Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

ROZPRAWA DOKTORSKA

dyscyplina naukowa matematyka

Zbiory (1,2)-dominujące w grafach

Adrian Michalski

Promotor

dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

Rzeszów 2023

Spis treści

Wykaz oznaczeń **2**

Wstęp **4**

1 Podstawowe definicje i oznaczenia **9**

2 Wprowadzenie do zbiorów $(1, 2)$-dominujących **14**
2.1 Przedstawienie problemu, celu rozprawy oraz wstępne rezultaty 14
2.2 Liczba $(1, 2)$-dominowania w wybranych klasach grafów 18
2.3 Związki pomiędzy parametrami dominowania i $(1, 2)$-dominowania . . . 22

3 Właściwe zbiory $(1, 2)$-dominujące **27**
3.1 Definicja właściwego zbioru $(1, 2)$-dominującego 27
3.2 Charakteryzacja grafów mających właściwy zbiór $(1, 2)$-dominujący . . 28
3.3 Parametry właściwego $(1, 2)$-dominowania 29

4 Indeks przekroju zbiorów $(1, 1)$-dominujących i właściwych zbiorów $(1, 2)$-dominujących **40**
4.1 Indeks przekroju w wybranych klasach grafów 40
4.2 Indeks przekroju w drzewach 43

5 Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w produktach grafów **50**
5.1 Twierdzenia o istnieniu niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących . . . 50
5.2 Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w produktach dwóch grafów 53
5.3 Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w G-złączeniu grafów 58
5.4 Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w uogólnionej koronie grafów . . . 65

Podsumowanie i dalsze kierunki badań **70**

Bibliografia **73**

Wykaz oznaczeń

$G = (V, E)$	-	graf prosty (graf)
$V(G)$	-	zbiór wierzchołków grafu G
$E(G)$	-	zbiór krawędzi grafu G
xy	-	krawędź incydentna z wierzchołkami x, y
$d_G(x)$	-	stopień wierzchołka x w grafie G
$\Delta(G)$	-	maksymalny stopień grafu G
$\delta(G)$	-	minimalny stopień grafu G
$N_G(x)$	-	sąsiedztwo otwarte wierzchołka x w grafie G
$N_G[x]$	-	sąsiedztwo domknięte wierzchołka x w grafie G
$d_G(x, y)$	-	odległość pomiędzy wierzchołkami x, y w grafie G
$d_G(x, S)$	-	odległość pomiędzy wierzchołkiem x a zbiorem S w grafie G
$diam(G)$	-	średnica grafu G
$x - y$	-	droga pomiędzy wierzchołkami x i y w grafie
$A - B$	-	droga pomiędzy podzbiorami wierzchołków A i B w grafie
$x - A$	-	droga pomiędzy wierzchołkiem x i podzbiorem wierzchołków A w grafie
$x - z - y$	-	droga pomiędzy wierzchołkami x i y zawierająca wierzchołek z w grafie
$N_G^k(x)$	-	k-te sąsiedztwo otwarte wierzchołka x w grafie G
$N_G^k[x]$	-	k-te sąsiedztwo domknięte wierzchołka x w grafie G
N_n	-	graf bezkrawędziowy n-wierzchołkowy
P_n	-	ścieżka n-wierzchołkowa
C_n	-	cykl n-wierzchołkowy
K_n	-	graf pełny n-wierzchołkowy
$K_{m,n}$	-	graf pełny dwudzielny
$K_{1,n-1}$	-	gwiazda n-wierzchołkowa
$SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$	-	pająk o nogach długości $l_1, l_2, \ldots, l_n$
$T = (V, E)$	-	drzewo
$G[U]$	-	podgraf grafu G indukowany przez zbiór U, $U \subseteq V(G)$

$\alpha(G)$	-	liczba niezależności grafu G
$i(G)$	-	dolna liczba niezależności grafu G
$\gamma(G)$	-	liczba dominowania grafu G
$\gamma_{1,k}(G)$	-	liczba $(1,k)$-dominowania grafu G
$\gamma_{1,2}(G)$	-	liczba $(1,2)$-dominowania grafu G
$\gamma_{1,\overline{2}}(G)$	-	liczba właściwego $(1,2)$-dominowania grafu G
$\gamma_{1,1}(G)$	-	liczba $(1,1)$-dominowania grafu G
$\Gamma(G)$	-	górna liczba dominowania grafu G
$\Gamma_{1,k}(G)$	-	górna liczba $(1,k)$-dominowania grafu G
$\Gamma_{1,2}(G)$	-	górna liczba $(1,2)$-dominowania grafu G
$\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$	-	górna liczba właściwego $(1,2)$-dominowania grafu G
$\rho(G)$	-	indeks przekroju grafu G
$L(G)$	-	zbiór liści grafu G
$L(x)$	-	zbiór liści grafu G sąsiednich z wierzchołkiem x
$S(G)$	-	zbiór wierzchołków podtrzymujących grafu G
$S_s(G)$	-	zbiór wierzchołków silnie podtrzymujących grafu G
$S_w(G)$	-	zbiór wierzchołków słabo podtrzymujących grafu G
$\mathcal{F}_{1,1}(G)$	-	rodzina wszystkich zbiorów $(1,1)$-dominujących grafu G
$\mathcal{F}_{1,2}(G)$	-	rodzina wszystkich zbiorów $(1,2)$-dominujących grafu G
$\mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$	-	rodzina wszystkich właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących grafu G
$G \cong H$	-	graf G jest izomorficzny z grafem H
$G + H$	-	złączenie grafów G i H
$G \,\square\, H$	-	produkt kartezjański grafów G i H
$G \times H$	-	produkt tensorowy grafów G i H
$G \boxtimes H$	-	silny produkt grafów G i H
$G[H]$	-	kompozycja grafów G i H
$G[\mathcal{H}]$	-	G-złączenie grafu G i rodziny grafów $\mathcal{H}$
$G \circ H$	-	korona grafów G i H
$G \circ \mathcal{H}$	-	uogólniona korona grafu G i rodziny grafów $\mathcal{H}$
G^X	-	duplikacja podzbioru wierzchołków X w grafie G
$G^{\{x_0\}}$	-	duplikacja wierzchołka x_0 w grafie G

Wstęp

Dominowanie w grafach jest jednym z bardziej znanych zagadnień w teorii grafów, które jest intensywnie badane w ostatnich dekadach.

Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest zbiorem dominującym grafu G, jeżeli każdy wierzchołek ze zbioru $V(G) \setminus D$ jest sąsiedni z pewnym wierzchołkiem ze zbioru D. Moc najmniejszego zbioru dominującego, nazywana liczbą dominowania grafu, jest jednym z najczęściej rozważanych parametrów liczbowych związanych z pojęciem dominowania.

Pierwsza wzmianka o zbiorach dominujących pojawiła się w monografii [8] C. Berge'a z 1962 roku, gdzie został zdefiniowany zbiór stabilny zewnętrznie oraz współczynnik stabilności zewnętrznej grafu, znane obecnie odpowiednio jako zbiór dominujący i liczba dominowania grafu. Również w 1962 roku O. Ore w [53] po raz pierwszy użył pojęcia zbioru dominującego i liczby dominowania, a w 1977 roku E. J. Cockayne i S. T. Hedetniemi w [15] opublikowali przegląd wyników dotyczących dominowania, gdzie użyli symbolu $\gamma(G)$ do oznaczenia liczby dominowania grafu G.

Pomimo że początki badań dotyczących zbiorów dominujących pochodzą z lat 60-tych XX wieku, to zainteresowanie tematyką, którą można powiązać ze zbiorami dominującymi, datuje się na rok 1862, kiedy to C. F. de Jaenisch rozważał problemy dotyczące rozmieszczania figur na szachownicy o wymiarze $n \times n$ i wyznaczenia najmniejszej liczby królowych tak, aby każde pole albo było zajęte przez królową, albo mogło zostać zaatakowane w kolejnym ruchu przez co najmniej jedną z królowych [17]. Modelując powyższy problem przy pomocy odpowiednio zdefiniowanego grafu, znalezienie rozwiązania można sprowadzić do wyznaczenia liczby dominowania tego grafu. Szczególnym przypadkiem tych rozważań jest znany problem pięciu królowych [8]. W tym czasie rozważane były również inne problemy szachowe, dotyczące rozmieszczania figur na szachownicy, opisane między innymi przez braci Yaglom w [65].

Teoria dominowania ma wiele zastosowań. Zbiory dominujące mogą być wykorzystywane między innymi w problemach lokalizacji różnych strategicznych punktów, na przykład punktów pomocy medycznej, przy organizacji imprez masowych. W ostatnich latach zbiory dominujące stosowane są również między innymi w cyberbezpieczeństwie

[2, 25], zarządzaniu sieciami bezprzewodowymi [38, 67] czy analizie sieci złożonych [49, 50]. Zbiory dominujące znalazły zastosowanie także w socjologii. L. L. Kelleher i M. B. Cozzens w [40] wykorzystały zbiory dominujące do badania relacji w sieciach społecznych.

W literaturze można znaleźć wiele różnych wariantów i uogólnień zbiorów dominujących w grafach. W [33] zostało opisanych ponad siedemdziesiąt rodzajów dominowania i związanych z nimi parametrów. Wśród takich uogólnień ważną rolę odgrywa wielokrotne dominowanie wprowadzone przez J. Finka i M. S. Jacobsona w [22].

Niech $p \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy zbiorem p-dominującym grafu G, jeżeli każdy wierzchołek ze zbioru $V(G) \setminus D$ ma co najmniej p sąsiadów w zbiorze D. Jeżeli $p = 1$, to otrzymujemy definicję zbioru dominującego. Jeżeli $p = 2$, to otrzymujemy definicję zbioru 2-dominującego, nazywanego również zbiorem podwójnie dominującym. W wydanej w 2020 roku książce T. Haynes, S. T. Hedetniemiego i M. A. Henninga pod tytułem *Topics in Domination in Graphs* [34] jeden z rozdziałów autorstwa A. Hansberg i L. Volkmanna zawiera obszerny przegląd istotnych wyników związanych z wielokrotnym dominowaniem. Wiele prac z zakresu wielokrotnego dominowania dotyczy zbiorów 2-dominujących, które są badane ze względu na ich różne własności i wartości parametrów 2-dominowania, na przykład [6, 10, 14, 26, 27, 30]. Również dla $p \geqslant 2$ rozważane są zbiory p-dominujące, warto wymienić między innymi [12, 51, 52].

Innym znanym uogólnieniem zbiorów dominujących jest dominowanie w sensie odległościowym, które zdefiniowali A. Meir i J. W. Moon w [43]. Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest odległościowym zbiorem k-dominującym grafu G, jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \setminus D$ istnieje $y \in D$ taki, że $d_G(x, y) \leqslant k$. Jeżeli $k = 1$, to otrzymujemy definicję zbioru dominującego. Parametr k w definicji odległościowego zbioru k-dominującego określa największą dopuszczalną odległość pomiędzy wierzchołkiem spoza odległościowego zbioru k-dominującego a tym zbiorem. Uogólnienia odległościowe zbiorów dominujących są badane, literatura jest obszerna i wciąż aktualna, wyniki dotyczące tych zbiorów można znaleźć między innymi w pracach [16, 21, 28].

Wykorzystując wielokrotne oraz odległościowe uogólnienia zbiorów dominujących, w 2008 roku S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely i D. F. Rall wprowadzili w [35] nowy wariant zbiorów dominujących, mianowicie zbiory $(1, k)$-dominujące, które uogólniają zbiory dominujące i jednocześnie są słabszą wersją 2-dominowania.

Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy zbiorem $(1, k)$-dominującym grafu G, jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \setminus D$ istnieją dwa różne wierzchołki $u, v \in D$ takie, że $xu \in E(G)$ oraz $d_G(x, v) \leqslant k$. Dla $k = 1$ otrzymujemy zbiór 2-dominujący.

Przedłożona rozprawa nawiązuje do wprowadzonych zbiorów $(1,k)$-dominujących, a w szczególności dotyczy zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach i ich produktach.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów. Zawiera również wykaz oznaczeń, podsumowanie i bibliografię.

W rozdziale pierwszym podane są podstawowe definicje i oznaczenia. Pozostałe niezbędne definicje są umieszczone wewnątrz rozdziałów, bezpośrednio przed ich wykorzystaniem.

Rozdział drugi jest wprowadzeniem do tematyki rozprawy. Oprócz omówienia pojęcia zbioru $(1,k)$-dominującego i parametrów $(1,k)$-dominowania, w rozdziale zostały określone cele rozprawy oraz przedstawione rezultaty dotyczące liczby $(1,2)$-dominowania i związków parametrów $(1,2)$-dominowania z parametrami klasycznego dominowania. Wyznaczona została liczba $(1,2)$-dominowania dla wybranych klas grafów oraz podane zostały zależności pomiędzy liczbą dominowania i liczbą $(1,2)$-dominowania. Za pomocą konstrukcji szczególnych rodzin grafów zostało udowodnione, że różnica pomiędzy liczbą $(1,2)$-dominowania i liczbą dominowania może być równa ustalonej liczbie naturalnej. Ponadto zostało wykazane, że w ogólnym przypadku nie można podać zależności pomiędzy liczbą $(1,2)$-dominowania i górną liczbą dominowania, ponieważ istnieją grafy, w których różnica pomiędzy tymi parametrami jest równa ustalonej liczbie naturalnej na korzyść każdego z tych parametrów.

Z definicji zbioru $(1,2)$-dominującego wynika, że dowolny zbiór 2-dominujący jest zbiorem (1,2)-dominującym. W rozdziale trzecim zostały wprowadzone *właściwe zbiory* $(1,2)$*-dominujące*, czyli zbiory (1,2)-dominujące, które nie są zbiorami 2-dominującymi. Rozstrzygnięty został problem istnienia właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach. W przypadku grafów spójnych zostało udowodnione, że jedyną klasą grafów, w których nie istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący są grafy pełne. Ponadto zostało pokazane, że dla spójnego grafu niebędącego grafem pełnym liczby właściwego $(1,2)$-dominowania i $(1,2)$-dominowania są równe. W dalszej części rozdziału został podany, a następnie zbadany ciąg zależności pomiędzy parametrami właściwego $(1,2)$-dominowania, $(1,2)$-dominowania oraz klasycznego dominowania. W tym ciągu zależności nie występuje górna liczba dominowania $\Gamma(G)$, ponieważ w ogólnym przypadku nie można podać związku pomiędzy $\Gamma(G)$ i $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Zostały podane konstrukcje grafów, dla których różnice pomiędzy tymi parametrami mogą być dowolnie duże na korzyść każdego z nich. Ponadto przy pomocy konstrukcji szczególnych rodzin grafów zostało wykazane, że istnieją grafy, w których wszystkie omawiane parametry są równe albo zależności występujące w omawianym ciągu są ostre.

W rozdziale czwartym został wprowadzony *indeks przekroju zbiorów* $(1,1)$*-dominują-*

cych i właściwych zbiorów $(1,2)$*-dominujących grafu* będący najmniejszą możliwą liczbą wspólnych wierzchołków zbioru $(1,1)$-dominującego oraz właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego w danym grafie. Została wyznaczona wartość tego indeksu w niektórych klasach grafów takich jak: ścieżki, cykle, grafy pełne dwudzielne i pająki. Ponadto został podany warunek konieczny na to, aby w drzewie istniały zbiór $(1,1)$-dominujący i właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący, które są rozłączne.

Rozdział piąty zawiera rezultaty dotyczące istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach i ich produktach (nazywanych również iloczynami grafów), w szczególności w produkcie tensorowym, silnym produkcie, G-złączeniu oraz uogólnionej koronie grafów. W każdym przypadku została podana pełna charakteryzacja produktu, w którym istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Charakteryzacje te podają warunki na istnienie niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w danym produkcie w zależności od własności grafów będących jego czynnikami.

Większość zamieszczonych w rozprawie wyników została opublikowana, a pozostałe są opracowane w formie artykułów i oczekują na zakończenie procesu publikacyjnego.

W niniejszej rozprawie wykorzystane zostały następujące artykuły:

(A) A. Michalski, I. Włoch, *On the existence and the number of independent (1,2)-dominating sets in the G-join of graphs*, Applied Mathematics and Computation, 377 (2020) 125155,

(B) A. Michalski, P. Bednarz, *On independent secondary dominating sets in generalized graph products*, Symmetry, 13(12) (2021) 2399,

(C) A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska, *On proper (1,2)-dominating sets*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 45(11) (2022) 7050-7057,

(D) A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch, *On minimum intersections of certain secondary dominating sets in graphs*, Opuscula Mathematica, 43(6) (2023) 813-827.

W każdym z powyższych współautorskich artykułów udział autora rozprawy, zgodnie z oświadczeniami współautorów, wynosi co najmniej 50%.

Zamieszczone w tej rozprawie wyniki zostały przedstawione w formie referatów na międzynarodowych konferencjach, w szczególności:

1. The 6th Gdańsk Workshop on Graph Theory, Gdańsk, 2018, tytuł referatu: *On the existence and the number of (1,2)-kernels in G-join of graphs*,

2. The 27th Workshop on Cycles and Colourings, Nowy Smokowiec (Słowacja), 2018, tytuł referatu: *Secondary kernels in graph products*,

3. The 27th Workshop '3in1', Stryszawa, 2018 tytuł referatu: *(1,2)-kernels in the G-join of graphs*,

4. The 7th Gdańsk Workshop on Graph Theory, Gdańsk-Sobieszewo, 2019, tytuł referatu: *Secondary dominating sets in graphs and their modification*,

5. The 28th Edition of the Annual 3in1 Workshop, Dosłońce, 2019, tytuł referatu: *Parameters of secondary domination in graphs*,

6. 9th Polish Combinatorial Conference, Będlewo, 2022 , tytuł referatu: *Some properties of (1,2)-dominating and proper (1,2)-dominating sets in graphs*,

7. The 8th Gdańsk Workshop on Graph Theory, Sopot, 2023, tytuł referatu: *On independent (1,1)-dominating and (1,2)-dominating sets in graph products.*

Wyniki zawarte w niniejszej rozprawie nie wyczerpują przedstawionej tematyki, która może być nadal rozwijana. Dalsze kierunki badań są już określone i przedstawione w podsumowaniu rozprawy.

Rozdział 1

Podstawowe definicje i oznaczenia

Rozdział ten zawiera podstawowe definicje oraz oznaczenia wykorzystywane w dalszej części pracy, które zostały zaczerpnięte głównie z [20].

Grafem prostym nieskierowanym nazywamy parę uporządkowaną $G = (V, E)$, gdzie V jest zbiorem skończonym, natomiast E jest rodziną różnych dwuelementowych podzbiorów różnych elementów zbioru V. Dla danego grafu G zbiór V oznaczamy przez $V(G)$ i nazywamy *zbiorem wierzchołków*, natomiast zbiór E oznaczamy przez $E(G)$ i nazywamy *zbiorem krawędzi*. Elementy zbioru $V(G)$ nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru $E(G)$ *krawędziami*. Dla uproszczenia zapisu krawędź $\{x, y\}$ będziemy oznaczać przez xy.

W niniejszej pracy będziemy rozważać wyłącznie grafy proste nieskierowane, które będziemy nazywać krótko *grafami*.

Jeżeli $V(G) = E(G) = \emptyset$, to graf G nazywamy *grafem pustym* i oznaczamy symbolem $\emptyset$. Jeżeli $|V(G)| = n$, $n \geqslant 1$ oraz $E(G) = \emptyset$, to G nazywamy *grafem bezkrawędziowym* i oznaczamy przez N_n. Grafy puste oraz jednowierzchołkowe będziemy nazywać grafami *trywialnymi*.

Wierzchołki x i y nazywamy *sąsiednimi* (lub *sąsiadami*) w grafie G, jeżeli $xy \in E(G)$. Powiemy wtedy, że wierzchołki x oraz y są *incydentne* z krawędzią xy lub że są *końcami* krawędzi xy. Niech $x \in V(G)$. *Sąsiedztwem otwartym wierzchołka* x w grafie G nazywamy zbiór $N_G(x) = \{y \in V(G) \colon xy \in E(G)\}$. Zbiór $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ nazywamy *sąsiedztwem domkniętym wierzchołka* x w grafie G. *Stopniem wierzchołka* x w grafie G nazywać będziemy liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x i oznaczać przez $d_G(x)$. Liczbę $\delta(G) = \min\{d_G(x) \colon x \in V(G)\}$ nazywamy *minimalnym stopniem grafu* G, natomiast liczbę $\Delta(G) = \max\{d_G(x) \colon x \in V(G)\}$ nazywamy *maksymalnym stopniem grafu* G.

Jeżeli $d_G(x) = 0$, to x nazywamy *wierzchołkiem izolowanym*. Jeżeli $d_G(x) = 1$, to x nazywamy *liściem*. Zbiór wszystkich liści grafu G oznaczamy symbolem $L(G)$. Dla dowolnego wierzchołka $x \in G$ zbiór wszystkich liści sąsiednich z wierzchołkiem x będziemy oznaczać symbolem $L(x)$. Wierzchołek sąsiedni z co najmniej jednym liściem nazywamy *wierzchołkiem podtrzymującym*. Zbiór wszystkich wierzchołków podtrzymujących grafu G oznaczamy symbolem $S(G)$. Jeżeli wierzchołek jest sąsiedni z co najmniej dwoma liśćmi, to wierzchołek ten nazywamy *silnie podtrzymującym*, a zbiór wszystkich wierzchołków silnie podtrzymujących grafu G oznaczamy symbolem $S_s(G)$. Wierzchołek sąsiedni z dokładnie jednym liściem nazywamy *słabo podtrzymującym*, a zbiór wszystkich wierzchołków słabo podtrzymujących grafu G oznaczamy symbolem $S_w(G)$.

Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem dominującym grafu* G, jeżeli każdy wierzchołek grafu ze zbioru $V(G) \setminus D$ ma sąsiada w zbiorze D. W szczególności, zbiór $V(G)$ jest zbiorem dominującym grafu G. *Minimalnym zbiorem dominującym* nazywamy zbiór dominujący, który nie zawiera podzbioru właściwego będącego zbiorem dominującym. Moc najmniejszego zbioru dominującego w grafie G nazywamy *liczbą dominowania grafu* G i oznaczamy przez $\gamma(G)$. Moc największego minimalnego zbioru dominującego w grafie G nazywamy *górną liczbą dominowania grafu* G i oznaczamy przez $\Gamma(G)$. Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność $\gamma(G) \leqslant \Gamma(G)$.

Podzbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem niezależnym grafu* G, jeżeli każde dwa wierzchołki z tego zbioru nie są sąsiednie. Przyjmujemy, że zbiór pusty oraz zbiory jednowierzchołkowe są zbiorami niezależnymi. *Maksymalnym zbiorem niezależnym* nazywamy zbiór niezależny, który nie jest podzbiorem właściwym innego zbioru niezależnego. Moc największego zbioru niezależnego w grafie G nazywamy *liczbą niezależności grafu* G i oznaczamy przez $\alpha(G)$. Moc najmniejszego maksymalnego zbioru niezależnego w grafie G nazywamy *dolną liczbą niezależności grafu* G i oznaczamy przez $i(G)$. Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność $i(G) \leqslant \alpha(G)$.

Niech będą dane grafy $G = (V(G), E(G))$ oraz $H = (V(H), E(H))$.

Grafy G i H nazywamy *izomorficznymi*, jeżeli istnieje bijekcja $f : V(G) \to V(H)$ taka, że $xy \in V(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)f(y) \in V(H)$. Izomorficzność grafów G i H oznaczamy symbolem $G \cong H$, natomiast funkcję f nazywamy *izomorfizmem*.

Jeżeli $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$, to graf H nazywamy *podgrafem grafu* G. Jeżeli H zawiera wszystkie krawędzie ze zbioru $E(G)$ o końcach w zbiorze $U \subseteq V(G)$, to podgraf H nazywamy *podgrafem grafu* G *indukowanym przez zbiór* U i oznaczamy symbolem $G[U]$.

Ścieżką n-wierzchołkową nazywamy graf P_n, $n \geqslant 2$ taki, że $V(P_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $E(P_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n\}$.

Cyklem n-wierzchołkowym nazywamy graf C_n, $n \geqslant 3$ taki, że $V(C_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $E(C_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$.

Dla $n \geqslant 1$ *drogą pomiędzy wierzchołkami* x_0 *i* x_n w grafie G nazywamy ciąg wierzchołków i krawędzi $x_0, x_0x_1, x_1, \ldots, x_{n-1}x_n, x_n$. Dla $n \geqslant 2$ drogę pomiędzy wierzchołkami x_0 i x_n oznaczamy symbolem $x_0 - x_n$. Jeżeli $x_0 = x_n$ dla $n \geqslant 3$, to otrzymujemy *cykl.* Niech $A \subseteq V(G), B \subseteq V(G)$. Jeżeli $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cap A = \{x_0\}$ oraz $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cap B = \{x_n\}$, to drogę $x_0 - x_n$ nazywamy *drogą pomiędzy zbiorami A i B* i oznaczamy symbolem $A - B$. Jeżeli $A = \{x\}$, to drogę $A - B$ nazywamy *drogą pomiędzy wierzchołkiem x i zbiorem B* i oznaczamy symbolem $x - B$. Aby wskazać, że droga pomiędzy wierzchołkami x i y lub pomiędzy zbiorami A i B lub pomiędzy wierzchołkiem x i zbiorem B zawiera wierzchołek z, będziemy odpowiednio pisać $x - z - y$ lub $A - z - B$ lub $x - z - B$.

Jeżeli pomiędzy dwoma dowolnymi, różnymi wierzchołkami grafu istnieje łącząca je droga, to graf nazywamy *spójnym*, w przeciwnym wypadku graf nazywamy *niespójnym.* Każdy maksymalny (ze względu na relację zawierania) spójny podgraf grafu nazywamy *składową spójności* grafu. W szczególności, graf spójny posiada jedną składową spójności. Graf spójny bez cykli nazywamy *drzewem.*

Długością drogi nazywamy liczbę występujących w niej krawędzi. Długość najkrótszej drogi pomiędzy wierzchołkami x_0 i x_n w grafie G będziemy nazywać *odległością pomiędzy wierzchołkami* x_0 i x_n oraz oznaczać symbolem $d_G(x_0, x_n)$. Przyjmujemy, że $d_G(x, x) = 0$. Największą możliwą odległość pomiędzy dwoma wierzchołkami grafu G nazywamy *średnicą* grafu i oznaczamy przez *diam*(G). Największą odległość pomiędzy wierzchołkiem x i wszystkimi innymi wierzchołkami grafu nazywamy *mimośrodem* wierzchołka x. Wierzchołek o największym mimośrodzie w grafie G nazywamy *wierzchołkiem centralnym* bądź *centrum grafu* G. Graf może mieć więcej niż jeden wierzchołek centralny.

Niech v będzie wierzchołkiem grafu G i niech $S \subseteq V(G)$. Liczbę $d_G(v, S) = \min\{d_G(v, x) \colon x \in S\}$ nazywamy *odległością pomiędzy wierzchołkiem x i zbiorem S* w grafie G.

Niech $k \geqslant 2$. Zbiór $N_G^k(x) = \{v \in V(G) \colon 0 < d_G(x, v) \leqslant k\}$ będziemy nazywać *k-tym sąsiedztwem otwartym wierzchołka x w grafie G*. Analogicznie, zbiór $N_G^k[x] = N_G^k(x) \cup \{x\}$ będziemy nazywać *k-tym sąsiedztwem domkniętym wierzchołka x w grafie G*.

Niech G będzie grafem spójnym i niech $d_G(x) \geqslant 2$. *Gałęzią grafu G w wierzchołku x* nazywamy maksymalny (ze względu na relację zawierania) podgraf będący drzewem, który zawiera x oraz dokładnie jedną krawędź incydentną z x. Gałąź izomorficzną ze ścieżką będziemy nazywać *ścieżką wiszącą.*

Jeżeli w grafie każde dwa wierzchołki są sąsiednie, to taki graf nazywamy *grafem pełnym.* Graf pełny n-wierzchołkowy oznaczamy symbolem K_n, $n \geqslant 1$. Graf K_3 będziemy nazywać *trójkątem.* Przyjmujemy, że graf N_1 jest grafem pełnym. Podgraf indukowany, który jest grafem pełnym, nazywamy *kliką*.

Jeżeli zbiór wierzchołków grafu możemy podzielić na dwa rozłączne, niepuste i niezależne zbiory V_1, V_2, to taki graf nazywamy *grafem dwudzielnym*. Jeżeli w grafie dwudzielnym każdy wierzchołek ze zbioru V_1 jest sąsiedni z wszystkimi wierzchołkami ze zbioru V_2, to taki graf nazywamy *grafem pełnym dwudzielnym*. W szczególności, jeżeli $|V_1| = n$ i $|V_2| = m$, to graf pełny dwudzielny oznaczamy symbolem $K_{n,m}$. Graf $K_{1,n-1}$ nazywamy *gwiazdą* n-wierzchołkową.

Sumą grafów G i H nazywamy graf $G \cup H$ taki, że $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ i $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$.

Złączeniem grafów G i H nazywamy graf $G + H$ taki, że $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$ oraz $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy\colon x \in V(G) \text{ i } y \in V(H)\}$.

Produktem kartezjańskim grafów G i H nazywamy graf $G \,\Box\, H$ taki, że $V(G \,\Box\, H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \,\Box\, H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q)\colon (x_i = x_j \text{ i } y_p y_q \in E(H)) \text{ lub } (y_p = y_q \text{ i } x_i x_j \in E(G))\}$.

Produktem tensorowym grafów G i H nazywamy graf $G \times H$ taki, że $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \times H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q)\colon x_i x_j \in E(G) \text{ i } y_p y_q \in E(H)\}$.

Silnym produktem grafów G oraz H nazywamy graf $G \boxtimes H$ taki, że $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \boxtimes H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q)\colon (x_i = x_j \text{ i } y_p y_q \in E(H)) \text{ lub } (y_p = y_q \text{ i } x_i x_j \in E(G)) \text{ lub } (x_i x_j \in E(G) \text{ i } y_p y_q \in E(H))\}$.

Kompozycją dwóch grafów G, H nazywamy graf $G[H]$ taki, że $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G[H]) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q)\colon x_i x_j \in E(G) \text{ lub } (y_p y_q \in E(H) \text{ i } x_i = x_j)\}$.

Niech G będzie grafem spójnym, $|V(G)| \geqslant 2$ oraz niech $\mathcal{H} = \{H_v\colon v \in V(G)\}$ będzie rodziną niepustych grafów, indeksowaną wierzchołkami grafu G.

Wtedy G-złączeniem grafów G oraz rodziny $\mathcal{H}$ nazywamy graf $G[\mathcal{H}]$ taki, że $V(G[\mathcal{H}]) = \bigcup_{v \in V(G)} \big(\{v\} \times V(H_v)\big)$ oraz $(v_1, u_1)(v_2, u_2) \in E(G[\mathcal{H}])$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(v_1 = v_2 \text{ i } u_1 u_2 \in E(H_{v_1}))$ lub $v_1 v_2 \in E(G)$.

G-złączenie jest uogólnieniem wielu znanych operacji na grafach. W szczególności możemy wyróżnić następujące przypadki.

Jeżeli $G \cong P_2$ oraz $\mathcal{H} = \{H_1, H_2\}$, wtedy $G[\mathcal{H}]$ jest złączeniem $H_1 + H_2$.

Jeżeli dla każdego $v \in V(G)$ zachodzi $H_v \cong H$, to wtedy $G[\mathcal{H}]$ jest kompozycją $G[H]$.

Niech $X \subseteq V(G)$. Jeżeli dla wszystkich $v \in V(G) \setminus X$ zachodzi $H_v \cong N_1$, natomiast dla wszystkich $u \in X$ zachodzi $H_u \cong N_2$, wtedy graf $G[\mathcal{H}]$ jest *duplikacją zbioru* X *w grafie* G, oznaczaną przez G^X. W szczególności, jeśli $X = \{x_0\}$ to otrzymujemy *duplikację wierzchołka* x_0 *w grafie* G, oznaczaną symbolem $G^{\{x_0\}}$.

Niech G będzie grafem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 2$ oraz niech $\mathcal{H} = \{H_v\colon v \in V(G)\}$ będzie rodziną dowolnych grafów, indeksowaną wierzchołkami grafu G. *Uogólnioną* *koroną grafu G oraz rodziny $\mathcal{H}$* nazywamy graf $G \circ \mathcal{H}$ taki, że $V(G[\mathcal{H}]) = V(G) \cup \bigcup_{v \in V(G)} V(H_v)$ oraz $E(G \circ \mathcal{H}) = E(G) \cup \bigcup_{v \in V(G)} E(H_v) \cup \bigcup_{v \in V(G)} \{vu\colon u \in V(H_v)\}$.

Jeżeli wszystkie grafy z rodziny $\mathcal{H}$ są izomorficzne z pewnym grafem H, to otrzymujemy definicję korony dwóch grafów $G \circ H$.

Pozostałe pojęcia będą definiowane w pracy bezpośrednio przed ich użyciem.

Rozdział 2

Wprowadzenie do zbiorów $(1,2)$-dominujących

W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego w grafach, przedstawimy cel rozprawy oraz wstępne rezultaty dotyczące zbiorów $(1,k)$-dominujących, ze szczególnym uwzględnieniem zbiorów $(1,2)$-dominujących. Podamy zależności pomiędzy parametrami $(1,2)$-dominowania, a parametrami klasycznego dominowania.

2.1 Przedstawienie problemu, celu rozprawy oraz wstępne rezultaty

Pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego wprowadzili S. M. Hedetniemi i in. w [35] jako szczególny rodzaj zbioru dominującego.

Niech $k \in \mathbb{N}$. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem $(1,k)$-dominującym* grafu G, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V(G) \setminus D$ istnieją dwa różne wierzchołki $u, w \in D$ takie, że $vu \in E(G)$ oraz $d_G(v,w) \leqslant k$. Ponadto przyjmujemy, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $V(G)$ jest zbiorem $(1,k)$-dominującym grafu G.

Z powyższej definicji wynika, że w grafie nietrywialnym każdy zbiór $(1,k)$-dominujący zawiera co najmniej dwa wierzchołki i jest zbiorem dominującym. Zbiór $(1,k)$-dominujący, który nie zawiera podzbioru właściwego będącego zbiorem $(1,k)$-dominującym nazywamy *minimalnym zbiorem $(1,k)$-dominującym*, a zbiór $(1,k)$-dominujący o najmniejszej mocy *najmniejszym zbiorem $(1,k)$-dominującym*. Każdy najmniejszy zbiór $(1,k)$-dominujący jest minimalnym zbiorem $(1,k)$-dominującym.

Moc najmniejszego zbioru $(1,k)$-dominującego w grafie G nazywamy *liczbą $(1,k)$-dominowania grafu G* i oznaczamy symbolem $\gamma_{1,k}(G)$. Moc największego minimalnego zbioru $(1,k)$-dominującego w grafie G nazywamy *górną liczbą $(1,k)$-dominowania grafu G* i oznaczamy przez $\Gamma_{1,k}(G)$.

Dla ustalonego $k \in \mathbb{N}$ i dowolnego n-wierzchołkowego grafu G, $n \geqslant 2$, prawdziwa jest zależność

$$2 \leqslant \gamma_{1,k}(G) \leqslant \Gamma_{1,k}(G) \leqslant n. \tag{2.1}$$

Ponadto $\gamma_{1,k}(G) = \Gamma_{1,k}(G) = n$, jeżeli $n = 2$ lub G jest grafem niespójnym, którego każda składowa spójności ma co najwyżej dwa wierzchołki. Jeżeli G jest n-wierzchołkowym grafem spójnym, $n \geqslant 3$, to

$$2 \leqslant \gamma_{1,k}(G) \leqslant \Gamma_{1,k}(G) \leqslant n - 1. \tag{2.2}$$

Można zauważyć, że dla $k \geqslant 2$ oraz $n \geqslant 4$ zachodzi zależność $2 = \gamma_{1,k}(K_{1,n-1}) < \Gamma_{1,k}(K_{1,n-1}) = n - 1$.

Zbiory $(1, k)$-dominujące realizujące parametry $\gamma_{1,k}(G)$ oraz $\Gamma_{1,k}(G)$ w grafie G będziemy nazywać odpowiednio $\gamma_{1,k}(G)$-zbiorami oraz $\Gamma_{1,k}(G)$-zbiorami.

Jeżeli $k = 1$, to otrzymujemy zbiór $(1, 1)$-dominujący, czyli podzbiór $D \subseteq V(G)$ taki, że dla każdego wierzchołka $v \in V(G) \setminus D$ istnieją dwa różne wierzchołki $u, w \in D$ sąsiednie z wierzchołkiem v. W literaturze takie zbiory są nazywane również zbiorami 2-dominującymi lub podwójnie dominującymi, na przykład [14, 27, 30, 36]. W niniejszej pracy, ujednolicając symbolikę i nazewnictwo, będziemy używać określenia zbiory $(1, 1)$-dominujące zamiast 2-dominujące lub podwójnie dominujące.

Zbiory $(1, 1)$-dominujące są szczególnym przypadkiem zbiorów wielokrotnie dominujących wprowadzonych przez J.F. Finka i M.S. Jacobsona w [22]. Niech $p \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem p-dominującym*, jeżeli każdy wierzchołek nienależący do zbioru D ma co najmniej p sąsiadów w zbiorze D. Jeżeli $p = 1$, to otrzymujemy definicję zbioru dominującego. Jeżeli $p = 2$, to otrzymujemy definicję zbioru $(1, 1)$-dominującego. W literaturze zbiory 2-dominujące są najczęściej rozważanymi spośród zbiorów p-dominujących, gdzie $p \geqslant 2$. Wynika to z faktu, że im większe p, tym większe muszą być stopnie wierzchołków nienależących do zbioru p-dominującego, co znacznie ogranicza rozważania. Przeglądu wyników dotyczących zbiorów p-dominujących dokonali A. Hansberg i L. Volkmann w [29].

Zbiory $(1, 1)$-dominujące są badane w literaturze ze względu na ich różne własności. M. Blidia, M. Chellali i O. Favaron w [10] oraz G. Gunther, B. Hartnell i D. F. Rall w [26] zajmowali się liczbą $(1, 1)$-dominowania oraz związkami pomiędzy największymi zbiorami niezależnymi a zbiorami $(1, 1)$-dominującymi w drzewach. W [32] T. W. Haynes i in. oraz P. Bednarz i I. Włoch w [7] podali warunki konieczne i wystarczające na to, aby w drzewie istniały niezależne zbiory $(1, 1)$-dominujące. Problem istnienia niezależnych zbiorów $(1, 1)$-dominujących i ich liczby badany był również w pracach [4, 5, 6, 61].

W literaturze rozważane były także ich uogólnienia, mianowicie niezależne zbiory p-dominujące dla $p \geqslant 2$. W ostatnich latach zajmowali się tym między innymi Z. L. Nagy w [51, 52] oraz M. Borowiecki i in. w [12].

Definicja zbioru $(1,k)$-dominującego osłabia warunek $(1,1)$-dominowania, ponieważ jeżeli D jest zbiorem $(1,k)$-dominującym, to wystarczy, aby wierzchołek $x \notin D$ miał jednego sąsiada w zbiorze D, a drugi wierzchołek należący do zbioru D był w odpowiednio bliskiej odległości od x, określonej przez parametr k.

Z definicji zbioru $(1,k)$-dominującego wynika, że parametr k nie jest określony jednoznacznie.

Twierdzenie 2.1. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Niech $k, l \in \mathbb{N}$ oraz $k > l$. Każdy zbiór $(1,l)$-dominujący jest zbiorem $(1,k)$-dominującym.*

Ponadto zostało udowodnione, że dla grafów spójnych rozważanie zbiorów $(1,k)$-dominujących ma sens jedynie dla $k \in \{1,2,3,4\}$.

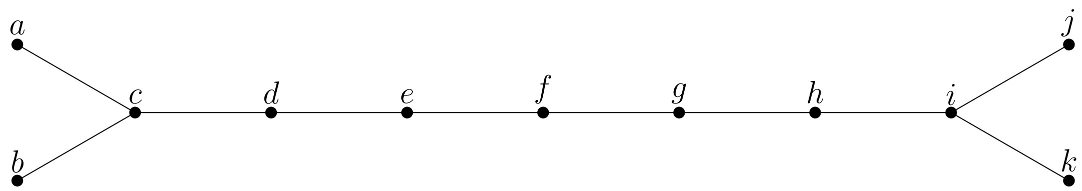
Twierdzenie 2.2. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Jeżeli graf G jest spójny, to każdy zbiór dominujący grafu G zawierający co najmniej dwa wierzchołki jest zbiorem $(1,4)$-dominującym.*

Z powyższych rozważań wynikają wzajemne zależności pomiędzy liczbami $(1,k)$-dominowania dla $k \in \{1,2,3,4\}$.

Wniosek 2.3. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Dla dowolnego spójnego grafu G takiego, że $\gamma(G) \geqslant 2$, zachodzi ciąg nierówności*

$$\gamma(G) = \gamma_{1,4}(G) \leqslant \gamma_{1,3}(G) \leqslant \gamma_{1,2}(G) \leqslant \gamma_{1,1}(G). \tag{2.3}$$

W pracy [35] zostało pokazane, że istnieje graf, dla którego wszystkie nierówności występujące w zależności (2.3) są ostre. Przykładem jest graf G, przedstawiony na rysunku 2.1.



Rysunek 2.1: Graf G [35]

W grafie G zbiór $D_1 = \{c, f, i\}$ jest najmniejszym zbiorem dominującym, zbiór $D_2 = \{c, e, g, i\}$ jest najmniejszym zbiorem (1,3)-dominującym, zbiór $D_3 = \{c, d, f, h, i\}$ to najmniejszy zbiór (1,2)-dominujący, natomiast zbiór $D_4 = \{a, b, j, k, d, f, h\}$ jest najmniejszym zbiorem (1,1)-dominującym. Stąd $\gamma(G) = \gamma_{1,4} = 3$, $\gamma_{1,3}(G) = 4$, $\gamma_{1,2}(G) = 5$, $\gamma_{1,1}(G) = 7$, zatem $\gamma(G) = \gamma_{1,4}(G) < \gamma_{1,3}(G) < \gamma_{1,2}(G) < \gamma_{1,1}(G)$.

Istnieje graf, w którym wszystkie parametry występujące w zależności (2.3) są równe. Takim grafem jest cykl C_4, dla którego $\gamma(C_4) = \gamma_{1,4}(C_4) = \gamma_{1,3}(C_4) = \gamma_{1,2}(C_4) = \gamma_{1,1}(C_4) = 2$.

Wśród zbiorów $(1,k)$-dominujących dla $k \geqslant 2$ najczęściej rozważane są zbiory $(1,2)$-dominujące. Jednym z kierunków badań dotyczących zbiorów $(1,2)$-dominujących jest wyznaczenie lub oszacowanie parametrów $(1,2)$-dominowania w grafach.

