około 0.02 rad. Rozmieszczenie i wysokość pików ulegają zmianie wraz ze zmianą kąta  $\beta_2$ , jednak amplitudy są w większości niższe niż w przypadku członów 2 i 3. Może to wskazywać na większą stabilność dynamiczną tej części robota w szerokim zakresie konfiguracji.



Rys. 6.6. Widma częstotliwościowe drgań członu 5 robota w funkcji współrzędnej  $\beta_2$

Wykres na rys. 6.6 przedstawia zależność amplitudy drgań piątego członu od częstotliwości oraz kąta  $\beta_2$ . Piki rezonansowe są tu wyraźnie mniejsze niż w przypadku członów 2 i 3, z maksymalnymi wartościami amplitudy nieprzekraczającymi 0.008 rad. Najsilniejsze rezonanse występują w zakresie wysokich częstotliwości.

Przeprowadzona analiza widm drgań poszczególnych członów robota wykazała, że zmiana konfiguracji ramienia istotnie wpływa na wartości częstotliwości rezonansowych. Wysoka zmienność pasm rezonansowych w tych elementach wynika ze znaczącego wpływu ich mas i momentów bezwładności na dynamikę układu.

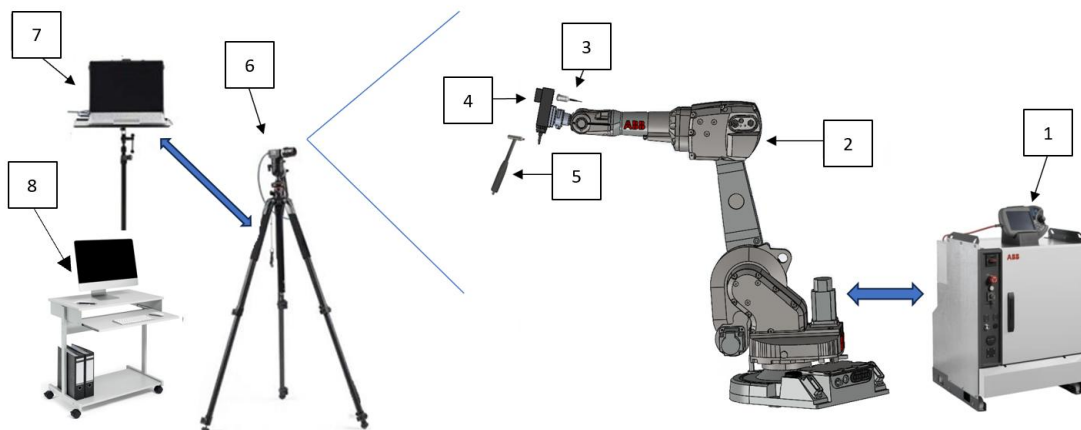
Wyniki analizy odpowiedzi częstotliwościowej wskazują, że poszczególne człony robota reagują na wzbudzenia w odmienny sposób. Najwyższe amplitudy drgań w zakresie niskich częstotliwości wykazują człony pierwszy oraz drugi, gdzie wraz ze wzrostem częstotliwości piki rezonansowe stają się mniej wyraźne i zanikają. Człon trzeci robota jest elementem o największej podatności na drgania, osiągając amplitudy rzędu 0.03 rad. W przypadku członów czwartego oraz piątego amplitudy drgań są znacząco niższe (maksymalnie 0.008 rad dla piątego członu), a najwyższe wartości amplitud występują w zakresie wysokich częstotliwości.

Otrzymane charakterystyki mogą stanowić podstawę do identyfikacji zakresów częstotliwości, których należy unikać podczas pracy robota w celu ograniczenia zjawisk rezonansowych. Mogą one zostać wykorzystane w procesie projektowania układów sterowania.

## 7. Badania eksperymentalne

### 7.1. Stanowisko badawcze

W celu potwierdzenia poprawności wyników uzyskanych z badań modelowych i symulacyjnych, przeprowadzone zostały badania eksperymentalne na stanowisku badawczym. Stanowisko to zostało wykorzystane w celu analizy zachowań dynamicznych robota ABB IRB 1600/1.45 w różnych konfiguracjach definiowanych przez kątowe ustawienie członu drugiego oraz trzeciego. Celem badań była identyfikacja częstotliwości rezonansowych pobudzanych w zależności od ustawienia ramion robota oraz określenie postaci drgań. Schemat stanowiska przedstawiono na rys. 7.1. Pomiary były realizowane dwutorowo. Pierwszym sposobem był pomiar drgań za pomocą akcelerometru zamocowanego na narzędziu robota. Umożliwiło to rejestrację szerokopasmową sygnału drganiowego i przeprowadzenie analiz czasowych i częstotliwościowych. Drugą metodą pomiaru były pomiary z zastosowaniem systemu wizyjnego z oprogramowaniem do analizy ruchu. Wyniki uzyskane tą metodą wykorzystano do analizy postaci drgań robota.



Rys. 7.1. Zrobotyzowane stanowisko badawcze:

1 – Kontroler robota IRC5, 2 – Robot IRB 1600, 3 – Cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr, 4 – Elektrowrzeciono firmy PDS z czujnikiem sił ATI, 5 – Młotek modalny PCB 086C03, 6 – Kamera 7 – Komputer z oprogramowaniem RDI Motion Amplification 8 – Komputer z oprogramowaniem Matlab do akwizycji danych z akcelerometru

Jednym z elementów zrobotyzowanego stanowiska badawczego był cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr (Model 333D01) przedstawiony na rys. 7.2, który zamocowano na elektrowrzecionie.



Rys. 7.2. Cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr (Model 333D01) [138]

Urządzenie to integruje w jednej obudowie czujnik drgań, przetwornik analogowo-cyfrowy (ADC) oraz interfejs komunikacyjny, eliminując konieczność stosowania zewnętrznych systemów akwizycji danych (DAQ). Wyposażony jest w 24-bitowy przetwornik ADC i obsługę próbkowania do 48 kHz. Akcelerometr 333D01 zapewnia wysoką rozdzielczość pomiarową oraz szerokie pasmo przenoszenia (2 Hz – 8 kHz przy  $\pm 5\%$  tolerancji). Dzięki dwóm zakresom pomiarowym ( $\pm 10$  g pk i  $\pm 20$  g pk) możliwe jest precyzyjne dopasowanie do aplikacji o różnej dynamice. Wewnętrzne dane kalibracyjne (tzw. *embedded TEDS*) zapisane są w pamięci EEPROM i dostępne bezpośrednio przez USB. Obudowa czujnika wykonana jest ze stali nierdzewnej oraz spełniającej normę IP67, która umożliwia pracę w trudnych warunkach środowiskowych [138]. Specyfikacja techniczna tego cyfrowego piezoelektrycznego akcelerometru przedstawiona została w tabeli 7.1.

Tabela 7.1. Parametry techniczne cyfrowego piezoelektrycznego akcelerometru (Model 333D01) [138]

Parametr	Wartość
Typ czujnika	Piezoelektryczny (technologia shear)
Interfejs	USB 2.0 (Full Speed, Plug & Play)
Zakres pomiarowy	$\pm 10$ g pk oraz $\pm 20$ g pk
Czułość	$\sim 8\%$ FSV/g (kanał B), $\sim 4\%$ FSV/g (kanał A)
Częstotliwość próbkowania	Do 48 kHz (obsługa: 8–48 kHz)
Pasmo przenoszenia ( $\pm 5\%$ )	2 Hz – 8 000 Hz
Pasmo rozszerzone ( $\pm 10\%$ )	1.5 Hz – 11 000 Hz
Pasmo ADC (-3 dB)	0.155 Hz – 22.9 kHz
Minimalna rozdzielczość	0.0025 g pk (1–10 kHz)
Czułość poprzeczna	$\leq 5\%$
Nieliniowość	$\leq 2\%$
Odporność na przeciążenie	Do 7 000 g pk
Obudowa	Stal nierdzewna, IP67
Temperatura pracy	$-10\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $+70\text{ }^{\circ}\text{C}$
Wymiary	$\varnothing 25.4$ mm x 66 mm

<b>Masa</b>	131 g
<b>Mocowanie</b>	Gwint 1/4-28 UNF, moment 2–5 lbf·ft
<b>Zasilanie</b>	Z USB ( $\leq 45$ mA)
<b>Dodatki</b>	EEPROM z kalibracją, kompatybilność z Multi-Instrument Pro

Akcelerometr został połączony poprzez port USB do komputera PC, który z wykorzystaniem skryptu napisanego w programie Matlab rejestrował przyspieszenia drgań punktu pomiarowego przy danym ustawieniu kątowym ramienia robota.

Kolejnym elementem stanowiska był młotek modalny PCB 086C03 (rys. 7.3), który zastosowano celem wzbudzenia drgań badanego układu. Młotek uderzeniowy wyposażony jest w zintegrowany piezoelektryczny czujnik siły (ICP<sup>®</sup>) o czułości 10 mV/lbf ( $\sim 2.25$  mV/N), który umożliwia zastosowanie go do badań modalnych konstrukcji mechanicznych.



Rys. 7.3. Młotek modalny PCB [139]

Zakres pomiarowy młotka modalnego wynosi  $\pm 2224$  N. Młotek cechuje wysoka częstotliwość rezonansowa, powyżej 22 kHz. Wymagane stałe napięcie zasilające wynosiło 20-30 V, posiada wyjście typu BNC kompatybilne z typowymi systemami akwizycji danych [139]. Młotek wyposażony był w zestaw wymiennych końcówek uderzeniowych o różnej twardości, co umożliwia dostosowanie charakterystyki widmowej wymuszenia do badanego obiektu.

Następnym elementem stanowiska był robot ABB IRB 1600/1.45 (rys. 7.4). Jest to sześćoosiowy robot przemysłowy o zasięgu 1450 mm oraz udźwigu do 10 kg. Charakteryzuje



Rys. 7.4. Robot ABB IRB 1600/1.45 [137]

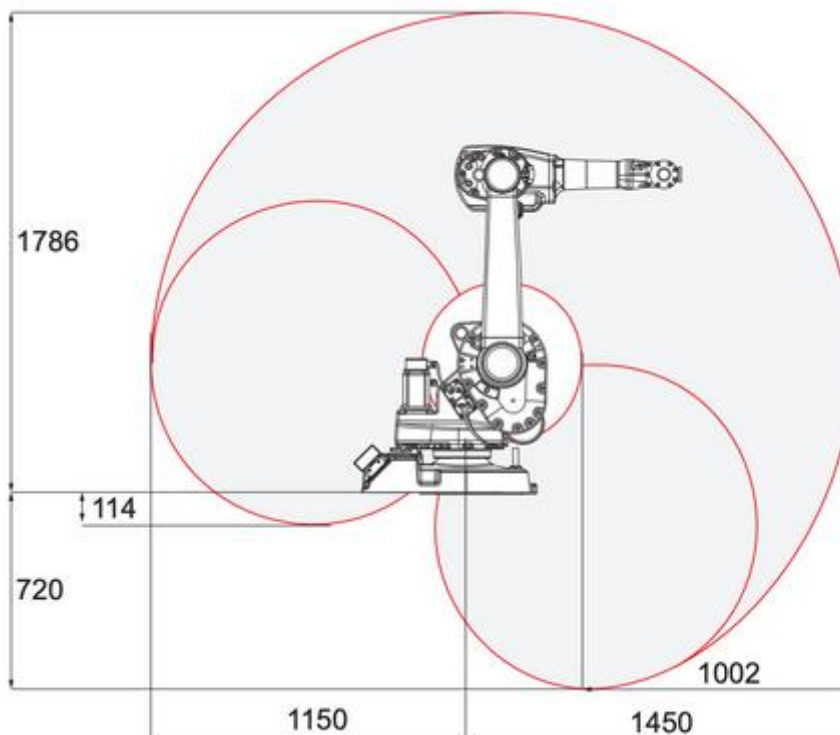
się powtarzalnością pozycjonowania na poziomie  $\pm 0.02$  mm. Sterowany jest za pomocą kontrolera IRC5 i umożliwia programowanie w trybie offline, m.in. w środowisku RobotStudio, co ułatwia integrację z zaawansowanymi systemami symulacyjnymi oraz produkcyjnymi. Robot dostępny jest w wersji o klasie ochrony IP54, zapewniającej odporność na kurz i działanie rozpryskiwanej wody, a także w wersji Foundry Plus z klasą IP67, co umożliwia jego zastosowanie w wymagających warunkach przemysłowych, takich jak wysoka wilgotność czy obecność pyłów metalicznych. Zasilany jest napięciem trójfazowym 400–480 V przy częstotliwości 50/60 Hz, zapewniając stabilną oraz wydajną pracę w środowisku przemysłowym. Robot może pracować w zakresie temperatur od 5°C do 45°C [137, 140].

Określenie zakresów ruchu robota przemysłowego było istotne w procesie projektowania oraz analizy zadań robotycznych. Zakresy ruchów poszczególnych osi stanowią podstawę do wyznaczenia przestrzeni roboczej robota, a także do budowy modeli matematycznych i symulacyjnych. W tabeli 7.2 przedstawiono szczegółowe zakresy ruchu

poszczególnych osi robota ABB IRB 1600/1.45. Zakresy robocze robota ABB IRB 1600/1.45 przedstawiono na rys. 7.5.

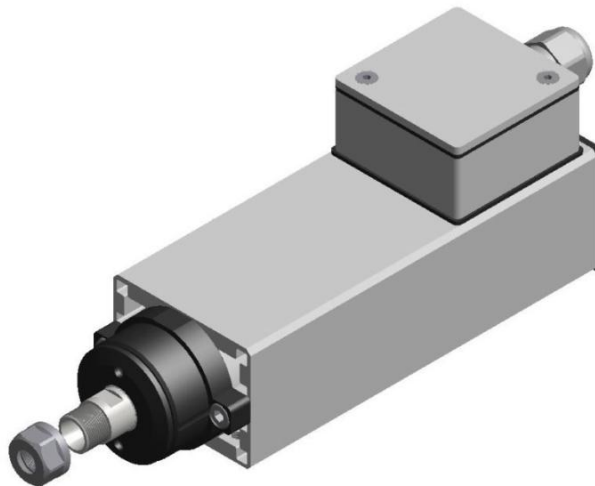
Tabela 7.2. Zakresy ruchu osi robota ABB IRB 1600/1.45 [140]

Oś	Opis ruchu	Zakres (°)
1	Obrót podstawy	+180° do -180°
2	Ruch ramienia w pionie (górze/dół)	+150° do -90°
3	Ramię „łokcia”	+65° do -245°
4	Obrót nadgarstka	+200° do -200°
5	Pochylenie nadgarstka	+115° do -115°
6	Obrót narzędzia	+400° do -400°



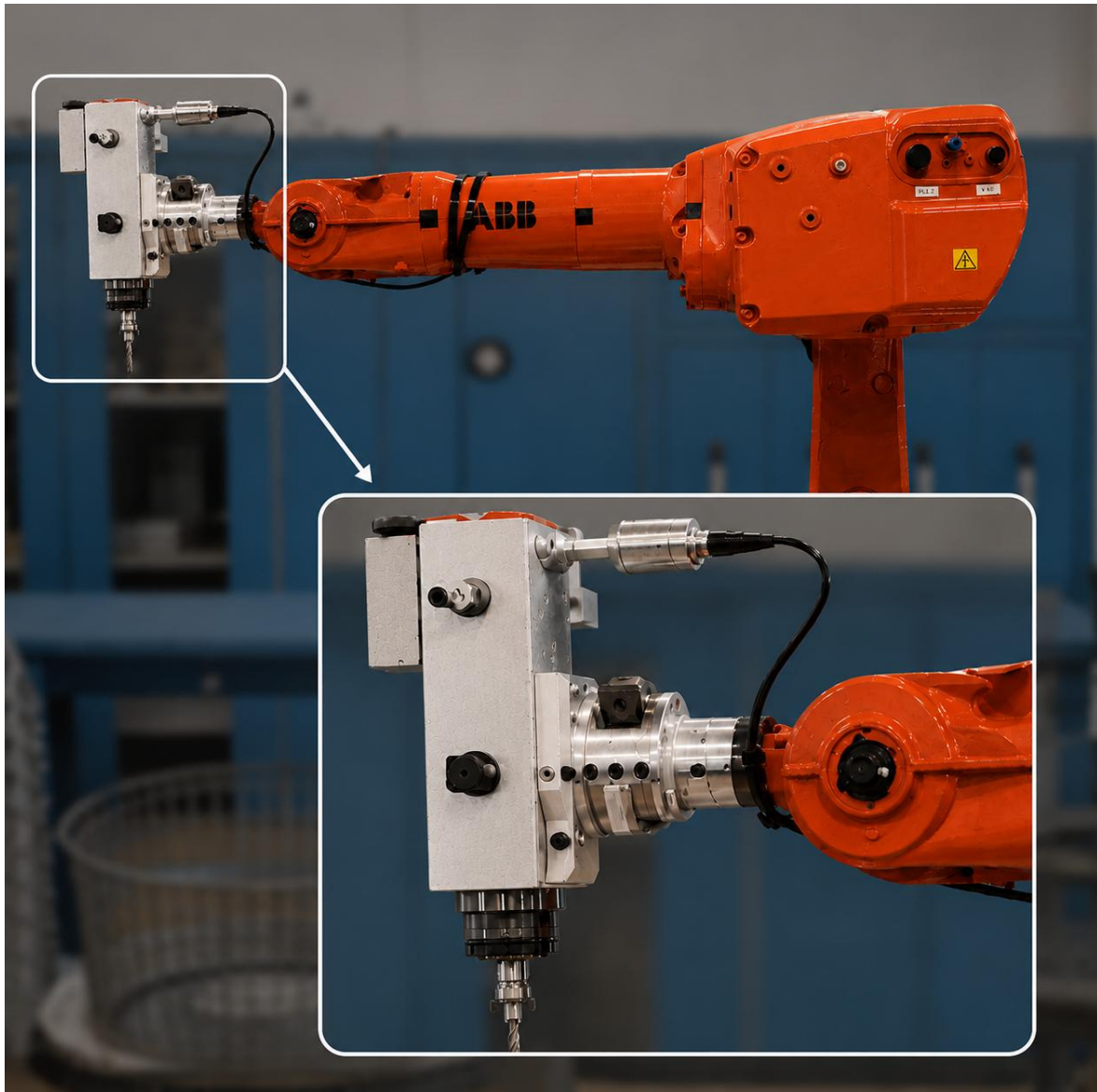
Rys. 7.5. Zakres roboczy robota ABB IRB 1600/1.45 [140]

Robot wykorzystywany w badaniach został wyposażony w elektowrzeciono PDS ADEV4 (rys. 7.6), które zamontowano na kiści manipulatora.



Rys. 7.6. Elektrowrzeciono PDS ADEV42 [141]

Elektrowrzeciono z serii ADEV42 przeznaczone jest do obróbki drewna, tworzyw sztucznych oraz lekkich metali i stopów. Wyposażone jest w wentylator chłodzący zamontowany bezpośrednio na wale wrzeciona. Pracuje przy napięciu 220 lub 380 V, jego zakres mocy wynosi od 0.05 do 0.4 kW (lub 0.06 do 0.55 KM). Prędkość obrotowa narzędzia mieści się w przedziale 6 000–24 000 obr./min. Częstotliwość zasilania wynosi od 100 do 400 Hz. Wyposażone jest w uchwyt narzędziowy typu ER11 oraz posiada zgodność ze standardami CSA i CEI [141]. W ramach prowadzonych badań dla przedstawionego narzędzia zastosowano frez przeznaczony do obróbki aluminium. Elektrowrzeciono zostało przymocowane do adaptera narzędziowego czujnika siły i momentu Delta SI-330-30 (producenta ATI Industrial Automation), który przymocowano do kiści robota. Zastosowany przetwornik jest sześciosiowym czujnikiem siły i momentu, umożliwiającym pomiar składowych sił oraz momentów. Czujnik należy do serii Delta, która charakteryzuje się wysoką sztywnością oraz dużą dokładnością pomiarową. Model SI-330-30 jest skalibrowany w układzie SI i przeznaczony do pomiarów w średnim zakresie obciążeń. Zakresy pomiarowe przetwornika wynoszą:  $\pm 330$  N dla składowych  $F_x$  i  $F_y$  oraz  $\pm 990$  N dla składowej  $F_z$ , natomiast zakres pomiaru momentów wynosi  $\pm 30$  Nm dla każdej z osi. Rozdzielczość pomiarowa przetwornika wynosi odpowiednio 0.0625 N dla składowych sił w osiach X i Y, 0.125 N dla składowej siły w osi Z oraz 0.0037 Nm dla składowych momentów [142]. Dzięki zastosowaniu wielosiowego układu tensometrycznego oraz kalibracji macierzowej możliwa jest kompensacja wzajemnych oddziaływań pomiędzy osiami, co przekłada się na zwiększenie dokładności pomiaru.



Rys. 7.7. Widok robota stosowanego w badania eksperymentalnych

Widok ramienia robota wraz ze szczegółowym przedstawieniem elektronarzędzia wraz z narzędziem typu frez pokazano na rys. 7.7.

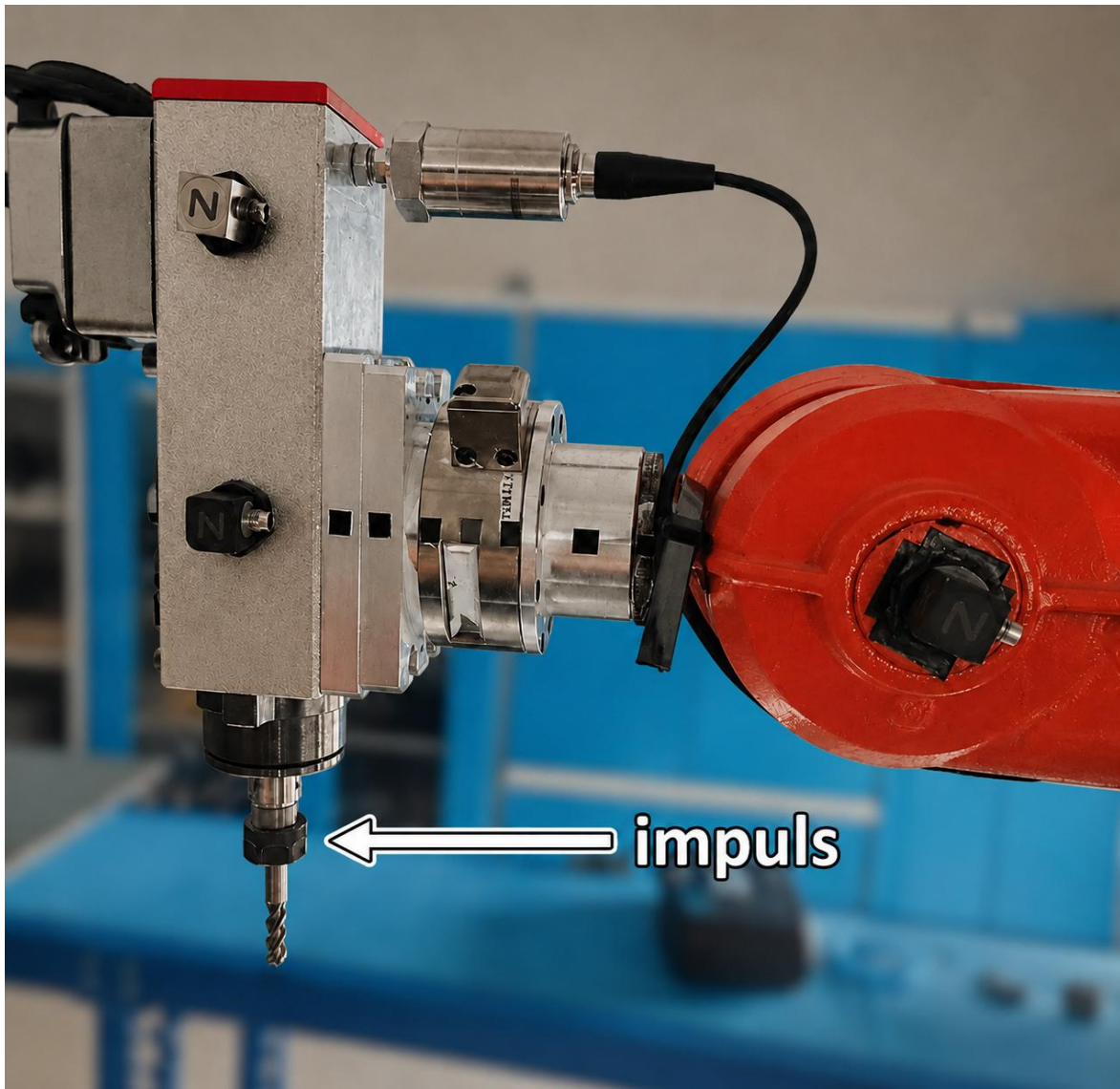
W skład systemu wizyjnego wchodzi kamera z wymiennymi obiektywami oraz komputer z oprogramowaniem RDI Motion Amplification. Do analizy ruchu całego ramienia robota wykorzystano metodę amplifikacji ruchu, która umożliwia wizualizację bardzo małych przemieszczeń niewidocznych w standardowej rejestracji wideo. Zastosowanie tej techniki pozwala na wielokrotne wzmocnienie drgań obiektu, dzięki czemu możliwa jest ich szczegółowa obserwacja oraz dalsza analiza. Funkcja amplifikacji ruchu pozwala na obserwację przemieszczeń o amplitudach rzędu kilku mikrometrów przy wielokrotnym powiększeniu. Z kolei analiza drgań wybranych obszarów zaznaczonych na zarejestrowanym obrazie umożliwia określenie parametrów ruchu (przemieszczenia, prędkości) w danym punkcie oraz przeprowadzenie transformacji Fouriera tych parametrów dla całego obrazu. Dodatkowo

dostępne filtry pozwalają na wyodrębnienie każdej z obecnych częstotliwości drgań oraz filtrowanie obrazu w taki sposób, aby obserwować każdą postać drgań robota osobno. Funkcjonalność ta jest szczególnie przydatna w kontekście analizy drgań robota, ponieważ umożliwia określenie kierunku drgań dla danej częstotliwości oraz postaci drgań ramienia robota.

Opisane stanowisko badawcze znajdujące się w laboratorium robotyki przemysłowej Katedry Mechaniki Stosowanej i Robotyki zastosowano do badań eksperymentalnych, mających na celu weryfikację wyników modelowania analitycznego i symulacji. Badania przeprowadzono dwutorowo. Najpierw przeprowadzono pomiary drgań robota za pomocą akcelerometru zamontowanego na narzędziu robota. Następnie, po przeprowadzeniu analiz porównawczych wyników modelowania analitycznego i badań eksperymentalnych, przeprowadzono pomiary systemem wizyjnym w celu analizy postaci drgań własnych.

