UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
Wydział Matematyki i Informatyki

Prof. UAM dr hab. Mieczysław Cichoń
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu
Wydział Matematyki i Informatyki
Zakład Przestrzeni Funkcyjnych i Równań Różniczkowych
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4
61-614 Poznań

Poznań, 14.02.2025 r.

Recenzja pracy doktorskiej
mgr Justyny Madej

Technika miar niezwartości w zastosowaniu do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym

Podstawa opracowania recenzji

Recenzja została opracowana w odpowiedzi na pismo Przewodniczącej Rady Dyscypliny Matematyka Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza, dr hab. Liliany Rybarskiej-Rusinek, prof. PRz. z dnia 10 stycznia 2025 roku, sygn. RF-530-1/2024/2025/RDM/

Celem recenzji jest, zgodnie z obowiązującymi przepisami ustalenie, czy rozprawa doktorska stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, a Kandydatka wykazuje *ogólną wiedzę teoretyczną w danej dyscyplinie naukowej...* oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej.

Charakterystyka rozprawy

Struktura pracy jest właściwa. Rozprawa składa się ze wstępu, rozdziału zawierającego niezbędne definicje i twierdzenia oraz 5 rozdziałów opartych o wyniki pomocnicze i uzyskane przez Kandydatkę w powiązanych tematycznie i opublikowanych pracach oraz ze spisu literatury. Udział merytoryczny Autorki rozprawy w czterech pracach współautorskich jest właściwy i niewątpliwy.

Zgodnie z postawionym problemem badawczym - praca dotyczy zagadnienia istnienia i własności rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych. Co więcej, większość wyników uzyskano dla równań kwadratowych, a więc powstaje problem wyboru do badań odpowiednich przestrzeni funkcyjnych i to będących zamkniętymi ze względu na punktowe mnożenie funkcji (algebr Banacha). Mamy więc kilka kolejnych poziomów badań do rozważania. Przede wszystkim równania i operatory całkowe, w tym przypadku to bardzo ogólne klasy operatorów Urysohna oraz

Hammersteina. To bardzo szerokie klasy, a więc celem pracy jest uzyskanie rozwiązań dla dużej klasy zagadnień i przykładów praktycznych. Z drugiej strony mamy nieskończone układy takich równań, czyli można je uważać za równania w przestrzeniach nieskończenie wymiarowych. Takie ujęcie jednak, ze względu na dokonany dobór przestrzeni, nie pozwala na uzyskanie założeń zoptymalizowanych pod kątem zastosowań takich właśnie układów (co jest wspomniane w rozprawie). To prowadzi do klasy przestrzeni BC(I,E), ale i taki wybór przestrzeni do badań byłby silnie uzależniony od przestrzeni E. W rozpatrywanym przypadku są to przestrzenie ciągowe (ciągów rzeczywistych). I w takim kontekście pojawiają się wyniki rozpatrywane przez Autorkę. Jak omawia w rozprawie, naturalne założenia dla takich zagadnień są silnie uzależnione od wyboru przestrzeni ciągowej, a szczególnie interesujące są c_0 (ze względu na własności rozwiązań) oraz l_∞ (ze względu na pokonywanie trudności matematycznych). Wybrany przez Autorkę kierunek badań jest więc naturalny, widoczne jest rosnące zainteresowanie takimi problemami (dotyczy ich kilka pozycji bibliograficznych). Dodatkowo warto zauważyć (Rozdział 6), że w wielu modelach matematycznych, w przypadku abstrakcyjnym, musielibyśmy nakładać niezbyt realistyczne założenia na badane operatory. Warto docenić uwagi Autorki na ten temat w Rozdziale 6. Nakłada się na to fakt, że równania kwadratowe wymagają dużej staranności w doborze narzędzi i sprawnego operowania miarami niezwartości na iloczynach zbiorów. Prototypowym wynikiem jest tu twierdzenie uzyskane przez Banasia i Lecko, a obecnie temat jest szeroko rozwijany.

Taka uwaga trochę poza recenzją: ciekawe byłoby rozwijanie wyników tej rozprawy dla jeszcze węższych klas operatorów (tak jak operatory Hammersteina zastąpiły Urysohna) oraz w innych niż BC algebrach Banacha?