K. Kayathri i S. Vallirani w [39] podali oszacowanie liczby $(1,2)$-dominowania w grafie w zależności od maksymalnego stopnia grafu.

Twierdzenie 2.4. (K. Kayathri, S. Vallirani [39]) *Niech G będzie grafem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 5$, takim, że $2 \leqslant \Delta(G) \leqslant n-3$. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(G) \leqslant n - \Delta(G).$$

W przypadku, gdy maksymalny stopień grafu jest dostatecznie duży, liczba $(1,2)$-dominowania osiąga najmniejszą z możliwych wartości.

Twierdzenie 2.5. (K. Kayathri, S. Vallirani [39]) *Niech G będzie grafem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 4$, i niech $\Delta(G) \geqslant n-2$. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(G) = \begin{cases} 2 & \textit{jeżeli } G \textit{ jest grafem spójnym} \\ 3 & \textit{jeżeli } G \textit{ jest grafem niespójnym.} \end{cases}$$

W [39] podana została również pełna charakteryzacja grafów spójnych, w których osiągane są trzy kolejne wartości liczby $\gamma_{1,2}(G)$, począwszy od największej.

Twierdzenie 2.6. (K. Kayathri, S. Vallirani [39]) *Niech G będzie spójnym grafem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 2$. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(G) = \begin{cases} n & \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy } G \cong P_2 \\ n-1 & \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy } G \cong P_3 \textit{ lub } G \cong C_3 \\ n-2 & \textit{wtedy i tylko wtedy, gdy } n = 4 \textit{ lub } G \cong P_5. \end{cases}$$

S. Vallirani w [59] skonstruował rodzinę grafów n-wierzchołkowych, dla których $\gamma_{1,2}(G) = n-3$. Ponadto podał pełną charakteryzację drzew, dla których $\gamma_{1,2}(T) = 3$. Przypomnimy ten rezultat.

Twierdzenie 2.7. (S. Vallirani [59]) *Niech T będzie drzewem. Równość $\gamma_{1,2}(T) = 3$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest jeden z poniższych warunków* *(i)* *T można otrzymać poprzez dołączenie dowolnej liczby liści do wierzchołków stopnia dwa grafu P_5,*

(ii) *T można otrzymać poprzez dołączenie dowolnej liczby liści do dokładnie jednego wierzchołka podtrzymującego grafu P_6 oraz do jego sąsiada niebędącego liściem,*

(iii) *$T \cong P_7$.*

Zagadnienia złożoności obliczeniowej wyznaczania minimalnych zbiorów $(1,2)$-dominujących oraz porównywania parametrów $\gamma_{1,2}(G)$ i $\gamma(G)$ były rozważane przez J. Raczek w [55]. W szczególności został przedstawiony wielomianowy algorytm wyznaczający minimalne zbiory $(1,2)$-dominujące.

W niniejszej rozprawie zajmiemy się badaniem zbiorów $(1,2)$-dominujących, a nasze cele to w szczególności:

- przedstawienie związków pomiędzy parametrami $(1,2)$-dominowania i parametrami klasycznego dominowania,
- wprowadzenie *właściwych zbiorów* $(1,2)$*-dominujących*, czyli zbiorów $(1,2)$-dominujących, które nie są $(1,1)$-dominujące i zbadanie ich własności,
- wyznaczanie najmniej licznych przekrojów zbiorów $(1,1)$-dominujących i właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących w wybranych klasach grafów,
- rozwiązanie problemu istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w produktach grafów.

2.2 Liczba $(1,2)$-dominowania w wybranych klasach grafów

W wybranych klasach grafów liczbę $(1,2)$-dominowania można wyznaczyć dokładnie. W tym podrozdziale wyznaczymy liczby $(1,2)$-dominowania w ścieżkach, cyklach oraz w grafach pełnych dwudzielnych. Pokażemy zależności pomiędzy parametrami $(1,2)$-dominowania a liczbą dominowania i górną liczbą dominowania.

Liczby dominowania w ścieżkach i cyklach są sobie równe i ich wartość została w literaturze wyznaczona dokładnie.

Twierdzenie 2.8. (T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater [33]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy $\gamma(P_2) = 1$ oraz dla $n \geqslant 3$ zachodzi równość*

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{3} & \textit{dla } n \equiv 0\,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n+1}{3} & \textit{dla } n \equiv 2\,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n+2}{3} & \textit{dla } n \equiv 1\,(\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

Zanim wyznaczymy liczbę $\gamma_{1,2}(P_n)$, przedstawimy wstępne rezultaty dotyczące zbiorów $(1,2)$-dominujących w ścieżkach.

Twierdzenie 2.9. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy $\gamma_{1,2}(P_{n+1}) \geqslant \gamma_{1,2}(P_n)$.*

Dowód. Jeżeli $n \in \{2,3,4\}$, to $\gamma_{1,2}(P_2) = \gamma_{1,2}(P_3) = \gamma_{1,2}(P_4) = 2$. Niech $n \geqslant 4$ oraz niech D^* będzie $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem. Załóżmy nie wprost, że $\gamma_{1,2}(P_{n+1}) < \gamma_{1,2}(P_n)$. To oznacza, że w grafie P_{n+1} istnieje zbiór $(1,2)$-dominujący D, gdzie $2 \leqslant |D| < |D^*|$. Rozważmy trzy przypadki.

1. $x_{n+1} \notin D$.

Wtedy $\{x_n, x_{n-1}\} \subseteq D$ i podzbiór D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie $P_{n+1} \setminus \{x_{n+1}\} \cong P_n$. Zatem w grafie P_n istnieje zbiór $(1,2)$-dominujący o mocy mniejszej niż D^*, co jest sprzeczne z założeniem, że D^* jest $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem.

2. $x_{n+1} \in D$ oraz $x_n \notin D$.

Wtedy zbiór $(D\setminus\{x_{n+1}\})\cup\{x_n\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie $P_{n+1}\setminus\{x_{n+1}\} \cong P_n$ o mocy mniejszej niż D^*, co jest sprzeczne z założeniem, że D^* jest $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem.

3. $\{x_n, x_{n+1}\} \subseteq D$.

Wtedy co najmniej jeden z wierzchołków ze zbioru $\{x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}\}$ należy do zbioru D, ponieważ w przeciwnym wypadku wierzchołek x_{n-2} nie jest dominowany przez D. Zatem zbiór $D \setminus \{x_{n+1}\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie $P_{n+1} \setminus \{x_{n+1}\} \cong P_n$, sprzeczność z założeniem, że D^* jest $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem.

Rozważane przypadki prowadzą do sprzeczności, zatem $\gamma_{1,2}(P_{n+1}) \geqslant \gamma_{1,2}(P_n)$. ■

Twierdzenie 2.10. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. W ścieżce P_n istnieje najmniejszy zbiór $(1,2)$-dominujący D taki, że $L(P_n) \subseteq D$.*

Dowód. Niech $V(P_n) = \{x_1.x_2, \ldots, x_n\}, n \geqslant 2$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności. Jeżeli $n \in \{2,3,4\}$, to podzbiór $L(P_n)$ jest $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem. Jeżeli $n = 5$, to $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem zawierającym liście jest podzbiór $\{x_1, x_3, x_5\}$. Niech $n \geqslant 6$. Załóżmy nie wprost, że nie istnieje $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiór zawierający podzbiór $L(P_n)$. Niech D będzie dowolnym $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem. Bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że $x_1 \notin D$. Wtedy $\{x_2, x_3\} \subseteq D$. Ponadto $D \cap \{x_4, x_5, x_6\} \neq \emptyset$, ponieważ w przeciwnym wypadku wierzchołek x_5 nie jest dominowany przez D. Zatem zbiór $D' = (D \setminus \{x_2\}) \cup \{x_1\}$ jest

$\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem. Jeżeli $x_n \in D$, to $\{x_1, x_n\} \subseteq D'$, sprzeczność z założeniem, że nie istnieje $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiór zawierający oba liście. Jeżeli $x_n \notin D$, to dowodząc analogicznie otrzymujemy, że zbiór $D'' = (D' \setminus \{x_{n-1}\}) \cup \{x_n\}$ jest $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiorem. Ponieważ $\{x_1, x_n\} \subseteq D''$, więc otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że nie istnieje $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiór zawierający zbiór $L(P_n)$, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 2.11. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $p \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Najdłuższą ścieżką, w której istnieje p-elementowy zbiór $(1,2)$-dominujący jest ścieżka P_{3p-2}.*

Dowód. Niech $p \geqslant 2$. Rozważmy graf P_{3p-2} z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności. Podzbiór $\{x_1, x_4, \ldots, x_{3p-5}, x_{3p-2}\}$ jest p-elementowym zbiorem $(1,2)$-dominującym ścieżki P_{3p-2}. Wystarczy pokazać, że w ścieżce P_n, gdzie $n \geqslant 3p-1$, nie istnieje p-elementowy zbiór $(1,2)$-dominujący. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że taki zbiór istnieje. Z twierdzenia 2.10 wiemy, że w ścieżce P_n istnieje $\gamma_{1,2}(P_n)$-zbiór zawierający oba liście, oznaczmy ten zbiór przez D, wtedy $|D| \leqslant p$. Zauważmy, że w każdym ciągu kolejnych wierzchołków x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, $1 \leqslant i \leqslant n-2$ grafu P_n znajduje się przynajmniej jeden wierzchołek należący do zbioru D, w przeciwnym wypadku wierzchołek x_{i+1} nie jest dominowany przez D. Stąd w podgrafie $P_n \setminus \{x_1, x_n\}$ izomorficznym ze ścieżką P_m, $m \geqslant 3p-3$ przynajmniej $\frac{3p-3}{3} = p-1$ wierzchołków musi należeć do zbioru D. Ponieważ $|D \setminus \{x_1, x_n\}| \leqslant p-2$, więc otrzymujemy sprzeczność. Zatem w grafie P_n, $n \geqslant 3p-1$, nie istnieje p-elementowy zbiór $(1,2)$-dominujący. ■

Korzystając z powyższych wyników, wyznaczymy liczbę $(1,2)$-dominowania w ścieżkach.

Twierdzenie 2.12. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(P_n) = \left\lceil \frac{n+2}{3} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n+4}{3} & \textit{dla } n \equiv 2 \,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n+3}{3} & \textit{dla } n \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n+2}{3} & \textit{dla } n \equiv 1 \,(\mathrm{mod} 3) \end{cases}$$

Dowód. Niech $n \geqslant 2$. Rozważmy trzy przypadki.
1. $n \equiv 1 \,(\mathrm{mod} 3)$.
Wtedy $n = 3p+1$, $p \geqslant 1$. Z twierdzenia 2.8 i zależności (2.3) wiemy, że $\gamma(P_n) = \frac{n+2}{3} \leqslant \gamma_{1,2}(P_n)$. Ponieważ zbiór $\{x_1, x_4, \ldots, 3p+1\}$ jest $(p+1)$-elementowym zbiorem $(1,2)$-dominującym oraz $p+1 = \frac{n-1}{3} + 1 = \frac{n+2}{3}$, więc dla $n \equiv 1 (\mathrm{mod} 3)$ otrzymujemy, że $\gamma_{1,2}(P_n) = \frac{n+2}{3}$.
2. $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod} 3)$.

Wtedy $n = 3p,\ p \geqslant 1$. Z twierdzenia 2.8 i zależności (2.3) wiemy, że $\gamma(P_n) = \frac{n}{3} = p \leqslant \gamma_{1,2}(P_n)$. Z twierdzenia 2.11 wiemy, że w ścieżce P_{3p} nie istnieje p-elementowy zbiór $(1,2)$-dominujący. Z kolei zbiór $\{x_1, x_4, x_{3p-2}, x_{3p}\}$ jest $(p+1)$-elementowym zbiorem $(1,2)$-dominującym, gdzie $p+1 = \frac{n}{3} + 1 = \frac{n+3}{3}$. Zatem dla $n \equiv 0(\mathrm{mod}3)$ otrzymujemy, że $\gamma_{1,2}(P_n) = \frac{n+3}{3}$.

3. $n \equiv 2\,(\mathrm{mod}3)$.

Wtedy $n = 3p-1,\ p \geqslant 1$. Z twierdzeń 2.8 oraz 2.9 otrzymujemy, że $\gamma(P_n) = \frac{n+1}{3} = p \leqslant \gamma_{1,2}(P_n) \leqslant \gamma_{1,2}(P_{3p}) = p+1$. Ponadto korzystając z twierdzenia 2.11 wiemy, że w grafie P_n nie istnieje p-elementowy zbiór $(1,2)$-dominujący. Stąd $\gamma_{1,2}(P_n) = p+1 = \frac{n+1}{3} + 1 = \frac{n+4}{3}$, co kończy dowód. ■

Z twierdzeń 2.8 oraz 2.12 wynika zależność pomiędzy liczbą dominowania a liczbą $(1,2)$-dominowania dla ścieżek.

Wniosek 2.13. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(P_n) = \begin{cases} \gamma(P_n) & \text{dla } n \equiv 1\,(\mathrm{mod}3) \\ \gamma(P_n) + 1 & \text{dla } n \not\equiv 1\,(\mathrm{mod}3). \end{cases}$$

Kolejną klasą grafów, w której badamy zbiory $(1,2)$-dominujące są cykle $C_n,\ n \geqslant 3$.

Twierdzenie 2.14. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(C_n)$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu C_n wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem dominującym.*

Dowód. Z definicji zbioru $(1,2)$-dominującego wynika, że każdy zbiór $(1,2)$-dominujący jest zbiorem dominującym. Dla dowodu w drugą stronę załóżmy nie wprost, że w cyklu $C_n, n \geqslant 4$ istnieje zbiór dominujący D, który nie jest $(1,2)$-dominujący. To oznacza, że istnieje wierzchołek $u \in V(C_n) \setminus D$, który jest dominowany przez zbiór D, ale nie jest $(1,2)$-dominowany przez D. W konsekwencji istnieją wierzchołki v, w sąsiednie z wierzchołkiem u takie, że $v \in D$ oraz $w \notin D$. Ponieważ $n \geqslant 4$ oraz D jest zbiorem dominującym, więc istnieje wierzchołek $z \in D$ taki, że $zw \in E(C_n)$ oraz $z \neq v$. Stąd $d_{C_n}(u, z) = 2$, co oznacza, że u jest $(1,2)$-dominowany przez D, sprzeczność z założeniem, że u nie jest $(1,2)$-dominowany przez D. Zatem D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. ■

Korzystając z twierdzeń 2.8 oraz 2.14 otrzymujemy wartość liczby $(1,2)$-dominowania w cyklach.

Twierdzenie 2.15. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Wtedy $\gamma_{1,2}(C_3) = 2$ oraz dla $n \geqslant 4$ zachodzi równość*

$$\gamma_{1,2}(C_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n+1}{3} & \textit{dla } n \equiv 2\,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n+2}{3} & \textit{dla } n \equiv 1\,(\mathrm{mod} 3) \\ \frac{n}{3} & \textit{dla } n \equiv 0\,(\mathrm{mod} 3). \end{cases}$$

Wykorzystując powyższe twierdzenia, otrzymujemy związek pomiędzy liczbą dominowania a liczbą $(1,2)$-dominowania w cyklach.

Wniosek 2.16. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(C_n) = \begin{cases} \gamma(C_n) + 1 & \textit{dla } n = 3 \\ \gamma(C_n) & \textit{dla } n \geqslant 4. \end{cases}$$

Ponieważ każdy zbiór $(1,2)$-dominujący ma co najmniej dwa wierzchołki, więc $\gamma_{1,2}(G) \geqslant 2$ dla dowolnego grafu G. Istnieją grafy, dla których $\gamma_{1,2}(G) = 2$.

Twierdzenie 2.17. (A. Michalski [45]) *Niech $m, n \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy $\gamma_{1,2}(K_{m,n}) = 2$.*

Dowód. Niech $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$, gdzie V_1, V_2 są niepustymi, rozłącznymi zbiorami niezależnymi oraz $V_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}, V_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ dla $m, n \geqslant 1$. Wtedy każdy podzbiór $\{x_i, y_j\}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $K_{m,n}$, czyli $\gamma_{1,2}(K_{m,n}) = 2$. ■

Z powyższego twierdzenia wynika zależność pomiędzy liczbą $(1,2)$-dominowania a liczbą dominowania w grafach pełnych dwudzielnych.

Wniosek 2.18. (A. Michalski [45]) *Niech $m, n \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$\gamma_{1,2}(K_{m,n}) = \begin{cases} \gamma(K_{m,n}) & \textit{jeżeli } m \geqslant 2 \textit{ oraz } n \geqslant 2, \\ \gamma(K_{m,n}) + 1 & \textit{jeżeli } m = 1 \textit{ lub } n = 1. \end{cases}$$

2.3 Związki pomiędzy parametrami dominowania i $(1,2)$-dominowania

Rezultaty przedstawione w poprzednim podrozdziale dla ścieżek, cykli oraz grafów pełnych dwudzielnych mogą nasuwać przypuszczenie, że w danym grafie liczba $(1,2)$-dominowania nie różni się znacząco od liczby dominowania. W tym podrozdziale odpowiemy na pytanie, czy tak rzeczywiście jest.

W pierwszej kolejności opiszemy klasę grafów, dla której $\gamma_{1,2}(G) = \gamma(G)$.

Twierdzenie 2.19. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie grafem bez trójkątów i bez liści. Podzbiór wierzchołków grafu G jest zbiorem dominującym wtedy i tylko wtedy, gdy jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym.*

Dowód. Jeżeli graf G ma co najwyżej trzy wierzchołki, to teza jest oczywista. Załóżmy, że G jest grafem bez trójkątów i bez liści oraz $|V(G)| \geqslant 4$. Niech $D \subseteq V(G)$ będzie zbiorem dominującym. Załóżmy nie wprost, że D nie jest $(1, 2)$-dominujący. To oznacza, że istnieje wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ sąsiedni z pewnym wierzchołkiem $y \in D$ oraz $N_G^2(x) \cap D = \{y\}$. Ponieważ $d_G(x) \geqslant 2$, więc istnieje $z \in V(G) \setminus D$ taki, że $xz \in E(G)$. Z założenia D jest zbiorem dominującym oraz graf G nie zawiera trójkątów, czyli z musi mieć sąsiada $w \in D$, gdzie $w \neq y$. Stąd $d_G(x, w) = 2$, czyli $w \in N_G^2(x) \cap D$, sprzeczność. Zatem D jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu G. ■

Z twierdzenia 2.19 wynika następująca zależność.

Wniosek 2.20. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie grafem bez trójkątów i bez liści. Wtedy $\gamma_{1,2}(G) = \gamma(G)$.*

Dowodząc analogicznie jak w twierdzeniu 2.19, otrzymujemy zależność pomiędzy zbiorem dominującym a zbiorem $(1, 2)$-dominującym w grafie mającym liście.

Twierdzenie 2.21. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie grafem bez trójkątów, $L(G) \neq \emptyset$ oraz niech D będzie zbiorem dominującym grafu G takim, że $L(G) \subseteq D$. Wtedy D jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu G.*

Z twierdzenia 2.21 wynika następujący wniosek.

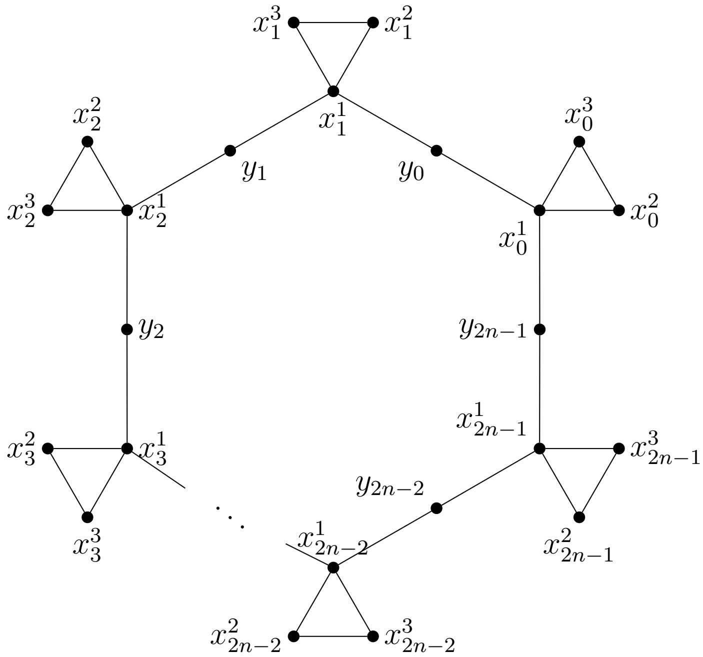
Wniosek 2.22. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie grafem bez trójkątów oraz niech $L(G) \neq \emptyset$. Jeżeli w grafie G istnieje zbiór dominujący D taki, że $L(G) \subseteq D$, to $\gamma_{1,2}(G) = \gamma(G)$.*

Z dotychczasowych rozważań wynika, że istnieją grafy, w których parametry $\gamma_{1,2}(G)$ oraz $\gamma(G)$ są równe albo różnią się nieznacznie. W dalszej części podrozdziału pokażemy, że istnieją grafy, w których różnica pomiędzy tymi parametrami może być równa ustalonej liczbie naturalnej.