## **7.2. Pomiar przyspieszeń drgań robota**

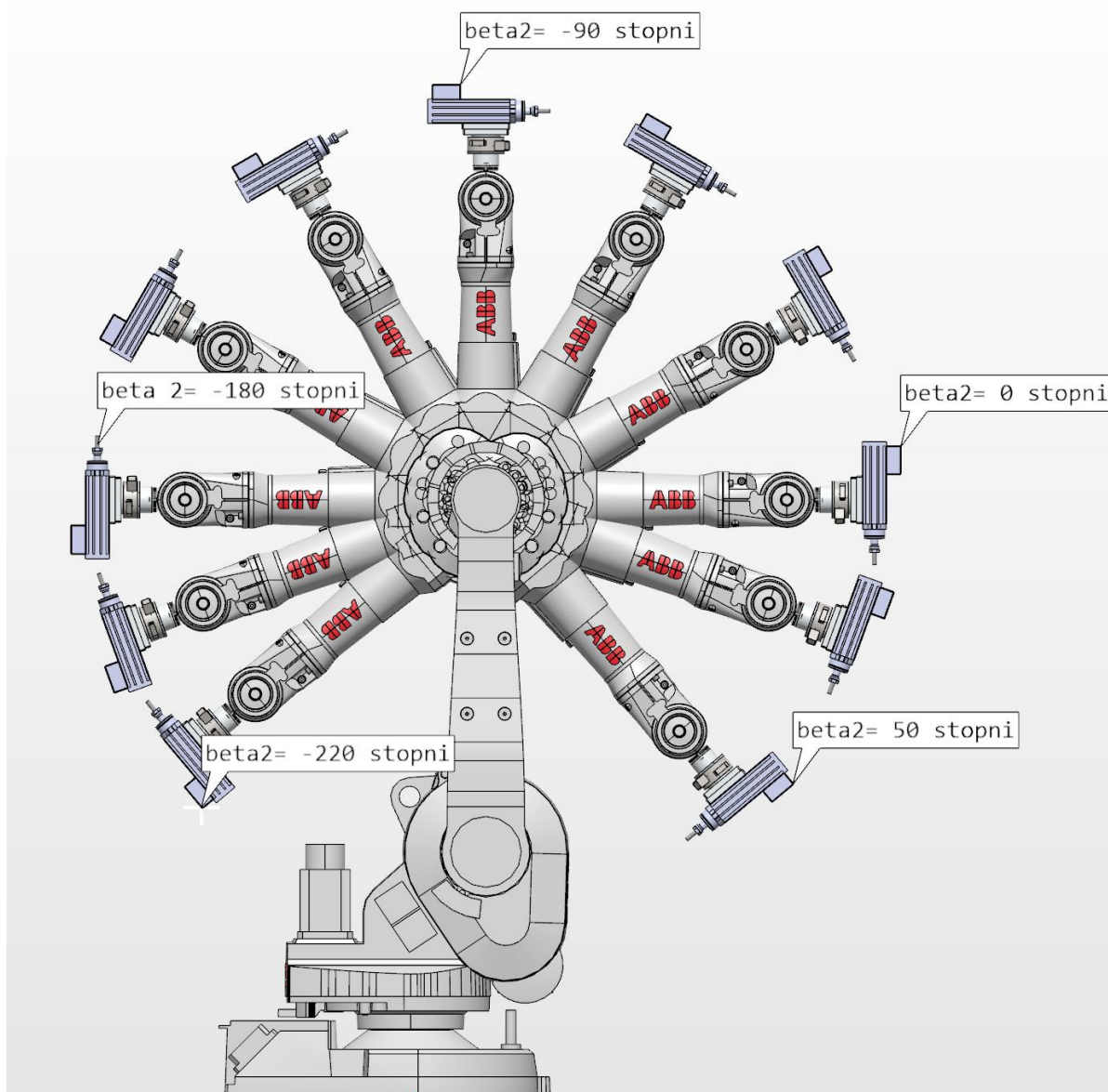
Na narzędziu robota zamontowano cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr 333D01, którego wygląd oraz miejsce montażu przedstawiono na rys. 7.7. Drgania wzbudzano za pomocą młotka modalnego PCB 086C03 z miękką końcówką, ponieważ badano drgania robota wynikające z podatności przegubów, które są drganiami niskoczęstotliwościowymi. Miękka końcówka młotka generuje impuls o dłuższym czasie trwania, co przekłada się na ograniczenie udziału wysokich częstotliwości w sygnale wymuszającym. Punkt przyłożenia młotka modalnego znajdował się na oprawie narzędzia zamontowanego w robocie ABB IRB 1600/1.45, co przedstawiono na rys. 7.8. Wybór tego miejsca był istotny, ponieważ w rzeczywistych warunkach działania robota, wymuszenia pochodzą z kontaktu narzędzia z otoczeniem.



Rys. 7.8. Punkt przyłożenia młotka modalnego na narzędziu

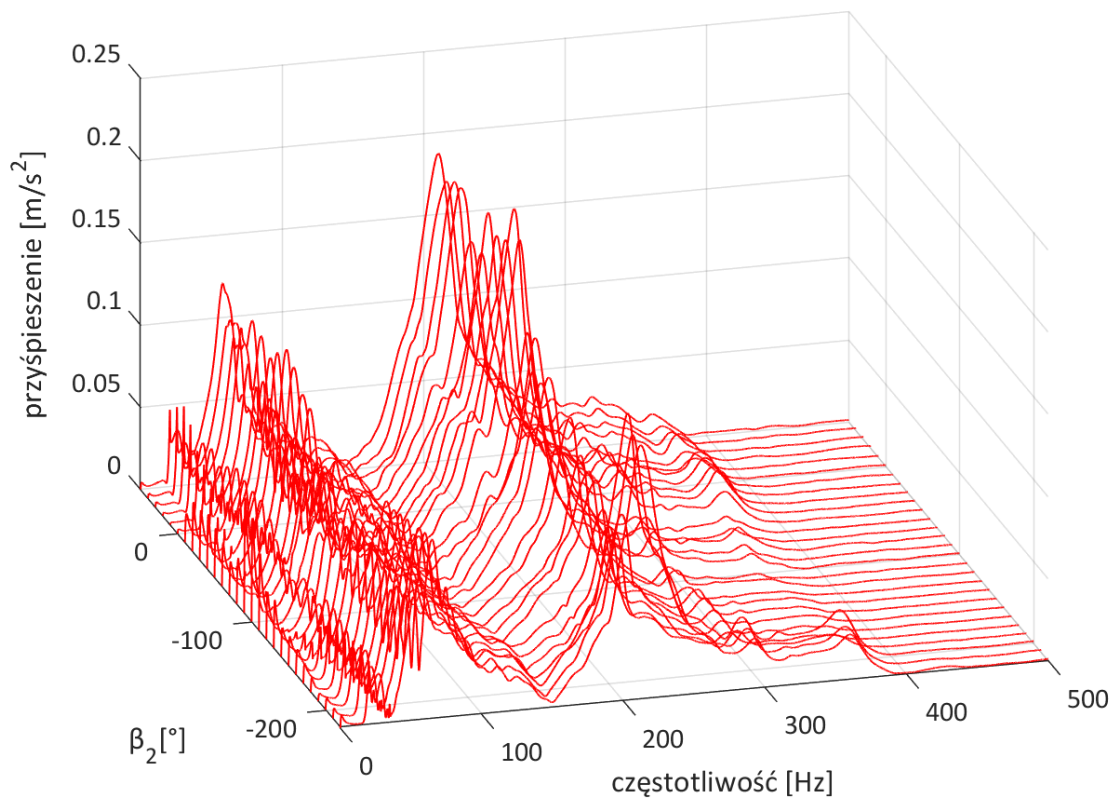
Do rejestracji i analizy drgań zastosowano oprogramowanie Matlab. Napisany skrypt w oprogramowaniu Matlab umożliwił rejestrację przyspieszeń drgań dla określonych ustawień robota.

Badania robota IRB 1600/1.45 przeprowadzono przy zmianie kąta  $\beta_2$  co  $10^\circ$  w zakresie  $(-220^\circ \div 50^\circ)$ , przy stałej wartości kąta  $\beta_3 = 0^\circ$ . Wybrane ustawienia robota definiowane przez zmianę kąta  $\beta_2$  przedstawiono na rys. 7.9.



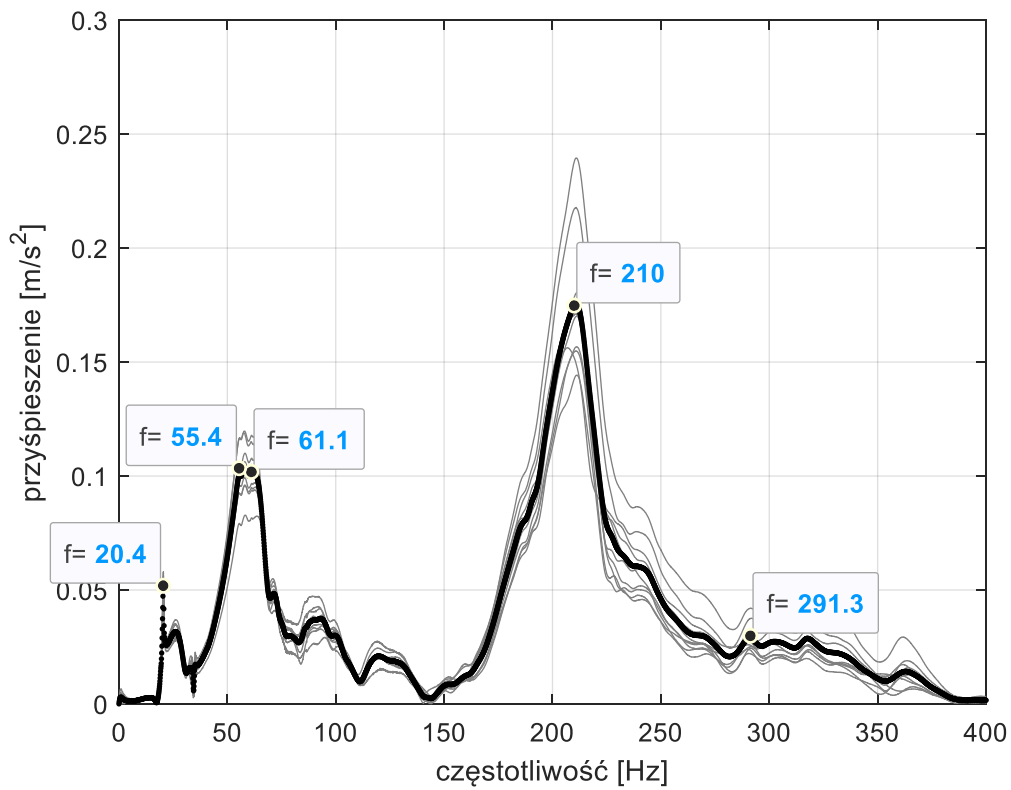
Rys. 7.9. Rysunek przedstawiający ustawienia ramion robota przy zmianie kąta  $\beta_2$  dla określonych konfiguracji robota ABB IRB 1600/1.45

Badania przeprowadzono, wykonując po 10 prób w każdej konfiguracji. Wyniki, które uzyskano poprzez wykonanie 10 prób przy zadanym ustawieniu ramienia robota zostały uśrednione w dziedzinie częstotliwości. Widmo częstotliwościowe drgań rezonansowych robota ABB IRB 1600/1.45 w zależności od konfiguracji określonej przez współrzędną kątową  $\beta_2$  przedstawiono na rys. 7.10. Wykres przedstawia zależność pomiędzy pobudzonymi częstotliwościami drgań, a wartością amplitud przyspieszenia w zadanym ustawieniu kątowym określonym przez kąt  $\beta_2$ . Na wykresie zaprezentowano średnie wartości amplitudy przyspieszenia przy danym ustawieniu kątowym robota uzyskane w wyniku przeprowadzonych badań eksperymentalnych.

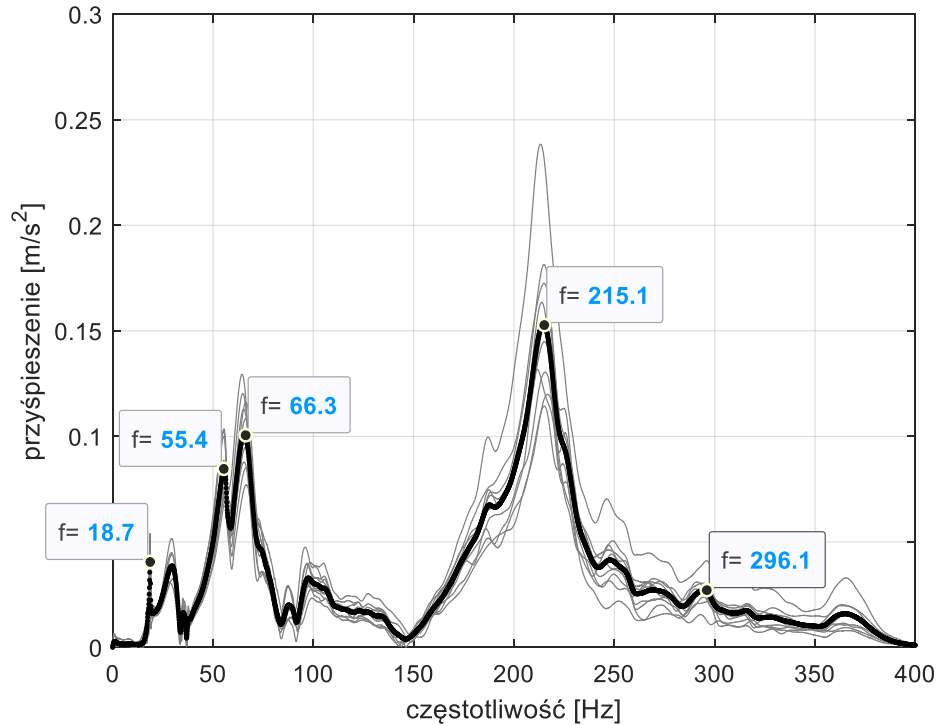


Rys. 7.10. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań robota w zależności od konfiguracji określonej przez współrzędną kątową  $\beta_2$

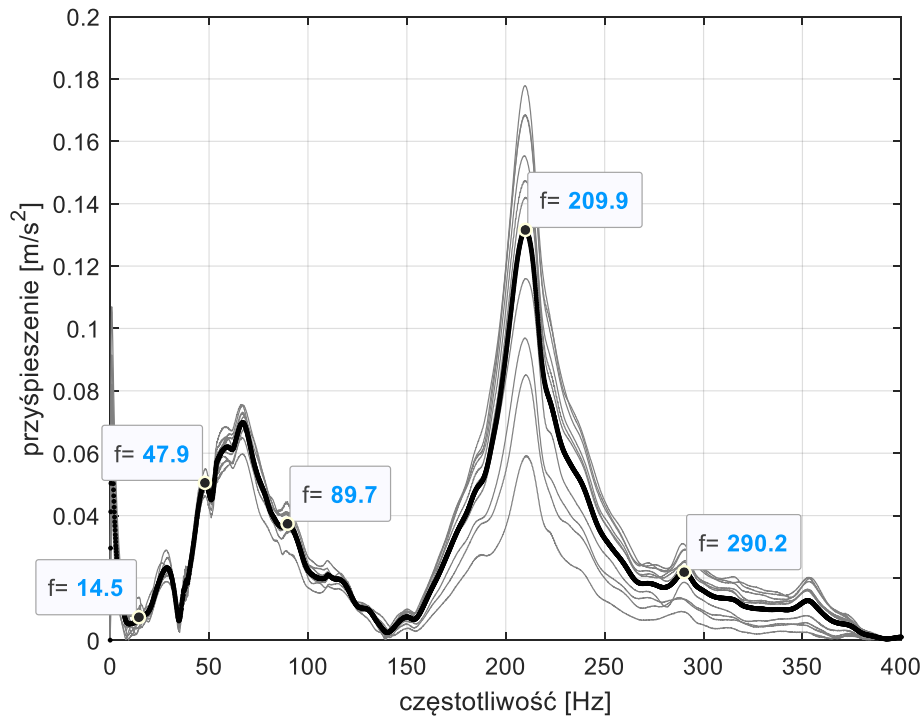
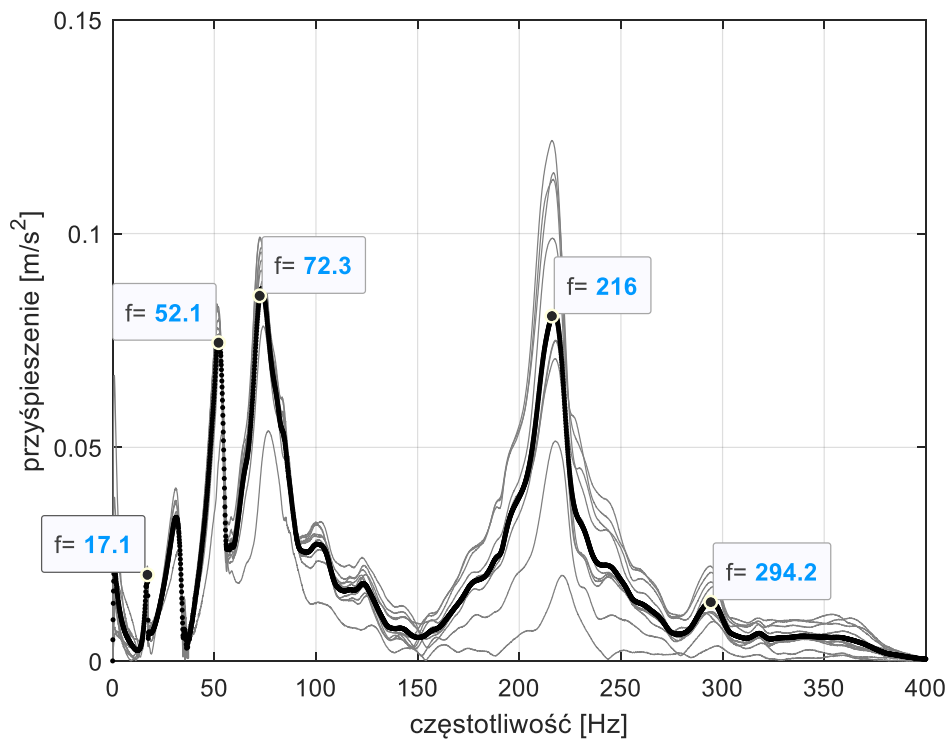
Poniżej przedstawiono wykresy widma częstotliwościowego przyspieszenia drgań dla wybranych wartości kąta  $\beta_2$ . Są to szczegółowo przedstawione wybrane wykresy z rys. 7.10. Rysunki od 7.11 do 7.15 zawierają uśrednione widma częstotliwościowe przyspieszenia (linia pogrubiona) oraz dodatkowo ich widma składowe. Na rys. 7.11-7.15 zaprezentowano wykresy widmowe odpowiadające wartościom kąta  $\beta_2$  równym kolejno 40°, 0°, -100°, -150°, -200°. Dodatkowo zaznaczono wartości częstotliwości drgań najbardziej zbliżone do wartości kolejnych częstotliwości własnych układu liniowego, wynikających z analizy przedstawionej w rozdziale 6.

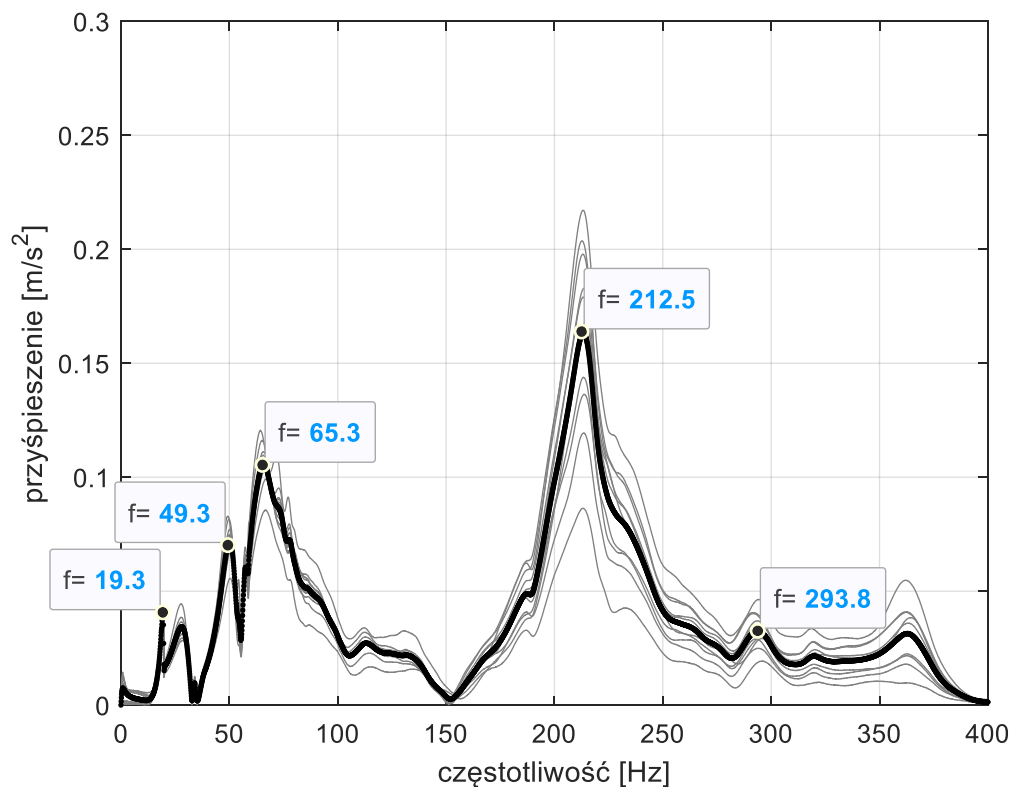


Rys. 7.11. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = 40^\circ$



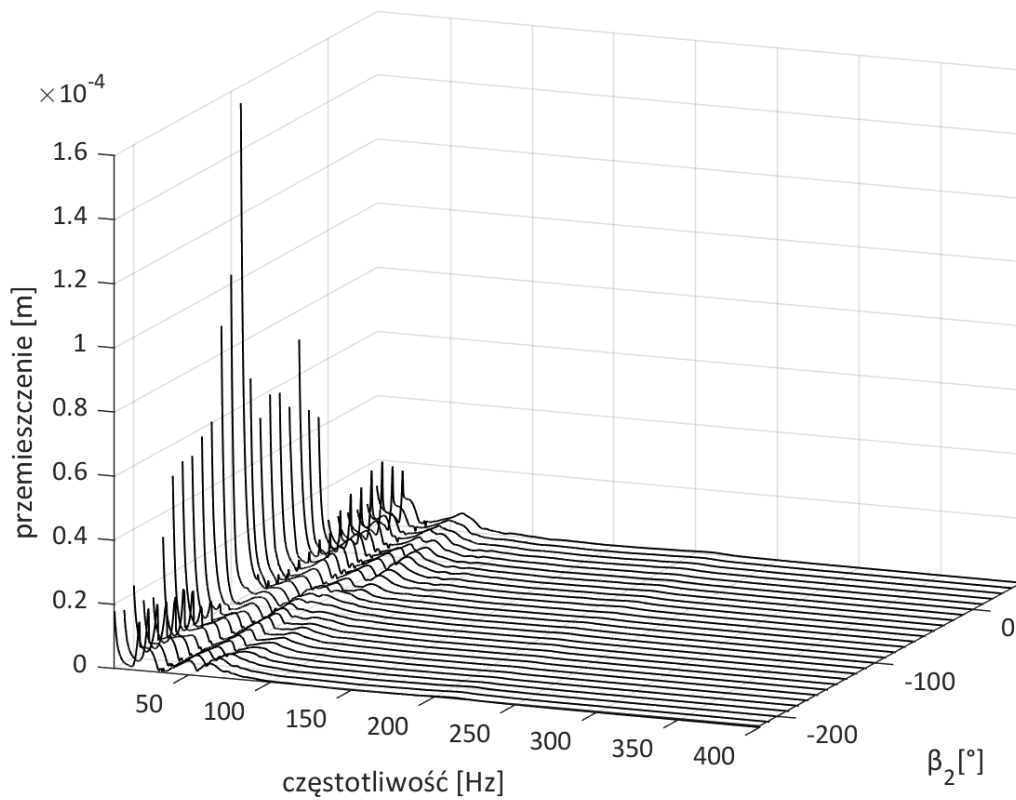
Rys. 7.12. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = 0^\circ$

Rys. 7.13. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -100^\circ$ Rys. 7.14. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -150^\circ$



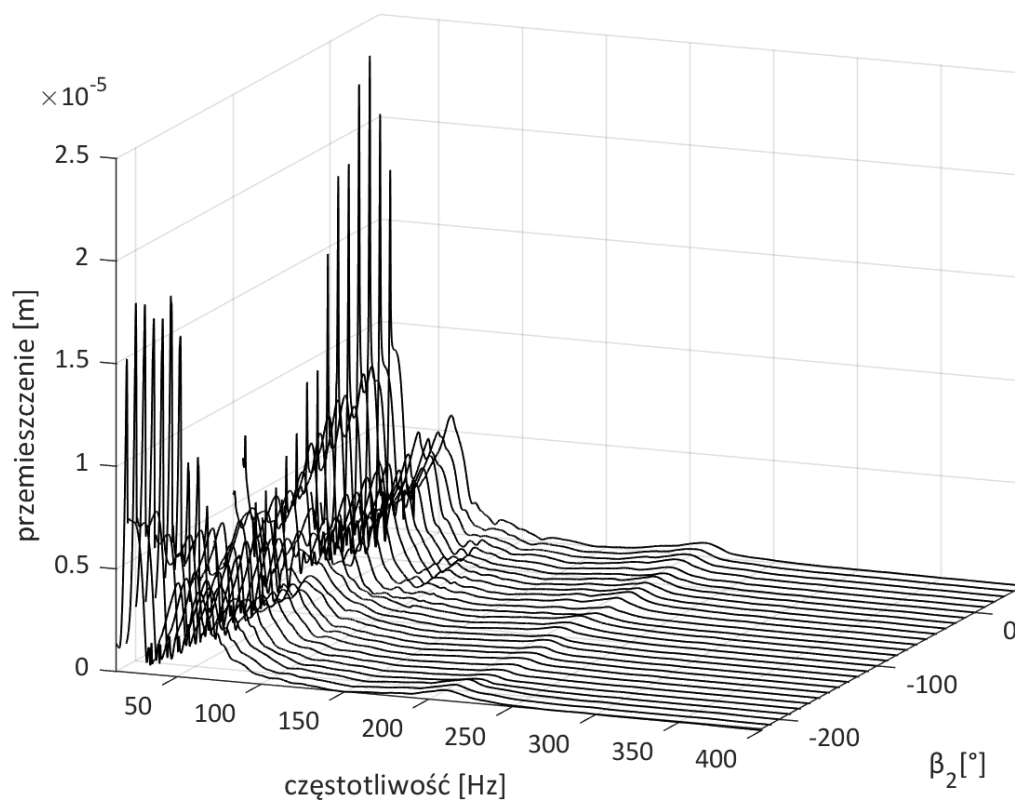
Rys. 7.15. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -200^\circ$

W celu przeanalizowania przemieszczeń drgań, przyspieszenia zostały dwukrotnie scałkowane, co pozwoliło na uzyskanie wykresów widm częstotliwościowych przemieszczeń. Wynik przeprowadzonych operacji zaprezentowano zbiorczo na rys. 7.16, na którym pokazano wykres zależności przemieszczenia od częstotliwości drgań robota ABB IRB 1600/1.45 w całym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ .



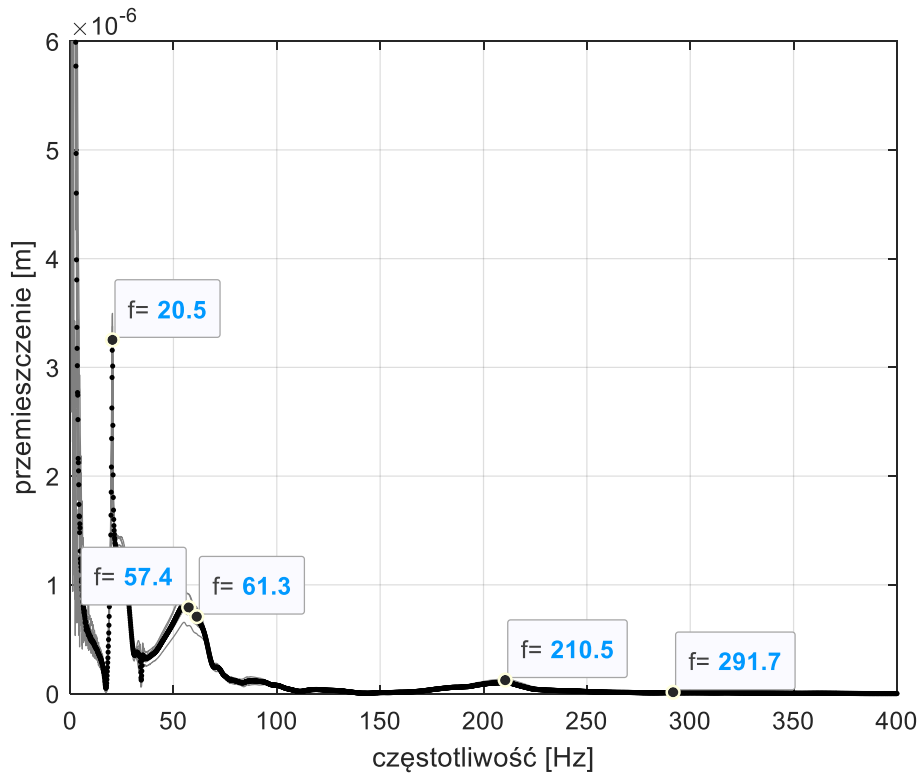
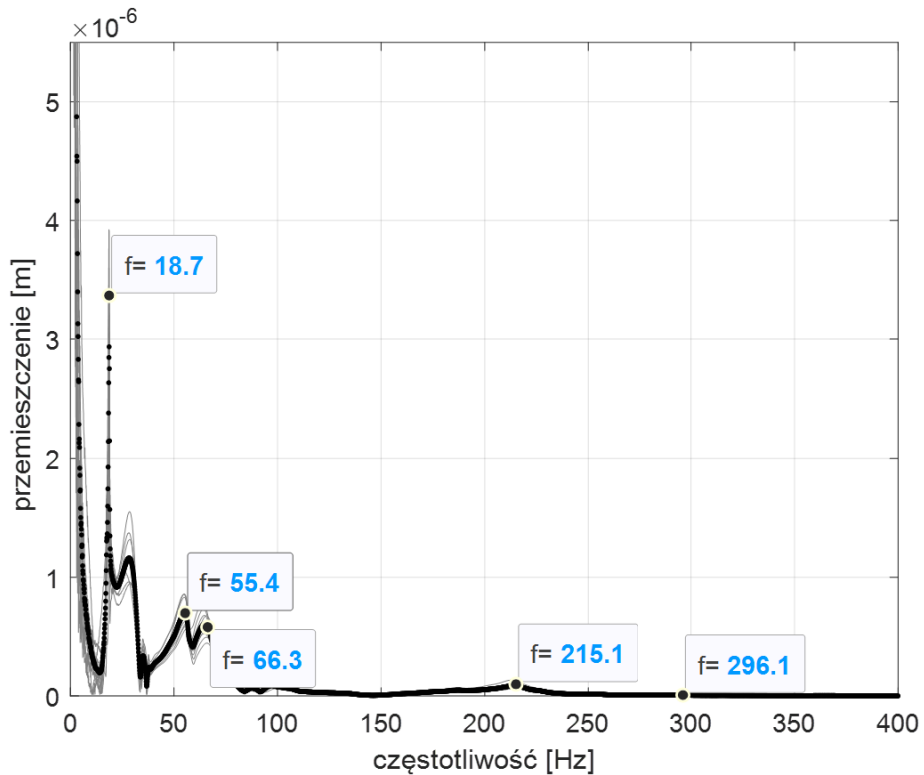
Rys. 7.16. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań robota ABB IRB 1600/1.45 w całym zakresie zmian kąta  $\beta_2$

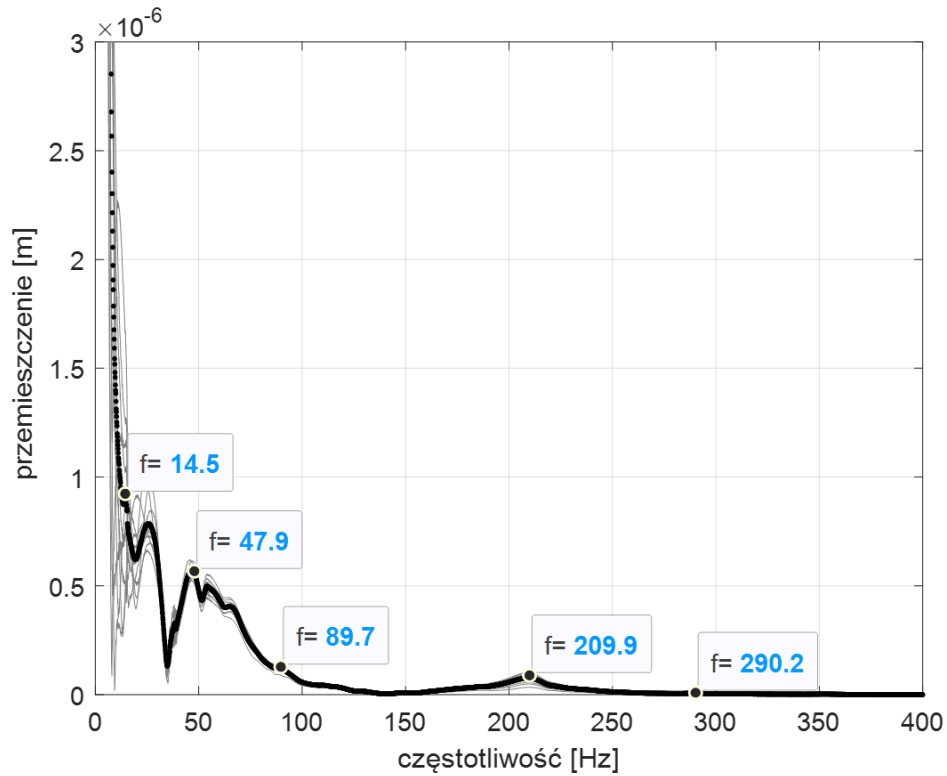
Na rys. 7.17 zaprezentowano fragment wykresu z rys. 7.16. ograniczony do przedziału częstotliwości 14-400 Hz. Dobór tego zakresu umożliwia bardziej szczegółową analizę amplitud drgań dla czwartej częstotliwości rezonansowej.



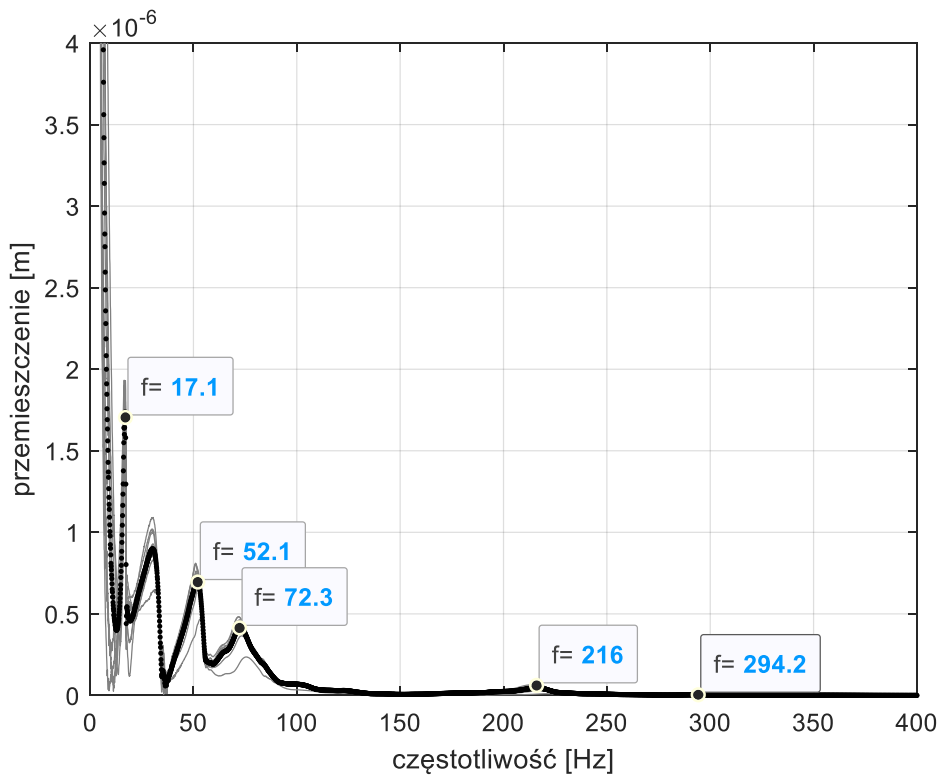
Rys. 7.17. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań robota ABB IRB 1600/1.45 w zakresie 14-400 Hz w całym zakresie zmian kąta  $\beta_2$

Wykresy od rys. 7.18 do rys. 7.22 prezentują szczegółowe wyniki dotyczące wartości przemieszczeń w funkcji częstotliwości dla wybranych ustawień kątowych robota, określonych przez wartość kąta  $\beta_2$ .

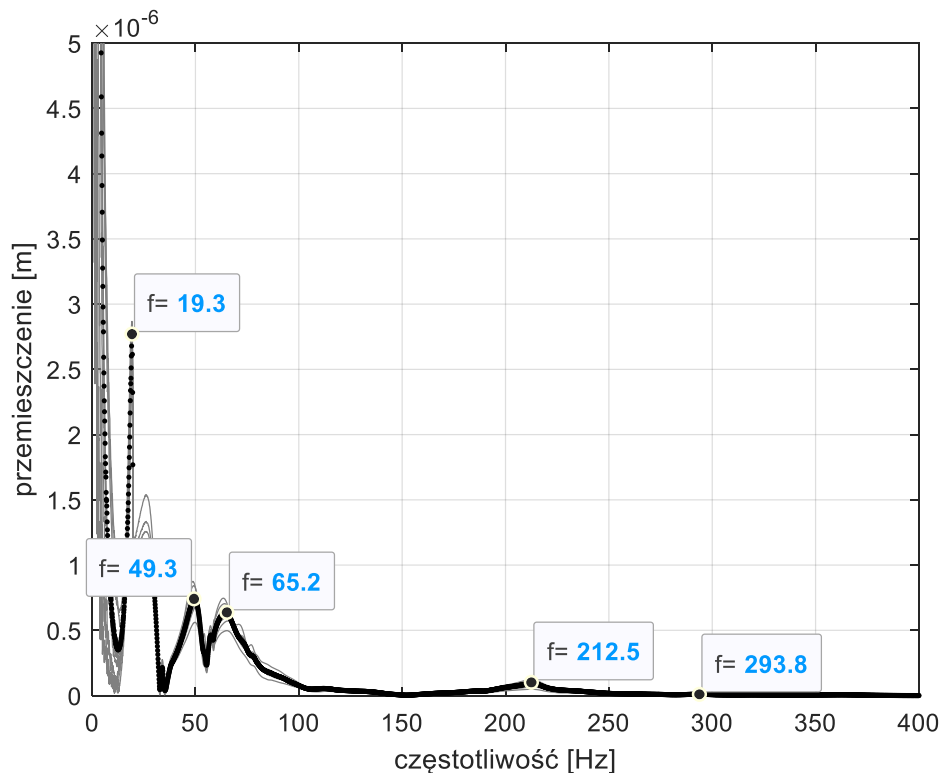
Rys. 7.18 Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = 40^\circ$ Rys. 7.19. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = 0^\circ$



Rys. 7.20. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -100^\circ$



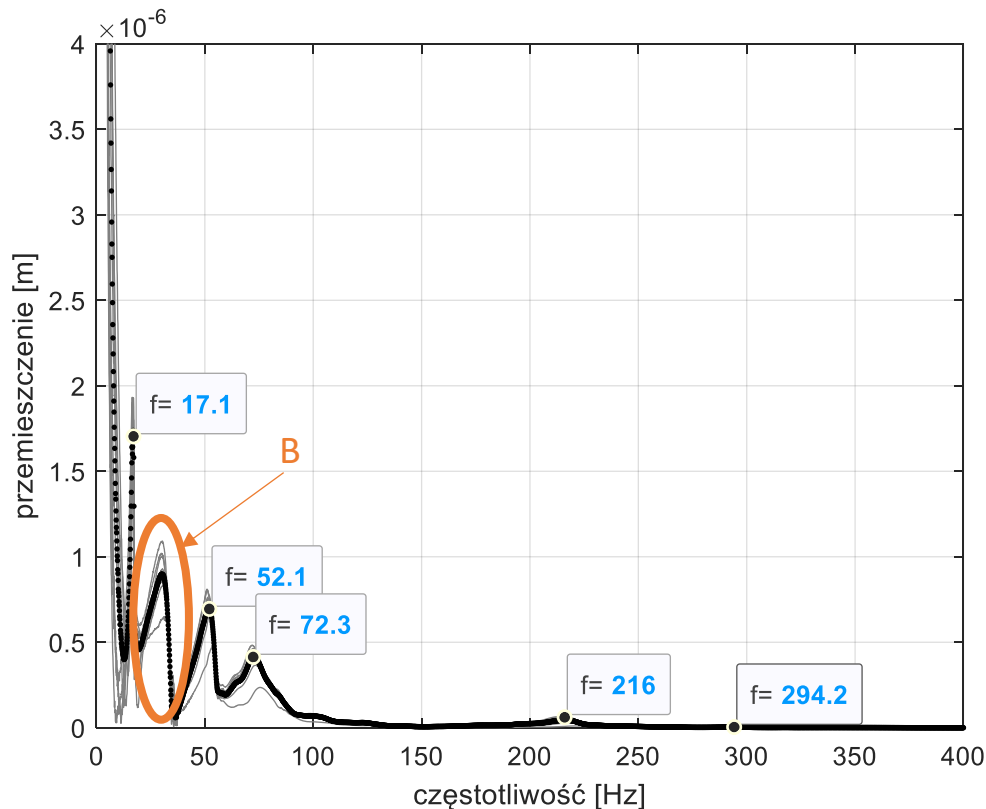
Rys. 7.21. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -150^\circ$



Rys. 7.22. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota  $\beta_2 = -200^\circ$

Na podstawie przedstawionych wykresów widać, jak wraz ze zmianą kąta  $\beta_2$  zmieniają się częstotliwości drgań rezonansowych i ich amplitudy. Przedstawienie wykresów w formie zależności przemieszczenia w funkcji częstotliwości umożliwiło prezentację istotności pobudzanych częstotliwości drgań przy danym ustawieniu kątowym robota w zależności od kąta  $\beta_2$ . Warto zauważyć, że trzy pierwsze częstotliwości mają największe znaczenie w kontekście przemieszczeń - odpowiadające im wartości amplitud wyraźnie wskazują istotnie wyższy poziom względem pozostałych. Czwarta oraz piąta częstotliwość drgań jest praktycznie niezauważalna, co czyni ich efekt pomijalnym w kontekście wpływu drgań na dokładność ruchu robota.

Analiza częstotliwościowa ujawniła obecność składowej, która nie występuje w wynikach uzyskanych na podstawie modelu. Na rys. 7.23 oznaczono kolorem pomarańczowym obszar, w którym występuje wartość pobudzonej częstotliwości dla przykładowego ustawienia kąтового robota. Został on oznaczony symbolem B. Częstotliwość ta utrzymuje się na stałym poziomie w całym rozpatrywanym zakresie zmian kąta  $\beta_2$ . Świadczy to o jej niezależności od konfiguracji kinematycznej układu.



Rys. 7.23. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym  $\beta_2 = -150^\circ$  wraz z oznaczeniem obszaru występowania dodatkowo pobudzonej częstotliwości

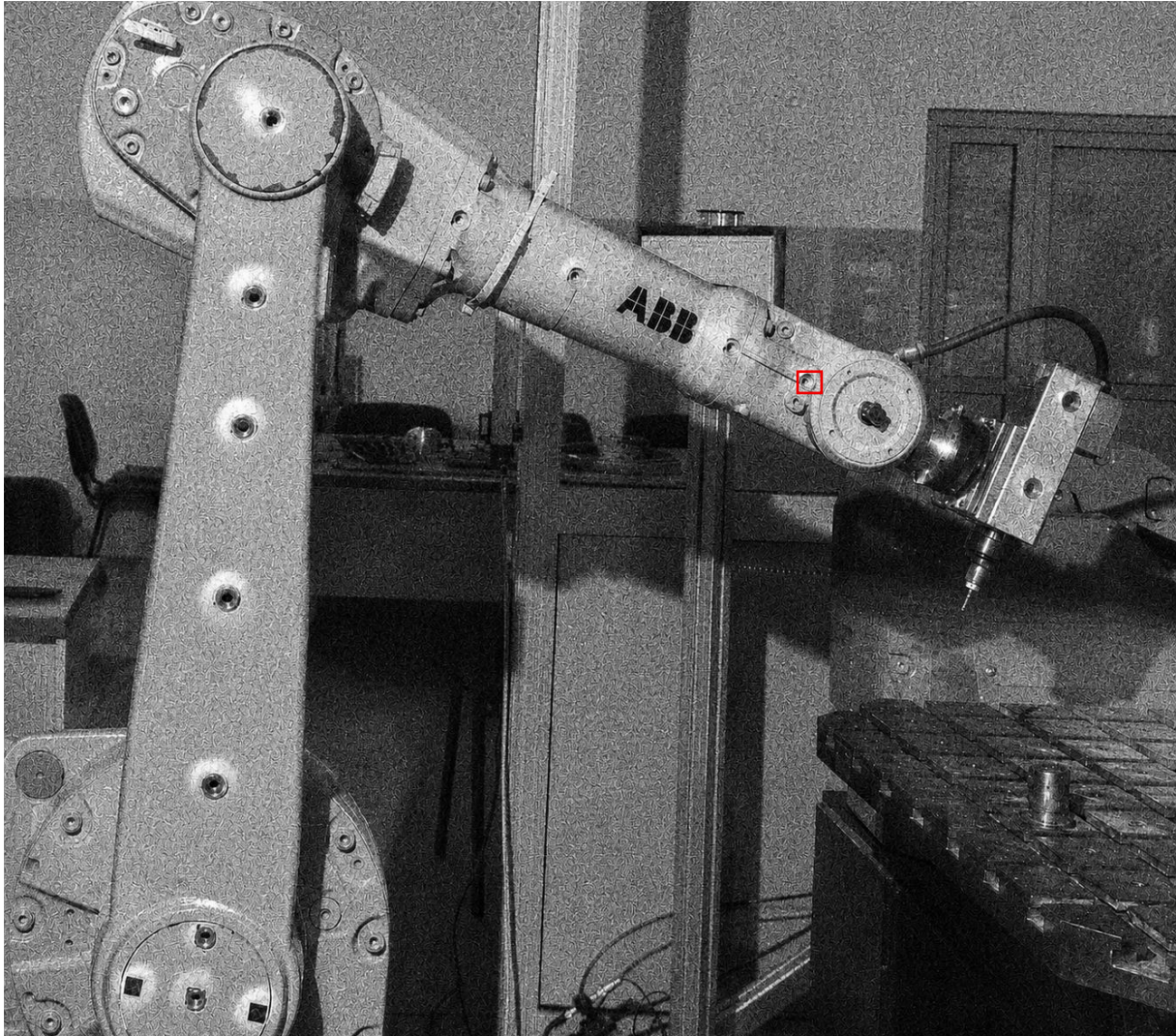
Wyjaśnieniem tego zjawiska jest podatność konstrukcji nośnej robota, tj. jego podstawy. W modelu numerycznym przyjęto założenie sztywnego zamocowania układu do podłoża, co eliminuje możliwość uwzględnienia drgań własnych podstawy lub jej interakcji z resztą konstrukcji. W rzeczywistości jednak, w przypadku tzw. sztywnego montażu, podstawa robota wykazuje jednak podatność. Drgania własne tej struktury są wzbudzone przez ruchy robota, co prowadzi do pojawienia się dodatkowych częstotliwości rezonansowych w układzie [63, 134].

### 7.3. Wizyjny pomiar drgań ramienia robota

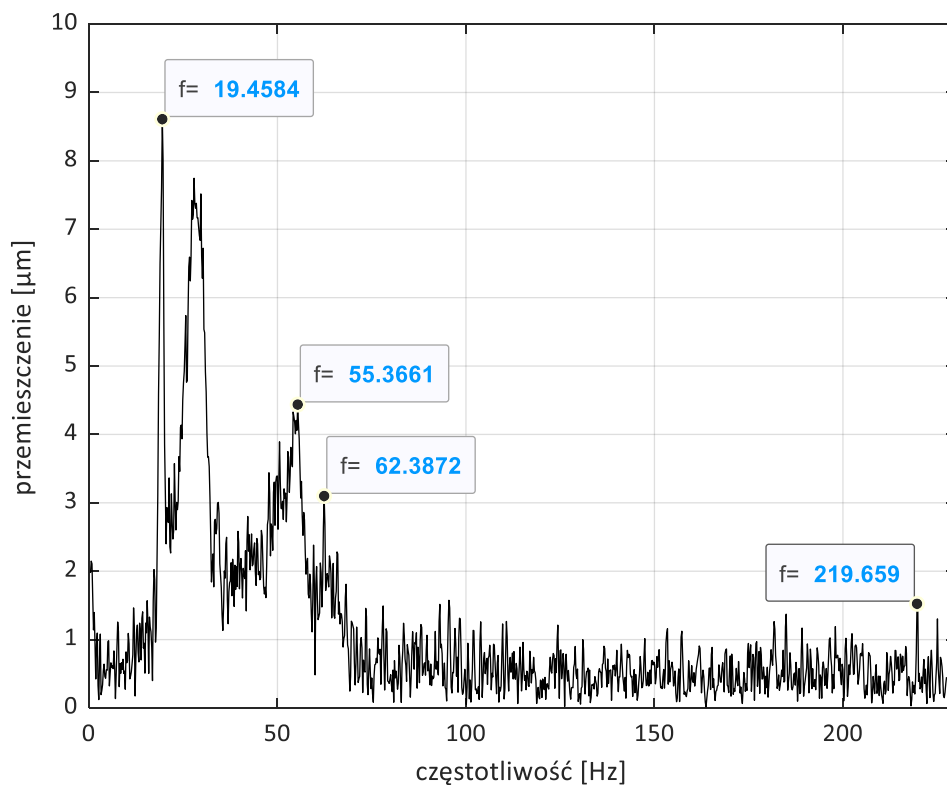
W celu analizy postaci drgań ramienia konieczne jest wykonanie wielopunktowych pomiarów drgań ramienia, w przypadku ramion robotów wielocłonowych staje się to kłopotliwe ze względu na liczbę koniecznych do zastosowania czujników pomiarowych oraz późniejszą analizę danych. Dlatego zdecydowano się na zastosowanie systemu wizyjnego, przez co można całościowo zobaczyć ruch ramienia robota i dokonać analizy postaci drgań. Można ponadto przeprowadzić szczegółowe analizy drgań w wybranych punktach ramienia robota. W tym podrozdziale przedstawiono wybrane wyniki przeprowadzonych pomiarów wizyjnych.

Na rys. 7.24 pokazano obraz stanowiący jedną klatkę z filmu zarejestrowanego przez system wizyjny. Robot został ustawiony w pozycji zdefiniowanej przez kąty  $\beta_2 = 20^\circ$  oraz

$\beta_3 = 0^\circ$ . Zaznaczono również obszar poddany dalszej analizie drgań. Na rys. 7.25 przedstawiono wykres przemieszczenia zaznaczonego na zdjęciu punktu (rys. 7.24) w zależności od częstotliwości. Czas pojedynczego przebiegu wynosił 5 sekund, przy częstotliwości rejestracji obrazu 455 klatek na sekundę oraz rozdzielczości obrazu 672×300 pikseli. Na tej podstawie wykonano analizę spektralną drgań w zakresie częstotliwości 0-227.5 Hz, z rozdzielczością częstotliwościową 0.2 Hz.



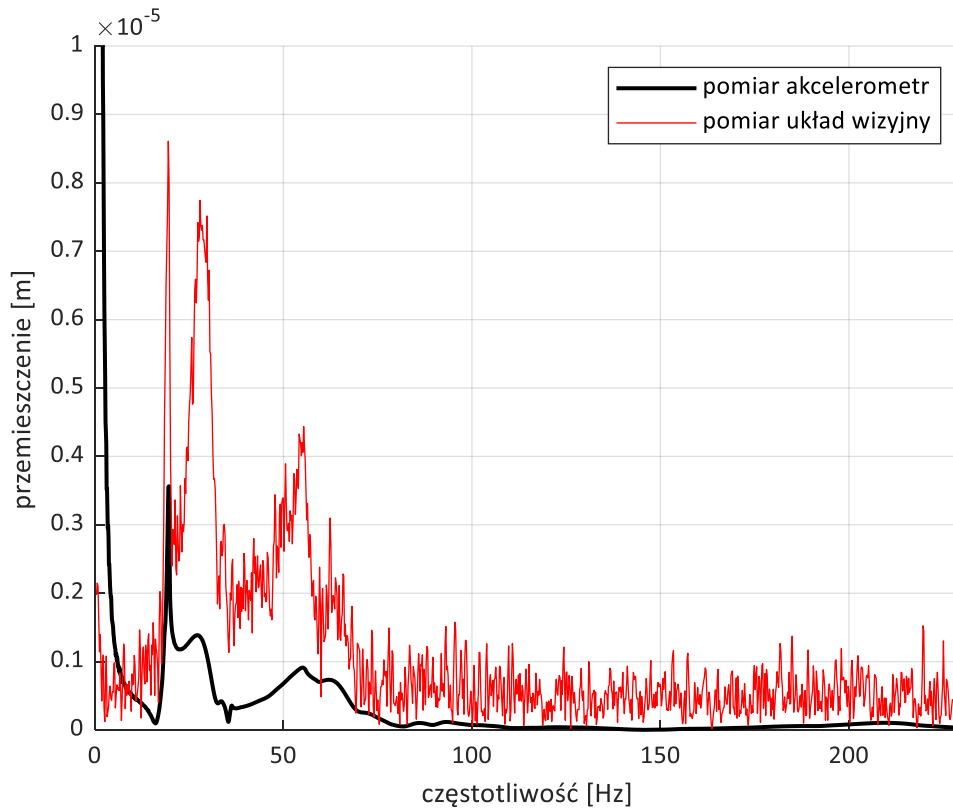
Rys. 7.24. Ramię robota z zaznaczonym obszarem do analizy drgań - klatka z filmu



Rys. 7.25. Wyniki pomiarów z zastosowaniem układu wizyjnego dla  $\beta_2 = 20^\circ$ ,  $\beta_3 = 0^\circ$

Uzyskany obraz umożliwił identyfikację czterech pobudzanych częstotliwości drgań przy danym ustawieniu kątowym robota. Wartości tych częstotliwości zostały dodatkowo oznaczone na rys. 7.25.

W celu weryfikacji poprawności wyników, na rys. 7.26 przedstawiono porównanie wyników uzyskanych z układu wizyjnego oraz akcelerometru (po dwukrotnym całkowaniu). Wyniki otrzymane na podstawie pomiarów z zastosowaniem akcelerometru oraz układu wizyjnego są zbieżne.