Struktura rozprawy.

We Wstępie Autorka uzasadniła potrzebę podjęcia badań w zakresie równań całkowych wraz z ich zastosowaniami, nakreśliła rys historyczny takich badań.

Ze względu na postawiony problem badawczy (w związku z tematyką rozprawy) nacisk został położony na nieskończone układy takich równań oraz - co istotne – na motywacje badań takich układów. Całość dopełniają argumenty za zastosowaniem w badaniach metod analizy funkcjonalnej, a zwłaszcza miar niezwartości. W ten sposób określiła cel i zakres pracy badawczej związanej z rozprawą. Znaczna część wyników rozprawy dotyczy tzw. równań kwadratowych, a więc z występującym w nim iloczynem (punktowym) wielu klasycznych operatorów (linowych czy nieliniowych superpozycji). Nieco zabrakło mi szerszej dyskusji nad badaniem akurat takich układów równań (jest motywacja praktyczna w ostatnim rozdziale rozprawy), bo matematycznie są one dobrze uzasadnione i wymagają wyboru przestrzeni będącymi algebrami Banacha ze względu na punktowe mnożenie (w tym innych algebr Banacha). To taka sugestia na przyszłość.

Krótki Rozdział 1 zawiera wprowadzenie oznaczeń, a także zawiera krótkie omówienie przestrzeni Banacha badanych w rozprawie.

Kolejny Rozdział 2 jest za to bardzo istotną częścią pracy. Zawiera krótki rys historyczny dotyczący wprowadzania i stosowania miar niezwartości. Ważną uwagą jest zawarta tam uwaga o istotności badań wzorów analitycznych na takie miary, zależnie od przestrzeni, w której ma być stosowana. Ten aspekt tej teorii jest kluczowy w zrozumieniu badań Autorki nad nieskończonymi układami równań całkowych w konkretnych przestrzeniach Banacha. Przypomniane w tym Rozdziale

Collegium Mathematicum, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 13
wmiuam@amu.edu.pl

M.C.

ujęcie aksjomatyczne miar niezwartości (Banaś i Goebel) jest istotne, gdyż pozwala na konstrukcje takich miar z zadanym zestawem własności oraz badanie przestrzeni, w których badanie warunkowej zwartości zbiorów nie jest poparte odpowiednio użytecznymi kryteriami. Dalej omawiane są klasyczne miary niezwartości, do których będzie można odnosić wyniki pracy (m.in. równoważność takich miar). Co istotne, w tym rozdziale są też zawarte konstrukcje miar niezwartości w przestrzeniach ciągowych oraz przestrzeniach funkcji ograniczonych i ciągłych o wartościach w przestrzeniach ciągowych, znanych z wcześniejszych badań. Te wyniki będą podstawą części badań Autorki. Moją uwagę zwróciła nie tylko wiedza o istniejących wynikach, ale ich wzajemne zależności i zarysowane – już teraz – kierunki badań, czyli jest to wprowadzenie w tematykę badań i pełni rolę objaśniającą i ułatwiającą lekturę części zasadniczej.
Rozdziały 3-6 zawierają główne wyniki rozprawy, a warto też zauważyć, że Autorka pozostawia otwarty problem, który może być podjęty w dalszej perspektywie badawczej. Omówię je po kolei.

Bardzo obszerna literatura (93 pozycje) obejmuje pozycje cytowane we wcześniejszych częściach rozprawy. Spisem objęte są zarówno monografie i artykuły dotyczące badanej tematyki, jaki i wszelkie pozycje niezbędne do zrozumienia kontekstu badań. Rozprawa jest oparta o 4 prace współautorskie.

Uwagi ogólne.