Twierdzenie 2.23. (A. Michalski [45]) *Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Istnieje graf G taki, że $\gamma_{1,2}(G) - \gamma(G) = n$.*

Dowód. Jeżeli $n = 1$, to $\gamma_{1,2}(P_3) - \gamma(P_3) = 1$. Niech $n \geqslant 2$. Pokażemy, że istnieje graf G taki, że $\gamma_{1,2}(G) - \gamma(G) = n$. Niech $V(G) = \bigcup_{i=0}^{2n-1} V_i$, gdzie $V_i = \{x_i^1, x_i^2, x_i^3, y_i\}$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, 2n - 1\}$ oraz indeksy i są liczbami całkowitymi modulo $2n$. Niech

$E(G) = E_1 \cup E_2$, gdzie $E_1 = \bigcup_{i=0}^{2n-1}\{x_i^1x_i^2, x_i^2x_i^3, x_i^3x_i^1\}$ oraz $E_2 = \bigcup_{i=0}^{2n-1}\{x_i^1y_i, y_ix_{i+1}^1\}$. Konstrukcja grafu G została przedstawiona na rysunku 2.2.



Rysunek 2.2: Graf G

Niech D będzie dowolnym zbiorem dominującym grafu G. Jest oczywiste, że dla każdego $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ prawdziwa jest zależność $|V_i \cap D| \geqslant 1$, w przeciwnym wypadku D nie jest dominujący. Stąd $|D| \geqslant 2n$, czyli $\gamma(G) \geqslant 2n$. Zauważmy, że zbiór $\{x_0^1, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{2n-2}^1, x_{2n-1}^1\}$ zawiera $2n$ wierzchołków oraz jest zbiorem dominującym grafu G, więc $\gamma(G) = 2n$.

Niech D^* będzie dowolnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G. Pokażemy, że dla każdego $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ zachodzi nierówność $|(V_i \cup V_{i+1}) \cap D^*| \geqslant 3$. Niech $0 \leqslant i \leqslant 2n-1$. Z konstrukcji grafu G i definicji zbioru $(1,2)$-dominującego wiemy, że $|\{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} \cap D^*| \geqslant 1$. Jeżeli $\{x_{i+1}^2, x_{i+1}^3\} \subseteq D^*$, to dostajemy $|(V_i \cup V_{i+1}) \cap D^*| \geqslant 3$. Przypuśćmy zatem, że jeden z wierzchołków x_{i+1}^2, x_{i+1}^3 nie należy do D^*. Bez straty dla ogólności rozważań przyjmijmy, że $x_{i+1}^2 \notin D^*$. Zauważmy, że $N_G^2(x_{i+1}^2) = \{x_{i+1}^1, x_{i+1}^3, y_i, y_{i+1}\}$. Ponieważ zbiór D^* jest $(1,2)$-dominujący, więc $|N_G^2(x_{i+1}^2) \cap D^*| \geqslant 2$. Ponadto $N_G^2(x_{i+1}^2) \cap \{x_i^1, x_i^2, x_i^3\} = \emptyset$. Stąd otrzymujemy, że dla dowolnego $i \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n-1\}$ zachodzi nierówność $|(V_i \cup V_{i+1}) \cap D^*| \geqslant 3$. Zauważmy, że $D^* = \bigcup_{k=0}^{n-1}\Big((V_{2k} \cup V_{2k+1}) \cap D^*\Big)$. Prawa strona powyższej równości składa się z n zbiorów, które są parami rozłączne oraz każdy z nich zawiera co najmniej trzy elementy, zatem $|D^*| \geqslant 3n$. Stąd $\gamma_{1,2}(G) \geqslant 3n$. Ponieważ podzbiór $D_2 = \{x_0^1, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_{2n-2}^1, x_{2n-1}^1\} \cup \{y_0, y_2, \ldots, y_{2n-2}\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G oraz ma $3n$ wierzchołków, więc $\gamma(G) = 3n$.

Zatem $\gamma_{1,2}(G) - \gamma(G) = 3n - 2n = n$, co kończy dowód. ∎

Z definicji zbioru $(1,2)$-dominującego wynika, że dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność $\gamma_{1,2}(G) \geqslant \gamma(G)$. Okazuje się, że w ogólnym przypadku nie można ustalić zależności pomiędzy $\gamma_{1,2}(G)$ a górną liczbą dominowania $\Gamma(G)$. Istnieją grafy, dla których $\gamma_{1,2}(G) > \Gamma(G)$ oraz grafy, dla których $\gamma_{1,2}(G) < \Gamma(G)$. Co więcej, w każdym z tych przypadków różnica pomiędzy tymi parametrami może być równa ustalonej liczbie naturalnej.

Twierdzenie 2.24. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Istnieją grafy G i H takie, że*

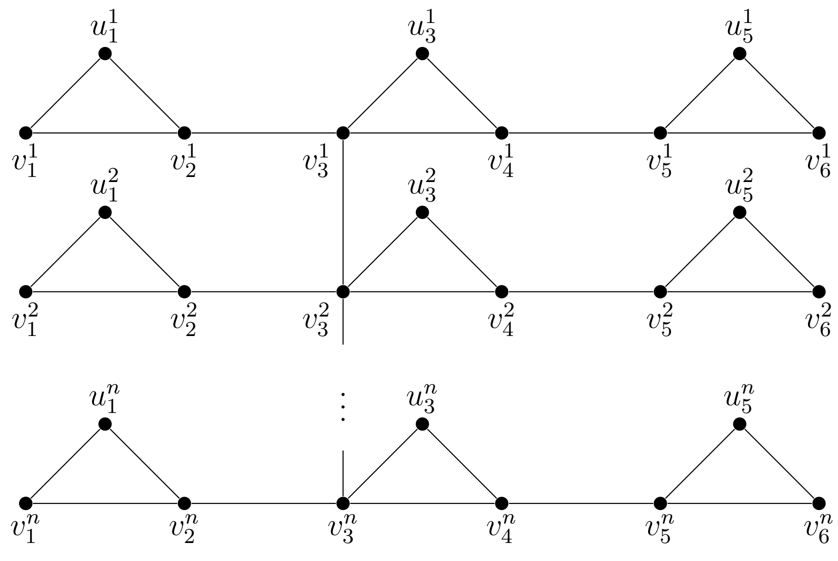
(i) $\Gamma(G) - \gamma_{1,2}(G) = n$,

(ii) $\gamma_{1,2}(H) - \Gamma(H) = n$.

Dowód. Aby udowodnić zależność *(i)*, przyjmijmy, że graf G jest gwiazdą $K_{1,n+2}$. Zbiór $V(G)$ nie jest minimalnym zbiorem dominującym, więc $\Gamma(G) < n+3$. Podzbiór $L(G)$ jest największym minimalnym zbiorem dominującym, stąd $\Gamma(G) = n+2$. Z definicji zbioru $(1,2)$-dominującego wiemy, że $\gamma_{1,2}(G) \geqslant 2$. Podzbiór zawierający centrum grafu $K_{1,n+2}$ oraz dowolny liść jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, czyli $\gamma_{1,2}(G) = 2$. To oznacza, że $\Gamma(G) - \gamma_{1,2}(G) = n$, co kończy dowód *(i)*.

Aby udowodnić zależność *(ii)*, podamy konstrukcję grafu H, dla którego zachodzi równość $\gamma_{1,2}(H) - \Gamma(H) = n$. Niech H będzie grafem takim, że $V(H) = \bigcup_{j=1}^{n}\left(\bigcup_{i\in\{1,3,5\}} V_i^j\right)$, gdzie dla dowolnego $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ oraz dowolnego $i \in \{1,3,5\}$ mamy $V_i^j = \{u_i^j, v_i^j, v_{i+1}^j\}$ oraz $E(H) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$, gdzie $E_1 = \bigcup_{j=1}^{n}\left(\bigcup_{k=1}^{5}\{v_k^j v_{k+1}^j\}\right)$, $E_2 = \bigcup_{j=1}^{n}\left(\bigcup_{i\in\{1,3,5\}}\{u_i^j v_i^j, u_i^j v_{i+1}^j\}\right)$ oraz $E_3 = \bigcup_{j=1}^{n-1}\{v_3^j v_3^{j+1}\}$.

Rysunek 2.3 przedstawia konstrukcję grafu H.



Rysunek 2.3: Graf H

Niech R^j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oznacza podgraf grafu H indukowany przez podzbiór $V_1^j \cup V_3^j \cup V_5^j$.

Niech S będzie $\Gamma(H)$-zbiorem. Ponieważ S jest zbiorem dominującym, więc z konstrukcji grafu H wynika, że dla wszystkich $i \in \{1, 3, 5\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność $|S \cap V_i^j| \geqslant 1$. Zauważmy, że jeżeli dla pewnych i, j prawdziwa byłaby nierówność $|S \cap V_i^j| \geqslant 2$, to zbiór S nie byłby minimalnym zbiorem dominującym. Zatem dla wszystkich $i \in \{1, 3, 5\}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ otrzymujemy, że $|S \cap V_i^j| = 1$, czyli $\Gamma(H) = 3n$.

Niech D będzie $\gamma_{1,2}(H)$-zbiorem. Pokażemy, że dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi nierówność $|D \cap V(R^j)| \geqslant 4$. Niech $1 \leqslant j' \leqslant n$. Zauważmy, że dla wszystkich $i \in \{1, 3, 5\}$ mamy $|D \cap V_i^{j'}| \geqslant 1$. Stąd wynika, że jeżeli $\{v_1^{j'}, u_1^{j'}\} \subseteq D$ lub $\{v_6^{j'}, u_5^{j'}\} \subseteq D$, to $|D \cap V(R^{j'})| \geqslant 4$. Załóżmy więc, że co najmniej jeden z wierzchołków $v_1^{j'}, u_1^{j'}$ oraz co najmniej jeden z wierzchołków $v_6^{j'}, u_5^{j'}$ nie należy do zbioru D. Z konstrukcji grafu H wynika, że bez straty dla ogólności rozważań możemy przyjąć, że są to wierzchołki $v_1^{j'}, v_6^{j'}$. Ponieważ D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, więc istnieją wierzchołki $x, x', y, y' \in D$ takie, że $v_1^{j'}x \in E(H)$, $d_H(v_1^{j'}x') \leqslant 2$, $v_6^{j'}y \in E(H)$ oraz $d_H(v_1^{j'}y') \leqslant 2$, gdzie $x \neq x', y \neq y'$. Jest oczywiste, że $x, y \in V(R^{j'})$. Ponadto $d_H(v_1^{j'}, v_6^{j'}) = 5$, zatem $x' \neq y'$. Co więcej, $d_H(v_i^{j'}, V(R^k)) \geqslant 3$ dla $i \in \{1, 6\}$ oraz $k \neq j'$, co oznacza, że $x', y' \in V(R^{j'})$. Stąd otrzymujemy, że $|D \cap V(R^{j'})| \geqslant 4$. Z dowolności wyboru j' wnioskujemy, że $\gamma_{1,2}(H) \geqslant 4n$. Ponieważ podzbiór $\{v_l^j : l \in \{2, 3, 4, 5\}, j \in \{1, 2, , \ldots, n\}\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu H, więc $\gamma_{1,2}(H) = 4n$. Zatem $\gamma_{1,2}(H) - \Gamma(H) = n$. ■

Rozdział 3

Właściwe zbiory $(1, 2)$-dominujące

W rozdziale tym zdefiniujemy właściwe zbiory $(1, 2)$-dominujące. Przedstawimy zależności pomiędzy parametrami właściwego $(1, 2)$-dominowania a parametrami $(1, 2)$-dominowania i klasycznego dominowania.

Właściwe zbiory dominujące zostały wprowadzone przez autora tej rozprawy w [44], a ich własności były badane w [42, 48].

3.1 Definicja właściwego zbioru $(1, 2)$-dominującego

Z definicji zbioru $(1, 2)$-dominującego wynika, że każdy zbiór $(1, 1)$-dominujący jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym. Ta zależność była motywacją do wprowadzenia właściwych zbiorów $(1, 2)$-dominujących.

Podzbiór $D \subset V(G)$ nazywamy *właściwym zbiorem* $(1, 2)$*-dominującym*, jeżeli D jest $(1, 2)$-dominujący i nie jest $(1, 1)$-dominujący. Innymi słowy, podzbiór $D \subset V(G)$ jest właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym, jeżeli jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym oraz istnieje wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ taki, że x ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze D oraz istnieje wierzchołek $u \in D$ taki, że $d_G(x, u) = 2$.

Ponieważ zbiór $V(G)$ jest zbiorem $(1, 1)$-dominującym, więc nie jest właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym.

Niech G będzie dowolnym grafem. Niech $\mathcal{F}_{1,2}(G)$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów $(1, 2)$-dominujących grafu G, $\mathcal{F}_{1,1}(G)$ rodzinę wszystkich zbiorów $(1, 1)$-dominujących grafu G, natomiast $\mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$ rodzinę wszystkich właściwych zbiorów $(1, 2)$-dominujących. Wtedy $\mathcal{F}_{1,2}(G) = \mathcal{F}_{1,1}(G) \cup \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$ oraz $\mathcal{F}_{1,1}(G) \cap \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G) = \emptyset$.

Właściwy zbiór $(1, 2)$-dominujący, który nie zawiera podzbioru właściwego będącego właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym nazywamy *minimalnym właściwym zbiorem* $(1, 2)$*-dominującym* a właściwy zbiór $(1, 2)$-dominujący o najmniejszej mocy *najmniejszym właściwym zbiorem* $(1, 2)$*-dominującym*. Każdy najmniejszy właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący jest minimalnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym.

Można zauważyć, że nie każdy zbiór $(1,2)$-dominujący jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Jako przykład rozważmy ścieżkę P_3, wtedy podzbiór $D = L(P_3)$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, ale nie jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, ponieważ D jest $(1,1)$-dominujący. Graf P_3 ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący postaci $D^* = V(P_3) \setminus \{x\}$, gdzie $x \in L(P_3)$.

Nie każdy graf ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Na przykład graf C_3 nie ma właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego, ponieważ każdy zbiór $(1,2)$-dominujący tego grafu jest jednocześnie zbiorem $(1,1)$-dominującym.

Z powyższych rozważań wynika, że w pierwszej kolejności należy rozstrzygnąć problem istnienia właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach.

3.2 Charakteryzacja grafów mających właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący

Jedyną klasą spójnych grafów, w których nie istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący są grafy pełne.

Twierdzenie 3.1. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *W grafie spójnym G istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy G nie jest grafem pełnym.*

Dowód. Niech G będzie spójnym grafem, w którym istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D. Pokażemy, że G nie jest grafem pełnym. Załóżmy nie wprost, że G jest grafem pełnym. Z definicji właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego wynika, że $|D| \geqslant 2$. Jednak każdy co najmniej dwuelementowy podzbiór zbioru $V(G)$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, czyli D jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. To jest sprzeczne z założeniem, że D jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym.

Dla dowodu w drugą stronę rozważmy dowolny, spójny n-wierzchołkowy graf G niebędący grafem pełnym. Pokażemy, że w grafie G istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Ponieważ G nie jest pełny, więc $n \geqslant 3$ oraz $\delta(G) < n-1$. Niech $v \in V(G)$ będzie wierzchołkiem o minimalnym stopniu $\delta(G)$.

Jeżeli $\delta(G) = 1$, to wierzchołek v jest liściem, więc zbiór $V(G) \setminus \{v\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, ale nie jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, ponieważ v nie jest $(1,1)$-dominowany. Zatem $V(G) \setminus \{v\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym.

Załóżmy, że $\delta(G) \geqslant 2$. Niech $N_G(v) = \{x, y_1, y_2, \ldots, y_{\delta(G)-1}\}$. Ponieważ $\delta(G) < n-1$, więc $S = V(G) \setminus N_G[v] \neq \emptyset$. Pokażemy, że zbiór $S^* = S \cup \{x\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G. Jedynym sąsiadem wierzchołka v w zbiorze S^* jest wierzchołek x, zatem zbiór S^* nie jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. Pozostaje wykazać, że S^* jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Ze spójności grafu G wnioskujemy, że musi istnieć krawędź pomiędzy pewnym wierzchołkiem ze zbioru S a pewnym sąsiadem wierzchołka v. To oznacza, że istnieje w zbiorze S wierzchołek będący w odległości 2 od wierzchołka v, czyli v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S^*. Należy pokazać, że wszystkie wierzchołki $y_i, i \in \{1,2,\ldots,\delta(G)-1\}$ również są $(1,2)$-dominowane przez S^*. Bez straty dla ogólności rozważań ustalmy dowolnie y_p, gdzie $1 \leqslant p \leqslant \delta(G)-1$. Wierzchołek y_p ma stopień równy co najmniej $\delta(G)$, więc musi mieć sąsiada $z \in S^*$. Ponadto $d_G(y_p, x) \leqslant 2$. Jeżeli $z \neq x$, to otrzymujemy, że y_p jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S^*. Przypuśćmy, że $xy_p \in E(G)$. Wierzchołek y_p ma, poza wierzchołkami x oraz v, jeszcze co najmniej $\delta(G)-2$ sąsiadów. Jeżeli co najmniej jeden z nich należy do S, to y_p jest $(1,1)$-dominowany, a w konsekwencji $(1,2)$-dominowany przez zbiór S^*. W przeciwnym wypadku, y_p jest sąsiedni z wszystkimi wierzchołkami y_j, gdzie $j \in \{1,2,\ldots,\delta(G)-1\} \setminus \{p\}$. Z poprzednich rozważań wiemy, że istnieją wierzchołki $a \in N(v)$ oraz $b \in S$ takie, że $ab \in E(G)$. Stąd otrzymujemy, że istnieje droga $y_p - x - S$ lub droga $y_p - y_j - S$ dla pewnego $j \in \{1,2,\ldots,\delta(G)-1\} \setminus \{p\}$. Oznacza to, że wierzchołek y_p jest $(1,2)$-dominowany przez S^*. Z dowolności wyboru wierzchołka y_p otrzymujemy, że dla każdego $i \in \{1,2,\ldots,\delta(G)\}$ wierzchołek y_i jest $(1,2)$-dominowany przez S^*. Zatem S^* jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, co kończy dowód. ∎

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wniosek dla grafów niespójnych.

Wniosek 3.2. (A. Michalski [45]) *W grafie niespójnym G istnieje właściwy zbiór* $(1,2)$-*dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje składowa spójności grafu G, która nie jest grafem pełnym.*

Dowód. Załóżmy, że graf G ma s składowych spójności $G_1, G_2, \ldots, G_s$, $s \geqslant 2$. Jeżeli wszystkie składowe spójności grafu G są grafami pełnymi, to z twierdzenia 3.1 otrzymujemy, że w grafie G nie istnieje właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Załóżmy, że istnieje składowa $G_i, 1 \leqslant i \leqslant s$, która nie jest grafem pełnym. Wtedy z twierdzenia 3.1 składowa G_i ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D. Zatem zbiór $D^* = D \cup \bigcup_{j \neq i} V(G_j)$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G, co kończy dowód. ∎

3.3 Parametry właściwego $(1,2)$-dominowania

Niech G będzie grafem mającym właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. *Liczbą właściwego* $(1,2)$-*dominowania grafu G* nazywamy moc najmniejszego właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego i oznaczamy symbolem $\gamma_{1,\overline{2}}(G)$.

Ponieważ właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący zawiera co najmniej dwa wierzchołki i jest różny od zbioru $V(G)$, więc dla dowolnego n-wierzchołkowego grafu G, $n \geqslant 3$, zachodzi nierówność

$$2 \leqslant \gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant n-1.$$

Można zauważyć, że $\gamma_{1,\overline{2}}(K_{1,n-1}) = 2$ oraz $\gamma_{1,\overline{2}}(N_{n-3} \cup P_3) = n-1$, czyli obydwa ograniczenia są osiągane.

Górną liczbą właściwego $(1,2)$*-dominowania grafu* G nazywamy moc największego minimalnego właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego w grafie G i oznaczamy symbolem $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$.

Dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność $\gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Jeżeli G jest n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 3$, to

$$2 \leqslant \Gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant n-1.$$

Ponadto $\Gamma_{1,\overline{2}}(K_{1,n-1}) = 2$ oraz $\Gamma_{1,\overline{2}}(N_{n-3} \cup P_3) = n-1$.

Zbiory realizujące parametry $\gamma_{1,\overline{2}}(G)$ lub $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$ w grafie G będziemy nazywać też odpowiednio $\gamma_{1,\overline{2}}(G)$-zbiorami lub $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$-zbiorami.

W tym podrozdziale przedstawimy związki pomiędzy parametrami właściwego $(1,2)$-dominowania, $(1,2)$-dominowania oraz klasycznego dominowania.

Twierdzenie 3.3. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Dla spójnego grafu G, który nie jest grafem pełnym prawdziwa jest równość*

$$\gamma_{1,\overline{2}}(G) = \gamma_{1,2}(G). \tag{3.1}$$

Dowód. Niech G będzie spójnym grafem, który nie jest pełny. Ponieważ każdy właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, więc $\gamma_{1,2}(G) \leqslant \gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Pokażemy, że $\gamma_{1,\overline{2}}(G) = \gamma_{1,2}(G)$. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\gamma_{1,2}(G) < \gamma_{1,\overline{2}}(G)$. To oznacza, że nie istnieje $\gamma_{1,2}(G)$-zbiór, który jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, czyli każdy $\gamma_{1,2}$-zbiór jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. Niech D będzie dowolnym $\gamma_{1,2}$-zbiorem grafu G. Z powyższych rozważań wiemy, że D jest zbiorem $(1,1)$-dominującym.

Pokażemy, że podgraf indukowany $G[D]$ może zawierać wyłącznie wierzchołki stopnia jeden. Dla dowodu nie wprost rozważmy dwie możliwości.