Rys. 7.26. Wyniki pomiarów dla ustawienia kąтового robota  $\beta_2 = 20^\circ$ ,  $\beta_3 = 0^\circ$ , uzyskane z akcelerometru oraz układu wizyjnego

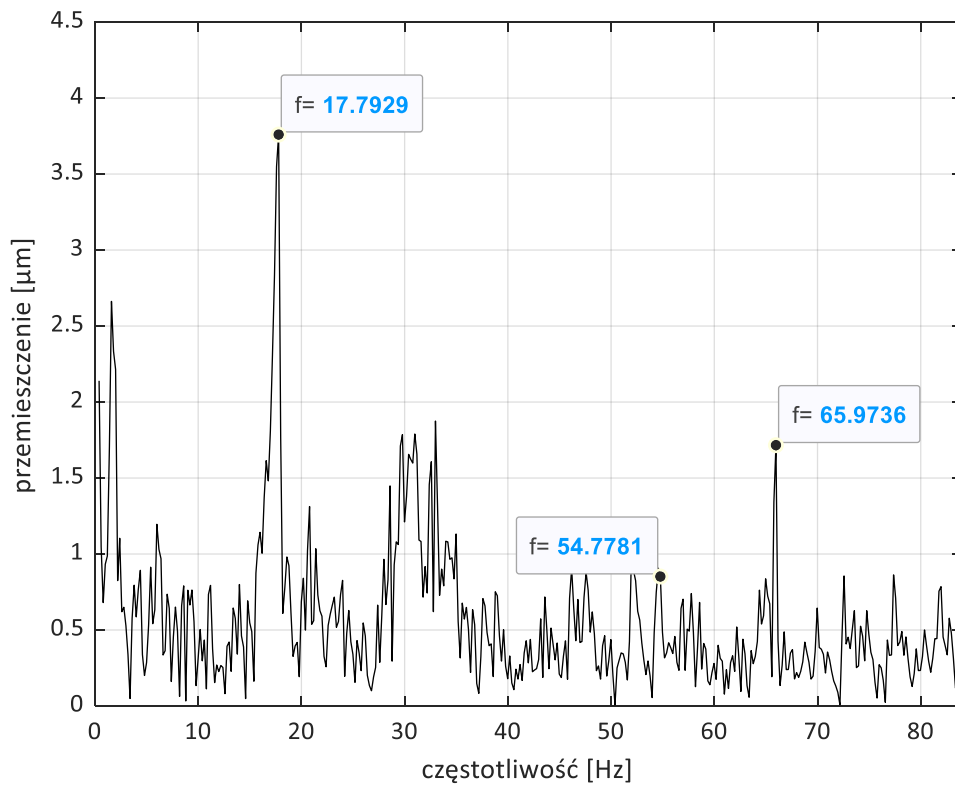
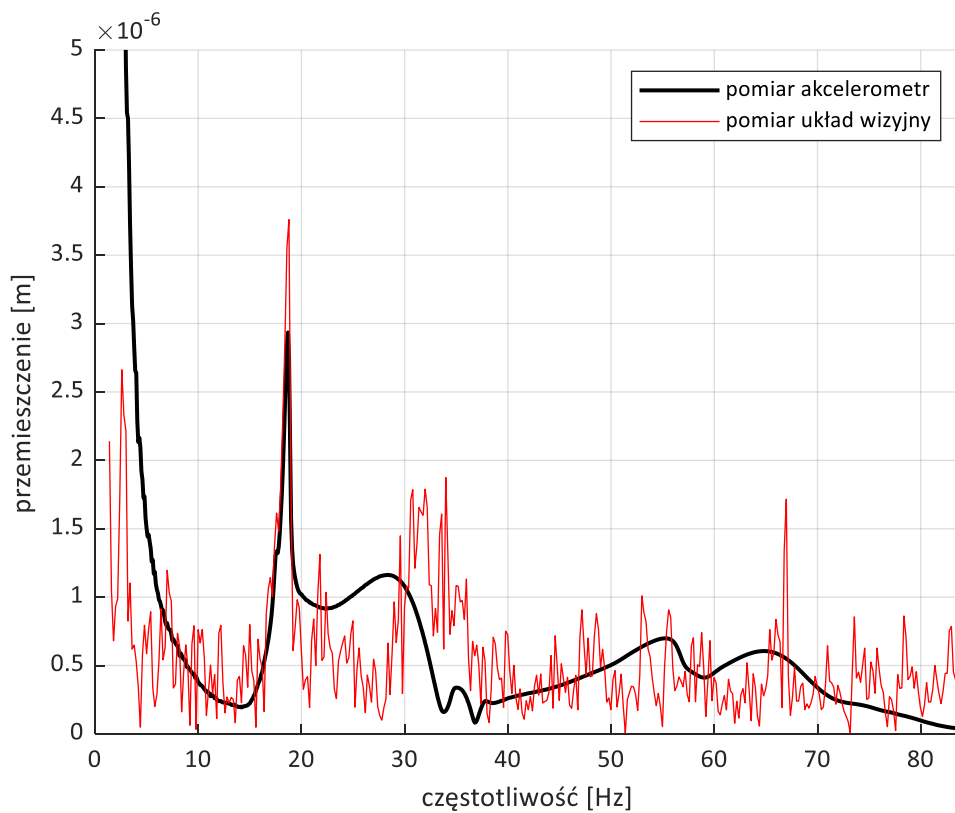
Poza przykładem zaprezentowanym na rys. 7.24 przedstawiono kolejny przypadek, dotyczący innego ustawienia kąтового robota (rys. 7.27). Pomiary wykonano przy kącie  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$ . Czas pojedynczego przebiegu wynosił 5 sekund, przy częstotliwości rejestracji obrazu 168 klatek na sekundę oraz rozdzielczości obrazu 1600×900 pikseli. Na tej podstawie wykonano analizę spektralną drgań w zakresie częstotliwości 0-84 Hz, z rozdzielczością częstotliwościową 0.2 Hz.



Rys. 7.27. Całkowite drgania ramienia robota przy ustawieniu kątowym  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$

W tym przypadku zastosowano inną rozdzielczość obrazu celem prezentacji wektorów przemieszczeń dla zarejestrowanego obrazu. W przypadku wcześniejszej konfiguracji, przy niższej rozdzielczości uzyskano większą liczbę pobudzanych częstotliwości drgań. Jednak zarejestrowany obraz nie pozwalał na klarowne przedstawienie przemieszczeń poszczególnych członów robota. Na rys. 7.27 przedstawiono jedną klatkę filmu, która prezentuje ramię robota w wybranej pozycji określonej kątami  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$ . Dodatkowo zaznaczono przemieszczenia wybranych punktów, których długości są proporcjonalne do długości strzałek.

Dla wybranego punktu robota znajdującego się na narzędziu dokonano analizy drgań, a wyniki przedstawiono na rys. 7.28 i rys. 7.29. Na pierwszym z nich pokazano częstotliwościowe widmo przemieszczeń drgań z zaznaczonymi częstotliwościami odpowiadającymi częstotliwościom drgań własnych układu liniowego. Drugi z rysunków zawiera porównanie wyników uzyskanych za pomocą pomiarów przyspieszeń i systemu wizyjnego.

Rys. 7.28. Wyniki pomiarów z zastosowaniem układu wizyjnego dla  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$ Rys. 7.29. Wyniki pomiarów dla  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$ , uzyskane z akcelerometru oraz układu wizyjnego

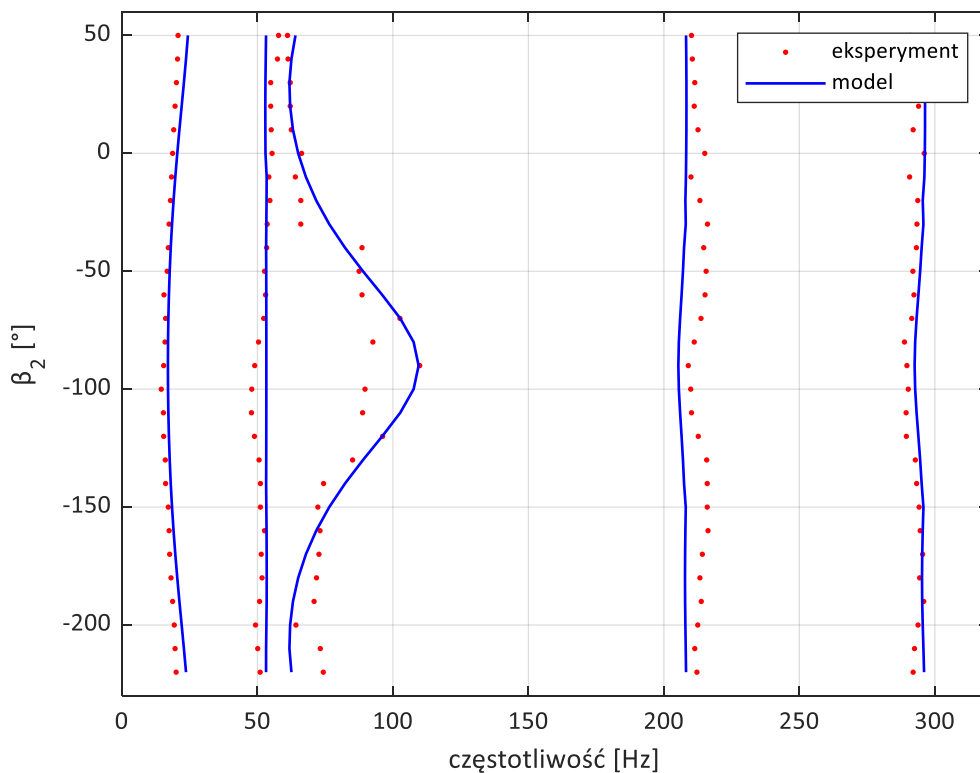
Porównanie wyników testów przeprowadzonych za pomocą dwóch niezależnych systemów wskazuje, że ich wyniki są zbieżne. Występujące różnice są nieuniknione i wynikają z takich czynników jak: różne prawa fizyki znajdujące zastosowanie w urządzeniach pomiarowych, różne zakłócenia pomiarowe wynikające z odmiennych zasad działania urządzeń pomiarowych, operacje matematyczne wykonywane na sygnale pomiarowym w celu porównania sygnałów, które reprezentują różne wielkości fizyczne (przemieszczenie, przyspieszenie), różna rozdzielczość sygnałów w dziedzinie czasu i częstotliwości.

## 8. Analiza wyników

W rozdziale tym porównano wyniki uzyskane w procesie modelowania z rezultatami badań eksperymentalnych, które wykonano na stanowisku badawczym. Celem analizy była weryfikacja poprawności opracowanego modelu dynamiki robota oraz stopnia zgodności między odpowiedzią układu rzeczywistego, a jego odwzorowania teoretycznego.

### 8.1. Częstotliwości drgań robota

W celu weryfikacji modelu dynamiki robota w odniesieniu do częstotliwości rezonansowych, na rys. 8.1 przedstawiono zestawienie częstotliwości drgań rezonansowych uzyskanych na podstawie obliczeń analitycznych oraz pomiarów wynikających z przeprowadzonego eksperymentu na stanowisku badawczym. Dane eksperymentalne dotyczą wyników rejestrowanych za pomocą akcelerometru.



Rys. 8.1. Zestawienie wartości częstotliwości drgań rezonansowych uzyskanych z modelu analitycznego oraz badań eksperymentalnych

Celem sprawdzenia jak zbieżne były wyniki uzyskane z pomiaru na stanowisku laboratoryjnym z wynikami modelu analitycznego wyznaczono błąd względny. Wartość błędu dla danych przedstawionych na rys. 8.1 obliczono zgodnie ze wzorem (8.1) [135, 136], porównując wyniki modelu analitycznego z danymi eksperymentalnymi:

$$\delta_{iae} = \frac{|\Delta f_i|}{|f_i|} = \frac{|f_{ia} - f_{ie}|}{|f_{ie}|} \cdot 100\%, \text{ gdzie } i=1\dots5 \quad (8.1)$$

gdzie

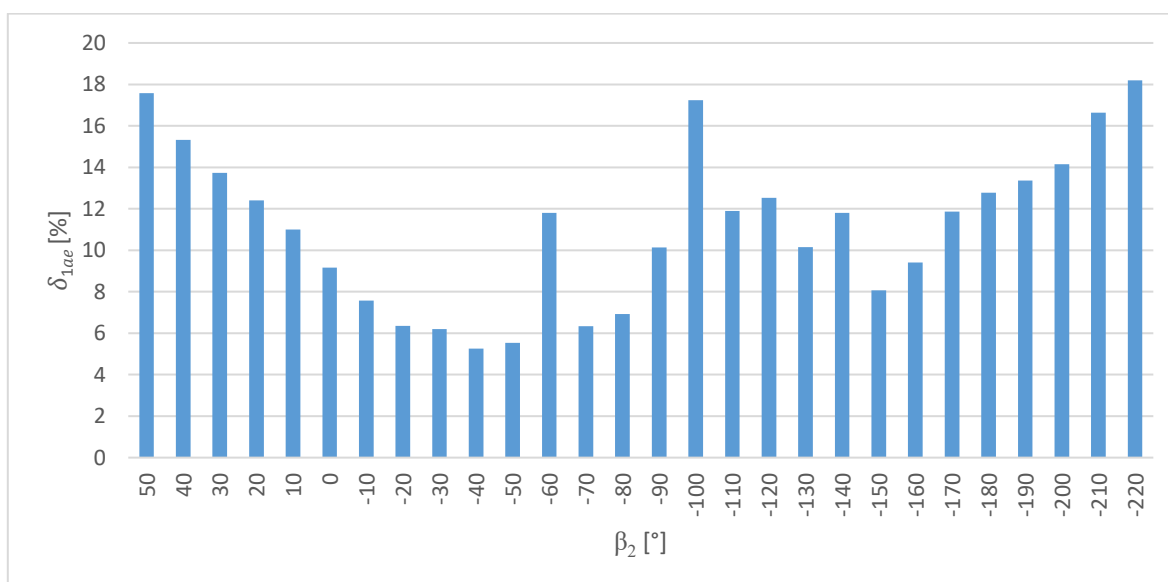
$\delta_{iae}$  – błąd względny dla i-tej częstotliwości,

$\Delta f_i$  – błąd bezwzględny dla i-tej częstotliwości,

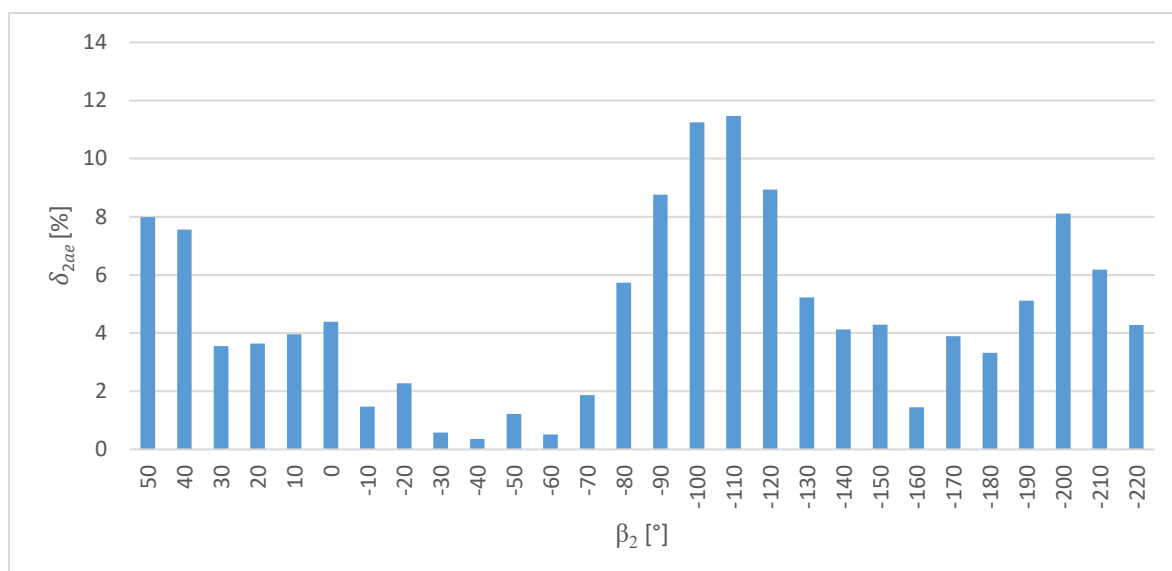
$f_{ia}$  – wartość i-tej częstotliwości wyznaczona na podstawie modelu analitycznego,

$f_{ie}$  – wartość i-tej częstotliwości wyznaczona eksperymentalnie.

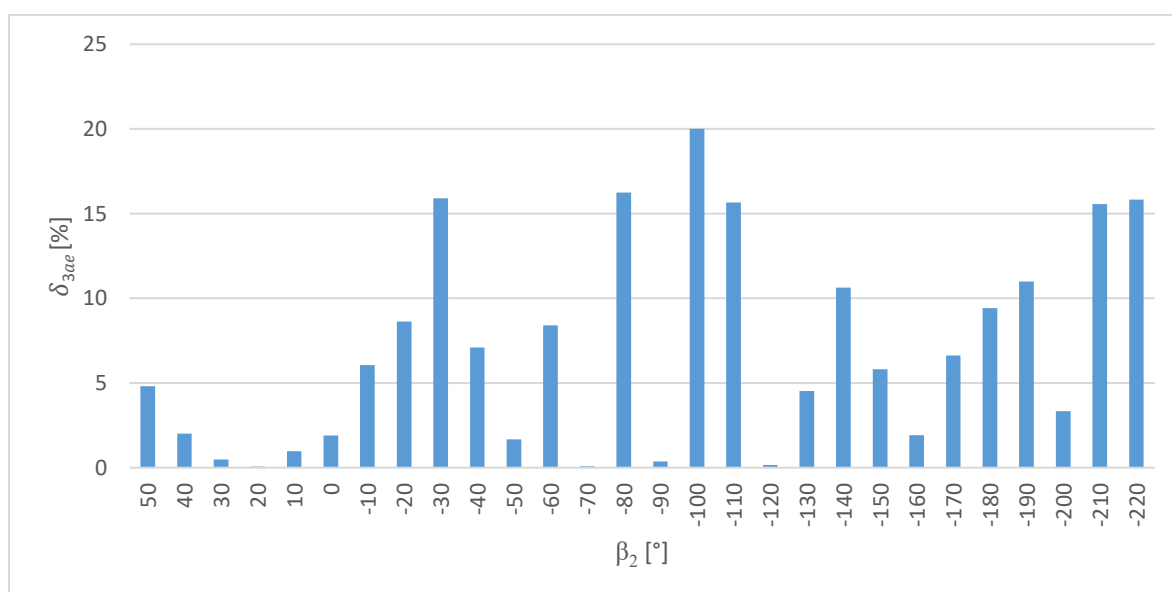
Na rysunkach rys. 8.2 - rys. 8.6 przedstawiono wartości błędów względnych dla każdej z pięciu pobudzanych częstotliwości drgań, natomiast ich szczegółowe wartości liczbowe zamieszczono w dodatku 2. Umożliwiają one ocenę dokładności uzyskanych wyników względem wartości referencyjnych tj. eksperymentalnych. Taka forma prezentacji pozwala na przejrzystą analizę rozrzutu danych oraz identyfikację obszarów, w których model wykazuje największe odchylenia.



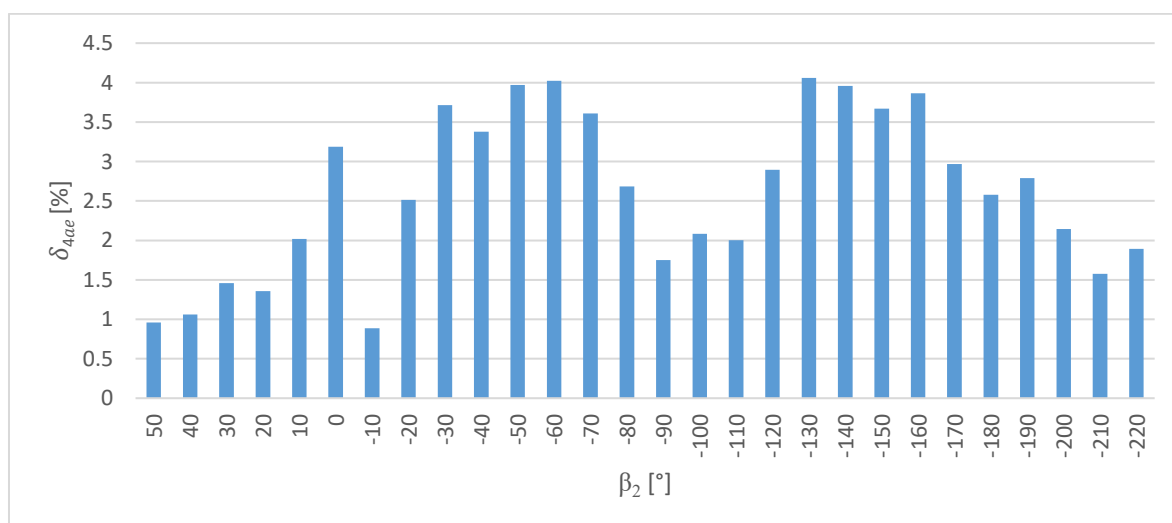
Rys. 8.2. Wartości błędów względnych dla pierwszej częstotliwości drgań



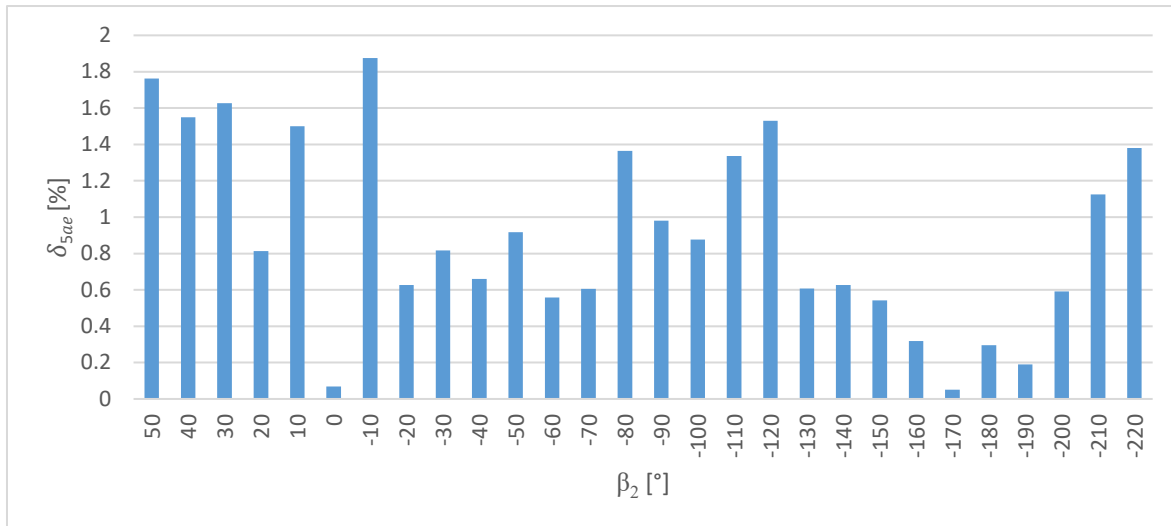
Rys. 8.3. Wartości błędu względnego dla drugiej częstotliwości drgań



Rys. 8.4. Wartości błędu względnego dla trzeciej częstotliwości drgań



Rys. 8.5. Wartości błędu względnego dla czwartej częstotliwości drgań



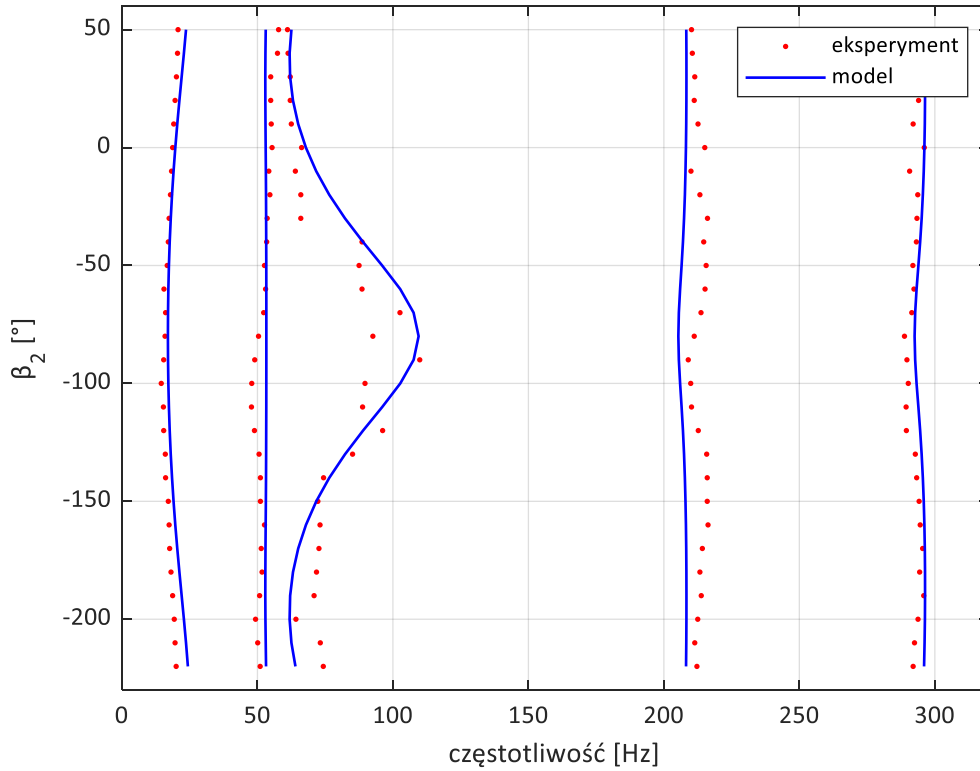
Rys. 8.6. Wartości błędu względnego dla piątej częstotliwości drgań

Wartości błędu uzyskane dla pierwszej częstotliwości drgań mieszczą się w przedziale 5.26%-18.2%, co wskazuje na zauważalne, lecz akceptowalne rozbieżności między wynikami pomiarowymi, a wartościami modelowymi. Dla drugiej częstotliwości wartości błędu mieszczą się w zakresie 0.356-11.46%. W przypadku trzeciej częstotliwości wartości błędów są największe i wynoszą 0.09-20%. Dla czwartej częstotliwości wartości błędu mieszczą się w przedziale 0.88-4.058%. Natomiast dla piątej częstotliwości wartości błędu są najniższe spośród analizowanych i mieszczą się w zakresie 0.051-1.875%. Niska wartość błędu świadczy o bardzo dobrej zgodności modelu z danymi eksperymentalnym w uwzględnianym zakresie częstotliwości.

Przeprowadzona analiza wykazała zróżnicowaną zgodność modelu analitycznego z rzeczywistymi wynikami pomiarów dla poszczególnych częstotliwości drgań. Największe rozbieżności stwierdzono dla pierwszej i trzeciej częstotliwości, co może wynikać z uproszczeń przyjętych w opisie lub obecności zakłóceń pomiarowych. Niewielkie błędy uzyskane dla czwartej i piątej częstotliwości sugerują, że w tych zakresach model odwzorowuje dynamikę układu z dużą dokładnością.

Po przeprowadzeniu analizy błędów względnych pomiędzy wynikami uzyskanymi z modelu analitycznego, a danymi eksperymentalnymi, kolejnym etapem była ocena dokładności modelu numerycznego. Celem tej analizy było określenie, w jakim stopniu model numeryczny odwzorowuje rzeczywiste zachowanie układu.