Rozdział 3. Pierwszy z wyników rozprawy dotyczy badań istnienia rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań Urysohna w przestrzeni funkcji BC_0, a więc znikających w nieskończoności. Ze względu na badanie bardzo ogólnych operatorów całkowych wymaga to starannego sprawdzenia założeń niezbędnych do uzyskania oczekiwanych wyników, w tym własności operatorów, ale przede wszystkim konstrukcji odpowiednich miar niezwartości i sprawdzenia warunków kontrakcji w sensie Darbo, a w konsekwencji konstrukcji niezmienniczego zbioru zwartego i zastosowania twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.
Takie wyniki wymagają nie tylko znajomości istniejących wyników, dostrzegania istniejących luk w teorii, ale i dużej wprawy technicznej. I tu pozwolę jednak sobie na uwagę: w pracy wprowadzana jest znaczna liczba modułów ciągłości i miar niezwartości, co musi znaleźć odbicie w założeniach twierdzeń. Moim zdaniem (czego Autorka nie musi podzielać), ułatwiłoby zapoznawanie się z wynikami pracy, gdyby założenia (np. (ii) czy (v) w tym rozdziale) były również formułowane w takiej terminologii, tzn. modułów ciągłości. Moją uwagę zwróciło wykorzystanie takich założeń właśnie poprzez wprowadzenie odpowiednich modułów ciągłości. Może lepiej od razu taka wprowadzić taką terminologię do założeń? Ta sama uwaga dotyczy pozostałych twierdzeń w rozprawie.

Sam dowód jest przeprowadzony starannie i z dużą biegłością techniczną i właśnie dlatego warto ułatwić czytelnikom zapoznanie się z takimi wynikami, co poszerzy grono zainteresowanych. *Uwagi szczegółowe* zamieszczę w odrębnej części recenzji.

Warty podkreślenia jest dobrze dobrany przykład, wykazany z pełnym uzasadnieniem. W związku z bardzo ogólnym zagadnieniem, co więcej dla równań kwadratowych (a więc na algebrze Banacha) nie jest to tak oczywiste.

Rozdział 4. W kolejnym rozdziale Autorka bada ponownie takie same układy równań, ale tym razem celem jest zbadanie własności asymptotycznych ich rozwiązań. Istotną różnicą, prowadząca do

Collegium Mathematicum, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 13
wmiuam@amu.edu.pl

M.C.

www.wmi.amu.edu.pl

badań w innej przestrzeni funkcyjnej, jest uzyskanie wyniku w przestrzeni BC_∞, a jak Autorka uzasadniała w Rozdziale 2, jest to przypadek wymuszający zastosowanie bezpośrednio twierdzenia Darbo o punkcie stałym. Ma to także wpływ na poczynione założenia. Przypomniałbym tu swoją prośbę/uwagę o formułowaniu założeń bezpośrednio w terminach modułów ciągłości. Zaapelowałbym również o uzupełnienie kolejnych prac (bo w rozprawie da się to wywnioskować) o formalne zdefiniowanie „grubości wiązki rozwiązań" (np. Twierdzenie 4.4), gdyż końcowa uwaga w dowodzie też nie do końca zawiera precyzyjne określenie tego pojęcia (choć intuicyjnie jasnego). Ten wynik dotyczy istnienia rozwiązania w badanej przestrzeni, ale i – jak podano w Twierdzeniu 4.6 – asymptotycznej stabilności i to badanej bezpośrednio. Zdecydowanie to pojęcie lepiej znane z literatury. Także ten rozdział uzupełniony jest przez starannie rozpisany przykład ilustrujący uzyskany wynik, jest to dowód istotności uzyskanego twierdzenia i sporej biegłości technicznej Autorki.

Rozdział 5. W tym rozdziale badany jest szczególny przypadek układu równań z Rozdziału 4 (operatory Hammersteina w miejsce Urysohna). Należy więc zastanowić się w jakim stopniu te wyniki różnią się od poprzedniego rozdziału. Autorka sama zaznacza, że samo równanie można traktować w ten sposób, ale przecież - jednocześnie – ze względu na lepiej poznane własności operatora Hammersteina – można uzyskać wyniki w oparciu o własności jądra i właśnie w takiej terminologii przedstawione są założenia tego twierdzenia. Mamy zatem szczególny przypadek operatora, ale i słabsze założenia i łatwiejsze do weryfikacji w konkretnych przypadkach. Pewnie oczekiwałbym, że sama Autorka dokona takich porównań... Tak złożone równanie wymaga oczywiście wielu założeń dotyczących występujących tam funkcji, ale (w przeciwieństwie do publikacji) w rozprawie można np. uzupełnić je uwagami o wyborze typów założeń związanych z operatorem Hammersteina (odnosząc się do ogólnej, dobrze przebadanej, teorii) np. z książki [92].