1. Podgraf indukowany $G[D]$ ma wierzchołek izolowany.

Niech y będzie wierzchołkiem izolowanym podgrafu $G[D]$ i niech $z \in N(y)$. Wtedy zbiór $D^* = (D \setminus \{y\}) \cup \{z\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, ponieważ zbiór D jest $(1,1)$-dominujący, więc każdy wierzchołek $u \in N(y) \setminus \{z\}$ jest dominowany przez $D^* \setminus \{z\}$ oraz $d_G(u,z) \leqslant 2$. Ponadto, y ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze D^*, ponieważ y jest

izolowany w podgrafie $G[D]$. Zatem D^* jest właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym oraz $|D^*| = |D|$. Stąd D^* jest $\gamma_{1,2}(G)$-zbiorem i nie jest $(1, 1)$-dominujący, co jest sprzeczne z założeniem, że każdy $\gamma_{1,2}(G)$-zbiór jest $(1, 1)$-dominujący. Zatem podgraf $G[D]$ nie może mieć wierzchołków izolowanych.
2. Podgraf $G[D]$ ma wierzchołek stopnia co najmniej dwa.
Niech x będzie wierzchołkiem stopnia co najmniej dwa w podgrafie indukowanym $G[D]$ i niech $u, v \in N(x) \cap D$. Rozważmy zbiór $D^* = D \setminus \{x\}$. Ponieważ D jest $(1, 1)$-dominujący, więc każdy wierzchołek $w \in N[x] \setminus D$ jest dominowany przez zbiór D^* oraz $d_G(w, \{u, v\}) \leqslant 2$. To oznacza, że D^* jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym, gdzie $|D^*| < |D|$, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest $\gamma_{1,2}(G)$-zbiorem.

Z powyższych rozważań otrzymujemy, że podgraf $G[D]$ zawiera wyłącznie wierzchołki stopnia jeden, zatem jest sumą m kopii grafów K_2. Jeżeli $m = 1$, to $D = \{x, y\}$. Wtedy wszystkie wierzchołki ze zbioru $V(G)\setminus D$ są sąsiednie z wierzchołkami x oraz y. Ponieważ graf G nie jest pełny, więc istnieją dwa wierzchołki $u, v \in V(G)\setminus D$, które nie są sąsiednie. Wtedy zbiór $D^* = (D \setminus \{x\}) \cup \{u\}$ jest $\gamma_{1,2}(G)$-zbiorem, ale nie jest zbiorem $(1, 1)$-dominującym, bo wierzchołek v ma dokładnie jednego sąsiada y w zbiorze D^*. Jest to sprzeczność z założeniem, że każdy $\gamma_{1,2}(G)$-zbiór jest $(1, 1)$-dominujący. Zatem $|D| = 2m$, $m \geqslant 2$.

Ponieważ podgraf $G[D]$ jest sumą m kopii grafu K_2, więc oznaczmy wierzchołki zbioru D przez x_i, y_i, gdzie $x_iy_i \in E(G)$ dla $i \in \{1, 2, \dots, \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}\}$. Ustalmy dowolnie $i, 1 \leqslant i \leqslant \gamma_{1,2}(G)$ i przypuśćmy, że co najmniej jeden z wierzchołków x_i, y_i ma taką własność, że wszyscy jego sąsiedzi spoza zbioru D są dominowani przez zbiór $D\setminus\{x_i, y_i\}$. Bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że jest to wierzchołek x_i. Ponieważ D jest $(1, 1)$-dominujący, więc zbiór $D^* = D \setminus \{x_i\}$ jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym o mocy mniejszej niż $|D|$, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest $\gamma_{1,2}(G)$-zbiorem. Stąd oraz z faktu, że D jest $(1, 1)$-dominujący wnioskujemy, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}\}$ istnieje niepusty zbiór $W_i = \{w \in V(G) \setminus D : w \in N(x_i) \cap N(y_i), w \notin N(D \setminus \{x_i, y_i\})\}$.

Pokażemy, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}\}$ podgraf indukowany $G[W_i]$ jest kliką w grafie G. Przypuśćmy, że tak nie jest, to znaczy dla pewnego $j \in \{1, 2, \dots, \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}\}$ istnieją w podgrafie $G[W_j]$ wierzchołki u, v, które nie są sąsiednie. Rozważmy zbiór $D^* = (D \setminus \{x_j\}) \cup \{u\}$. Zauważmy, że każdy wierzchołek $x \in N[x_j] \setminus \{y_j, u\}$ jest dominowany przez wierzchołek y_j oraz $d_G(x, u) \leqslant 2$. Ponadto, jedynym sąsiadem wierzchołka v w zbiorze D^* jest y_j, zatem zbiór D^* jest $(1, 2)$-dominujący, ale nie $(1, 1)$-dominujący i ponadto ma moc $\gamma_{1,2}(G)$, sprzeczność. To oznacza, że dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}\}$ podgraf $G[W_i]$ jest kliką.

Przypuśćmy, że istnieje wierzchołek $z \in V(G) \setminus D$ taki, że $z \notin \bigcup_i W_i$. Bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że $zy_k \in E(G)$ oraz $zy_l \in E(G)$ dla $k \neq l$, gdzie $y_k, y_l \in D$.

Rozważmy zbiór $D^* = (D \setminus \{x_k, y_k\}) \cup \{z, w\}$, gdzie $w \in W_k$. Ponieważ $G[W_k]$ jest kliką w grafie G, więc zbiór D^* jest $(1,2)$-dominujący. Jeżeli D^* nie jest $(1,1)$-dominujący, to jest właściwym $(1,2)$-zbiorem mocy $\gamma_{1,2}(G)$, sprzeczność. W przeciwnym wypadku D^* jest zbiorem $(1,1)$-dominującym mocy $\gamma_{1,2}(G)$ takim, że podgraf $G[D^*]$ posiada wierzchołek y_l stopnia co najmniej dwa, co jest sprzeczne z faktem, że $G[D]$ zawiera wyłącznie wierzchołki stopnia jeden. Zatem $V(G) = D \cup (\bigcup_i W_i)$.

Ustalmy dowolnie $p, 1 \leqslant p \leqslant \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}$. Ze spójności grafu G wiemy, że wierzchołek $s \in W_p$ ma sąsiada $t \in W_q$ dla pewnego $q \neq p$. Podgrafy $G[W_p]$ oraz $G[W_q]$ są klikami w grafie G, zatem zbiór $D^* = D \setminus \{x_p, y_p, x_q, y_q\} \cup \{s, t\}$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym o mocy mniejszej niż D, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest najmniejszym zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie G.

Z powyższych rozważań wynika, że założenie $\gamma_{1,2}(G) < \gamma_{1,\overline{2}}(G)$ w każdym przypadku prowadzi do sprzeczności, zatem $\gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G)$, co kończy dowód. ■

Wniosek 3.4. (A. Michalski [45]) *W grafie niespójnym G równość $\gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jedna składowa spójności tego grafu nie jest grafem pełnym.*

Pokażemy, że równość analogiczna do (3.1) nie zachodzi dla górnej liczby $(1,2)$-dominowania oraz górnej liczby właściwego $(1,2)$-dominowania.

Załóżmy, że G ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Wtedy każdy $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$-zbiór jest minimalnym zbiorem $(1,2)$-dominującym, zatem

$$\Gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,2}(G). \tag{3.2}$$

Istnieją grafy, w których parametry $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$ oraz $\Gamma_{1,2}(G)$ są równe. Na przykład $\Gamma_{1,\overline{2}}(P_5) = \Gamma_{1,2}(P_5) = 3$ oraz $\Gamma_{1,\overline{2}}(C_5) = \Gamma_{1,2}(C_5) = 2$.

Istnieją również grafy, dla których $\Gamma_{1,\overline{2}}(G) < \Gamma_{1,2}(G)$. Podamy konstrukcję grafów, dla których różnica $\Gamma_{1,2}(G) - \Gamma_{1,\overline{2}}(G)$ może być równa ustalonej liczbie naturalnej. Wykorzystamy w tym celu uogólnioną koronę grafów.

Twierdzenie 3.5. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech G będzie dowolnym grafem, gdzie $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, n \geqslant 2$ oraz niech $\mathcal{H} = \{H_{x_i} \cong N_{p_i} \colon i \in \{1, 2, \ldots, n\}, p_i \geqslant 3\}$. Wtedy*

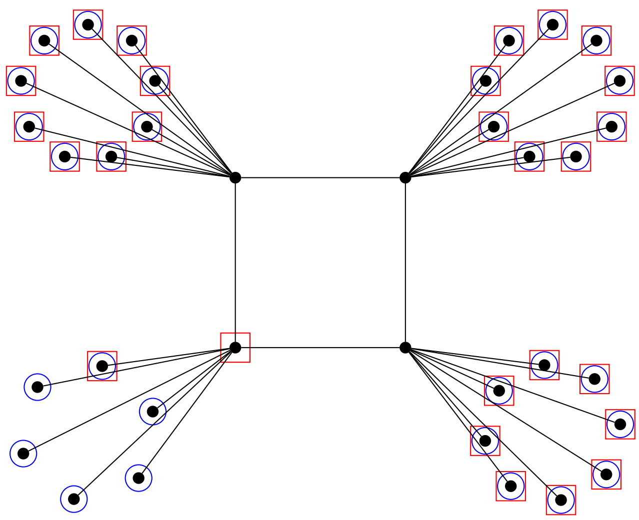
$$\Gamma_{1,2}(G \circ \mathcal{H}) - \Gamma_{1,\overline{2}}(G \circ \mathcal{H}) = \min\{p_i \colon i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} - 2.$$

Dowód. Niech $G \circ \mathcal{H}$ będzie uogólnioną koroną grafu G i rodziny $\mathcal{H}$ i niech $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, n \geqslant 2$ oraz $V(H_{x_i}) = V(N_{p_i}) = \{y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{p_i}^i\}, p_i \geqslant 3$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ponadto niech $S_i = \{x_i\} \cup \bigcup_{k=1}^{p_i} \{y_k^i\}$. Załóżmy, że S jest minimalnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \circ \mathcal{H}$. Zauważmy, że dla każdego $i \in \{1,2,\dots,n\}$ zachodzi jedna z następujących możliwości: $S \cap S_i = \{x_i\}$ albo $S \cap S_i = \{x_i, y_l^i\}$ dla pewnego $l \in \{1,2,\dots p_i\}$ albo $S \cap S_i = \{y_1^i, y_2^i, \dots, y_{p_i}^i\}$. Ponieważ $S = \bigcup_{i=1}^n (S \cap S_i)$ oraz zbiory S_i, S_j są rozłączne dla każdych $i,j \in \{1,2,,\dots,n\}, i \neq j$, więc $|S| = \sum_{i=1}^n |S \cap S_i|$. Dla każdego $i \in \{1,2,\dots,n\}$ mamy $p_i \geqslant 3$, zatem największy minimalny zbiór $(1,2)$-dominujący grafu $G \circ \mathcal{H}$ jest mocy $\Gamma_{1,2}(G \circ \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^n p_i$, stąd $\Gamma_{1,2}(G \circ \mathcal{H})$-zbiorem jest zbiór $\bigcup_{i=1}^n V(H_{x_i})$.

Niech S^* będzie minimalnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \circ \mathcal{H}$. Wtedy S^* jest również minimalnym zbiorem $(1,2)$-dominującym, i analogicznie jak w poprzednich rozważaniach, dla każdego $i \in \{1,2,\dots,n\}$ zbiór $S^* \cap S_i$ może zawierać jeden wierzchołek x_i albo dwa wierzchołki x_i, y_l^i dla pewnego $l \in \{1,2,\dots p_i\}$ albo p_i wierzchołków $y_1^i, y_2^i, \dots, y_{p_i}^i$. Zauważmy, że jeżeli dla każdego $i \in \{1,\dots,n\}$ zachodzi $S^* \cap S_i = \{y_1^i, y_2^i, \dots, y_{p_i}^i\}$, to S^* jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, co jest sprzeczne z założeniem, że S^* jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Wybierzmy $k, 1 \leqslant k \leqslant n$ takie, że $p_k = \min\{p_i \colon i \in \{1,2,\dots,n\}\}$. Jeżeli $S^* \cap S_k = \{x_k, y_l^k\}$ dla pewnego $l, 1 \leqslant l \leqslant p_k$ oraz $S^* \cap S_j = \{y_1^j, \dots, y_{p_j}^j\}$ dla $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{k\}$, to S^* jest największym minimalnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Zatem $\Gamma_{1,\overline{2}}(G \circ \mathcal{H}) = \sum_{i=1}^n p_i - \min\{p_i \colon i \in \{1,2,\dots,n\}\} + 2$.

Z powyższych rozważań otrzymujemy, że $\Gamma_{1,2}(G \circ \mathcal{H}) - \Gamma_{1,\overline{2}}(G \circ \mathcal{H}) = \min\{p_i \colon i \in \{1,2,\dots,n\}\} - 2$, co kończy dowód. ■

Powyższe twierdzenie jest zilustrowane przez graf $C_4 \circ \{N_6, N_8, N_9, N_9\}$ przedstawiony na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1: Graf $C_4 \circ \{N_6, N_8, N_9, N_9\}$

Największy minimalny zbiór $(1,2)$-dominujący zaznaczony jest niebieskimi okręgami, natomiast największy minimalny właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący zaznaczony jest czerwonymi kwadratami. Zauważmy, że $\Gamma_{1,2}(C_4 \circ \{N_6, N_8, N_9, N_9\}) = 6+8+9+9 = 32$, natomiast $\Gamma_{1,2}(C_4 \circ \{N_6, N_8, N_9, N_9\}) = 6+8+9+9-6+2 = 28$, stąd różnica między tymi parametrami w tym wypadku wynosi $\min\{6, 8, 9\} - 2 = 4$.

Podsumowując dotychczasowe rozważania z tego podrozdziału, otrzymujemy zależności pomiędzy parametrami $(1,2)$-dominowania, właściwego $(1,2)$-dominowania oraz liczbą dominowania.

Twierdzenie 3.6. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Dla dowolnego grafu G mającego właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący zachodzi związek*

$$\gamma(G) \leqslant \gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,2}(G). \tag{3.3}$$

Zauważmy, że w zależności (3.3) nie występuje górna liczba dominowania $\Gamma(G)$, ponieważ w ogólnym przypadku nie można porównać parametrów $\Gamma(G)$ oraz $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Kolejne twierdzenie pokazuje, że różnica pomiędzy tymi parametrami może być dowolnie duża na korzyść każdego z nich.

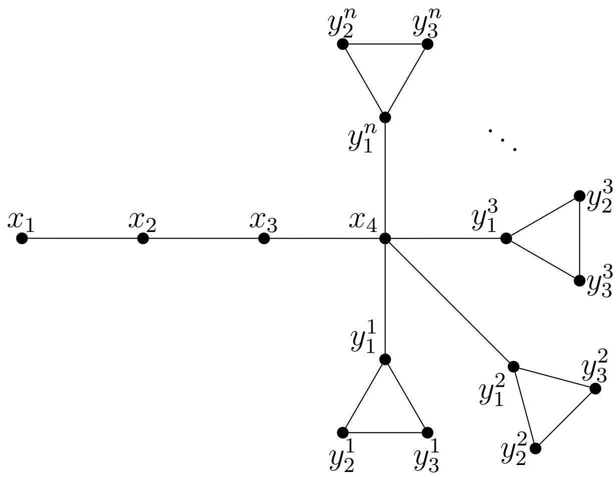
Twierdzenie 3.7. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Istnieją grafy G i H takie, że*

(i) $\Gamma(G) - \Gamma_{1,\overline{2}}(G) = n$,

(ii) $\Gamma_{1,\overline{2}}(H) - \Gamma(H) = n$.

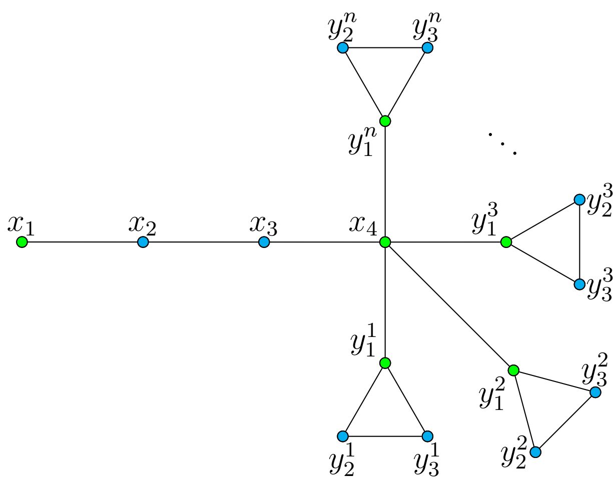
Dowód. (i). Niech $G \cong K_{1,n+2}$, $n \geqslant 1$. Wtedy podzbiór $L(K_{1,n+2})$ jest największym minimalnym zbiorem dominującym, więc $\Gamma(K_{1,n+2}) = n{+}2$. Podzbiór $L(K_{1,n+2})$ jest jednocześnie zbiorem $(1,1)$-dominującym, więc nie jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Niech D będzie $\Gamma_{1,\overline{2}}(K_{1,n+2})$-zbiorem. Ponieważ D nie jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, więc $L(K_{1,n+2}) \nsubseteq D$. To oznacza, że istnieje liść grafu $K_{1,n+2}$, który nie należy do D. czyli centrum gwiazdy $K_{1,n+2}$ należy do D. Z założenia D jest minimalny, więc zawiera dokładnie jeden liść, czyli $\Gamma_{1,\overline{2}}(K_{1,n+2}) = 2$, co kończy dowód (i).

Aby udowodnić *(ii)* podamy konstrukcję grafu H takiego, że $\Gamma_{1,\overline{2}}(H) - \Gamma(H) = n$. Weźmy ścieżkę P_4 o zbiorze wierzchołków $V(P_4) = \{x_1, x_2, x_3.x_4\}$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności oraz n kopii cyklu C_3, gdzie i-ta kopia C_3^i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jest grafem o zbiorze wierzchołków $V(C_3^i) = \{y_1^i, y_2^i, y_3^i\}$. Wtedy H jest grafem takim, że $V(H) = V(P_4) \cup (\bigcup_{i=1}^n V(C_3^i))$ oraz $E(H) = E(P_4) \cup (\bigcup_{i=1}^n E(C_3^i)) \cup \{x_4 y_i^1, i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$. Konstrukcję grafu H ilustruje rysunek 3.2.



Rysunek 3.2: Graf H

Niech S będzie $\Gamma(H)$-zbiorem. Zauważmy, że jeżeli $x_4 \in S$, to S zawiera co najwyżej jeden wierzchołek z każdej kopii cyklu C_3 oraz co najwyżej jeden wierzchołek ze zbioru $\{x_1, x_2, x_3\}$. Jeżeli natomiast $x_4 \notin S$, to S może zawierać co najwyżej jeden wierzchołek z każdej kopii C_3 oraz co najwyżej dwa wierzchołki ze zbioru $\{x_1, x_2, x_3\}$. Stąd dostajemy, że $\Gamma(H) \leqslant n+2$. Przyjmując $S = \{x_1, x_4, y_1^1, y_1^2, \dots, y_1^n\}$ otrzymujemy, że $\Gamma(H) = n+2$. Zbiór S jest również minimalnym właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym, ale nie jest największy. Pokażemy, że w grafie H istnieje największy minimalny właściwy zbiór $(1, 2)$-dominujący S^* taki, że $|S^*| = 2n+2$. Niech S^* będzie $\Gamma_{1,\overline{2}}(H)$-zbiorem. Zauważmy, że $x_4 \notin S^*$, bowiem wtedy S^* zawiera dokładnie dwa wierzchołki z każdej kopii C_3^i oraz co najwyżej dwa wierzchołki ze zbioru $\{x_1, x_2, x_3\}$. W przeciwnym wypadku, jeżeli $x_4 \in S^*$, to z minimalności zbioru S^* wynika, że zawiera on dokładnie po jednym wierzchołku z każdej kopii C_3^i, więc nie jest $\Gamma_{1,\overline{2}}(H)$-zbiorem. Stąd $\Gamma_{1,\overline{2}}(H) \leqslant 2n+2$ i przyjmując $S^* = \{x_2, x_3, y_2^1, y_3^1, y_2^2, y_3^2, \dots, y_2^n, y_3^n\}$ otrzymujemy, że $\Gamma_{1,\overline{2}}(H) = 2n+2$. W konsekwencji $\Gamma_{1,\overline{2}}(H) - \Gamma(H) = 2n+2-(n+2) = n$, co kończy dowód *(ii)*. ■



Rysunek 3.3: Graf H

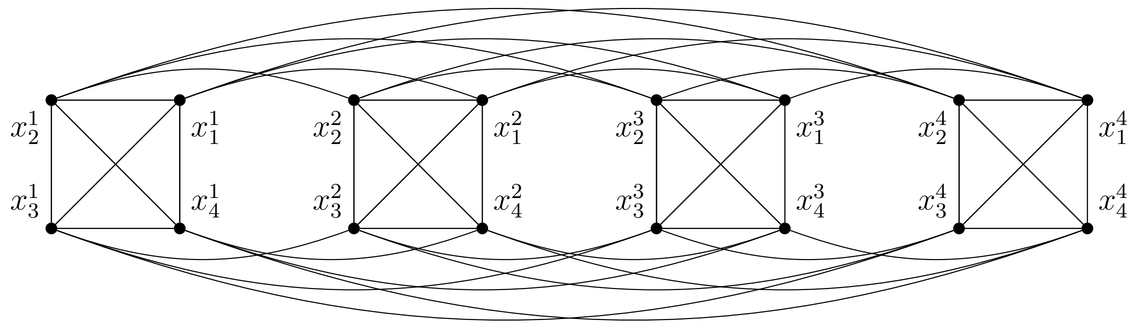
Rysunek 3.3 ilustruje zbiory realizujące parametry $\Gamma(H)$ oraz $\Gamma_{1,\overline{2}}(H)$. Kolorem zielonym są zaznaczone wierzchołki należące do $\Gamma(H)$-zbioru, natomiast $\Gamma_{1,\overline{2}}(H)$-zbiór jest zaznaczony na niebiesko.