Na rys. 8.7 przedstawiono porównanie wartości częstotliwości drgań, uzyskanych na podstawie obliczeń numerycznych oraz pomiarów eksperymentalnych na rzeczywistym stanowisku badawczym. Taka forma prezentacji pozwala na bezpośrednią ocenę zgodności obu zbiorów danych oraz identyfikację ewentualnych rozbieżności wynikających z przyjętych uproszczeń modelowych.



Rys. 8.7. Zestawienie wartości częstotliwości drgań uzyskanych na podstawie obliczeń numerycznych oraz badań eksperymentalnych

Na podstawie danych przedstawionych na rys. 8.7 wyznaczono błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych i badań eksperymentalnych według wzoru (8.2). Uzyskane wartości błędów względnych zawarto w dodatku 3.

$$\delta_{i_{ne}} = \frac{|\Delta f_i|}{|f_i|} = \frac{|f_{in} - f_{ie}|}{|f_{ie}|} \cdot 100\%, \text{ gdzie } i=1\dots 5 \quad (8.2)$$

gdzie

$\delta_{i_{ne}}$  – błąd względny dla  $i$ -tej częstotliwości,

$\Delta f_i$  – błąd bezwzględny dla  $i$ -tej częstotliwości,

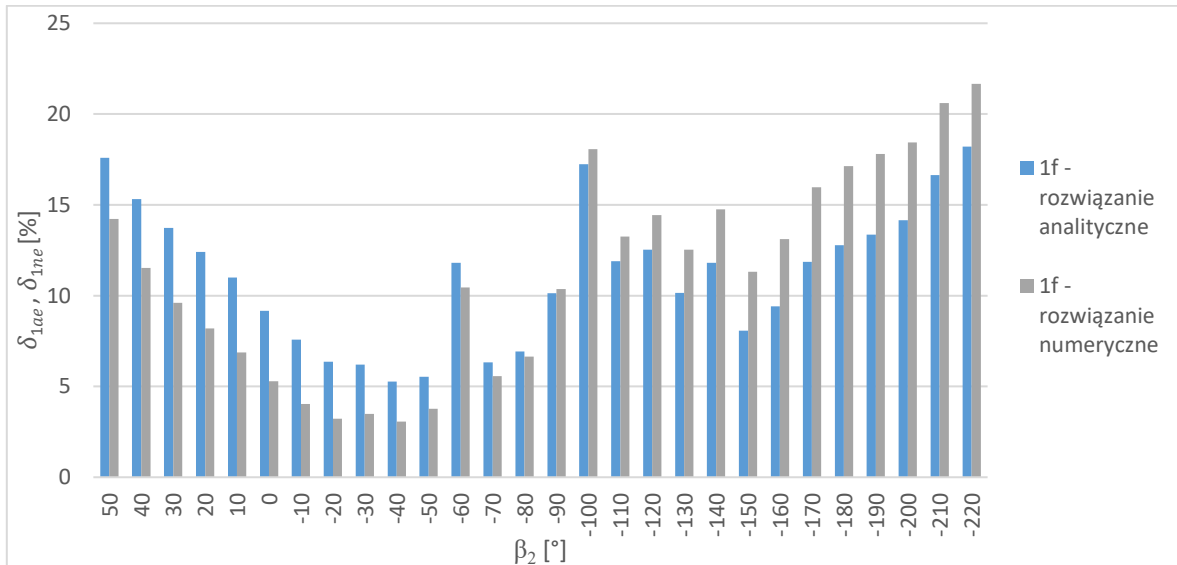
$f_{in}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości wyznaczona na podstawie modelu numerycznego,

$f_{ie}$  – wartość  $i$ -tej częstotliwości wyznaczona eksperymentalnie.

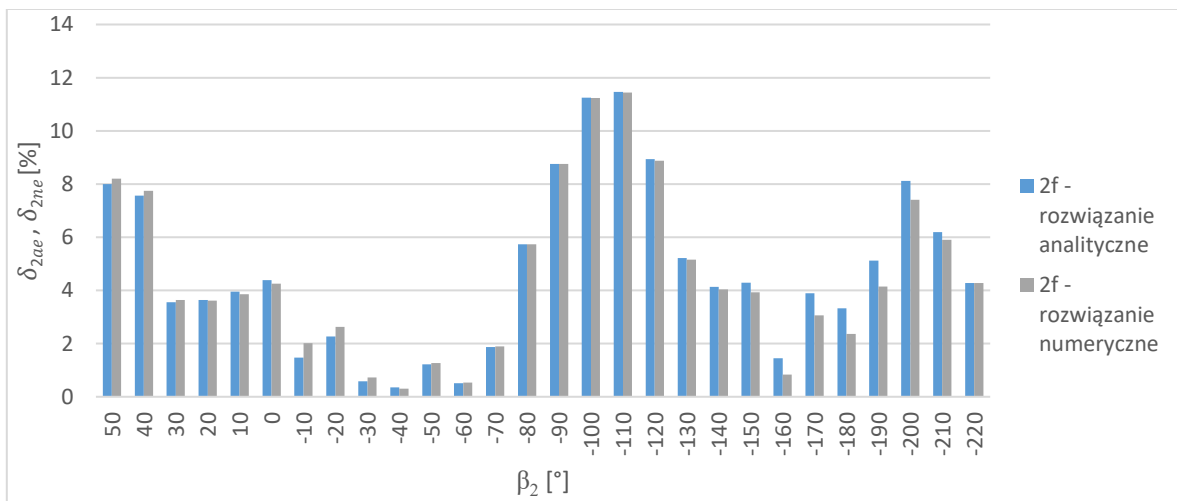
Na podstawie przeprowadzonej analizy wyznaczono błędy względne pomiędzy wynikami modeli analitycznego i numerycznego, a wynikami eksperymentalnymi. Porównanie uzyskanych wartości pozwala ocenić wpływ uproszczeń modelu polegających na pominięciu macierzy  $\mathbf{C}$  oraz wpływu wektora  $\boldsymbol{\alpha}$  w macierzy  $\mathbf{M}$  na dynamiczne równania ruchu. Analiza ta pozwala określić, w jakim stopniu obecność tych składników wpływa na dokładność odwzorowania rzeczywistego zachowania badanego układu mechanicznego. Porównanie błędów względnych uzyskanych w obu przypadkach umożliwia również ocenę przydatności metod analitycznych i numerycznych w kontekście modelowania zjawisk dynamicznych.

Umożliwia to wskazanie, które z podejść cechuje się większą precyzją odwzorowania zachowania układu oraz może stanowić podstawę do dalszej poprawy modelu.

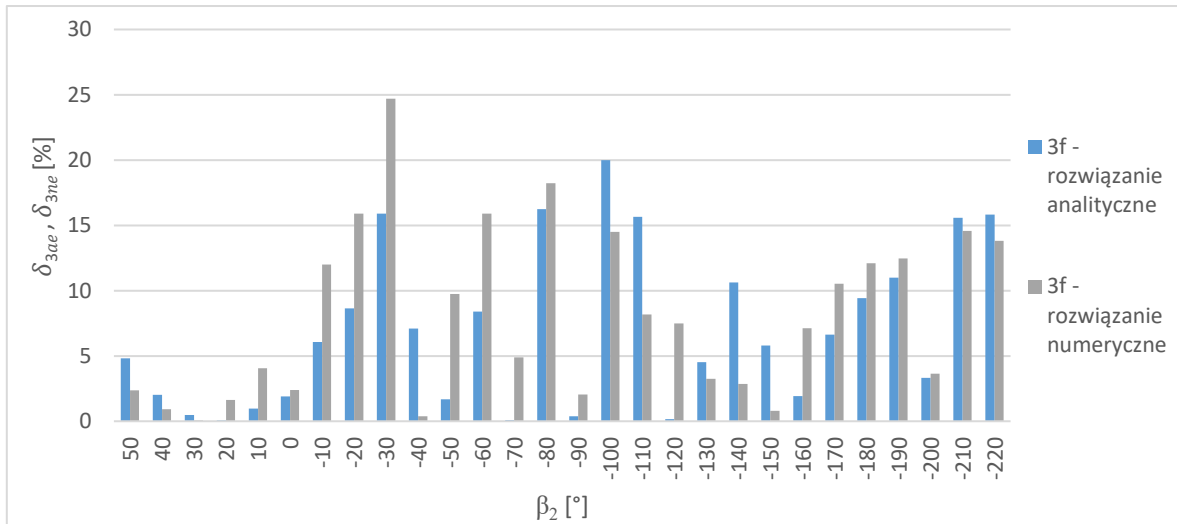
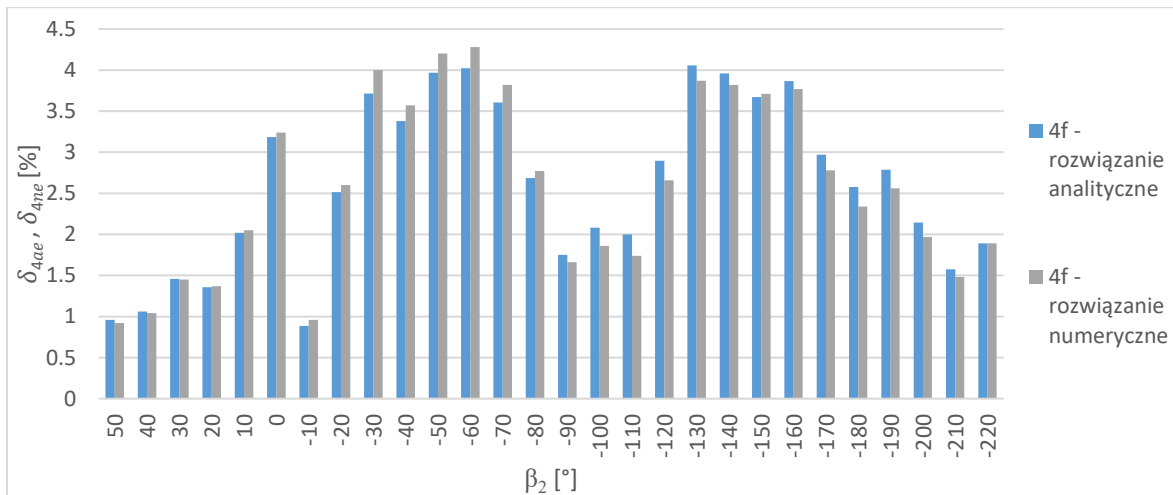
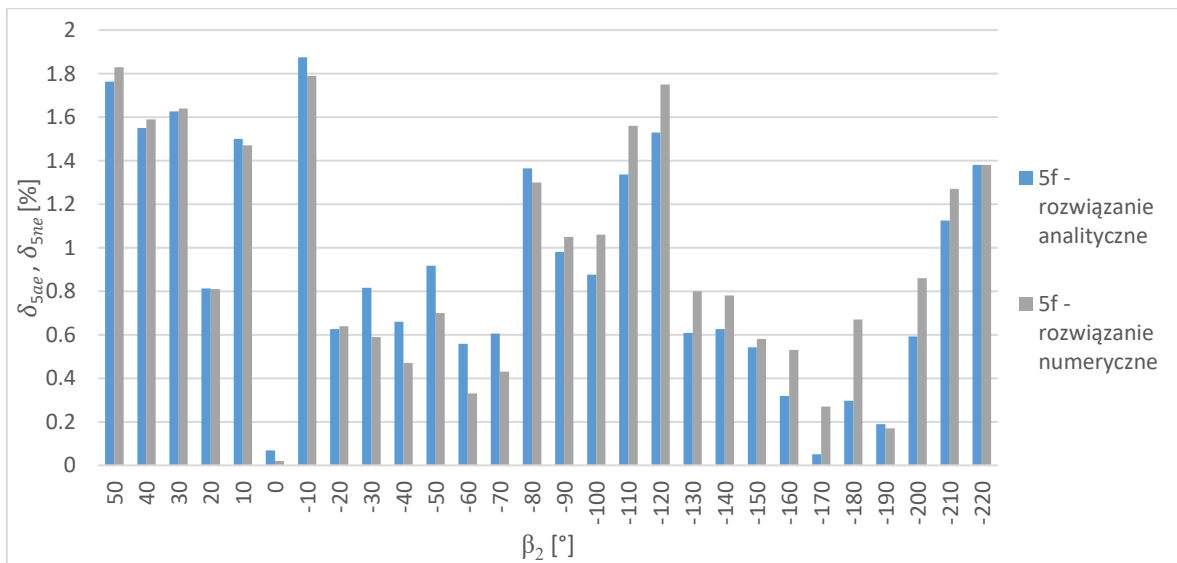
W celu lepszego zobrazowania różnic pomiędzy wynikami uzyskanymi z modelu analitycznego oraz numerycznego oraz ich zgodności z danymi eksperymentalnymi w dalszej części rozdziału przedstawiono wykresy błędów względnych dla każdej z analizowanych częstotliwości drgań (rys. 8.8 do rys. 8.12). Graficzne porównanie umożliwia łatwiejszą identyfikację rozbieżności oraz ocenę, które z podejść – analityczne czy numeryczne lepiej odwzorowuje rzeczywiste zachowanie badanego układu.



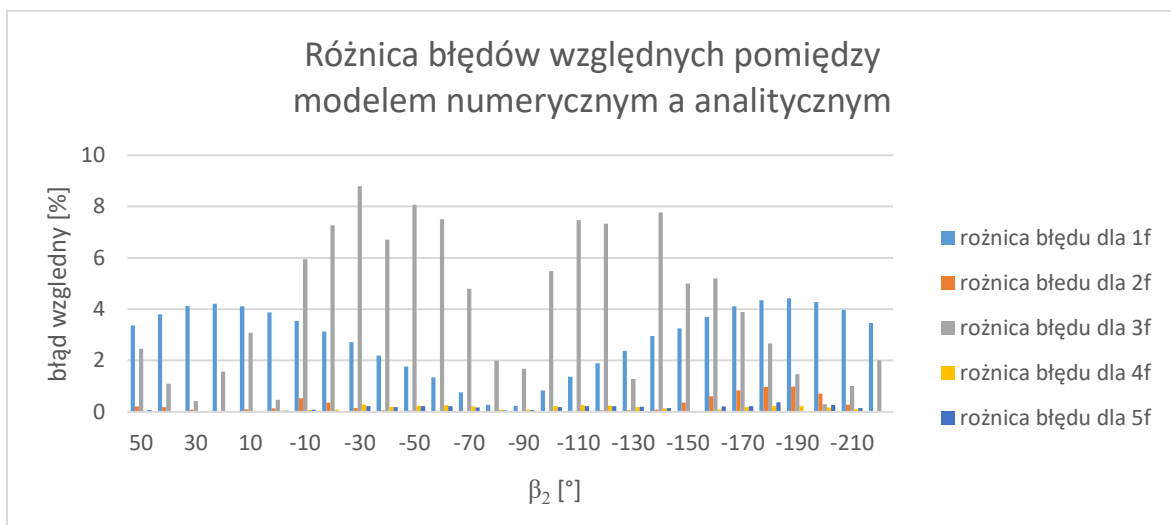
Rys. 8.8. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{1ae}, \delta_{1ne}$ ) dla pierwszej częstotliwości rezonansowej



Rys. 8.9. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{2ae}, \delta_{2ne}$ ) dla drugiej częstotliwości rezonansowej

Rys. 8.10. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{3ae}$ ,  $\delta_{3ne}$ ) dla trzeciej częstotliwości rezonansowejRys. 8.11. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{4ae}$ ,  $\delta_{4ne}$ ) dla czwartej częstotliwości rezonansowejRys. 8.12. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{5ae}$ ,  $\delta_{5ne}$ ) dla piątej częstotliwości rezonansowej

Wartości błędu względnego pomiędzy wynikami obliczeń numerycznych a danymi eksperymentalnymi dla poszczególnych częstotliwości drgań wykazują zauważalne zróżnicowanie. Dla pierwszej częstotliwości drgań mieszczą się one w przedziale od 3.07% do 21.66%, natomiast dla drugiej wynoszą od 0.3% do 11.44%. W przypadku trzeciej częstotliwości zakres błędu jest najszerszy i wynosi od 0.06% do 24.7%. Dla czwartej częstotliwości wartości błędu mieszczą się w zakresie od 0.92% do 4.28%, zaś dla piątej – od 0.02% do 1.83%, co wskazuje na najwyższą zgodność modelu numerycznego z danymi pomiarowymi w tym zakresie. Na rys. 8.13 zestawiono różnice wartości błędów względnych obliczonych dla modelu numerycznego oraz analitycznego względem wyników eksperymentalnych. Przedstawiona analiza umożliwia bezpośrednie porównanie dokładności odwzorowania zachowania badanego układu.



Rys. 8.13. Wykres przedstawiający porównanie błędu względnego pomiędzy wynikami uzyskanymi na podstawie eksperymentu a dwoma wersjami modelu: analitycznego oraz numerycznego

Na podstawie wykresu (rys. 8.13), przedstawiającego wartości błędu względnego dla każdej z pięciu pobudzanych częstotliwości drgań, wskazano na niewielkie różnice wartości błędu. Świadczy to o niewielkim wpływie macierzy  $C$  oraz wektora  $\alpha$  w macierzy  $M$  na otrzymane wyniki.

Zaobserwować można wyraźną symetrię względem wartości  $\beta_2 = -80^\circ$  co sugeruje, że wpływ kąta  $\beta_2$  na dokładność odwzorowania wyników jest powtarzalny i zależy głównie od ustawienia kąтового członów względem siebie. Taka symetria wynika z obecności symetrii w strukturze mechanicznej układu i strukturze matematycznej modelu.

Największe różnice błędów względnych zaobserwowano dla trzeciej częstotliwości drgań, co może wskazywać, że w tym zakresie drgań model analityczny nie odwzorowuje dostatecznie dobrze właściwości dynamicznych układu, np. przez pominięcie efektów tłumienia, nieliniowości geometrycznych lub innych zjawisk fizycznych. Dla wyższych częstotliwości (czwartej i piątej) różnice są minimalne, co potwierdza wysoką zgodność obu modeli w tym zakresie.

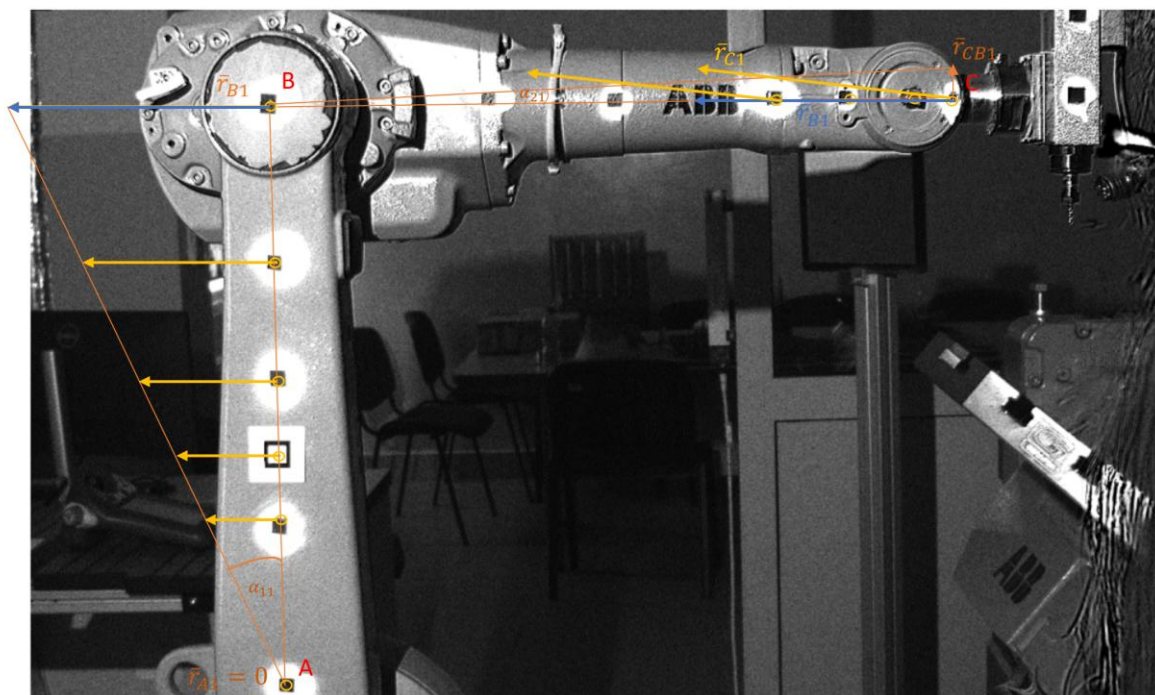
Zestawienie to stanowi istotne uzupełnienie wcześniejszej analizy, ukazując nie tylko bezwzględne wartości błędów, ale również ich poprawę po zastosowaniu bardziej zaawansowanego modelu numerycznego.

## 8.2. Postacie drgań robota

Analiza postaci drgań ramienia robota polegała na porównaniu wybranych wyników uzyskanych z modelu analitycznego z wynikami uzyskanymi za pomocą systemu wizyjnego. W dysertacji, w celu przedstawienia sposobu analizy, zaprezentowano przypadek przedstawiony na rys. 7.27 dotyczący ramienia robota w ustawieniu kątowym  $\beta_2 = \beta_3 = 0^\circ$ . Zaznaczono tam całkowite przemieszczenia wybranych punktów ramienia robota. Za pomocą oprogramowania RDI Motion Amplification wykonano transformację Fouriera drgań wybranego punktu robota. Uzyskano widmo zawierające trzy główne składowe częstotliwościowe. Następnie dokonano filtrację zarejestrowanych obrazów wideo i uzyskano trzy składowe obrazy zawierające poszczególne postaci drgań odpowiadające trzem występującym częstotliwościom. Pojedyncze, wybrane klatki wideo pokazano na kolejnych rysunkach.

Rys. 8.14 pokazuje pierwszy mod drgań, rys. 8.15 – drugi mod drgań, a rys. 8.16 - trzeci mod drgań. Na rysunkach znajdują się wyznaczone programowo przemieszczenia wybranych punktów ramienia. Następnie dodano:

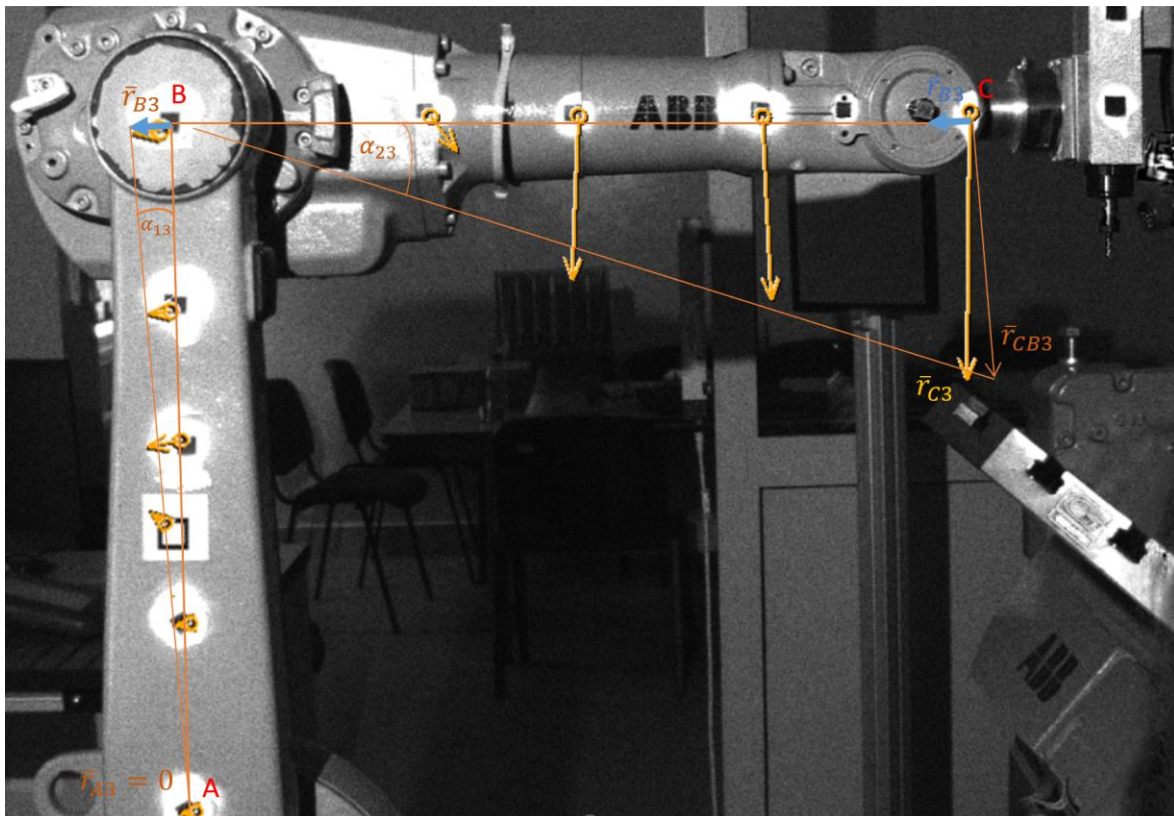
- oznaczenia charakterystycznych punktów ramienia A, B i C;
- wektory przemieszczeń tych punktów  $\vec{r}_{Ai}$ ,  $\vec{r}_{Bi}$  i  $\vec{r}_{Ci}$  dla  $i$ -tego modu;
- wektor przemieszczenia względnego punktu C względem punktu B  $\vec{r}_{CBi}$  dla  $i$ -tego modu;
- kąty obrotu członów  $\alpha_{1i}$  i  $\alpha_{2i}$  dla  $i$ -tego modu.



Rys. 8.14. Drgania ramienia robota dla pierwszego modu drgań



Rys. 8.15. Drgania ramienia robota dla drugiego modu drgań



Rys. 8.16. Drgania ramienia robota dla trzeciego modu drgań

Wektor przemieszczenia punktu A dla i-tego modu drgań wynosi  $\bar{r}_{Ai} = 0$ . Przemieszczenie  $\bar{r}_{Bi}$  punktu B zostało określone na podstawie analizy obrazu i jest różne od zera dla każdego modu drgań. Na podstawie rozkładu przemieszczeń członu 1 wyznaczono kąt  $\alpha_{1i}$ , opisujący drgania kątowe członu 1 względem punktu A. Przemieszczenie punktu C w i-tym modzie drgań jest równe:  $\bar{r}_{Ci} = \bar{r}_{Bi} + \bar{r}_{CBi}$ , gdzie  $\bar{r}_{CBi}$  jest przemieszczeniem względnym punktu C względem punktu B. Wprowadzenie przemieszczenia względnego umożliwiło wyznaczenie kąta obrotu  $\alpha_{2i}$ , opisującego drgania kątowe członu 2 względem punktu B.

Na podstawie rys. 8.14, rys. 8.15 i rys. 8.16 wyznaczono stosunek długości wektorów przemieszczeń dla oznaczonych punktów w układzie (znaczników). Otrzymane długości wektorów umożliwiły wyznaczenie ilorazów kątów  $\frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{1i}}$  dla kolejnych modów drgań. Wyniki przedstawiają się następująco:

- dla pierwszego modu drgań:  $\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{11}} = 0.129$ ;
- dla drugiego modu drgań:  $\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{12}} = -2.32$ ;
- dla trzeciego modu drgań:  $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}} = -7.75$ .