Ciekawy byłby też przypadek przestrzeni Frécheta – może w kolejnej pracy? Ponownie mamy sformułowania tezy w oparciu o „grubość wiązki" (Twierdzenie 5.2), jak i asymptotyczna stabilność (Twierdzenie 5.3). I tu także wyniki są zilustrowane nietrywialnym przykładem.

Rozdział 6. Ten rozdział ma nieco inny charakter niż poprzednie, ale jest spójny tematycznie z tytułem rozprawy. To bardzo dobra ilustracja dlaczego warto bezpośrednio badać nieskończone układy równań (choć Autorka wprowadza też postać abstrakcyjną (6.8)). Łatwo zauważyć, że uwagi o jego konstrukcji i własnościach funkcji rozpatrywanych w tym układzie (nie jest kwadratowy) mogą być bezpośrednio weryfikowane, co byłoby trudne z wykorzystaniem abstrakcyjnych twierdzeń. Niewątpliwie przemawia to za dalszym rozwijaniem takich wyników. Na podstawie zaprezentowanego wprowadzenia można zauważyć jak schematy różnicowe prowadzą do badań nieskończonych układów równań, a jest to jedna z naturalnych przyczyn prowadzenia takich badań. Staranne wprowadzenie modelu urodzin i śmierci (procesy stochastyczne) jest warte podkreślenia, gdyż wskazuje na wiedzę Autorki wykraczająca poza czystą matematykę i dostrzeganie możliwości zastosowań swoich badań. Rozdział kończy się otwartym pytaniem, tak naprawdę sprowadzającym się do bardziej ogólnego: jak pogodzić modelowanie zjawisk rzeczywistych z brakiem odpowiednich własności operatorów w wykorzystywanych przestrzeniach funkcyjnych. Może warto rozważyć np. model oparty o całki stochastyczne lub inne przestrzenie?

Collegium Mathematicum, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 13
wmiuam@amu.edu.pl

M.C.

www.wmi.amu.edu.pl

Moim zdaniem, w świetle przedstawionej opinii oraz wniosków, przestawiona rozprawa doktorska mgr Justyny Madej prezentuje wysoki poziom merytoryczny i wnosi istotny wkład w teorię równań różniczkowych i całkowych. Świadczy o wysokim stopniu znajomości tematu, dostrzeżeniu i pokonaniu trudności dowodowych w dotychczas nierozwiązanych przypadkach. Przedłożona rozprawa doktorska prezentuje ogólną wiedzę teoretyczną mgr Justyny Madej - ubiegającej się o nadanie stopnia doktora w dyscyplinie matematyka. Poza tym stanowi ona oryginalne rozwiązanie postawionego problemu naukowego oraz świadczy o nabyciu umiejętności starannego dowodzenia, z dużą biegłością techniczną i ilustrowania omawianych zagadnień ciekawymi przykładami. Mimo pewnych wskazań i uwag szczegółowych oceniam, że tak technicznie trudna praca jest bardzo starannie zredagowana.

Wniosek końcowy

Biorąc pod uwagę powyższe argumenty, z pełna odpowiedzialnością stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr Justyny Madej pt. *Technika miar niezwartości w zastosowaniu do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym* spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim w Ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" oraz innych przepisach z nią związanych (Dz.U. 574/2022 z późniejszymi zmianami).

Tym samym wnioskuję o **dopuszczenie rozprawy** do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora i przyjęcie rozprawy. Przedstawiona do recenzji rozprawa z pewnością daje podstawę do ubiegania się o stopień doktora w dyscyplinie matematyka. Doceniając zarówno zaprezentowaną wiedzę z badanej dziedziny, jak i dużą biegłość w operowaniu aparatem analizy funkcjonalnej składam wniosek o **uznanie pracy za wyróżniającą**.

Mieczysław Cichoń

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
Wydział Matematyki i Informatyki
ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. 61 829 53 08

Uwagi szczegółowe:

Uwagi nie są uporządkowane w sensie ich wagi, a w kolejności występowania w pracy (w stosunku do długości pracy i stopnia jej technicznego opracowania to drobne usterki). Przedstawione uwagi mają charakter redakcyjny i nie obniżają wartości merytorycznej rozprawy.