Pokażemy, że istnieje graf, dla którego wszystkie parametry występujące w zależności (3.3) i ponadto liczba $\Gamma(G)$ są równe ustalonej liczbie naturalnej.

Twierdzenie 3.8. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Istnieje graf H_n taki, że $\gamma(H_n) = \gamma_{1,2}(H_n) = \gamma_{1,\overline{2}}(H_n) = \Gamma_{1,\overline{2}}(H_n) = \Gamma_{1,2}(H_n) = \Gamma(H_n) = n$.*

Dowód. Niech $n \geqslant 2$. Skonstruujmy graf H_n w następujący sposób.

Weźmy n kopii $K_n^i, i \in \{1,2,\ldots,n\}$ grafu pełnego K_n, $V(K_n^i) = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\}$. Wtedy $V(H_n) = \bigcup_{i=1}^n V(K_n^i)$, $E(H_n) = \bigcup_{i=1}^n E(K_n^i) \cup \bigcup_{k=1}^n \{x_k^i x_k^j \colon i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, i \neq j\}$. Ponadto, niech $D_j = \{x_j^1, x_j^2, \ldots, x_j^n\}$ przez dla każdego $j \in \{1,2\ldots,n\}$. Graf H_n dla $n = 4$ przedstawiony jest na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Graf H_n dla $n = 4$

Pokażemy, że $\gamma(H_n) = n$. Zbiór $S = V(K_n^1)$ jest zbiorem dominującym, zatem $\gamma(H_n) \leqslant n$. Przypuśćmy, że istnieje zbiór dominujący S_1 mocy mniejszej niż n. Wtedy istnieją $k, l \in \{1,2,\ldots,n\}$ takie, że $D \cap V(K_n^k) = \emptyset$ oraz $S_1 \cap D_l = \emptyset$. To oznacza, że wierzchołek x_l^k nie jest dominowany przez zbiór S_1, sprzeczność. Stąd $\gamma(H_n) = n$.

Pokażemy teraz, że $\Gamma(H_n) = n$. Zbiór $S = V(K_n^1)$ jest minimalnym zbiorem dominującym, zatem $\Gamma(H_n) \geqslant n$. Przypuśćmy, że istnieje największy minimalny zbiór dominujący S_2 mocy większej niż n. Wtedy z zasady szufladkowej Dirichleta istnieje takie $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, że $|S_2 \cap D_k| \geqslant 2$. Niech $x_k^p, x_k^q \in S_2 \cap D_k$. Ponieważ S_2 jest minimalnym zbiorem dominującym, więc usunięcie wierzchołka x_k^q ze zbioru S_2 spowoduje, że zbiór ten utraci własność dominowania. To oznacza, że $S_2 \cap V(K_n^q) = \emptyset$ oraz istnieje $l \in \{1,2,\ldots,n\}, l \neq k$ takie, że $S_2 \cap D_l = \emptyset$. Z faktu, że S_2 jest dominujący wynika, że dla wszystkich $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ zbiory $S_2 \cap V(K_n^i)$ są niepuste, aby zapewnić dominowanie wierzchołków ze zbioru D_l.

Z drugiej strony, również z zasady szufladkowej Dirichleta, istnieje takie $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, że $|S_2 \cap V(K_n^r)| \geqslant 2$. Niech $x_s^r, x_t^r \in S_2 \cap V(K_n^r)$. Usunięcie wierzchołka x_t^r ze zbioru S_2 spowoduje, że zbiór ten utraci własność dominowania. To oznacza, że $S_2 \cap D_t = \emptyset$ oraz istnieje $m \in \{1, 2, \ldots, n\}, m \neq r$ takie, że $S_2 \cap V(K_n^m) = \emptyset$. Sprzeczność z faktem, że dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zbiory $S_2 \cap V(K_n^i)$ muszą być niepuste. Zatem $\Gamma(H_n) = n$.

Na koniec zauważmy, że graf H_n ma średnicę równą dwa. Zatem rodzina zbiorów dominujących jest równa rodzinie zbiorów $(1, 2)$-dominujących, a stąd wnioskujemy, że $\Gamma_{1,2}(H_n) = n$, co kończy dowód. ■

Pokażemy teraz, że wszystkie nierówności z zależności (3.3) mogą być ostre a różnice pomiędzy poszczególnymi parametrami mogą być dowolnie duże.

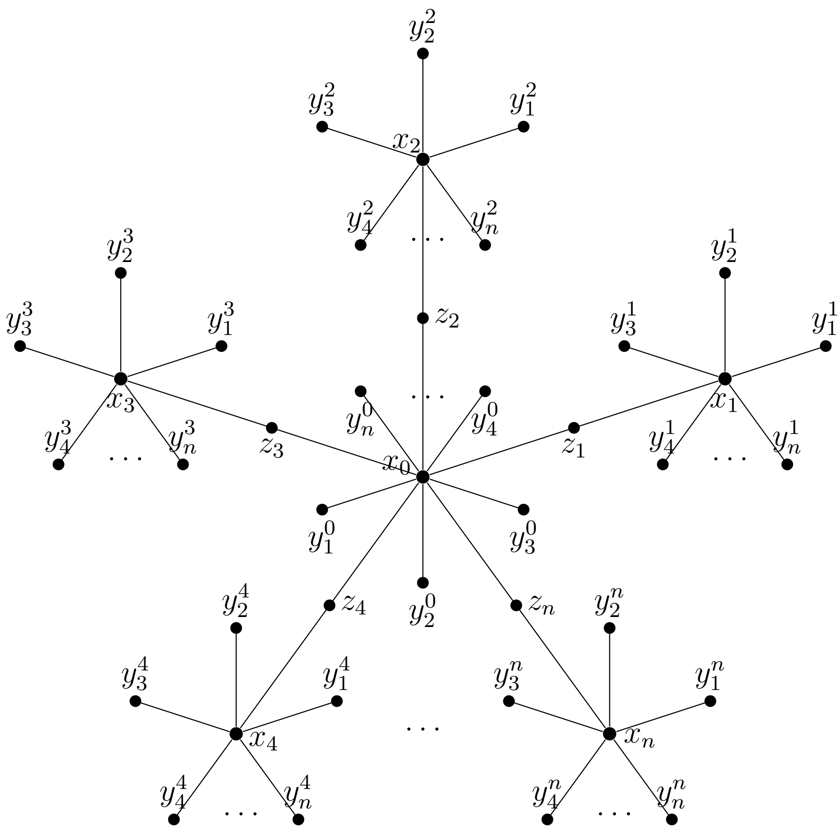
Twierdzenie 3.9. (A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska [48]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Istnieje graf J_n taki, że $\gamma(J_n) < \gamma_{1,2}(J_n) = \gamma_{1,\overline{2}}(J_n) < \Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) < \Gamma_{1,2}(J_n)$ oraz różnice pomiędzy kolejnymi parametrami zależą od n wielomianowo.*

Dowód. Niech $n \geqslant 2$. Aby skonstruować graf J_n, rozważmy $n + 1$ kopii gwiazdy $K_{1,n}$, gdzie i-ta kopia $K_{1,n}^i, i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ jest grafem o zbiorze wierzchołków $V(K_{1,n}^i) = \{x_i\} \cup \{y_j^i : j \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$, gdzie x_i jest centrum kopii $K_{1,n}^i$. Wtedy $V(J_n) = \left(\bigcup_{i=0}^n V(K_{1,n}^i)\right) \cup \{z_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$ oraz $E(J_n) = \left(\bigcup_{i=0}^n E(K_{1,n}^i)\right) \cup \{x_0 z_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\} \cup \{x_i z_i : i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$. Konstrukcja grafu J_n jest zilustrowana na rysunku 3.5.

Pokażemy, że $\gamma(J_n) = n + 1$. Zauważmy, że zbiór $D_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ jest zbiorem dominującym, zatem $\gamma(J_n) \leqslant n + 1$. Ponadto każdy zbiór dominujący zawiera przynajmniej jeden wierzchołek z każdego zbioru $V(K_{1,n}^i), i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Stąd $\gamma(J_n) \geqslant n+1$, więc $\gamma(J_n) = n + 1$.

Następnie udowodnimy, że $\gamma_{1,2}(J_n) = 2n + 1$. Zbiór $D_2 = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym, stąd $\gamma_{1,2}(J_n) \leqslant 2n + 1$. Zauważmy, że każdy zbiór $(1, 2)$-dominujący zawiera co najmniej dwa wierzchołki z każdego z podzbiorów $V(K_{1,n}^i) \cup \{z_i\}, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ oraz co najmniej jeden wierzchołek ze zbioru $V(K_{1,n}^0)$. Z faktu, że zbiory te są rozłączne wynika, że zbiór $(1, 2)$-dominujący zawiera co najmniej $2n + 1$ wierzchołków, a zatem $\gamma_{1,2}(J_n) = 2n + 1$, a na mocy twierdzenia 3.3 również $\gamma_{1,\overline{2}}(J_n) = 2n + 1$.

Kolejnym krokiem będzie udowodnienie, że $\Gamma_{1,2}(J_n) = n^2 + 2n$. Zauważmy, że zbiór $D_3 = \bigcup_{i=0}^n \left(\bigcup_{j=1}^n \{y_j^i\}\right) \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ jest minimalnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym. Stąd $\Gamma_{1,2}(J_n) \geqslant n(n+1)+n = n^2+2n$. Ponadto, każdy minimalny zbiór $(1, 2)$-dominujący może zawierać co najwyżej n spośród $n + 1$ wierzchołków z każdego ze zbiorów $V(K_{1,n}^i)$ dla $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Liczba zbiorów $V(K_{1,n}^i)$ wynosi $n + 1$, więc istnieje co najmniej



Rysunek 3.5: Graf J_n

$n+1$ wierzchołków, które nie należą do minimalnego zbioru $(1,2)$-dominującego. Stąd $\Gamma_{1,2}(J_n) \leqslant |V(J_n)| - (n+1) = (n+1)^2 + n - n - 1$, zatem $\Gamma_{1,2}(J_n) \leqslant n^2 + 2n$. Ostatecznie dostajemy $\Gamma_{1,2}(J_n) = n^2 + 2n$

Pokażemy, że $\Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) = n^2 + n + 1$. Zbiór $D_4 = \bigcup_{i=0}^{n-1} \left(\bigcup_{j=1}^{n} \{y_j^i\} \right) \cup \{z_1, \ldots, z_n\} \cup \{x_n\}$ jest minimalnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Zatem $\Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) \geqslant n^2 + n + 1$. Niech D^* będzie największym minimalnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu J_n. Wtedy dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ zbiór $D^* \cap (V(K_{1,n}^i) \cup \{z_i\})$ może zawierać co najwyżej $n+1$ wierzchołków, natomiast zbiór $D^* \cap V(K_{1,n}^0)$ może zawierać co najwyżej n wierzchołków. Załóżmy, że $\left| D^* \cap (V(K_{1,n}^i) \cup \{z_i\}) \right| = n+1$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ oraz $\left| D^* \cap V(K_{1,n}^0) \right| = n$. Wtedy zbiór $D' = \bigcup_{i=1}^{n-1} \left(D^* \cap (V(K_{1,n}^i) \cup \{z_i\}) \right) \cup \left(D^* \cap V(K_{1,n}^0) \right)$ jest największym minimalnym zbiorem $(1,2)$-dominującym o mocy $(n-1)(n+1) + n = n^2 + n - 1$ w grafie $J_n \setminus \{V(K_{1,n}^n) \cup \{z_n\}\}$. Ponadto D' jest zbiorem $(1,1)$-dominującym w $J_n \setminus \{V(K_{1,n}^n) \cup \{z_n\}\}$. Ponieważ D^* jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, więc w zbiorze $V(K_{1,n}^n) \cup \{z_n\}$ istnieje wierzchołek, który nie jest $(1,1)$-dominowany przez D'. Jeżeli $z_n \in D^*$, to z minimalności zbioru D^* otrzymujemy, że $D^* \cap V(K_{1,n}^n) = \{x_n\}$. Natomiast jeżeli $z_n \notin D^*$, to $\left| D^* \cap V(K_{1,n}^n) \right| = 2$. W każdym przypadku $\left| D^* \cap \left(V(K_{1,n}^n) \cup \{z_n\} \right) \right| = 2$. Stąd D^* ma $n^2 + n - 1 + 2 = n^2 + n + 1$ wierzchołków, co implikuje, że $\Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) = n^2 + n + 1$.

Z powyższych rozważań wynikają następujące równości:
$\gamma_{1,2}(J_n) - \gamma(J_n) = 2n + 1 - (n + 1) = n$,
$\Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) - \gamma_{1,2}(J_n) = n^2 + n + 1 - (2n + 1) = n^2 - n$,
$\Gamma_{1,2}(J_n) - \Gamma_{1,\overline{2}}(J_n) = n^2 + 2n - (n^2 + n + 1) = n - 1$,
co kończy dowód. ■

Rozdział 4

Indeks przekroju zbiorów $(1,1)$-dominujących i właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących

W poprzednim rozdziale wprowadziliśmy pojęcie właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego, czyli zbioru $(1,2)$-dominującego, który nie jest $(1,1)$-dominujący. W tym rozdziale będziemy poszukiwać odpowiedzi na pytanie: jaka w danym grafie jest najmniejsza liczba wspólnych wierzchołków zbioru $(1,1)$-dominującego oraz właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego, a w szczególności, czy istnieją w grafie dwa rozłączne zbiory, z których jeden jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, a drugi właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym?

Niech G będzie grafem mającym właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Liczbę

$$\rho(G) = \min\{|D \cap D^*|\colon D \in \mathcal{F}_{1,1}(G), D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)\}$$

nazywamy *indeksem przekroju zbiorów* $(1,1)$*-dominujących i właściwych zbiorów* $(1,2)$*-dominujących* grafu G. W dalszej części rozprawy parametr ten będziemy nazywać krótko *indeksem przekroju.*

Dalsze rozważania ograniczymy wyłącznie do grafów mających właściwe zbiory $(1,2)$-dominujące.

4.1 Indeks przekroju w wybranych klasach grafów

W tym podrozdziale wyznaczymy indeks przekroju $\rho(G)$ grafu w wybranych klasach grafów takich jak ścieżki, cykle oraz grafy pełne dwudzielne. W pierwszej kolejności udowodnimy niezbędne lematy.

Lemat 4.1. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech G będzie grafem spójnym zawierającym ścieżkę wiszącą $v_1v_2\dots v_n, n \geqslant 3$, gdzie $v_n \in L(G)$. Wtedy dla każdego zbioru $D \in \mathcal{F}_{1,1}(G)$ i dla każdego $D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$ zachodzi $(D \cap D^*) \cap \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\} \neq \emptyset$.*

Dowód. Niech G będzie grafem spójnym zawierającym ścieżkę wiszącą $v_1v_2\dots v_n, n \geqslant 3$, gdzie v_n jest liściem grafu G. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieją zbiór $(1,1)$-dominujący D oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D^* takie, że $(D \cap D^*) \cap \{v_{n-2}, v_{n-1}, v_n\} = \emptyset$. Ponieważ $v_n \in D$, więc $v_n \notin D^*$. To oznacza, że $v_{n-1} \in D^*$, w przeciwnym wypadku v_n nie jest dominowany przez D^*. Stąd $v_{n-1} \notin D$. Ponadto $v_{n-2} \in D^*$, ponieważ v_n jest $(1,2)$-dominowany przez D^*. Zatem $v_{n-2} \notin D$. Wtedy wierzchołek v_{n-1} ma tylko jednego sąsiada w zbiorze D, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. ■

Z powyższego lematu otrzymujemy natychmiastowy wniosek.

Wniosek 4.2. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech G będzie spójnym grafem zawierającym ścieżkę wiszącą $v_1v_2\dots v_n, n \geqslant 3$. Wtedy $\rho(G) \geqslant 1$.*

Lemat 4.3. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech G będzie spójnym grafem takim, że $\rho(G) = 0$. Wtedy dla dowolnych zbiorów $D \in \mathcal{F}_{1,1}(G), D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$ takich, że $D \cap D^* = \emptyset$ zachodzi $L(G) \subseteq D$ oraz $S(G) \subseteq D^*$.*

Dowód. Załóżmy, że $\rho(G) = 0$. Niech $D \in \mathcal{F}_{1,1}(G)$ oraz $D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(G)$ będą takie, że $D \cap D^* = \emptyset$. Ponieważ każdy liść musi należeć do zbioru $(1,1)$-dominującego, więc $L(G) \subseteq D$. Wtedy $L(G) \cap D^* = \emptyset$. Aby pokazać, że $S(G) \subseteq D^*$ załóżmy nie wprost, że istnieje $v \in S(G)$ taki, że $v \notin D^*$. Ponieważ $L(v) \subseteq D$, więc $L(v) \cap D^* = \emptyset$. To oznacza, że wierzchołki ze zbioru $L(v)$ nie są dominowane przez D^*, sprzeczność z faktem, że D^* jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Zatem $S(G) \subseteq D^*$. ■

Wyznaczmy wartość parametru ρ dla ścieżek P_n.

Twierdzenie 4.4. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\rho(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in \{3,4,5\} \\ 2 & \text{dla } n \geqslant 6. \end{cases}$$

Dowód. Jeżeli $n \in \{3,4,5\}$, to można sprawdzić, że $\rho(P_3) = \rho(P_4) = \rho(P_5) = 1$. Niech $n \geqslant 6$. Najpierw pokażemy, że $\rho(P_n) \leqslant 2$. Jeżeli $n = 2p+1, p \geqslant 1$, to zbiór $D_1 = \{x_2, x_4, \dots, x_{2p-2}, x_{2p}\} \cup \{x_1, x_{2p+1}\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, natomiast zbiór $D_1^* = (V(P_{2p+1}) \setminus D_1) \cup \{x_2, x_{2p}\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym oraz $|D_1 \cap D_1^*| = 2$. Jeżeli $n = 2p, p \geqslant 2$, to zbiór $D_2 = \{x_1\} \cup \{x_2, x_4, \ldots, x_{2p-2}, x_{2p}\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, natomiast zbiór $D_2^* = (V(P_{2p}) \setminus D_2) \cup \{x_2, x_{2p-2}\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym oraz $|D_2 \cap D_2^*| = 2$. Stąd dla dowolnego $n \geqslant 6$ zachodzi, że $\rho(P_n) \leqslant 2$. Aby wykazać, że $\rho(P_n) \geqslant 2$ zauważmy, że z lematu 4.1, dla wszystkich zbiorów $D \in \mathcal{F}_{1,1}(P_n), D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(P_n)$ zachodzą nierówności $|D \cap D^* \cap \{x_1, x_2, x_3\}| \geqslant 1$ oraz $|D \cap D^* \cap \{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}| \geqslant 1$, zatem $|D \cap D^*| \geqslant 2$, czyli $\rho(P_n) \geqslant 2$. W konsekwencji $\rho(P_n) = 2$, co kończy dowód. ■

Pokażemy, że w cyklach $C_n, n \geqslant 5$ istnieją zbiór $(1,1)$-dominujący oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący, które są rozłączne.

Twierdzenie 4.5. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$\rho(C_n) = \begin{cases} 1 & \textit{dla } n = 4 \\ 0 & \textit{dla } n \geqslant 5. \end{cases}$$

Dowód. Jeżeli $n = 4$, to nie istnieją zbiór $(1,1)$-dominujący D oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D^* takie, że $D \cap D^* = \emptyset$. Można sprawdzić, że $\rho(C_4) = 1$. Niech $n \geqslant 5$. Jeżeli $n = 2p+1, p \geqslant 2$, wtedy zbiór $D_1 = \{x_1, x_3, \ldots, x_{2p+1}\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym w grafie C_{2p+1}, natomiast zbiór $D_1^* = V(C_{2p+1}) \setminus D_1$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Jeżeli $n = 2p, p \geqslant 3$, to wtedy zbiór $D_2 = \{x_1, x_2, x_4\} \cup \{x_5, x_7, \ldots, x_{2p-3}, x_{2p-1}\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym w grafie C_{2p}, natomiast zbiór $D_2^* = V(C_{2p}) \setminus D_2$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Ponieważ $D_1 \cap D_1^* = \emptyset$ oraz $D_2 \cap D_2^* = \emptyset$, więc $\rho(C_n) = 0$ dla $n \geqslant 5$. ■

Wyznaczymy indeks przekroju dla grafów pełnych dwudzielnych.

Twierdzenie 4.6. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech m, n będą liczbami naturalnymi takimi, że $m + n \geqslant 3$. Wtedy*

$$\rho(K_{m,n}) = \begin{cases} 0 & \textit{dla } m \geqslant 3 \textit{ i } n \geqslant 3, \\ 1 & \textit{w przeciwnym wypadku.} \end{cases}$$

Dowód. Niech $V(K_{m,n}) = V_1 \cup V_2$, gdzie V_1, V_2 są zbiorami niezależnymi oraz $V_1 = \{x_1, \ldots, x_m\}, V_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Jeżeli $m \geqslant 3$ oraz $n \geqslant 3$, to zbiór $\{x_1, y_1\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, natomiast zbiór $V(K_{m,n}) \setminus \{x_1, y_1\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym w grafie $K_{m,n}$, zatem $\rho(K_{m,n}) = 0$.