Przeprowadzona analiza rozkładu przemieszczeń pokazuje, że pierwszy mod drgań polega na obrocie ogni w tych samych kierunkach, natomiast drugi oraz trzeci mod drgań polega na obrocie ogni w przeciwnych kierunkach. Wyznaczone wartości ilorazów kątów wskazują na istotne różnice w udziale poszczególnych członów robota w drganiach własnych. Dla pierwszego modu drgań przeważający udział ma pierwszy człon, podczas gdy drugi człon

wykonuje jedynie niewielkie wychylenia kątowe. W przypadku drugiego modu drgań sytuacja jest odwrotna, drgania drugiego członu są wyraźnie większe niż amplitudy drgań pierwszego członu. Dla trzeciego modu drgań stosunek  $\frac{\alpha_{23}}{\alpha_{13}} = -7.75$  wskazuje na bardzo silne wychylenia drugiego członu przy minimalnych przemieszczeniach pierwszego. Jest to typowe dla wyższych modów drgań, w których energia drgań koncentruje się w elementach układu o mniejszych masach i masowych momentach bezwładności.

Uzyskane wyniki pozwalają na ocenę charakteru drgań własnych robota oraz identyfikację elementów podatnych na odkształcenia. Informacje te są istotne z punktu widzenia dalszej analizy dynamicznej układu. Mogą stanowić podstawę do optymalizacji procesów zrobotyzowanych ze względu na drgania.

Wyniki uzyskane eksperymentalnie porównano z wynikami analizy numerycznej przeprowadzonej w środowisku MATLAB. W tym celu dokonano porównania stosunku amplitud kątów  $\frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{1i}}$  oraz parametrów  $\frac{b_i}{b_1}$  dla trzech pierwszych modów drgań. Różnice pomiędzy wartościami przedstawiono za pomocą błędu względnego. Otrzymane wyniki zestawiono w tabeli 8.1.

Tabela 8.1. Porównanie wyników pomiarów oraz badań modelowych

Mod drgań	$\frac{\alpha_{2i}}{\alpha_{1i}}$ – układ pomiarowy	$\frac{b_i}{b_1}$ - model	Błąd względny [%]
1	0.129	0.124	4
2	-2.32	-2.917	20.4
3	-7.75	-10.39	25.4

Porównanie wyników wskazuje na bardzo dobrą zgodność dla pierwszego modu drgań, gdzie różnica wynosi około 4%. W przypadku drugiego oraz trzeciego modu różnice są większe i mieszczą się w zakresie od 20-25%. Wartość błędu może być wynikiem niedokładności odczytu wektorów na rysunku bądź uroszczeń przyjętych przy analizie z zastosowaniem układu wizyjnego. Zarówno w przypadku obliczeń oraz pomiarów zachowany został znak ujemny dla drugiego oraz trzeciego modu drgań, co potwierdza że człony robota wykonują drgania w przeciwnych kierunkach. W obu przypadkach tj. na podstawie wyników z pomiarów oraz wyników obliczeń uzyskane wartości są zgodne jakościowo.

## 9. Podsumowanie

### 9.1. Podsumowanie pracy

Praca przedstawia wyniki badań dotyczące wpływu konfiguracji robota ABB IRB 1600/1.45 na częstotliwości rezonansowe, definiowanej jako kątowe położenie członów. W ramach prowadzonych prac sformułowano dynamiczne równania ruchu, które uwzględniały ruch oscylacyjny członów wynikający z podatności przegubów.

Analiza charakterystyk częstotliwości drgań własnych uzyskanych metodą analityczną wykazała, że trzy pierwsze częstotliwości są silnie zależne od ustawienia kątowego członu drugiego. Z kolei wpływ ustawienia kątowego członu trzeciego w niskich pasmach częstotliwości jest niewielki. Dla czwartej i piątej częstotliwości własnej zaobserwowano odwrotną zależność. Dominujący wpływ miało ustawienie kątowe członu trzeciego, natomiast wpływ ustawienia kątowego członu drugiego jest mniejszy, jednak zależny od ustawienia kątowego członu trzeciego.

Analiza widm drgań uzyskanych z modelu numerycznego wykazała, że zmiana konfiguracji kątowej ramienia znacząco wpływa na wartości częstotliwości rezonansowych. Największy wpływ na wartości częstotliwości rezonansowych ma ustawienie członów 1–3, co wynika z ich dominującego udziału masowo-bezwładnościowego w dynamice całego układu. Natomiast ustawienie członów 4 i 5 ma znacząco mniejszy wpływ na zjawiska rezonansowe.

Badania eksperymentalne przeprowadzone z zastosowaniem akcelerometru potwierdziły wyniki uzyskane na podstawie modelu. Dodatkowo stwierdzono obecność składowej drgań, która nie występowała w modelu numerycznym ani analitycznym. Jej wartość była niezależna od kąta  $\beta_2$ , co wskazuje na zewnętrzne źródło pochodzenia np. częstotliwość własną elementu osprzętu, elementu mocującego lub pobudzenie środowiskowe.

Porównanie rozwiązań analitycznych oraz numerycznych z danymi eksperymentalnymi wykazało różnicowaną dokładność odwzorowania zachowania układu w zależności od analizowanej częstotliwości. Największe błędy względne wystąpiły dla pierwszej oraz trzeciej częstotliwości drgań. Mogą one wynikać z pominięcia w modelu efektów tłumienia, nieliniowości konstrukcji lub zakłóceń pomiarowych. W przypadku drugiej częstotliwości błędy osiągnęły umiarkowane wartości w przedziale od 0.3-11%. Dla częstotliwości czwartej oraz piątej zgodność modeli z rzeczywistymi danymi była bardzo wysoka, gdzie błędy osiągały wartość <5%. Potwierdza to wysoką dokładność odwzorowania dynamiki w wyższych pasmach. Zaobserwowano wyraźną symetrię błędów względem kąta  $\beta_2 = -80^\circ$ , co wskazuje na istnienie powtarzalnej konfiguracji kinematycznej układu oraz powtarzalności właściwości dynamicznych przy zmianach położenia.

Dodatkowym etapem weryfikacji poprawności modelu były badania przeprowadzone z wykorzystaniem układu wizyjnego. Analiza wyników uzyskanych tą metodą potwierdziła

ogólną zgodność jakościową właściwości drganiowych względem predykcji na podstawie modelu matematycznego. Różnice ilościowe mieściły się w przedziale charakterystycznym dla technik opartych na przetwarzaniu obrazu. Najwyższą zgodność uzyskano dla pierwszej postaci drgań, podczas gdy dla drugiej i trzeciej postaci odnotowano większe odchylenia rzędu 20-25%.

Wyniki uzyskane z układu wizyjnego, mimo pewnych różnic ilościowych, wspierają wniosek o prawidłowości przyjętego modelu oraz potwierdzają powtarzalność obserwowanych zjawisk dynamicznych.

## 9.2. Wnioski

Zdefiniowany cel pracy został zrealizowany. Przeprowadzone badania pozwoliły kompleksowo ocenić wpływ konfiguracji robota na jego właściwości drganiowe. Opracowany model matematyczny umożliwił wyznaczenie częstotliwości rezonansowych oraz odpowiadających im postaci drgań w szerokim zakresie ustawień kątowych. Analizy numeryczne wykazały wyraźną zależność parametrów dynamicznych od konfiguracji robota. Skuteczność modelu została potwierdzona poprzez badania eksperymentalne, obejmujące zarówno pomiary z zastosowaniem akcelerometru, jak i obserwację drgań z wykorzystaniem układu wizyjnego. Zbieżność wyników numerycznych i pomiarowych mimo naturalnych różnic ilościowych wynikających z uproszczeń modelu oraz zakłóceń pomiarowych – potwierdza trafność przyjętej metodyki oraz prawidłowe odwzorowanie rzeczywistych zjawisk dynamicznych. Zaobserwowano również konfiguracje robota, w których amplituda drgań ulega znacznemu zwiększeniu, co jednoznacznie wskazuje na istotny wpływ ustawienia członów na podatność układu na rezonans.

Wyniki badań pozwoliły nie tylko na ilościową ocenę częstotliwości drgań własnych w zależności od położenia ramion, ale również na jakościowe określenie tendencji i zależności rządzących dynamiką układu. Przedstawiona analiza modalna umożliwiła określenie najbardziej podatnych na drgania konfiguracji robota.

## 9.3. Kierunki dalszych prac badawczych

Zidentyfikowane zjawiska dynamiczne otwierają drogę do podjęcia dalszych działań badawczych dotyczących dynamiki robota przemysłowego z uwzględnieniem aspektu drgań. W dalszych pracach zasadne jest rozwinięcie modelu uwzględniając dodatkowe aspekty oraz jego weryfikacja w kontekście zrobotyzowanych procesów, np. obróbki elementów o różnych parametrach technologicznych. Możliwe jest kontynuowanie badań w następujących kierunkach:

1. Uwzględnienia tłumienia w modelu dynamicznym. W dalszych pracach konieczne jest rozszerzenie modelu o tłumienie, co umożliwi bardziej wiarygodne przewidywanie amplitud drgań w układzie rzeczywistym. Tłumienie wynikające m.in.

z tarcia w przekładniach, elastyczności materiałów oraz algorytmów sterowania ma istotny wpływ na poziom drgań obserwowany podczas pracy robota.

2. Modelowania interakcji robota z otoczeniem. Rozszerzenie analizy o siły wynikające z kontaktu narzędzia z przedmiotem obrabianym co pozwoli opisać zachowanie układu podczas rzeczywistych procesów produkcyjnych.
3. Analizy wpływu parametrów obróbki na dynamikę układu. Badania mogą obejmować analizy zmian następujących parametrów procesu
  - głębokości skrawania, posuwu i prędkości obrotowej narzędzia;
  - właściwości materiału obrabianego;
  - rodzaju stosowanego narzędzia.
4. Optymalizacji trajektorii i sterowania pod kątem unikania rezonansów. Opracowanie algorytmów planowania ruchu z uwzględnieniem zjawisk drganiowych pozwoli zwiększyć precyzję pozycjonowania i poprawić jakość obróbki.
5. Rozszerzenia zakresu badań eksperymentalnych. Zastosowanie dodatkowych technik pomiarowych, takich jak wielokamerowe systemy wizyjne, skanery 3D czy czujniki siły, umożliwi dokładniejsze odwzorowanie postaci drgań oraz weryfikację modelu w warunkach obciążenia technologicznego.
6. Weryfikacji wniosków dla innych typów robotów. Przeniesienie analiz na roboty o różnej architekturze pozwoli ocenić możliwości uogólnienia opracowanej metodyki.

Dalszy rozwój badań obejmie rozszerzenie modelu o zjawiska kontaktu narzędzia z powierzchnią obrabianą oraz o efekty tłumienia, a także jego weryfikację podczas rzeczywistych procesów obróbkowych. Opracowanie bardziej predykcyjnego i wieloaspektowego modelu dynamiki robota pozwoli nie tylko poprawić dokładność odwzorowania zachowania układu, ale również sformułować praktyczne zalecenia dotyczące parametrów pracy i strategii sterowania. Przedstawione zalecenia umożliwiają poprawę jakości, wydajności oraz niezawodności procesów realizowanych z zastosowaniem robotów przemysłowych.



## Bibliografia

- [1] Bauer, J., et al. Analysis of industrial robot structure and milling process interaction for path manipulation. In: *Process Machine Interactions: Prediction and Manipulation of Interactions between Manufacturing Processes and Machine Tool Structures*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, 245-263. doi: 10.1007/978-3-642-32448-2\_11
- [2] Sun, L., Fang, L. An approximation method for stiffness calculation of robotic arms with hybrid open-and closed-loop kinematic chains. *Advances in Mechanical Engineering*, 2018, 10.2: 1687814018761297. Doi: 10.1177/1687814018761297
- [3] Schneider, U., et al. Stiffness modeling of industrial robots for deformation compensation in machining. In: *2014 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. IEEE, 2014, 4464-4469. doi: 10.1109/IROS.2014.6943194
- [4] Klimchik, A., et al. Comparison study of industrial robots for high-speed machining. In: *Mechatronics and robotics engineering for advanced and intelligent manufacturing*. Springer International Publishing, 2016, 135-149. doi: 10.1007/978-3-319-33581-0\_11
- [5] Maffia, S., et al. Comparison between eight-axis articulated robot and five-axis CNC gantry laser metal deposition machines for fabricating large components. *Applied Sciences*, 2023, 13.9: 5259. doi: 10.3390/app13095259
- [6] Vosniakos, G.-C.; Matsas, E. Improving feasibility of robotic milling through robot placement optimisation. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2010, 26.5: 517-525. doi: 10.1016/j.rcim.2010.04.001
- [7] Deng, K., Gao, D., Zhao, C., Lu, Y. Prediction of in-process frequency response function and chatter stability considering pose and feedrate in robotic milling. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2023, 82, 102548. doi: 10.1016/j.rcim.2023.102548
- [8] Maamar, A., Gagnol, V., Le, T. P., Sabourin, L. Pose-dependent modal behavior of a milling robot in service. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2020, 107.1: 527-533. doi: 10.1007/s00170-020-04974-y
- [9] Bisu, C., et al. Dynamic behavior analysis for a six axis industrial machining robot. *Advanced Materials Research*, 2012, 423: 65-76. doi: 10.4028/www.scientific.net/AMR.423.65
- [10] Chen, C., Peng, F., Yan, R., Fan, Z., Li, Y., Wei, D. Posture-dependent stability prediction of a milling industrial robot based on inverse distance weighted method. *Procedia manufacturing*, 2018, 17: 993-1000. doi: 10.1016/j.promfg.2018.10.104

- [11] Khairudin, M., et al. Dynamic modelling and characterisation of a two-link flexible robot manipulator. *Journal of low frequency noise, vibration and active control*, 2010, 29.3: 207-219. doi: 10.1260/0263-0923.29.3.207
- [12] Ding, L., et al. Dynamic identification for industrial robot manipulators based on glowworm optimization algorithm. In: *International Conference on Intelligent Robotics and Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2017, 789-799. doi: 10.1007/978-3-319-65292-4\_68
- [13] Birk, C., Kipfmüller, M., Kotschenreuther, J. Dynamic Modeling and Analysis of Industrial Robots for Enhanced Manufacturing Precision. In: *Actuators*. MDPI, 2025, 311. doi: 10.3390/act14070311
- [14] Høifødt, H. Dynamic modeling and simulation of robot manipulators: the Newton-Euler formulation. 2011. Master's Thesis. Institutt for teknisk kybernetikk.
- [15] Hošovský, A., et al. Dynamic characterization and simulation of two-link soft robot arm with pneumatic muscles. *Mechanism and Machine Theory*, 2016, 103: 98-116. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2016.04.013
- [16] Spong, M. W., Vidyasagar, M., Pilat, Z. *Dynamika i sterowanie robotów*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1997.
- [17] Tchoń, K., et al. *Manipulatory i roboty mobilne*. Akademicka Oficyna Wydawnicza PLJ, Warszawa, 2000.
- [18] Kozłowski, K., Dutkiewicz, P., Wróblewski, W. *Modelowanie i sterowanie robotów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2012.
- [19] Craig, J. J. *Wprowadzenie do robotyki: mechanika i sterowanie*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1993.
- [20] Echeandia, S., Wensing, P. M. Numerical methods to compute the coriolis matrix and christoffel symbols for rigid-body systems. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2021, 16.9: 091004. doi: 10.1115/1.4051169
- [21] Sciavicco, L., et al. *Advanced textbooks in control and signal processing. Robotics Modelling, Planning and Control*, Springer, 2000. doi: 10.1007/978-1-84628-642-1
- [22] Safeea, M., Neto, P., Bearee, R. Robot dynamics: A recursive algorithm for efficient calculation of Christoffel symbols. *Mechanism and Machine Theory*, 2019, 142: 103589. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2019.103589
- [23] Guo, Y., et al. Vibration analysis and suppression in robotic boring process. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2016, 101: 102-110. doi: 10.1016/j.ijmachtools.2015.11.011
- [24] Liu, Y., Yu, H. A survey of underactuated mechanical systems. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7.7: 921-935. doi: 10.1049/iet-cta.2012.0505

- [25] Zhang, L., Liu, J. Adaptive boundary control for flexible two-link manipulator based on partial differential equation dynamic model. *IET Control Theory & Applications*, 2013, 7.1: 43-51. doi: 10.1049/iet-cta.2011.0593
- [26] Zhang, X., et al. PDE modeling and control of a flexible two-link manipulator. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, 13.2: 301-312. doi: 10.1109/TCST.2004.842446
- [27] Qiu, Z., Li, C., Zhang, X. Experimental study on active vibration control for a kind of two-link flexible manipulator. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 118: 623-644. doi: 10.1016/j.ymssp.2018.09.001
- [28] Faccio, M., Bottin, M., Rosati, G. Collaborative and traditional robotic assembly: a comparison model. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019, 102.5: 1355-1372. doi: 10.1007/s00170-018-03247-z
- [29] Zargarbashi, S. H. H., Khan, W., Angeles, J. Posture optimization in robot-assisted machining operations. *Mechanism and Machine Theory*, 2012, 51: 74-86. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2011.11.017
- [30] Cui, G., Li, B., Tian, W., Liao, W., Zhao, W. Dynamic modeling and vibration prediction of an industrial robot in manufacturing. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 105: 114-136. doi: 10.1016/j.apm.2021.12.031
- [31] Leonesio, M., Villagrossi, E., Beschi, M., Marini, A., Bianchi, G., Pedrocchi, N., ... & Isaev, A. Vibration analysis of robotic milling tasks. *Procedia Cirp*, 2018, 67: 262-267. doi: 10.1016/j.procir.2017.12.210
- [32] Dwivedy, S. K., Eberhard, P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review. *Mechanism and machine theory*, 2006, 41.7: 749-777. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2006.01.014
- [33] Thomsen, D. K., Sørensen, R., Balling, O., & Zhang, X. Vibration control of industrial robot arms by multi-mode time-varying input shaping. *Mechanism and Machine Theory*, 2021, 155, 104072. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2020.104072
- [34] Mulero-Martinez, J. I. An improved dynamic neurocontroller based on Christoffel symbols. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2007, 18.3: 865-879. doi: 10.1109/TNN.2007.894070
- [35] Li, D. Q., Hong, H. J., Jiang, X. L. Dynamics modeling, control system design and simulation of manipulator based on Lagrange equation. In: *Mechanism and Machine Science: Proceedings of ASIAN MMS 2016 & CCMMS 2016*. Singapore: Springer Singapore, 2016: 1129-1141. doi:10.1007/978-981-10-2875-5\_91
- [36] Sahu, V. S. D. M., Samal, P., Panigrahi, C. K. Modelling, and control techniques of robotic manipulators: A review. *Materials Today: Proceedings*, 2022, 56: 2758-2766. doi: 10.1016/j.matpr.2021.10.009

- [37] Sengalani, R., Rasool Mohideen, S. Numerical analysis of robotic manipulator subject to mechanical flexibility by Lagrangian method. Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences, 2020, 90.3: 503-513. doi: 10.1007/s40010-019-00619-2
- [38] Usoro, P. B., Nadira, R., Mahil, S. S. A finite element/Lagrange approach to modeling lightweight flexible manipulators. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1986, 108.3: 198-205. doi: 10.1115/1.3143768
- [39] Li, B., Cui, G., Tian, W., Liao, W. Vibration suppression of an industrial robot with AGV in drilling applications by configuration optimization. Applied Mathematical Modelling, 2022, 112: 614-631. doi: 10.1016/j.apm.2022.07.029
- [40] Cen, L., Melkote, S. N. CCT-based mode coupling chatter avoidance in robotic milling. *Journal of Manufacturing Processes*, 2017, 29: 50-61. doi: 10.1016/j.jmapro.2017.06.010
- [41] Mohammed, A., Schmidt, B., Wang, L., Gao, L. Minimizing energy consumption for robot arm movement. Procedia CIRP, 2014, 25: 400-405. doi: 10.1016/j.procir.2014.10.055
- [42] Hua, M. T., Poursina, M., Sanfilippo, F. Dynamic Modelling of Mixed Rigid-Flexible Joint Robotic Manipulator Using Recursive Newton-Euler Formulation. In: *2024 10th International Conference on Automation, Robotics and Applications (ICARA)*. IEEE, 2024, 165-171. doi: 10.1109/ICARA60736.2024.10553136
- [43] Zong, G., Kang, C., Chen, S. Active Vibration Avoidance Method for Variable Speed Welding in Robotic Friction Stir Welding Based on Constant Heat Input. *Materials*, 2024, 17.11: 2593. doi: 10.3390/ma17112593
- [44] Li, Bai, et al. Advances in flexible robotic manipulator systems—Part I: Overview and dynamics modeling methods. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2024, 29.2: 1100-1110. doi: 10.1109/TMECH.2024.3359067
- [45] Subedi, D., Tyapin, I., Hovland, G. Review on modeling and control of flexible link manipulators, 2020, 41.3: 141-163. doi: 10.4173/mic.2020.3.2
- [46] Li, X., Sun, H. X., Liao, L. J., Song, J. Z. Modeling and simulation research of Kane dynamics method for the 5-DOF modular industrial robot. In *2016 International Conference on Information System and Artificial Intelligence (ISAI)*, IEEE, 2016: 124-128. doi: 10.1109/ISAI.2016.0035
- [47] Doria, A., Cocuzza, S., Comand, N., Bottin, M., Rossi, A. Analysis of the compliance properties of an industrial robot with the Mozzi axis approach. *Robotics*, 2019, 8.3: 80. doi: 10.3390/robotics8030080

- [48] Suárez, M. B., Heredia, R. R. Kinematics, dynamics and evaluation of energy consumption for ABB IRB-140 serial robots in the tracking of a path. In The 2nd International Congress of Engineering Mechatronics and Automation, Bogotá DC, Colombia, 2013, 23-25.
- [49] Mousavi, S., Gagnol, V., Bouzgarrou, B. C., & Ray, P. Stability optimization in robotic milling through the control of functional redundancies. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2018, 50: 181-192. doi: 10.1016/j.rcim.2017.09.004
- [50] Swevers, J., Verdonck, W., De Schutter, J. Dynamic model identification for industrial robots. *IEEE control systems magazine*, 2007, 27.5: 58-71. doi: 10.1109/MCS.2007.904659
- [51] Li, Y., Gao, G., Na, J., Xing, Y. Error sensitivity flexibility compensation of joints for improving the positioning accuracy of industrial robots. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2024, 22: 5335-5348. doi: 10.1109/TASE.2024.3419105
- [52] Sahu, S., Choudhury, B. B., Biswal, B. B. A vibration analysis of a 6 axis industrial robot using FEA. *Materials Today: Proceedings*, 2017, 4.2: 2403-2410. doi: 10.1016/j.matpr.2017.02.090
- [53] Schneckenburger, M., et al. Monitoring and meaning of vibrations in robot polishing. *Journal of the European Optical Society-Rapid Publications*, 2023, 19.1: 11. doi: 10.1051/jeos/2023007
- [54] Gierlak, P., Warmiński, J. Analysis of bifurcation vibrations of an industrial robot arm system with joints compliance. *Applied Sciences*, 2023, 13.21: 11941. doi: 10.3390/app132111941
- [55] Do, T.-T., Vu, V.-H., Liu, Z. Linearization of dynamic equations for vibration and modal analysis of flexible joint manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 167: 104516. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.10451
- [56] Mostafaei, H., Ghamami, M. State of the Art in Automated Operational Modal Identification: Algorithms, Applications, and Future Perspectives. *Machines*, 2025, 13.1: 39. doi: 10.3390/machines13010039
- [57] Huang, J., et al. Modeling of Chatter Stability for the Robot Milling of Natural Marble. *Machines*, 2024, 12.12. doi: 10.3390/machines12120942
- [58] Du, Y., et al. Investigation on the dominant mechanism of chatter in high-load robot milling process based on theoretical and experimental analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 2025, 600: 118886. doi: 10.1016/j.jsv.2024.118886
- [59] Gienke, O., et al. Mode coupling chatter prediction and avoidance in robotic machining process. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019, 104.5: 2103-2116. doi: 10.1007/s00170-019-04053-x

- [60] Li, J., et al. Vibration prediction of the robotic arm based on elastic joint dynamics modeling. *Sensors*, 2022, 22.16: 6170. doi: 10.3390/s22166170
- [61] Yang, G., et al. A model-based PID-like motion control method for flexible-joint manipulator with harmonic drives. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2021, 235.24: 7880-7893. doi: 10.1177/09544062211036920
- [62] Shihabudheen, K. V., Jacob, J. Composite control of flexible link flexible joint manipulator. In: 2012 Annual IEEE India Conference (INDICON). IEEE, 2012, 827-831. doi: 10.1109/INDICON.2012.6420732
- [63] Ewins, D. J. *Modal testing: theory, practice and application*. Chichester: John Wiley & Sons, 2009. ISBN: 9780863802188
- [64] Richardson, M. H. Is it a mode shape, or an operating deflection shape?. *Sound and Vibration*, 1997, 31.1: 54-67.
- [65] Maia N.M.M., Silva J.M.M. *Theoretical and experimental modal analysis*, 1997.
- [66] Devriendt, C., Guillaume, P. The use of transmissibility measurements in output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2007, 21.7: 2689-2696. doi: 10.1016/j.ymssp.2007.02.008
- [67] Heylen W., Sas P. *Modal Analysis Theory and Testing*, 2006. ISBN: 9789073802612
- [68] Gonul, B., Sapmaz, O. F., Tunc, L. T. Improved stable conditions in robotic milling by kinematic redundancy. *Procedia CIRP*, 2019, 82: 485-490. Doi: 10.1016/j.procir.2019.04.334
- [69] Gagnol, V., Le, T.-P., Ray, P. Modal identification of spindle-tool unit in high-speed machining. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2011, 25.7: 2388-2398. doi: 10.1016/j.ymssp.2011.02.019
- [70] Maamar, A., Le, TP., Gagnol, V. et al. Modal identification of a machine tool structure during machining operations. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019, 102.1: 253-264. doi: 10.1007/s00170-018-3172-6
- [71] Postel, M., Aslan, D., Wegener, K., & Altintas, Y. Monitoring of vibrations and cutting forces with spindle mounted vibration sensors. *Cirp Annals*, 2019, 68.1: 413-416. doi: 10.1016/j.cirp.2019.03.019
- [72] Badkoobehhezaveh, H., Fotouhi, R., Zhang, Q., Bitner, D. Vibration analysis of a 5-DOF long-reach robotic arm. *Vibration*, 2022, 5.3: 585-602. doi: 10.3390/vibration5030034
- [73] Mejri, S., Gagnol, V., Le, TP. et al. Dynamic characterization of machining robot and stability analysis. *Int J Adv Manuf Technol* 82, 2016, 351–359. doi: 10.1007/s00170-015-7336-3