Str. 2_3: „zwane równaniami”
Str. 10_1: może bez „tuż”?, _3: „równań różniczkowych”, _5: „umożliwią”
Str. 10: (oraz 16, ale i na dalszych stronach): sugerowałbym „wzorów analitycznych wyrażających” zamiast „formuł” (choć na stronie 17 mamy „wzoru opisującego”)
Str. 11: brakuje wprowadzenia definicji oznaczeń rodzin zbiorów ograniczonych i relatywnie zwartych
Str. 18_1: (tak samo str. 19^1 czy 22, 40 i dalsze) tu mamy pojęcie „ciągów zbieżnych do zera z tą sama prędkością” - z pewnością wymaga to ścisłego zdefiniowania
Str. 20: na jednej stronie mamy „mieszankę” zapisu przedziałów w opisach przestrzeni, czyli [0,T] oraz [a,b] (Twierdzenie 2.4.2 i uwagi po nim). Nie do końca wiem na czym ma polegać „wersja ogólna”, to niezbyt istotne (moim zdaniem).
Str. 21: Może warto skomentować problem zwartości zbiorów w przestrzeni $BC(R_+, E)$ przez definiowaniem miar niezwartości?
Str. 24: „nie istnieją miary Hausdorffa lub miary im równoważne” – raczej wzory analityczne takich miar...
Str. 28: to także jedynie sugestia, ale warto dodać we wstępie do rozdziału dlaczego w tym przypadku zastosowane będzie twierdzenie Schaudera, a nie Darbo? Poza tym – może warto zaznaczyć, że operatory są dobrze zdefiniowane, bo badana przestrzeń jest algebrą Banacha (a pierwsza uwaga na ten temat jest na stronie 77).
Str. 29 (i podobna uwaga dla dalszych założeń): może jednak warto od razu założenia typu (ii) czy (v) formułować w języku modułów ciągłości? Byłoby łatwiej śledzić dowody, a moduły są już wprowadzone.
Str. 30: byłbym zadowolony za krótki komentarz do założenia (x), pokazujący czy i kiedy może ono być spełnione (ale to tak dla ułatwienia czytania prac takich jak ta).
Str. 33: bardzo szczegółowo prowadzony dowód nagle jest zredukowany do przywołania zestawu założeń (dla dowodu $Qx(t)$ w c_0). Może warto to także dokładnie rozpisać?
Str. 36^2: „wystarczająco małe” – sugerowałbym także poszerzenie dowodu.
Str. 39: pytanie o wzór (3.18): może komentarz dlaczego nie stosujemy twierdzenia Darbo, tylko konstruujemy niezmienniczy zbiór zwarty i twierdzenia Schaudera?
Str. 40_7: „że” _5: „jądra”
Str. 50: „nie jest trywialny”?
Str. 54: tu pojawia się „grubość wiązki”, może zostać, o ile zdefiniujemy te pojęcie, warto od razu powiązać z asymptotyczna stabilnością (kilka razy później, np. str. 83).
Str. 57: kilka brakujących przecinków w zdaniu wtrąconym (zaskakujące, bo praca jest *bardzo* staranna)

Collegium Mathematicum, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 13
wmiuam@amu.edu.pl

M. C.

Str. 58: tu pytanie – mamy dowód warunku Lipschitza dla F_n, ale przywołana jest jedynie ciągłość. Może warto było od razu wywnioskować z tego kontrakcję z miarą niezwartości (4.23)? To samo na stronie 79. Dowód oparty o miarę niezwartości: na stronach 81 i 82 (wzór (5.14)).

Str. 72: założenie (iii) oraz str. 73 założenie (x) – jak ewentualnie wyglądałoby w przestrzeni Frécheta i jak ono się ma do własności operatora Hammersteina?

Str. 73^1: „określone"

Str. 77: zamiast „prostą konsekwencją ciągłości" nie lepiej po prostu napisać o iloczynie funkcji ciągłych i ciągłości iloczynu w algebrze Banacha?

Collegium Mathematicum, ul. Uniwersytetu Poznańskiego 4, 61-614 Poznań
tel. +48 61 829 53 13
wmiuam@amu.edu.pl

M.C.