Załóżmy, że $m < 3$ lub $n < 3$. Bez straty dla ogólności rozważań, niech $m < 3$.

Jeżeli $m = 1$, to $n \geqslant 2$ oraz $K_{1,n}$ jest gwiazdą. Wtedy możemy zauważyć, że $\rho(K_{1,n}) = 1$. Jeżeli $m = n = 2$, to $K_{2,2}$ jest cyklem C_4 i z twierdzenia 4.5 wiemy, że $\rho(C_4) = 1$.

Załóżmy, że $m = 2$ oraz $n \geqslant 3$. Zbiór $\{x_1, y_1\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym, natomiast zbiór $V(K_{2,n}) \setminus \{y_1\}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym grafu $K_{2,n}$, zatem $\rho(K_{2,n}) \leqslant 1$. Pokażemy, że $\rho(K_{2,n}) \geqslant 1$. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że istnieją zbiór $(1,1)$-dominujący D oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D^* takie, że $D \cap D^* = \emptyset$. Ponieważ D jest $(1,1)$-dominujący, więc $V_1 \subseteq D$ lub $V_2 \subseteq D$. Ponadto $D^* \cap V_i \neq \emptyset$ oraz $V_i \setminus D^* \neq \emptyset$ dla $i \in \{1,2\}$, bo w przeciwnym wypadku D^* jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. Ponieważ $V_1 \subseteq D$ lub $V_2 \subseteq D$, więc $D \cap D^* \neq \emptyset$, sprzeczność. To oznacza, że nie istnieją rozłączne zbiory $D \in \mathcal{F}_{1,1}(K_{2,n})$ oraz $D^* \in \mathcal{F}_{1,\overline{2}}(K_{2,n})$, czyli $\rho(K_{2,n}) \geqslant 1$. Zatem $\rho(K_{2,n}) = 1$, co kończy dowód. ■

Szczególnym przypadkiem grafu $K_{m,n}$ jest gwiazda $K_{1,n}$.

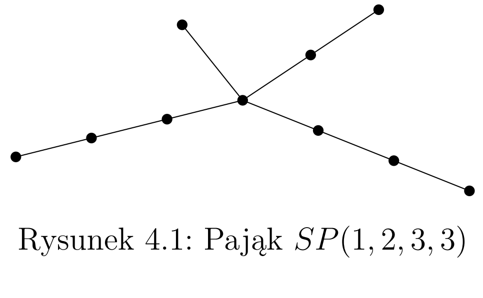
Wniosek 4.7. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wtedy $\rho(K_{1,n}) = 1$.*

4.2 Indeks przekroju w drzewach

W tym podrozdziale będziemy rozważać indeks przekroju w klasie drzew. W niektórych drzewach indeks przekroju można wyznaczyć dokładnie. W poprzednim podrozdziale podaliśmy wartość tego parametru dla ścieżek. Kolejną podklasą drzew, w której wyznaczymy indeks przekroju są pająki.

Pająkiem nazywamy drzewo mające co najwyżej jeden wierzchołek stopnia większego niż dwa. Wierzchołek ten, jeżeli istnieje, jest wierzchołkiem centralnym drzewa. *Nogą pająka* nazywamy każdą ścieżkę wiszącą, której jednym z końców jest wierzchołek centralny. Symbolem $SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $n \geqslant 2$ oznaczamy pająka mającego n nóg o długościach $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Zauważmy, że jeżeli pająk nie posiada wierzchołka stopnia większego niż dwa, wtedy jest izomorficzny ze ścieżką.

Rysunek 4.1 przedstawia pająka $SP(1,2,3,3)$.



Rysunek 4.1: Pająk $SP(1,2,3,3)$

Pająki były rozważane w ostatnich latach ze względu na ich różne własności między innymi w [11, 54], a w [37, 60] w odniesieniu do zbiorów dominujących.

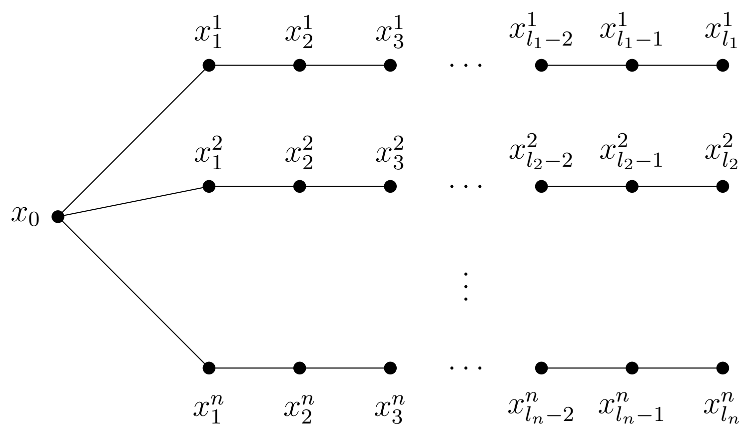
Twierdzenie 4.8. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech s będzie liczbą nóg długości jeden lub dwa w pająku $SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$, $n \geqslant 3$. Wtedy*

(i) $\rho\left(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)\right) = n$ *jeżeli* $s = 0$,

(ii) $\rho\left(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)\right) = n - s$ *jeżeli istnieją* j, k, $1 \leqslant j, k \leqslant n$ *takie, że* $l_j = 1$ *i* $l_k = 3$ *oraz dla każdego* $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *zachodzi* $l_m \neq 2$,

(iii) $\rho\left(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)\right) = n - s + 1$ *w pozostałych przypadkach.*

Dowód. Dla dowodu wprowadźmy oznaczenia jak na rysunku 4.2 i oznaczmy przez s liczbę nóg długości jeden lub dwa w pająku $SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$.



Rysunek 4.2: Pająk $SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$

Najpierw udowodnimy *(i)*. Niech $s = 0$. To oznacza, że $l_i \geqslant 3$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pokażemy, że $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n$. Niech D_1 będzie dowolnym zbiorem $(1,1)$-dominującym, natomiast D_1^* dowolnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym w rozważanym pająku. Ustalmy dowolnie j, $1 \leqslant j \leqslant n$. Z lematu 4.1 otrzymujemy, że $|D_1 \cap D_1^* \cap \{x_{l_j-2}^j, x_{l_j-1}^j, x_{l_j}^j\}| \geqslant 1$. Z dowolności wyboru j wynika, że do zbioru $D_1 \cap D_1^*$ należy co najmniej jeden wierzchołek z każdej nogi pająka, stąd $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n$. Niech $D_{11} = \{x_1^j, x_3^j, \ldots, x_{2p+1}^j \colon j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$ oraz $D_{12} = \{x_1^j, x_3^j, \ldots, x_{2p-1}^j, x_{2p}^j \colon j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$. Niech ponadto $D_{11}^* = \{x_2^j, x_4^j, \ldots, x_{2p-1}^j, x_{2p}^j \colon j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$ oraz $D_{12}^* = \{x_2^j, x_4^j, \ldots, x_{2p-2}^j, x_{2p-1}^j \colon j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$. Zbiory $D_1 = D_{11} \cup D_{12}$ oraz $D_1^* = D_{11}^* \cup D_{12}^* \cup \{x_0\}$ są odpowiednio zbiorem $(1,1)$-dominującym oraz właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Ponadto $|D_1 \cap D_1^*| = n$. To oznacza, że $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) = n$, co kończy dowód *(i)*.

Aby udowodnić *(ii)* załóżmy, że istnieją j, k, $1 \leqslant j, k \leqslant n$ takie, że $l_j = 1$ oraz $l_k = 3$ oraz dla każdego $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi $l_m \neq 2$. To oznacza, że $s \geqslant 1$. Pokażemy, że $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n - s$. Z lematu 4.1 wiemy, że dla każdego zbioru $(1,1)$-dominującego D_2 oraz dla każdego właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego D_2^* w każdej nodze długości co najmniej trzy istnieje wierzchołek należący do przekroju $D_2 \cap D_2^*$. Ponieważ nóg długości co najmniej trzy jest dokładnie $n-s$, więc $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n - s$. Niech $D_{21} = \{x_1^j, x_3^j, \ldots, x_{2p-1}^j, x_{2p+1}^j : j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$ oraz $D_{22} = \{x_1^j, x_3^j, \ldots, x_{2p-1}^j, x_{2p}^j : j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$ oraz $D_{23} = \{x_1^j : l_j = 1\}$. Niech ponadto $D_{21}^* = \{x_2^j, x_4^j, \ldots, x_{2p-1}^j, x_{2p}^j : j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$ oraz $D_{22}^* = \{x_2^j, x_4^j, \ldots, x_{2p-2}^j, x_{2p-1}^j : j \in \{1, 2, \ldots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$. Zbiór $D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup D_{23}$ jest zbiorem $(1,1)$-dominującym, natomiast zbiór $D_2^* = D_{21}^* \cup D_{22}^* \cup \{x_0\}$ jest właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)$. Ponadto $|D_1 \cap D_1^*| = n - s$. To oznacza, że $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) = n - s$, co kończy dowód *(ii)*.

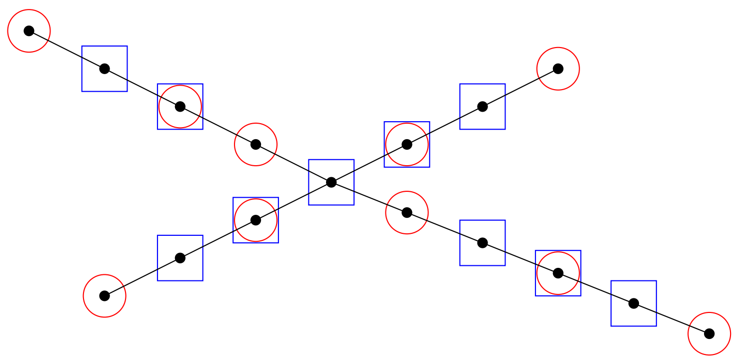
Udowodnimy *(iii)*. W tym celu załóżmy, że istnieje $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takie, że $l_m \leqslant 2$. To oznacza, że $s \geqslant 1$. Ponadto zakładamy, że $l_i \neq 1$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ lub $l_i \neq 3$ dla wszystkich $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ lub istnieje k, $1 \leqslant k \leqslant n$ takie, że $l_k = 2$. Najpierw pokażemy, że $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n - s + 1$. Niech D_3 będzie dowolnym zbiorem $(1,1)$-dominującym oraz niech D_3^* będzie dowolnym właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Jeżeli $s < n$, to znaczy, że istnieją nogi długości co najmniej trzy i z lematu 4.1 w każdej takiej nodze co najmniej jeden wierzchołek należy do przekroju $D_3 \cap D_3^*$. Ponadto, jeżeli istnieje k, $1 \leqslant k \leqslant n$ takie, że $l_k = 2$, to z lematu 4.1 otrzymujemy, że co najmniej jeden wierzchołek ze zbioru $\{x_0, x_1^k, x_2^k\}$ należy do przekroju $D_3 \cap D_3^*$, czyli $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n - s + 1$. Jeżeli nie istnieje noga długości dwa, to istnieje droga długości jeden, a to z kolei implikuje, że nie istnieje droga długości trzy, w przeciwnym wypadku otrzymujemy przypadek *(ii)*. Stąd dla każdego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mamy $l_j = 1$ lub $l_j \geqslant 4$ oraz istnieje co najmniej jedna noga długości jeden. Z lematu 4.1 wiemy, że w zbiorze $V(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \setminus \{x_0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\}$ istnieje co najmniej $n - s$ wierzchołków należących do przekroju $D_3 \cap D_3^*$. Aby pokazać, że $|\{x_0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\} \cap D_3 \cap D_3^*| \geqslant 1$ załóżmy nie wprost, że $\{x_0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\} \cap D_3 \cap D_3^* = \emptyset$. Niech $l_k = 1$ dla pewnego k, $1 \leqslant k \leqslant n$. Wtedy $x_1^k \in D_3$. Stąd $x_1^k \notin D_3^*$, czyli $x_0 \in D_3^*$, gdyż D_3^* jest zbiorem dominującym. Zatem $x_0 \notin D_3$. Ponieważ D_3^* jest zbiorem $(1,2)$-dominującym i z założenia istnieje i, $1 \leqslant i \leqslant n$ takie, że $l_i \geqslant 4$ więc $x_1^i \in D_3^*$. To oznacza, że $x_1^i \notin D_3$. Zatem x_1^i nie jest $(1,1)$-dominowany przez zbiór D_3, co jest sprzeczne z założeniem, że D_3 jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. Stąd otrzymujemy, że $|\{x_0, x_1^1, x_1^2, \ldots, x_1^n\} \cap D_3 \cap D_3^*| \geqslant 1$, czyli $\rho(SP(l_1, l_2, \ldots, l_n)) \geqslant n - s + 1$.

Aby wykazać równość, wystarczy wskazać zbiór $(1,1)$-dominujący oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący, których przekrój zawiera dokładnie $n - s + 1$ wierzchołków.

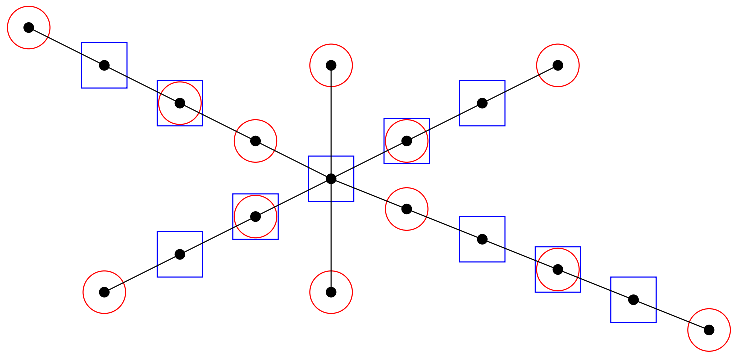
Jeżeli $l_j = 1$ dla wszystkich $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, to $s = n$ oraz zbiory $D_4 = \{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n\}$ oraz $D_4^* = \{x_0, x_1^1\}$ są odpowiednio zbiorem $(1,1)$-dominującym i właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Wtedy $|D_4 \cap D_4^*| = 1 = n - s + 1$. Jeżeli $l_j \leqslant 2$ dla wszystkich $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ oraz istnieje noga długości dwa, to $s = n$ oraz zbiory $D_5 = \{x_0\} \cup L(SP(l_1, l_2, \dots, l_n))$ oraz $D_5^* = \{x_0\} \cup \{v \in SP(l_1, l_2, \dots, l_n)\colon d_{SP(l_1,l_2,\dots,l_n)}(v) = 2\}$ są odpowiednio zbiorem $(1,1)$-dominującym i właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Stąd $|D_5 \cap D_5^*| = 1 = n - s + 1$. Jeżeli istnieją nogi długości mniejszej lub równej dwa oraz nogi długości większej lub równej trzy, to z założeń z przypadku *(iii)* dostajemy, że jeśli istnieje noga długości jeden oraz noga długości trzy, to istnieje też noga długości dwa. Niech $D_{61} = \{x_1^j\colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 1\}$, $D_{62} = \{x_2^j\colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2\}$, $D_{63} = \{x_2^j, x_4^j, \dots, x_{2p}^j, x_{2p+1}^j\colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$, $D_{64} = \{x_2^j, x_4^j, \dots, x_{2p}^j, \colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$. Niech ponadto $D_{61}^* = \{x_1^j\colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2\}$, $D_{62}^* = \{x_1^j, x_3^j, \dots, x_{2p-1}^j, x_{2p}^j\colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2p+1, p \geqslant 1\}$, $D_{63}^* = \{x_1^j, x_3^j, \dots, x_{2p-2}^j, x_{2p-1}^j, \colon j \in \{1, 2, \dots, n\}, l_j = 2p, p \geqslant 2\}$. Wtedy zbiory $D_6 = D_{61} \cup D_{62} \cup D_{63} \cup D_{64} \cup \{x_0\}$ oraz $D_6^* = D_{61}^* \cup D_{62}^* \cup D_{63}^* \cup \{x_0\}$ są odpowiednio zbiorem $(1,1)$-dominującym oraz właściwym zbiorem zbiorem $(1,2)$-dominującym. Ponadto $|D_6 \cap D_6^*| = n - s + 1$, co kończy dowód. ■

Przypadki opisane w twierdzeniu 4.8 zilustrujemy przykładami. Przyjmijmy, że niebieskimi prostokątami zaznaczone są właściwe zbiory $(1,2)$-dominujące, natomiast czerwonymi okręgami zbiory $(1,1)$-dominujące.

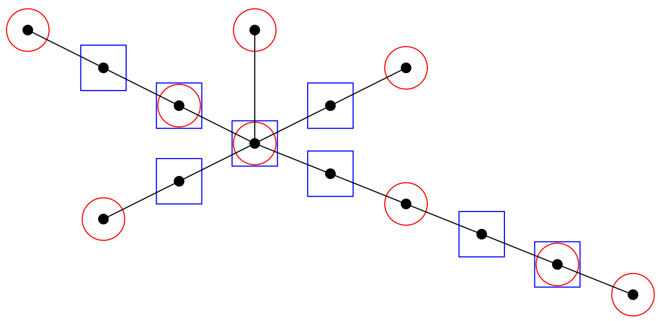
Rysunki 4.3, 4.4 i 4.5 przedstawiają pająki $SP(3,5,3,4)$, $SP(1,3,5,1,3,4)$ oraz $SP(1,2,5,2,3)$, dla których spełnione są założenia odpowiednio warunków *(i)*, *(ii)* oraz *(iii)*. Wtedy otrzymujemy, że $\rho\left(SP(3,5,3,4)\right) = 4$, $\rho\left(SP(1,3,5,1,3,4)\right) = n - s = 6 - 2 = 4$ oraz $\rho\left(SP(1,2,5,2,3)\right) = n - s + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$.



Rysunek 4.3: Pająk $SP(3,5,3,4)$



Rysunek 4.4: Pająk $SP(1,3,5,1,3,4)$



Rysunek 4.5: Pająk $SP(1,2,5,2,3)$

Szczególnymi przypadkami pająków są gwiazda $K_{1,n}$ i ścieżka P_n. Indeksy $\rho(P_n)$ oraz $\rho(K_{1,n})$ zostały wyznaczone w poprzednim podrozdziale. Możemy zauważyć, że wartości $\rho(P_n)$ oraz $\rho(K_{1,n})$ otrzymujemy również z twierdzenia 4.8.

Z powyższych rozważań wynika, że istnieją drzewa, w których indeks przekroju jest dodatni. W dalszej części rozdziału podamy warunek konieczny dla drzewa T, aby $\rho(T) = 0$.

Twierdzenie 4.9. (A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch [42]) *Niech T będzie n-wierzchołkowym drzewem, $n \geqslant 3$. Jeżeli $\rho(T) = 0$, to*

(i) $n \geqslant 6$ i $diam(G) \geqslant 3$ oraz

(ii) T nie zawiera ścieżki wiszącej długości większej niż dwa oraz

(iii) jeżeli $x \in S_w(T)$, to istnieje wierzchołek $y \in V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))$ taki, że $xy \in E(T)$ oraz

(iv) jeżeli $x \in S(T)$ i $N_T(x) \cap S(T) = \emptyset$, to istnieje wierzchołek $y \in V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))$ taki, że $xy \in E(T)$ oraz $d_T(y) \geqslant 3$.

Dowód. Niech T będzie drzewem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 3$. Wtedy T ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Niech D i D^* będą odpowiednio zbiorem $(1,1)$-dominującym i właściwym zbiorem $(1,2)$-dominującym w drzewie T. Załóżmy, że $D \cap D^* = \emptyset$. Pokażemy, że muszą być spełnione warunki *(i)*-*(iv)*.

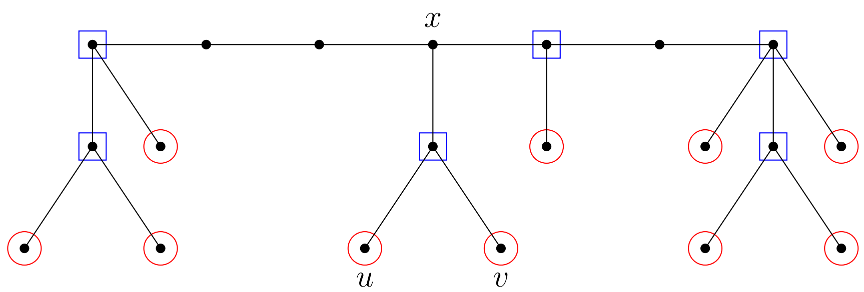
Jeżeli $3 \leqslant n < 6$ lub $diam(T) < 3$, to poprzez sprawdzenie wszystkich możliwości otrzymujemy, że dla dowolnych D i D^* zachodzi $D \cap D^* \neq \emptyset$, więc warunek *(i)* musi być spełniony.

Dla dowodu *(ii)* załóżmy nie wprost, że T zawiera ścieżkę wiszącą długości większej niż dwa. Na mocy lematu 4.1 wiemy, że co najmniej jeden wierzchołek tej ścieżki należy do $D \cap D^*$, sprzeczność z założeniem. Zatem warunek *(ii)* musi zachodzić.

Załóżmy nie wprost, że nie jest spełniony warunek *(iii)*. Oznacza to, że istnieje wierzchołek słabo podtrzymujący $x \in S(T)$, który jest sąsiedni z dokładnie jednym liściem, powiedzmy $v \in L(T)$, oraz $N_T(x) \setminus \{v\} \subseteq S(T)$. Z lematu 4.3 wiemy, że $v \in D$, $x \in D^*$ oraz $N_T(x) \setminus \{v\} \subseteq D^*$. Zatem wierzchołek x nie jest $(1,1)$-dominowany przez D, sprzeczność.