- [74] Pan, Zengxi, et al. Chatter analysis of robotic machining process. *Journal of materials processing technology*, 2006, 173.3: 301-309. doi: 10.1016/j.jmatprotec.2005.11.033
- [75] Quintana, G., Ciurana, J. Chatter in machining processes: A review. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2011, 51.5: 363-376. doi: 10.1016/j.ijmachtools.2011.01.001
- [76] Wang, C., Zheng, M., Wang, Z., Peng, C., Tomizuka, M. Robust iterative learning control for vibration suppression of industrial robot manipulators. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2018, 140.1: 011003. doi: 10.1115/1.4037265
- [77] Qian, Y., et al. Automatic chatter monitoring and modal analysis of robotic milling based on multi-joint servo current signals. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2025, 239.13: 5080-5091. Doi: 10.1177/09544062251325980
- [78] Ji, W., Wang, L. Industrial robotic machining: a review. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2019, 103.1: 1239-1255. doi: 10.1007/s00170-019-03403-z
- [79] Zimmermann, S. A., Moberg, S. Experimental Evaluation of Methods for Estimating Frequency Response Functions of a 6-axes Robot. arXiv preprint arXiv:2312.06276, 2023. doi: 10.48550/arXiv.2312.06276
- [80] Zimmermann, S. A., Enqvist, M., Gunnarsson, S., Moberg, S., & Norrlöf, M. Improving experiment design for frequency-domain identification of industrial robots. *IFAC-PapersOnLine*, 2022, 55.37: 475-480. doi: 10.1016/j.ifacol.2022.11.228
- [81] Brincker, R., Zhang, L., Andersen, P. Modal identification of output-only systems using frequency domain decomposition. *Smart materials and structures*, 2001, 10.3: 441. doi: 10.1088/0964-1726/10/3/303
- [82] Peeters, B., De Roeck, G. Stochastic system identification for operational modal analysis: a review. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, 123.4: 659-667. doi: 10.1115/1.1410370
- [83] Juang, J. N., Pappa, R. S. An eigensystem realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 1985, 8.5: 620-627. doi: 10.2514/3.20031
- [84] Hizal, Ç. FDD based modal identification of structures using least squares approach. In: *Structures*. Elsevier, 2023, 55: 1071-1083. Doi: 10.1016/j.istruc.2023.06.092
- [85] O'Connell, B. J., Rogers, T. J. A robust probabilistic approach to stochastic subspace identification. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 581, 118381. doi: 10.1016/j.jsv.2024.118381

- [86] Chen, B., Zhang, J., Wang, Y. Principal component stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2026, 249: 114071. doi: 10.48550/arXiv.2504.00317
- [87] Feng, W. H., Wu, C. Y., Fu, J. Y., Ng, C. T., He, Y. C. Automatic modal identification via eigensystem realization algorithm with improved stabilization diagram technique. *Engineering Structures*, 2023, 291, 116449. doi: 10.1016/j.engstruct.2023.116449
- [88] Moaveni, B., Masoumi, Z. Modifying the ERA and fast ERA to improve operational performance for structural system identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 120, 664-692. doi: 10.1016/j.ymsp.2018.10.036
- [89] Liu, D., Bao, Y., Li, H. Machine learning-based stochastic subspace identification method for structural modal parameters. *Engineering Structures*, 2023, 274, 115178. doi: 10.1016/j.engstruct.2022.115178
- [90] Jiao, Y., Chen, X., Peng, Y., Mao, X., Guo, Q. Autonomous modal analysis method for industrial robots considering dynamic spatial sensitivity and excitation randomness. *Scientific Reports*, 2025, 15(1), 12581. doi: 10.1038/s41598-025-95339-6
- [91] Karim, A., Hitzer, J., Lechler, A., Verl, A. Analysis of the dynamic behavior of a six-axis industrial robot within the entire workspace in respect of machining tasks. In 2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). IEEE, 2017, 670-675. doi: 10.1109/AIM.2017.8014094
- [92] Nguyen, V., Melkote, S. N. Identification of industrial robot frequency response function for robotic milling using operational modal analysis. *Procedia Manufacturing*, 2020, 48: 154-158. doi: 10.1016/j.promfg.2020.05.032
- [93] Devriendt, C., Guillaume, P. Identification of modal parameters from transmissibility measurements. *Journal of Sound and Vibration*, 2008, 314.1-2: 343-356. doi: 10.1016/j.jsv.2007.12.02
- [94] Devriendt, C., De Sitter, G., Guillaume, P. An operational modal analysis approach based on parametrically identified multivariable transmissibilities. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2010, 24.5: 1250-1259. doi: 10.1016/j.ymsp.2009.02.015
- [95] Araújo, I. G., Sánchez, J. A. G., Andersen, P. Modal parameter identification based on combining transmissibility functions and blind source separation techniques. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 105: 276-293. doi: 10.1016/j.ymsp.2017.12.016
- [96] Au, S. K. Operational modal analysis. Modeling, Bayesian Inference, Uncertainty Laws; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2017. ISBN 978-981-10-4117-4. doi: 10.1007/978-981-10-4118-1

- [97] Yuen, K. V., Kuok, S. C. Bayesian methods for updating dynamic models. *Applied Mechanics Reviews*, 2011, 64.1. doi: 10.1115/1.4004479
- [98] Beck, J. L., Katafygiotis, L. S. Updating models and their uncertainties. I: Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 1998, 124.4: 455-461. doi: 10.1061/(ASCE)0733-9399(1998)124:4(455)
- [99] Busch, M., Schnoes, F., Elsharkawy, A., Zaeh, M. F. Methodology for model-based uncertainty quantification of the vibrational properties of machining robots. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, 2022, 73, 102243. doi: 10.1016/j.rcim.2021.102243
- [100] Mottershead, J. E., Link, M., Friswell, M. I., & Schedlinski, C. Model updating. In *Handbook of experimental structural dynamics*. New York, NY: Springer New York, 2021, 1-53.
- [101] Ren, W. X., Chen, H. B. Finite element model updating in structural dynamics by using the response surface method. *Engineering structures*, 2010, 32.8: 2455-2465. doi: 10.1016/j.engstruct.2010.04.019
- [102] Friswell, M. I., Mottershead, J. E. Finite element modelling. In *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1995, 7-35.
- [103] Wu, K., et al. Review of industrial robot stiffness identification and modelling. *Applied sciences*, 2022, 12.17: 8719. doi: 10.3390/app12178719
- [104] Grabiec, J., Pajor, M., Dunaj, P. Finite element modeling of dynamic properties of the delta robot with base frame. *Materials*, 2022, 15.19: 6797. doi: 10.3390/ma15196797
- [105] Pham, M. N., Champliand, H., Liu, Z., Bonev, I. A. Parameterized finite element modeling and experimental modal testing for vibration analysis of an industrial hexapod for machining. *Mechanism and Machine Theory*, 2022, 167: 104502. doi: 10.1016/j.mechmachtheory.2021.10450
- [106] Liu, S., Wu, C., Liang, L., Zhao, B., Sun, R. Research on Vibration Suppression Methods for Industrial Robot Time-Lag Filtering. *Machines*, 2024, 12.4: 250. doi: 10.3390/machines12040250
- [107] Panigrahi, N. Inverse distance weight. In *Encyclopedia of Mathematical Geosciences*. Cham: Springer International Publishing, 2021, 1-7.
- [108] Hajela, P., Lee, E., Lin, C. Y. Genetic algorithms in structural topology optimization. In *Topology design of structures*. Dordrecht: Springer Netherlands, 1993, 227, 117-133. doi: 10.1007/978-94-011-1804-0\_10
- [109] Kennedy, J., Eberhart, R. Particle swarm optimization. In *Proceedings of ICNN'95-international conference on neural networks*. IEEE, 1995, 4: 1942-1948. doi: 10.1109/ICNN.1995.488968.

- [110] Li, X., Gu, J., Sun, X., Li, J., Tang, S. Parameter identification of robot manipulators with unknown payloads using an improved chaotic sparrow search algorithm. *Applied Intelligence*, 2022, 52.9: 10341-10351. SSA
- [111] Liu, D., Tang, Z., Bao, Y., Li, H. Machine-learning-based methods for output-only structural modal identification. *Structural Control and Health Monitoring*, 2021, 28.12: e2843. doi: 10.1002/stc.2843
- [112] Saini, R. A review on artificial neural networks for structural analysis. *Journal of Vibration Engineering & Technologies*, 2025, 13.2: 142. doi: 10.1007/s42417-024-01749-7
- [113] Zimmermann, S. A., Moberg, S., Gunnarsson, S., Enqvist, M. Using statistical linearization in experiment design for identification of robotic manipulators. *Control Engineering Practice*, 2024, 150: 106008. doi: 10.1016/j.conengprac.2024.106008
- [114] Rajendra, P., Brahmajirao, V. Modeling of dynamical systems through deep learning. *Biophysical reviews*, 2020, 12.6: 1311-1320. doi: 10.1007/s12551-020-00776-4
- [115] Hosseini, S. H. S., Hajzargarbashi, S., Liu, Z. Enhancing robotic manipulator performance through analyzing vibration, identifying deep-learning-based modal parameters, and estimating frequency response functions. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 2025, 1-23. doi: 10.1007/s00170-025-15577-w
- [116] Wang, S., Shao, X., Yang, L., Liu, N. Deep learning aided dynamic parameter identification of 6-DOF robot manipulators. *IEEE Access*, 2020, 8: 138102-138116. doi: 10.1109/ACCESS.2020.3012196
- [117] Celikag, H., Ozturk, E., Sims, N. D. Can mode coupling chatter happen in milling?. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2021, 165: 103738. doi: 10.1016/j.ijmachtools.2021.103738
- [118] Wu, K., Kuhlenkoetter, B. Experimental analysis of the dynamic stiffness in industrial robots. *Applied Sciences*, 2020, 10(23), 8332. doi: 10.3390/app10238332
- [119] Pietruś, P., Gierlak, P. Influence of the manipulator configuration on vibration effects. *acta mechanica et automatica*, 2023, 17.4: 515-522. doi: 10.2478/ama-2023-0060
- [120] Devriendt, C., Weijtjens, W., De Sitter, G., Guillaume, P. Combining multiple single-reference transmissibility functions in a unique matrix formulation for operational modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2013, 40.1: 278-287. doi: 10.1016/j.ymssp.2013.04.008
- [121] Urrea, C. Artificial Intelligence-Driven and Bio-Inspired Control Strategies for Industrial Robotics: A Systematic Review of Trends, Challenges, and Sustainable Innovations Toward Industry 5.0. *Machines*, 2025, 13.8: 666. doi: 10.3390/machines13080666

- [122] Zimmermann, S. A., Berninger, T. F., Derkx, J., Rixen, D. J. Dynamic modeling of robotic manipulators for accuracy evaluation. In 2020 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA), Paris, France. IEEE, 2020, 8144-8150, doi: 10.1109/ICRA40945.2020.9197304.
- [123] Powalka, B., Tomaszewski, J. Chatter detection and suppression system integrated with the CNC lathe. *Precision Engineering*, 2025, 94: 526-544. doi: 10.1016/j.precisioneng.2025.03.022
- [124] Bottin, M., Cocuzza, S., Comand, N., Doria, A. Modeling and identification of an industrial robot with a selective modal approach. *Applied Sciences*, 2020, 10.13: 4619. doi: 10.3390/app10134619
- [125] Angeles, J. (ed.). *Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods, and algorithms*. New York, NY: Springer New York, 2003. doi: 10.1007/978-0-387-22458-9\_4
- [126] Spong, M. W., Hutchinson S., Westervelt, E. R. Robot modeling and control [book review]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2006, 26.6: 113-115. doi: 2006ICSys..26f.113W
- [127] Denavit, J., Hartenberg, R. S. A kinematic notation for lower-pair mechanisms based on matrices. *Journal of Applied Mechanics*, 1955, 22.2: 215–221. doi: 10.1115/1.4011045
- [128] Zhang, D., Liang, H., Li, X. A., Jia, X., Wang, F. Kinematic calibration of industrial robot using Bayesian modeling framework. *Reliability Engineering & System Safety*, 2025, 253, 110543. doi: 10.1016/j.res.2024.110543
- [129] Lynch KM, Park FC. Denavit–Hartenberg Parameters. In: *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press; 2017:506-515. ISBN: 978-1-107-15630-2, doi: 10.1017/9781316661239
- [130] Prada, E. Application of Denavit Hartenberg method in service robotics. *Acta Mechatronica*, 2020, 5.4: 47-52. doi:10.22306/am.v5i4.68
- [131] Sabanovic, A., Ohnishi, K. *Motion control systems*. John Wiley & Sons, 2011. doi: 10.1002/9780470825754
- [132] Shabana, A. A. *Dynamics of multibody systems*. Cambridge university press, 2020. doi: 10.10117/9781108757553
- [133] Inman, D. J., Singh, R. C. *Engineering vibration*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1994.
- [134] Craig Jr, R. R., Kurdila, A. J. *Fundamentals of structural dynamics*. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006. ISBN 978-0-471-43044-5.
- [135] Davies, H., Davies, H.G., Hicks, G.A. *Mathematics for scientific and technical students*. Routledge, 2014. doi: 10.4324/9781315838380

- 
- [136] Howard, J. P., et al. Computational methods for numerical analysis with R. Chapman and Hall/CRC, 2017. doi: 10.1201/9781315120195
- [137] <https://shop.iautomation.com/products/IRB%201600-6kg,%201.45m%20%20IRC5%20Controller> dostęp (13.06.2023)
- [138] <https://www.ects.pl/produkt/akcelerometr-model-333d01/> dostęp (10.11.2025)
- [139] <https://www.ects.pl/produkt/mlotek-uderzeniowy-model-086c03/> dostęp (13.06.2023)
- [140] <https://carolinamotioncontrols.com/content/abb-robotics/IRB-1600/ABB-IRB1600-Datasheet.pdf> dostęp (13.06.2023)
- [141] <https://spindlerepair.com/product/pds-adev-42/> dostęp (17.06.2025)
- [142] [https://www.ati-ia.com/products/ft/ft\\_models.aspx?id=delta](https://www.ati-ia.com/products/ft/ft_models.aspx?id=delta) dostęp (23.03.2026)

## Dodatki

### Dodatek 1

$$c_{111} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$\begin{aligned} c_{121} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} \\ &= m_2 l_1 l_{c2} \sin(\beta_2 + \alpha_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\ &\quad + m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\ &\quad + m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_5 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\ &\quad + m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ &\quad + m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{131} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} \\ &= -m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ &\quad - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\ &\quad - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\ &\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{141} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} \\ &= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ &\quad - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{151} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_5} \\ &= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\ &\quad - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{211} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} \\ &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(\beta_2 + \alpha_2) - m_3 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) - m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\ &\quad - m_4 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\ &\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\ &\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{221} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_1} \\
&= -m_2 l_1 l_{c2} \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\
&\quad - m_3 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\
&\quad - m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_4 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{231} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{241} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{24}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \cos(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{251} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{25}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \cos(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{311} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} \\
&= -m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{321} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{331} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} \\
&= -m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) - m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) m_4 l_3^2 - m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) - m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{341} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_1} \right) = \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{351} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_1} \right) = \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{411} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{421} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{42}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_4 \cos(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{431} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{43}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{441} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_1} \\
&= -m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) - m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{451} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{511} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{51}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_5} \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{521} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{52}}{\partial \alpha_1} \right) = \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \cos(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{531} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{53}}{\partial \alpha_1} \right) \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{541} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{54}}{\partial \alpha_1} \right) = \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{551} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_5} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_1} \\
&= -m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
&\quad - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{112} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_2} \\
&= m_2 l_1 l_{c2} \sin(\beta_2 + \alpha_2) + m_3 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\
&\quad + m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\
&\quad + m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_5 l_1 l_2 \sin(\beta_2 + \alpha_2) \\
&\quad + m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{122} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_1} = 0
\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}
c_{552} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{25}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{25}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{\partial m_{25}}{\partial \alpha_5} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_2} \\
&= -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{113} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} = -\frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_3} \\
&= m_3 l_1 l_{c3} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) \\
&\quad + m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad + m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_1 l_3 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23}) + m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{123} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_3} \right) \\
&= m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{133} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} = 0 \\
c_{143} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{153} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_3} \right) = m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{213} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial \alpha_3} \right) \\
&= m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{223} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{22}}{\partial \alpha_3} \\
&= m_3 l_2 l_{c3} \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad + m_4 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) + m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_5 l_2 l_3 \sin(\beta_3 + \alpha_3) \\
&\quad + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{233} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{23}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_2} = 0 \\
c_{243} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{24}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{253} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{25}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{313} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_1} = 0 \\
c_{323} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_2} = 0 \\
c_{333} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_3} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{343} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_4} \\
&= -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{353} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_3} + \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_5} = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{413} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{423} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{42}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{433} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{43}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{443} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_4} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_3} \\
&= -m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) - m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{453} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{513} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{31}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{51}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{523} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{32}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{52}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{533} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{53}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{33}}{\partial \alpha_5} = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{543} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{34}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{54}}{\partial \alpha_3} \right) = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{553} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_3} \right) = \frac{\partial m_{35}}{\partial \alpha_5} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_3} = -m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) - m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5) \\
c_{114} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} \right) = \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial m_{11}}{\partial \alpha_4} \\
&= m_4 l_1 l_{c4} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) + m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) + m_5 l_1 l_4 \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_1 l_{c5} \sin(\beta_{23} + \alpha_{23} + \alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{124} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{42}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{12}}{\partial \alpha_4} \right) \\
&= m_4 l_2 l_{c4} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) + m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_2 l_4 \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4) \\
&\quad + m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) + m_5 l_2 l_{c5} \sin(\beta_3 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{134} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{43}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{13}}{\partial \alpha_4} \right) = m_4 l_3 l_{c4} \sin(\alpha_4) + m_5 l_3 l_4 \sin(\alpha_4) + m_5 l_3 l_{c5} \sin(\alpha_4 + \alpha_5) \\
c_{144} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{14}}{\partial \alpha_4} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{44}}{\partial \alpha_1} = 0 \\
c_{154} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial m_{41}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{15}}{\partial \alpha_4} \right) = -m_5 l_4 l_{c5} \sin(\alpha_5)
\end{aligned}$$





$$c_{455} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_4} + \frac{\partial m_{54}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{45}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_4} = 0$$

$$c_{515} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{51}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial m_{51}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_1} = 0$$

$$c_{525} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{52}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial m_{52}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_2} = 0$$

$$c_{535} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{53}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_3} - \frac{\partial m_{53}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_3} = 0$$

$$c_{545} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{54}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_4} - \frac{\partial m_{54}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_4} = 0$$

$$c_{555} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_5} + \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_5} - \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_5} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial m_{55}}{\partial \alpha_5} = 0$$

## Dodatek 2

Tabela D2.1. Błąd względny wyznaczony na podstawie różnicy między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu analitycznego a wynikami eksperymentalnymi dla pierwszej częstotliwości

Kąt [°]	Kąt [rad]	1f eksperyment [Hz]	1f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	20.7	24.34	17.58
40	0.6981	20.5	23.64	15.32
30	0.5236	20.1	22.86	13.73
20	0.3491	19.6	22.032	12.41
10	0.1745	19.1	21.2	10.99
0	0	18.7	20.413	9.16
-10	-0.1745	18.3	19.687	7.58
-20	-0.3491	17.9	19.0385	6.36
-30	-0.5236	17.4	18.48	6.21
-40	-0.6981	17.1	18	5.26
-50	-0.8727	16.7	17.624	5.53
-60	-1.0472	15.5	17.33	11.81
-70	-1.2217	16.1	17.12	6.34
-80	-1.3963	15.9	17	6.92
-90	-1.5708	15.4	16.96	10.13
-100	-1.7453	14.5	17	17.24
-110	-1.9199	15.3	17.12	11.90
-120	-2.0944	15.4	17.33	12.53
-130	-2.2689	16	17.624	10.15
-140	-2.4435	16.1	18	11.80
-150	-2.618	17.1	18.48	8.07
-160	-2.7925	17.4	19.0385	9.42
-170	-2.9671	17.6	19.687	11.86
-180	-3.1416	18.1	20.413	12.78
-190	-3.3161	18.7	21.2	13.37
-200	-3.4907	19.3	22.032	14.16
-210	-3.6652	19.6	22.86	16.63
-220	-3.8397	20	23.64	18.20

Tabela D2.2. Błąd względny wyznaczony na podstawie różnicy między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu analitycznego a wynikami eksperymentalnymi dla drugiej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	2f eksperyment [Hz]	2f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	57.8	53.18	7.99
40	0.6981	57.4	53.058	7.56
30	0.5236	54.9	52.95	3.55
20	0.3491	54.9	52.9	3.64
10	0.1745	55.1	52.92	3.96
0	0	55.4	52.97	4.39
-10	-0.1745	54.2	53.4	1.48
-20	-0.3491	54.6	53.36	2.27
-30	-0.5236	53.6	53.29	0.58
-40	-0.6981	53.4	53.21	0.36
-50	-0.8727	52.6	53.242	1.22
-60	-1.0472	53	53.27	0.51
-70	-1.2217	52.3	53.28	1.87
-80	-1.3963	50.4	53.29	5.73
-90	-1.5708	49	53.29	8.76
-100	-1.7453	47.9	53.29	11.25
-110	-1.9199	47.8	53.28	11.46
-120	-2.0944	48.9	53.27	8.94
-130	-2.2689	50.6	53.242	5.22
-140	-2.4435	51.1	53.21	4.13
-150	-2.618	51.1	53.29	4.29
-160	-2.7925	52.6	53.36	1.44
-170	-2.9671	51.4	53.4	3.89
-180	-3.1416	51.7	53.42	3.33
-190	-3.3161	50.8	53.4	5.12
-200	-3.4907	49.3	53.3	8.11
-210	-3.6652	50.1	53.2	6.19
-220	-3.8397	51	53.18	4.27

Tabela D2.3. Błąd względny wyznaczony na podstawie różnicy między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu analitycznego a wynikami eksperymentalnymi dla trzeciej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	3f eksperyment [Hz]	3f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	61.1	64.04	4.81
40	0.6981	61.3	62.54	2.02
30	0.5236	62.1	61.8	0.48
20	0.3491	62.1	62.062	0.06
10	0.1745	62.5	63.11	0.98
0	0	66.3	65.038	1.90
-10	-0.1745	64	67.88	6.06
-20	-0.3491	66	71.7	8.64
-30	-0.5236	66	76.5	15.91
-40	-0.6981	88.6	82.31	7.10
-50	-0.8727	87.5	88.96	1.67
-60	-1.0472	88.6	96.038	8.40
-70	-1.2217	102.6	102.699	0.10
-80	-1.3963	92.6	107.641	16.24
-90	-1.5708	109.9	109.49	0.37
-100	-1.7453	89.7	107.641	20.00
-110	-1.9199	88.8	102.699	15.65
-120	-2.0944	96.2	96.038	0.17
-130	-2.2689	85.1	88.96	4.54
-140	-2.4435	74.4	82.31	10.63
-150	-2.618	72.3	76.5	5.81
-160	-2.7925	73.1	71.7	1.92
-170	-2.9671	72.7	67.88	6.63
-180	-3.1416	71.8	65.038	9.42
-190	-3.3161	70.9	63.11	10.99
-200	-3.4907	64.2	62.062	3.33
-210	-3.6652	73.2	61.8	15.57
-220	-3.8397	74.3	62.54	15.83

Tabela D2.4. Błąd względny wyznaczony na podstawie różnicy między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu analitycznego a wynikami eksperymentalnymi dla czwartej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	4f eksperyment [Hz]	4f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	210.2	208.184	0.96
40	0.6981	210.5	208.27	1.06
30	0.5236	211.4	208.32	1.46
20	0.3491	211.2	208.33	1.36
10	0.1745	212.6	208.31	2.02
0	0	215.1	208.247	3.19
-10	-0.1745	210	208.141	0.89
-20	-0.3491	213.3	207.94	2.51
-30	-0.5236	216.1	208.072	3.71
-40	-0.6981	214.7	207.448	3.38
-50	-0.8727	215.6	207.042	3.97
-60	-1.0472	215.2	206.54	4.02
-70	-1.2217	213.7	205.992	3.61
-80	-1.3963	211.2	205.53	2.68
-90	-1.5708	209	205.344	1.75
-100	-1.7453	209.9	205.53	2.08
-110	-1.9199	210.2	205.992	2.00
-120	-2.0944	212.7	206.54	2.90
-130	-2.2689	215.8	207.042	4.06
-140	-2.4435	216	207.448	3.96
-150	-2.618	216	208.072	3.67
-160	-2.7925	216.3	207.94	3.87
-170	-2.9671	214.2	207.84	2.97
-180	-3.1416	213.3	207.8	2.58
-190	-3.3161	213.8	207.84	2.79
-200	-3.4907	212.5	207.94	2.15
-210	-3.6652	211.4	208.07	1.58
-220	-3.8397	212.2	208.184	1.89

Tabela D2.5. Błąd względny wyznaczony na podstawie różnicy między wynikami uzyskanymi na podstawie modelu analitycznego a wynikami eksperymentalnymi dla piątej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	5f eksperyment [Hz]	5f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	290.9	296.03	1.76
40	0.6981	291.7	296.22	1.55
30	0.5236	291.6	296.34	1.63
20	0.3491	294	296.39	0.81
10	0.1745	292	296.38	1.50
0	0	296.1	296.303	0.07
-10	-0.1745	290.7	296.15	1.87
-20	-0.3491	293.7	295.54	0.63
-30	-0.5236	293.4	295.794	0.82
-40	-0.6981	293.2	295.136	0.66
-50	-0.8727	291.9	294.58	0.92
-60	-1.0472	292.3	293.93	0.56
-70	-1.2217	291.5	293.265	0.61
-80	-1.3963	288.8	292.743	1.37
-90	-1.5708	289.7	292.54	0.98
-100	-1.7453	290.2	292.743	0.88
-110	-1.9199	289.4	293.265	1.34
-120	-2.0944	289.5	293.93	1.53
-130	-2.2689	292.8	294.58	0.61
-140	-2.4435	293.3	295.136	0.63
-150	-2.618	294.2	295.794	0.54
-160	-2.7925	294.6	295.54	0.32
-170	-2.9671	295.5	295.348	0.05
-180	-3.1416	294.4	295.27	0.30
-190	-3.3161	295.9	295.34	0.19
-200	-3.4907	293.8	295.54	0.59
-210	-3.6652	292.5	295.79	1.12
-220	-3.8397	292	296.03	1.38

## Dodatek 3

Tabela D3.1. Błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych a wynikami pomiarów eksperymentalnych dla pierwszej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	1f eksperyment [Hz]	1f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	20.7	23.64	14.22
40	0.6981	20.5	22.86	11.52
30	0.5236	20.1	22.03	9.61
20	0.3491	19.6	21.2	8.19
10	0.1745	19.1	20.41	6.88
0	0	18.7	19.69	5.28
-10	-0.1745	18.3	19.04	4.04
-20	-0.3491	17.9	18.48	3.23
-30	-0.5236	17.4	18.01	3.49
-40	-0.6981	17.1	17.62	3.07
-50	-0.8727	16.7	17.33	3.77
-60	-1.0472	15.5	17.12	10.46
-70	-1.2217	16.1	17	5.57
-80	-1.3963	15.9	16.96	6.64
-90	-1.5708	15.4	17	10.37
-100	-1.7453	14.5	17.12	18.07
-110	-1.9199	15.3	17.33	13.26
-120	-2.0944	15.4	17.62	14.43
-130	-2.2689	16	18	12.53
-140	-2.4435	16.1	18.48	14.76
-150	-2.618	17.1	19.04	11.32
-160	-2.7925	17.4	19.68	13.12
-170	-2.9671	17.6	20.41	15.97
-180	-3.1416	18.1	21.2	17.13
-190	-3.3161	18.7	22.03	17.80
-200	-3.4907	19.3	22.86	18.43
-210	-3.6652	19.6	23.64	20.61
-220	-3.8397	20	24.33	21.66

Tabela D3.2. Błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych a wynikami pomiarów eksperymentalnych dla drugiej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	2f eksperyment [Hz]	2f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	57.8	53.06	8.20
40	0.6981	57.4	52.95	7.75
30	0.5236	54.9	52.9	3.64
20	0.3491	54.9	52.92	3.61
10	0.1745	55.1	52.97	3.86
0	0	55.4	53.04	4.25
-10	-0.1745	54.2	53.11	2.01
-20	-0.3491	54.6	53.17	2.63
-30	-0.5236	53.6	53.21	0.73
-40	-0.6981	53.4	53.24	0.30
-50	-0.8727	52.6	53.27	1.27
-60	-1.0472	53	53.28	0.53
-70	-1.2217	52.3	53.29	1.90
-80	-1.3963	50.4	53.29	5.74
-90	-1.5708	49	53.29	8.76
-100	-1.7453	47.9	53.28	11.24
-110	-1.9199	47.8	53.27	11.44
-120	-2.0944	48.9	53.24	8.88
-130	-2.2689	50.6	53.21	5.16
-140	-2.4435	51.1	53.17	4.04
-150	-2.618	51.1	53.11	3.93
-160	-2.7925	52.6	53.04	0.84
-170	-2.9671	51.4	52.97	3.06
-180	-3.1416	51.7	52.92	2.36
-190	-3.3161	50.8	52.9	4.14
-200	-3.4907	49.3	52.95	7.41
-210	-3.6652	50.1	53.06	5.90
-220	-3.8397	51	53.18	4.28

Tabela D3.3. Błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych a wynikami pomiarów eksperymentalnych dla trzeciej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	3f eksperyment [Hz]	3f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	61.1	62.54	2.36
40	0.6981	61.3	61.87	0.93
30	0.5236	62.1	62.06	0.06
20	0.3491	62.1	63.11	1.63
10	0.1745	62.5	65.04	4.06
0	0	66.3	67.88	2.38
-10	-0.1745	64	71.69	12.01
-20	-0.3491	66	76.5	15.91
-30	-0.5236	66	82.3	24.70
-40	-0.6981	88.6	88.95	0.39
-50	-0.8727	87.5	96.02	9.74
-60	-1.0472	88.6	102.69	15.90
-70	-1.2217	102.6	107.63	4.90
-80	-1.3963	92.6	109.49	18.24
-90	-1.5708	109.9	107.65	2.05
-100	-1.7453	89.7	102.72	14.51
-110	-1.9199	88.8	96.06	8.18
-120	-2.0944	96.2	88.98	7.50
-130	-2.2689	85.1	82.34	3.25
-140	-2.4435	74.4	76.53	2.86
-150	-2.618	72.3	71.71	0.81
-160	-2.7925	73.1	67.9	7.12
-170	-2.9671	72.7	65.05	10.52
-180	-3.1416	71.8	63.12	12.09
-190	-3.3161	70.9	62.07	12.46
-200	-3.4907	64.2	61.87	3.63
-210	-3.6652	73.2	62.54	14.57
-220	-3.8397	74.3	64.03	13.82

Tabela D3.4. Błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych a wynikami pomiarów eksperymentalnych dla czwartej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	4f eksperyment [Hz]	4f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	210.2	208.27	0.92
40	0.6981	210.5	208.32	1.04
30	0.5236	211.4	208.33	1.45
20	0.3491	211.2	208.31	1.37
10	0.1745	212.6	208.25	2.05
0	0	215.1	208.14	3.24
-10	-0.1745	210	207.98	0.96
-20	-0.3491	213.3	207.76	2.60
-30	-0.5236	216.1	207.45	4.00
-40	-0.6981	214.7	207.04	3.57
-50	-0.8727	215.6	206.54	4.20
-60	-1.0472	215.2	205.99	4.28
-70	-1.2217	213.7	205.53	3.82
-80	-1.3963	211.2	205.34	2.77
-90	-1.5708	209	205.53	1.66
-100	-1.7453	209.9	205.99	1.86
-110	-1.9199	210.2	206.54	1.74
-120	-2.0944	212.7	207.04	2.66
-130	-2.2689	215.8	207.45	3.87
-140	-2.4435	216	207.75	3.82
-150	-2.618	216	207.98	3.71
-160	-2.7925	216.3	208.14	3.77
-170	-2.9671	214.2	208.25	2.78
-180	-3.1416	213.3	208.31	2.34
-190	-3.3161	213.8	208.33	2.56
-200	-3.4907	212.5	208.32	1.97
-210	-3.6652	211.4	208.27	1.48
-220	-3.8397	212.2	208.18	1.89

Tabela D3.5. Błąd względny pomiędzy wynikami uzyskanymi z obliczeń numerycznych a wynikami pomiarów eksperymentalnych dla piątej częstotliwości

kąt [°]	kąt [rad]	5f eksperyment [Hz]	5f model [Hz]	błąd względny [%]
50	0.8727	290.9	296.22	1.83
40	0.6981	291.7	296.34	1.59
30	0.5236	291.6	296.39	1.64
20	0.3491	294	296.38	0.81
10	0.1745	292	296.3	1.47
0	0	296.1	296.15	0.02
-10	-0.1745	290.7	295.91	1.79
-20	-0.3491	293.7	295.58	0.64
-30	-0.5236	293.4	295.14	0.59
-40	-0.6981	293.2	294.58	0.47
-50	-0.8727	291.9	293.93	0.70
-60	-1.0472	292.3	293.27	0.33
-70	-1.2217	291.5	292.74	0.43
-80	-1.3963	288.8	292.54	1.30
-90	-1.5708	289.7	292.74	1.05
-100	-1.7453	290.2	293.26	1.06
-110	-1.9199	289.4	293.93	1.56
-120	-2.0944	289.5	294.58	1.75
-130	-2.2689	292.8	295.13	0.80
-140	-2.4435	293.3	295.58	0.78
-150	-2.618	294.2	295.91	0.58
-160	-2.7925	294.6	296.15	0.53
-170	-2.9671	295.5	296.3	0.27
-180	-3.1416	294.4	296.38	0.67
-190	-3.3161	295.9	296.39	0.17
-200	-3.4907	293.8	296.34	0.86
-210	-3.6652	292.5	296.22	1.27
-220	-3.8397	292	296.03	1.38

## Dodatek 4

Tabela D4.1. Wartości współczynników  $\frac{b_i}{b_1}$  dla pierwszej postaci drgań

$\beta_2 [^\circ]$	$\beta_2 [rad]$	$f [Hz]$	$\omega$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_4}{b_1}$	$\frac{b_5}{b_1}$
50	0.8727	24.34	152.91	-0.13	0.031	0.135	0.164
40	0.6981	23.64	148.56	-0.074	0.021	0.098	0.12
30	0.5236	22.86	143.64	-0.0178	0.01	0.061	0.0765
20	0.3491	22.032	138.43	0.036	0.0036	0.026	0.036
10	0.1745	21.2	133.23	0.0829	-0.0083	-0.0047	0.00042
0	0	20.413	128.26	0.124	-0.01559	-0.0308	-0.0299
-10	-0.1745	19.687	123.69	0.1584	-0.0217	-0.0526	-0.055
-20	-0.3491	19.0385	119.623	0.187	-0.0267	-0.0703	-0.0755
-30	-0.5236	18.48	116.098	0.2096	-0.0307	-0.0845	-0.09195
-40	-0.6981	18	113.14	0.2279	-0.0339	-0.0958	-0.105
-50	-0.8727	17.624	110.733	0.242	-0.036	-0.104	-0.115
-60	-1.0472	17.33	108.884	0.2525	-0.038	-0.1108	-0.122
-70	-1.2217	17.12	107.574	0.2597	-0.0394	-0.115	-0.127
-80	-1.3963	17	106.792	0.264	-0.0401	-0.1177	-0.1302
-90	-1.5708	16.96	106.533	0.265	-0.0403	-0.118	-0.131
-100	-1.7453	17	106.792	0.264	-0.0401	-0.1177	-0.1302
-110	-1.9199	17.12	107.574	0.2597	-0.0394	-0.115	-0.127
-120	-2.0944	17.33	108.884	0.2525	-0.038	-0.1108	-0.122
-130	-2.2689	17.624	110.733	0.242	-0.036	-0.104	-0.115
-140	-2.4435	18	113.14	0.2279	-0.0339	-0.0958	-0.105
-150	-2.618	18.48	116.098	0.2096	-0.0307	-0.0845	-0.09195
-160	-2.7925	19.0385	119.623	0.187	-0.0267	-0.0703	-0.0755
-170	-2.9671	19.687	123.69	0.1584	-0.0217	-0.0526	-0.055
-180	-3.1416	20.413	128.26	0.124	-0.01559	-0.0308	-0.0299
-190	-3.3161	21.2	133.23	0.0829	-0.0083	-0.0047	0.00042
-200	-3.4907	22.032	138.43	0.036	0.0036	0.026	0.036
-210	-3.6652	22.86	143.64	-0.0178	0.01	0.061	0.0765
-220	-3.8397	23.64	148.56	-0.074	0.021	0.098	0.12

Tabela D4.2. Wartości współczynników  $\frac{b_i}{b_1}$  dla drugiej postaci drgań

$\beta_2 [^\circ]$	$\beta_2 [rad]$	$f [Hz]$	$\omega$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_4}{b_1}$	$\frac{b_5}{b_1}$
50	0.8727	53.18	334.156	-0.112	-12.96	-77.18	-101.77
40	0.6981	53.058	333.374	1.19	-16.54	-97.8	-128.84
30	0.5236	52.95	332.71	3.59	-27.31	-160.65	-211.44
20	0.3491	52.9	332.4	13.86	-92.96	-546.15	-718.65
10	0.1745	52.92	332.49	-11.45	92.49	554.7	716.8
0	0	52.97	332.84	-2.917	39.88	235.89	310.699
-10	-0.1745	53.4	335.57	-0.495	30.49	181.23	238.86
-20	-0.3491	53.36	335.3	0.985	27.64	165.06	217.71
-30	-0.5236	53.29	334.83	2.11	26.94	161.41	213
-40	-0.6981	53.21	334.324	3.019	27.086	162.76	214.88
-50	-0.8727	53.242	334.53	3.759	27.57	166.03	219.26
-60	-1.0472	53.27	334.68	4.34	28.13	169.64	224.084
-70	-1.2217	53.28	334.782	4.755	28.612	172.724	228.187
-80	-1.3963	53.29	334.84	5.0074	28.93	174.756	230.89
-90	-1.5708	53.29	334.858	5.0919	29.044	175.462	231.83
-100	-1.7453	53.29	334.84	5.0074	28.93	174.756	230.89
-110	-1.9199	53.28	334.782	4.755	28.612	172.724	228.187
-120	-2.0944	53.27	334.68	4.34	28.13	169.64	224.084
-130	-2.2689	53.242	334.53	3.759	27.57	166.03	219.26
-140	-2.4435	53.21	334.324	3.019	27.086	162.76	214.88
-150	-2.618	53.29	334.83	2.11	26.9	161.41	213
-160	-2.7925	53.1099	333.699	0.985	27.64	165.06	217.703
-170	-2.9671	53.04	333.282	-0.495	30.486	181.22	238.86
-180	-3.1416	52.97	332.84	-2.9179	39.88	235.89	310.699
-190	-3.3161	52.92	332.49	-11.45	92.49	554.7	716.8
-200	-3.4907	52.9	332.4	13.86	-92.96	-546.15	-718.65
-210	-3.6652	52.95	332.71	3.59	-27.31	-160.65	-211.44
-220	-3.8397	53.058	333.374	1.19	-16.54	-97.8	-128.84

Tabela D4.3. Wartości współczynników  $\frac{b_i}{b_1}$  dla trzeciej postaci drgań

$\beta_2 [^\circ]$	$\beta_2 [rad]$	$f [Hz]$	$\omega$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_4}{b_1}$	$\frac{b_5}{b_1}$
50	0.8727	64.04	402.38	10.28	-0.256	4.05	6.37
40	0.6981	62.54	392.96	18.62	-0.003	9.99	15.07
30	0.5236	61.8	388.76	95.84	1.622	-160.65	-211.44
20	0.3491	62.062	389.94	-33.98	-0.659	-21.95	-32.4
10	0.1745	63.11	396.54	-15.37	-0.118	-8.87	-13.28
0	0	65.038	408.647	-10.39	0.125	-4.82	-7.44
-10	-0.1745	67.88	497.93	-8.129	0.2734	-2.79	-4.534
-20	-0.3491	71.7	450.78	-6.87	0.368	-1.624	-2.875
-30	-0.5236	76.5	480.718	-6.097	0.433	-0.914	-1.87
-40	-0.6981	82.31	517.172	-5.591	0.48	-0.469	-1.245
-50	-0.8727	88.96	558.96	-5.25	0.52	-0.184	-0.855
-60	-1.0472	96.038	603.426	-5.023	0.557	-0.0025	-0.618
-70	-1.2217	102.699	645.278	-4.876	0.592	0.109	-0.487
-80	-1.3963	107.641	676.329	-4.793	0.6178	0.169	-0.427
-90	-1.5708	109.49	687.955	-4.766	0.628	0.1885	-0.4107
-100	-1.7453	107.641	676.329	-4.793	0.6178	0.169	-0.427
-110	-1.9199	102.699	645.278	-4.876	0.592	0.109	-0.487
-120	-2.0944	96.038	603.426	-5.023	0.557	-0.0025	-0.618
-130	-2.2689	88.96	558.96	-5.25	0.52	-0.184	-0.855
-140	-2.4435	82.31	517.172	-5.591	0.48	-0.469	-1.245
-150	-2.618	76.5	480.718	-6.097	0.433	-0.914	-1.87
-160	-2.7925	71.7	450.78	-6.87	0.368	-1.624	-2.875
-170	-2.9671	67.88	497.93	-8.129	0.2734	-2.79	-4.534
-180	-3.1416	65.038	408.647	-10.39	0.125	-4.82	-7.44
-190	-3.3161	63.11	396.54	-15.37	-0.118	-8.87	-13.28
-200	-3.4907	62.062	389.94	-33.98	-0.659	-21.95	-32.4
-210	-3.6652	61.8	388.76	95.84	1.622	-160.65	-211.44
-220	-3.8397	62.54	392.96	18.62	-0.003	9.99	15.07

Tabela D4.4. Wartości współczynników  $\frac{b_i}{b_1}$  dla czwartej postaci drgań

$\beta_2 [^\circ]$	$\beta_2 [rad]$	$f [Hz]$	$\omega$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_4}{b_1}$	$\frac{b_5}{b_1}$
50	0.8727	208.184	1308.06	8.13	-88.68	-109.31	270.965
40	0.6981	208.27	1308.59	14.43	-167.99	-207.87	514.84
30	0.5236	208.32	1308.9	76.17	-914.68	-1134.5	2811
20	0.3491	208.33	1308.99	-24.48	291.19	361.49	-895.84
10	0.1745	208.31	1308.84	-11.26	127.23	157.83	-391.35
0	0	208.247	1308.45	-7.776	80.32	99.39	-246.63
-10	-0.1745	208.141	1307.79	-6.27	57.083	70.33	-174.7
-20	-0.3491	207.94	1306.78	-5.48	42.69	52.26	-129.97
-30	-0.5236	207.76	1307.35	-5.032	32.696	39.66	-98.815
-40	-0.6981	207.448	1303.43	-4.769	25.35	30.358	-75.82
-50	-0.8727	207.042	1300.883	-4.61	19.83	23.37	-58.54
-60	-1.0472	206.54	1297.73	-4.518	15.77	18.22	-45.79
-70	-1.2217	205.992	1294.29	-4.466	12.97	14.66	-36.97
-80	-1.3963	205.53	1291.384	-4.439	11.308	12.553	-31.76
-90	-1.5708	205.344	1290.21	-4.431	10.759	11.86	-30.04
-100	-1.7453	205.53	1291.384	-4.439	11.308	12.553	-31.76
-110	-1.9199	205.992	1294.29	-4.466	12.97	14.66	-36.97
-120	-2.0944	206.54	1297.73	-4.518	15.77	18.22	-45.79
-130	-2.2689	207.042	1300.883	-4.61	19.83	23.37	-58.54
-140	-2.4435	207.448	1303.43	-4.77	25.35	30.358	-75.82
-150	-2.618	207.98	1306.78	-5.479	42.69	52.256	-129.97
-160	-2.7925	208.14	1307.78	-6.266	57.084	70.335	-174.71
-170	-2.9671	208.25	1308.45	-7.78	80.32	99.39	-246.634
-180	-3.1416	208.31	1308.84	-11.26	127.23	157.83	-391.35
-190	-3.3161	208.33	1308.99	-24.48	291.19	361.49	-895.86
-200	-3.4907	208.07	1307.35	76.17	-914.68	-1134.5	2811
-210	-3.6652	208.184	1308.011	-167.99	-207.87	514.84	270.965
-220	-3.8397	208.184	1308.06	8.13	-88.68	-109.31	270.965

Tabela D4.5. Wartości współczynników  $\frac{b_i}{b_1}$  dla piątej postaci drgań

$\beta_2 [^\circ]$	$\beta_2 [rad]$	$f [Hz]$	$\omega$	$\frac{b_2}{b_1}$	$\frac{b_3}{b_1}$	$\frac{b_4}{b_1}$	$\frac{b_5}{b_1}$
50	0.8727	296.03	1860.01	10.078	-97.37	317.422	-223.87
40	0.6981	296.22	1861.18	18.55	-188.57	614.37	-432
30	0.5236	296.34	1861.95	130.75	-1360.26	4431	-3109
20	0.3491	296.39	1862.3	-27.4	282.7	-920.78	645.55
10	0.1745	296.38	1862.23	-13.097	129.67	-422.48	296.23
0	0	296.303	1861.73	-9.036	83.193	-271.22	190.4
-10	-0.1745	296.15	1860.77	-7.189	59.77	-195.07	137.26
-20	-0.3491	295.9131	1859.28	-6.176	45.17	-147.63	104.26
-30	-0.5236	295.58	1857.182	-5.57	35.013	-114.7	81.4
-40	-0.6981	295.136	1854.4	-5.18	27.54	-90.436	64.64
-50	-0.8727	295.136	1850.89	-4.93	21.94	-72.3	52.127
-60	-1.0472	295.58	1846.8	-4.766	17.83	-58.98	42.955
-70	-1.2217	293.26	1842.6	-4.663	14.98	-49.79	36.64
-80	-1.3963	292.74	1839.35	-4.608	13.31	-44.38	32.92
-90	-1.5708	292.54	1838.08	-4.591	12.75	-42.59	31.696
-100	-1.7453	292.74	1839.36	-4.608	13.308	-44.38	32.92
-110	-1.9199	293.26	1848.64	-4.66	14.98	-49.79	36.64
-120	-2.0944	293.93	1846.803	-4.765	17.83	-58.98	42.96
-130	-2.2689	294.58	1850.888	-4.93	21.94	-72.3	52.13
-140	-2.4435	295.14	1854.4	-5.18	27.54	-90.44	64.64
-150	-2.618	295.58	1857.182	-5.57	35.014	-114.67	81.4
-160	-2.7925	295.91	1859.27	-6.176	45.17	-147.64	104.26
-170	-2.9671	296.15	1860.77	-7.189	59.77	-195.07	137.26
-180	-3.1416	296.3	1861.73	-9.036	83.193	-271.222	190.4
-190	-3.3161	296.38	1862.23	-13.98	129.67	-422.48	296.23
-200	-3.4907	296.4	1862.3	-27.4	282.27	-920.81	645.57
-210	-3.6652	296.34	1861.95	130.73	-1360	4429.8	-3108.7
-220	-3.8397	296.22	1861.18	18.55	-188.57	614.36	-432

## Spis ilustracji

Rys. 4.1. Robot z parami kinematycznymi obrotowymi, czujnikiem sił/momentów i narzędziem ..	26
Rys. 4.2. Schemat robota IRB 1600 z układami współrzędnych i parametrami według notacji D-H	29
Rys. 4.3. Pomiar przemieszczeń ogniwo robota pod obciążeniami z zastosowaniem absolutnego trackera laserowego Leica AT 960 .....	43
Rys. 5.1. Wartości częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	46
Rys. 5.2. Wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	47
Rys. 5.3. Wartości drugiej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	48
Rys. 5.4. Wartości trzeciej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	49
Rys. 5.5. Wartości czwartej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	50
Rys. 5.6. Wartości piątej częstotliwości drgań własnych dla określonych wartości kąta $\beta_3$ w funkcji kąta $\beta_2$ .....	51
Rys. 5.7. Postaci drgań dla 1 częstotliwości .....	53
Rys. 5.8. Postaci drgań dla 2 częstotliwości .....	53
Rys. 5.9. Postaci drgań dla 3 częstotliwości .....	54
Rys. 5.10. Postaci drgań dla 4 częstotliwości .....	54
Rys. 5.11. Postaci drgań dla 5 częstotliwości .....	55
Rys. 5.12. Pierwsza postać drgań robota w analizowanej pozycji .....	56
Rys. 5.13. Druga postać drgań robota w analizowanej pozycji .....	57
Rys. 5.14. Trzecia postać drgań robota w analizowanej pozycji.....	57
Rys. 5.15. Czwarta postać drgań robota w analizowanej pozycji.....	58
Rys. 5.16. Piąta postać drgań robota w analizowanej pozycji.....	58
Rys. 6.1. Widma częstotliwościowe drgań członu 1 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ .....	62
Rys. 6.2. Widma częstotliwościowe drgań członu 2 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ .....	63
Rys. 6.3. Widma częstotliwościowe drgań członu 3 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ .....	63
Rys. 6.4. Powiększenie fragmentu widma częstotliwościowego drgań członu 3 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ w wybranym zakresie częstotliwości .....	64
Rys. 6.5. Widma częstotliwościowe drgań członu 4 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ .....	65
Rys. 6.6. Widma częstotliwościowe drgań członu 5 robota w funkcji współrzędnej $\beta_2$ .....	65
Rys. 7.1. Zrobotyzowane stanowisko badawcze: 1 – Kontroler robota IRC5, 2 – Robot IRB 1600, 3 – Cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr, 4 – Elektrowrzeciono firmy PDS z czujnikiem sił ATI, 5 – Młotek modalny PCB 086C03 , 6 – Kamera 7 – Komputer z oprogramowaniem RDI Motion Amplification 8 – Komputer z oprogramowaniem Matlab do akwizycji danych z akcelerometru ...	67
Rys. 7.2. Cyfrowy piezoelektryczny akcelerometr (Model 333D01) [138].....	68
Rys. 7.3. Młotek modalny PCB [139] .....	69

Rys. 7.4. Robot ABB IRB 1600/1.45 [137] .....	70
Rys. 7.5. Zakres roboczy robota ABB IRB 1600/1.45 [140] .....	71
Rys. 7.6. Elektrowrzeciono PDS ADEV42 [141] .....	72
Rys. 7.7. Widok robota stosowanego w badania eksperymentalnych .....	73
Rys. 7.8. Punkt przyłożenia młotka modalnego na narzędziu .....	75
Rys. 7.9. Rysunek przedstawiający ustawienia ramion robota przy zmianie kąta $\beta_2$ dla określonych konfiguracji robota ABB IRB 1600/1.45 .....	76
Rys. 7.10. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań robota w zależności od konfiguracji określonej przez współrzędną kątową $\beta_2$ .....	77
Rys. 7.11. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=40^\circ$ .....	78
Rys. 7.12. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=0^\circ$ .....	78
Rys. 7.13. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-100^\circ$ .....	79
Rys. 7.14. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-150^\circ$ .....	79
Rys. 7.15. Widmo częstotliwościowe przyspieszenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-200^\circ$ .....	80
Rys. 7.16. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań robota ABB IRB 1600/1.45 w całym zakresie zmian kąta $\beta_2$ .....	81
Rys. 7.17. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań robota ABB IRB 1600/1.45 w zakresie 14-400 Hz w całym zakresie zmian kąta $\beta_2$ .....	82
Rys. 7.18. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=40^\circ$ .....	83
Rys. 7.19. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=0^\circ$ .....	83
Rys. 7.20. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-100^\circ$ .....	84
Rys. 7.21. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-150^\circ$ .....	84
Rys. 7.22. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym robota $\beta_2=-200^\circ$ .....	85
Rys. 7.23. Widmo częstotliwościowe przemieszczenia drgań przy ustawieniu kątowym $\beta_2=-150^\circ$ wraz z oznaczeniem obszaru występowania dodatkowo pobudzonej częstotliwości .....	86
Rys. 7.24. Ramię robota z zaznaczonym obszarem do analizy drgań – klatka z filmu .....	87
Rys. 7.25. Wyniki pomiarów z zastosowaniem układu wizyjnego dla $\beta_2=20^\circ$ , $\beta_3=0^\circ$ .....	88
Rys. 7.26. Wyniki pomiarów dla ustawienia kąтового robota $\beta_2=20^\circ$ , $\beta_3=0^\circ$ , uzyskane z akcelerometru oraz układu wizyjnego .....	89
Rys. 7.27. Całkowite drgania ramienia robota przy ustawieniu kątowym $\beta_2=\beta_3=0^\circ$ .....	90
Rys. 7.28. Wyniki pomiarów z zastosowaniem układu wizyjnego dla $\beta_2=\beta_3=0^\circ$ .....	91
Rys. 7.29. Wyniki pomiarów dla $\beta_2=\beta_3=0^\circ$ , uzyskane z akcelerometru oraz układu wizyjnego ..	91

Rys. 8.1. Zestawienie wartości częstotliwości drgań rezonansowych uzyskanych z modelu analitycznego oraz badań eksperymentalnych.....	93
Rys. 8.2. Wartości błędu względnego dla pierwszej częstotliwości drgań.....	94
Rys. 8.3. Wartości błędu względnego dla drugiej częstotliwości drgań.....	95
Rys. 8.4. Wartości błędu względnego dla trzeciej częstotliwości drgań .....	95
Rys. 8.5. Wartości błędu względnego dla czwartej częstotliwości drgań .....	95
Rys. 8.6. Wartości błędu względnego dla piątej częstotliwości drgań.....	96
Rys. 8.7. Zestawienie wartości częstotliwości drgań uzyskanych na podstawie obliczeń numerycznych oraz badań eksperymentalnych.....	97
Rys. 8.8. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{1ae}$ , $\delta_{1ne}$ ) dla pierwszej częstotliwości rezonansowej	98
Rys. 8.9. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{2ae}$ , $\delta_{2ne}$ ) dla drugiej częstotliwości rezonansowej	98
Rys. 8.10. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{3ae}$ , $\delta_{3ne}$ ) dla trzeciej częstotliwości rezonansowej	99
Rys. 8.11. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{4ae}$ , $\delta_{4ne}$ ) dla czwartej częstotliwości rezonansowej	99
Rys. 8.12. Porównanie błędów względnych ( $\delta_{5ae}$ , $\delta_{5ne}$ ) dla piątej częstotliwości rezonansowej .	99
Rys. 8.13. Wykres przedstawiający porównanie błędu względnego pomiędzy wynikami uzyskanymi na podstawie eksperymentu a dwoma wersjami modelu: analitycznego oraz numerycznego.....	100
Rys. 8.14. Drgania ramienia robota dla pierwszego modu drgań.....	102
Rys. 8.15. Drgania ramienia robota dla drugiego modu drgań.....	102
Rys. 8.16. Drgania ramienia robota dla trzeciego modu drgań .....	103

## Spis tabel

Tabela 4.1. Parametry robota według notacji D-H .....	29
Tabela 4.2. Wartości współczynników modelu robota IRB1600/1.45 .....	43
Tabela 7.1. Parametry techniczne cyfrowego piezoelektrycznego akcelerometru (Model 333D01) [138] .....	68
Tabela 7.2. Zakresy ruchu osi robota ABB IRB 1600/1.45 [140] .....	71
Tabela 8.1. Porównanie wyników pomiarów oraz badań modelowych .....	104