Przypuśćmy, że nie zachodzi warunek *(iv)*. To oznacza, że $x \in S(T) \subseteq D^*$ oraz $N_T(x) \cap S(T) = \emptyset$. Ponadto, nie istnieje w zbiorze $V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))$ wierzchołek sąsiedni z x lub każdy sąsiad wierzchołka x z tego zbioru ma stopień co najwyżej dwa. Jeżeli x nie ma sąsiadów w zbiorze $V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))$, to $N_T(x) \subseteq L(T)$. Ponieważ T jest grafem spójnym, więc $T \cong K_{1,n}$, co jest sprzeczne z wnioskiem 4.7. Zatem $N_T(x) \cap [V(T) \setminus (L(T) \cup S(T))] \neq \emptyset$ i wszystkie wierzchołki z tego zbioru mają stopień co najwyżej dwa. Co więcej, jeden z nich (oznaczmy go przez y) musi należeć do zbioru D^*, aby zapewnić $(1,2)$-dominowanie wierzchołkom ze zbioru $L(x)$. Stąd $y \notin D$ oraz y jest sąsiedni z co najwyżej jednym wierzchołkiem ze zbioru D. Sprzeczność z założeniem, że D jest zbiorem $(1,1)$-dominującym. Zatem warunek *(iv)* musi być spełniony, co kończy dowód. ■

Warunki z twierdzenia 4.9 nie są wystarczające na to, aby $\rho(T) = 0$. Na rysunku 4.6 przedstawione zostało drzewo T, które spełnia warunki *(i)*-*(iv)* z twierdzenia 4.9, a pomimo to $\rho(T) > 0$.



Rysunek 4.6: Drzewo T, dla którego $\sigma(T) > 0$ [42]

Aby uzasadnić, że $\rho(T) > 0$ załóżmy nie wprost, że $\rho(T) = 0$, czyli istnieją zbiór $(1,1)$-dominujący D oraz właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący D^* takie, że $D \cap D^* = \emptyset$.

Z lematu 4.3 wiemy, że wszystkie liście, oznaczone czerwonymi okręgami, należą do zbioru D, natomiast wszystkie wierzchołki podtrzymujące, oznaczone niebieskimi prostokątami, należą do zbioru D^*. Jeżeli $x \in D$, to $x \notin D^*$. Wtedy wierzchołki u, v nie są $(1, 2)$-dominowane przez D^*. Jeżeli $x \in D^*$, to $x \notin D$. Wtedy x nie jest $(1, 1)$-dominowany przez D. Zatem $x \in D \cap D^*$, czyli $\rho(T) \geqslant 1$.

Rozdział 5

Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w produktach grafów

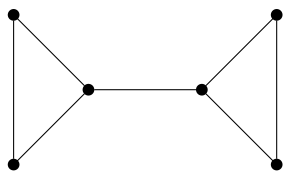
W tym rozdziale będziemy rozważać *niezależne zbiory* $(1, 2)$*-dominujące*, czyli zbiory, które są jednocześnie niezależne i $(1, 2)$-dominujące. Podamy warunki konieczne oraz wystarczające na istnienie niezależnego zbioru $(1, 2)$-dominującego w produkcie tensorowym dwóch grafów, silnym produkcie dwóch grafów, G-złączeniu grafów oraz uogólnionej koronie grafów. Produkty dwóch grafów lub ich uogólnienia są jednym ze sposobów generowania nowych klas grafów i w odniesieniu do problematyki różnego typu niezależnych zbiorów dominujących były rozważane w wielu pracach, między innymi w [6, 24, 62, 63].

Definicje wszystkich omawianych w tym rozdziale produktów zostały zamieszczone w rozdziale pierwszym.

5.1 Twierdzenia o istnieniu niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących

Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące wprowadzili i jako pierwsi badali S. M. Hedetniemi i in. w pracy [35]. Podzbiór $S \subseteq V(G)$ jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym, jeżeli jest niezależny i $(1, 2)$-dominujący.

Nie każdy graf ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący. Przykładem takich grafów są grafy pełne $K_n, n \geqslant 2$. Innym przykładem, w którym nie istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący jest korona $P_2 \circ P_2$ przedstawiona na rysunku 5.1.



Rysunek 5.1: Graf $P_2 \circ P_2$, w którym nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący

Nie jest znana pełna charakteryzacja grafów mających niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. W [35] zostało podane, że problem istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących jest $\mathcal{NP}$-zupełny w ogólnym przypadku. Udowodniony został także warunek wystarczający dla istnienia niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego.

Twierdzenie 5.1. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Jeżeli spójny, n-wierzchołkowy graf G, $n \geqslant 3$, nie jest pełny i nie zawiera trójkątów, to w grafie G istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący mocy $\alpha(G)$.*

Ponadto w [35] opisane zostały konstrukcje klas grafów, w których nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Przedstawimy jedną z tych konstrukcji z wykorzystaniem dowolnego, n-wierzchołkowego drzewa, $n \geqslant 2$. Z twierdzenia 5.1 wiemy, że dowolne drzewo, mające co najmniej trzy wierzchołki ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Poniższa konstrukcja pokazuje, że z grafu, w którym istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący można uzyskać graf, w którym takiego zbioru nie ma.

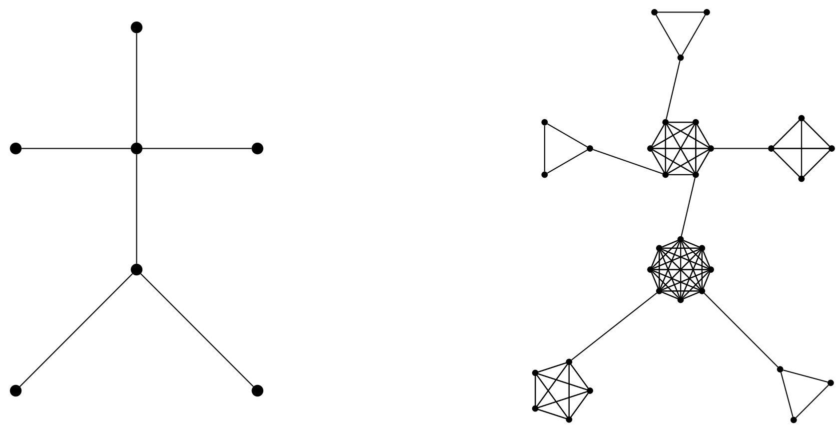
Niech T będzie dowolnym, n-wierzchołkowym drzewem, $n \geqslant 2$. Każdemu wierzchołkowi $v \in V(T)$ przyporządkowujemy graf pełny K_k^v, gdzie $k \geqslant d_T(v) + 2$. Rozważmy sumę grafów $\mathcal{K} = \bigcup_{v \in V(T)} K_k^v$. Tworzymy graf $\mathcal{K}^*$ w następujący sposób:

1. do grafu $\mathcal{K}$ dodajemy dokładnie jedną krawędź pomiędzy grafami pełnymi K_k^v oraz K_j^u wtedy i tylko wtedy, gdy $vu \in E(T)$ oraz
2. do każdego wierzchołka grafu $\mathcal{K}$ dodajemy co najwyżej jedną krawędź.

Dla dowolnego drzewa T rodzinę wszystkich grafów $\mathcal{K}^*$ możliwych do otrzymania w wyniku takiej konstrukcji oznaczmy przez $G(T)$.

Twierdzenie 5.2. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Niech T będzie dowolnym n-wierzchołkowym drzewem, $n \geqslant 2$. Jeżeli $H \in G(T)$, to w grafie H nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.*

Na rysunku 5.2 z prawej strony przedstawiony jest graf $\mathcal{K}^*$ należący do rodziny $G(T)$ dla widocznego z lewej strony drzewa T. Zgodnie z twierdzeniem 5.2, w grafie $\mathcal{K}^*$ nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.



Rysunek 5.2: Drzewo T oraz graf $\mathcal{K}^* \in G(T)$

W przypadku klasycznego dominowania każdy maksymalny zbiór niezależny jest niezależnym zbiorem dominującym grafu. Analogiczna zależność nie zachodzi dla zbiorów $(1,2)$-dominujących.

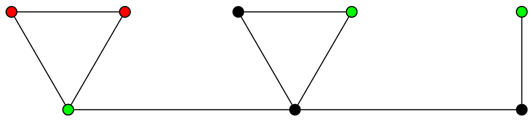
Nie każdy maksymalny zbiór niezależny jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Jako przykład rozważmy ścieżkę P_5. Podzbiór $S(P_5)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym, ale nie jest $(1,2)$-dominujący.

Kolejne twierdzenia pokazują zależności pomiędzy maksymalnym zbiorem niezależnym i niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym.

Twierdzenie 5.3. (A. Michalski [45]) *Jeżeli S jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G, to S jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G takim, że $L(G) \subseteq S$.*

Dowód. Niech S będzie niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G. Załóżmy nie wprost, że S nie jest maksymalnym zbiorem niezależnym lub $L(G) \setminus S \neq \emptyset$. Jeżeli S nie jest maksymalny, to istnieje wierzchołek $x \in V(G) \setminus S$ taki, że $S \cup \{x\}$ jest zbiorem niezależnym. To oznacza, że wierzchołek x nie jest dominowany przez zbiór S, co jest sprzeczne z założeniem, że S jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Jeżeli $L(G) \setminus S \neq \emptyset$, to istnieje wierzchołek $u \in L(G)$ taki, że $u \notin S$. Wtedy $N_G(u) = \{v\}$, gdzie $v \in S$. Ponieważ S jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, to istnieje $w \in S$ sąsiedni z wierzchołkiem v. To jest sprzeczne z założeniem, że S jest zbiorem niezależnym, co kończy dowód. ■

Implikacja w drugą stronę nie jest prawdziwa, ponieważ nie każdy maksymalny zbiór niezależny zawierający podzbiór liści jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Przykładem takiego grafu jest uogólniona korona $P_3 \circ \{P_2, P_2, N_1\}$ przedstawiona na rysunku 5.3. Zbiór zaznaczony kolorem zielonym jest maksymalnym zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści, ale nie jest to zbiór $(1,2)$-dominujący, ponieważ czerwone wierzchołki nie są $(1,2)$-dominowane.



Rysunek 5.3: Graf $P_3 \circ \{P_2, P_2, N_1\}$

W wybranych klasach grafów warunek konieczny podany w twierdzeniu 5.3 jest wystarczający.

Twierdzenie 5.4. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem niezawierającym trójkątów, $n \geqslant 3$. Każdy maksymalny zbiór niezależny grafu G zawierający zbiór liści jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu G.*

Dowód. Niech graf G ma co najmniej trzy wierzchołki, nie zawiera trójkątów oraz niech S będzie maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G zawierającym zbiór liści. Wtedy zbiór S jest zbiorem dominującym grafu G. Z twierdzenia 2.21 wiemy, że S jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym, który z założenia jest niezależny, co kończy dowód. ■

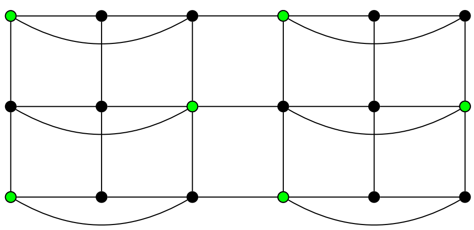
5.2 Niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące w produktach dwóch grafów

Klasyczne produkty dwóch grafów takie jak produkt kartezjański, produkt tensorowy oraz silny produkt są znanymi operacjami i często są rozważane w odniesieniu do zbiorów niezależnych, różnych rodzajów zbiorów dominujących oraz związanych z nimi parametrów. Literatura dotycząca zbiorów dominujących we wspomnianych produktach jest obszerna. Prace, w których poruszano te zagadnienia to między innymi [9, 13, 31, 66].

S. M. Hedetniemi i in. w [35] podali warunek na istnienie niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących w produkcie kartezjańskim dwóch grafów.

Twierdzenie 5.5. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [35]) *Niech G i H będą grafami spójnymi mającymi co najmniej dwa wierzchołki. Wtedy $G \,\square\, H$ ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.*

Na rysunku 5.4 został przedstawiony produkt kartezjański $(P_2 \circ P_2) \,\square\, P_3$ wraz z zaznaczonym na zielono niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym.



Rysunek 5.4: Niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący w grafie $(P_2 \circ P_2) \,\square\, P_3$

Kolejne twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający na to, aby w produkcie tensorowym dwóch grafów spójnych istniał niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Pokażemy, że brak niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego w czynniku produktu tensorowego nie wyklucza istnienia niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego w tym produkcie.

Twierdzenie 5.6. (A. Michalski [45]) *Niech G oraz H będą grafami spójnymi mającymi co najmniej dwa wierzchołki. Graf $G \times H$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy $G \ncong P_2$ lub $H \ncong P_2$.*

Dowód. Niech G i H będą grafami spójnymi oraz niech $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $V(H) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$, gdzie $n \geqslant 2, m \geqslant 2$.

Aby udowodnić warunek konieczny, załóżmy, że graf $G \times H$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Pokażemy, że $G \ncong P_2$ lub $H \ncong P_2$. Przypuśćmy nie wprost, że $G \cong P_2$ oraz $H \cong P_2$. Wtedy $G \times H \cong P_2 \cup P_2$. Ponieważ w grafie P_2 nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący, więc graf $P_2 \cup P_2$ również takiego zbioru nie ma, zatem otrzymujemy sprzeczność.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że co najmniej jeden z grafów G, H nie jest izomorficzny ze ścieżką P_2. Pokażemy, że $G \times H$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Rozważmy następujące przypadki:

1. $L(G) = \emptyset$ i $L(H) = \emptyset$.

Niech M będzie dowolnym maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G. Pokażemy, że zbiór $J = M \times V(H)$ jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \times H$. Z niezależności zbioru M oraz z definicji produktu tensorowego wynika, że J jest zbiorem niezależnym. Niech $v = (x_i, y_j) \in V(G \times H) \setminus J$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ponieważ M jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie G, więc jest również zbiorem dominującym w tym grafie. Stąd wierzchołek $x_i \in V(G) \setminus M$ ma sąsiada $x_k \in M$. Ponieważ $\deg_H y_j \geqslant 2$, więc $|N_{G\times H}(v) \cap J| \geqslant 2$. Zatem wierzchołek v jest $(1,1)$-dominowany przez J, czyli również $(1,2)$-dominowany przez zbiór J. To oznacza, że zbiór J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \times H$.

2. Albo $L(G) \neq \emptyset$, albo $L(H) \neq \emptyset$.

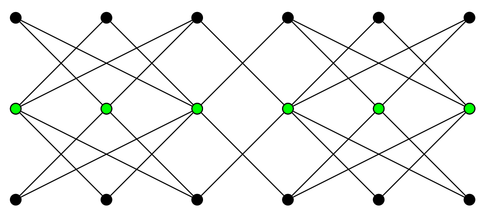
Bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że graf G ma liście, natomiast graf H nie ma liści. Jeżeli $G \cong P_2$, gdzie $V(G) = \{x_1, x_2\}$, to otrzymujemy, że zbiór $J = \{x_1\} \times V(H)$ jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \times H$. Przypuśćmy, że $G \ncong P_2$. Niech M będzie maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G zawierającym wszystkie liście. Dowodząc analogicznie jak w poprzednim przypadku otrzymujemy, że zbiór $J = M \times V(H)$ jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu G.

3. $L(G) \neq \emptyset$ i $L(H) \neq \emptyset$.

Co najmniej jeden z grafów jest różny od P_2, bez straty dla ogólności rozważań załóżmy, że jest to graf H. Niech M będzie maksymalnym zbiorem niezależnym grafu H

zawierającym wszystkie liście. Zbiór M jest również zbiorem dominującym grafu H. Pokażemy, że zbiór $J = V(G) \times M$ jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \times H$. Z definicji produktu tensorowego oraz z niezależności zbioru M wynika, że J jest zbiorem niezależnym. Niech $v = (x_i, y_j) \in V(G \times H) \setminus J$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Ponieważ M jest dominujący, więc $y_j \in V(H) \setminus M$ ma sąsiada $y_k \in M$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Ponieważ G jest spójny, więc x_i ma co najmniej jednego sąsiada w grafie G, oznaczmy go przez x_p, $1 \leqslant p \leqslant n$, $p \neq i$. Stąd $v = (x_i, y_j)$ jest sąsiedni z wierzchołkiem $(x_p, y_k) \in J$. Wystarczy pokazać, że istnieje wierzchołek $w \in J$ taki, że $d_{G\times H}(v, w) \leqslant 2$. Wiemy, że $d_H(y_j) \geqslant 2$. Niech y_l, $l \neq k$, $1 \leqslant l \leqslant m$, będzie sąsiadem wierzchołka y_j. Jeżeli $y_l \in M$, to wierzchołek $v = (x_i, y_j)$ jest sąsiedni z wierzchołkiem $(x_p, y_l) \in J$ i jest $(1, 1)$-dominowany przez J. Jeżeli $y_l \notin M$, to istnieje $y_r \in M$, $1 \leqslant r \leqslant m$ taki, że $y_l y_r \in E(H)$. Wtedy istnieje droga $v - (x_p, y_l) - (x_i, y_r)$, gdzie $(x_i, y_r) \in J$. Zatem v jest $(1, 2)$-dominowany przez zbiór J, co kończy dowód. ■

Na rysunku 5.5 został zilustrowany produkt tensorowy grafów $(P_2 \circ P_2) \times P_3$ wraz z zaznaczonym na zielono niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym.



Rysunek 5.5: Niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący w grafie $(P_2 \circ P_2) \times P_3$

Rozważmy silny produkt dwóch grafów spójnych. Podamy warunek konieczny i wystarczający, aby w tym produkcie istniał niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.

Twierdzenie 5.7. (A. Michalski [45]) *Niech G i H będą grafami spójnymi mającymi co najmniej dwa wierzchołki. Graf $G \boxtimes H$ ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) G oraz H mają niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący lub

(ii) G lub H ma niezależny zbiór $(1, 1)$-dominujący.

Dowód. Najpierw udowodnimy warunek wystarczający. Załóżmy, że zachodzi co najmniej jeden z warunków (i) lub (ii). Pokażemy, że graf $G \boxtimes H$ ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący. Rozważmy dwa przypadki.

1. Grafy G i H mają niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.

Oznaczmy przez J_G dowolny niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący grafu G oraz przez J_H dowolny niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący grafu H. Pokażemy, że zbiór $J = J_G \times J_H$

jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \boxtimes H$. Z niezależności zbiorów J_G, J_H oraz z definicji silnego produktu grafów wynika, że J jest zbiorem niezależnym. Wystarczy pokazać, że J jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \boxtimes H$. Zbiór wierzchołków grafu $G \boxtimes H$ możemy zapisać jako sumę rozłącznych zbiorów postaci $V(G \boxtimes H) = J \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$, gdzie $V_1 = (V(G) \setminus J_G) \times J_H$, $V_2 = J_G \times (V(H) \setminus J_H)$ oraz $V_3 = (V(G) \setminus J_G) \times (V(H) \setminus J_H)$. Należy pokazać, że każdy wierzchołek ze zbioru $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ jest $(1, 2)$-dominowany przez J. Ponieważ J_G jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym, więc z definicji silnego produktu wynika, że każdy wierzchołek postaci $(x, y) \in V_1$ jest $(1, 2)$-dominowany przez J. Analogicznie, wszystkie wierzchołki ze zbioru V_2 również są $(1, 2)$-dominowane przez J. Niech $(x_i, y_j) \in V_3$. Zbiory J_G oraz J_H są zbiorami $(1, 2)$-dominującymi. Wynika stąd, że x_i ma sąsiada $x_k \in J_G$ oraz istnieje wierzchołek $x_u \in J_G$, $x_u \neq x_k$ taki, że $d_G(x_i, x_u) \leqslant 2$. Podobnie, y_j ma sąsiada $y_l \in J_H$ oraz istnieje wierzchołek $y_p \in J_H$, $y_p \neq y_l$ taki, że $d_H(y_j, y_p) \leqslant 2$. Zatem z definicji silnego produktu otrzymujemy, że wierzchołek (x_i, y_j) jest sąsiedni z wierzchołkiem $(x_k, y_l) \in J$ oraz $d_{G\boxtimes H}((x_i, y_j), (x_u, y_p)) \leqslant 2$, gdzie $(x_u, y_p) \in J$. To oznacza, że J jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \boxtimes H$.

2. G lub H ma niezależny zbiór $(1, 1)$-dominujący.

Z przemienności silnego produktu bez straty dla ogólności rozważań możemy założyć, że graf G ma niezależny zbiór $(1, 1)$-dominujący J_G. Niech M będzie dowolnym maksymalnym zbiorem niezależnym grafu H. Pokażemy, że zbiór $J = J_G \times M$ jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \boxtimes H$. Z niezależności zbiorów J_G oraz M a także z definicji silnego produktu wynika, że J jest zbiorem niezależnym. Wykażemy, że J jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu $G \boxtimes H$. Analogicznie jak w poprzednim przypadku, zbiór wierzchołków grafu $G \boxtimes H$ zapiszmy w postaci sumy rozłącznych zbiorów postaci $V(G \boxtimes H) = J \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$, gdzie $V_1 = (V(G) \setminus J_G) \times M$, $V_2 = (V(G) \setminus J_G) \times (V(H) \setminus M)$, $V_3 = J_G \times (V(H) \setminus M)$. Niech $x_i \in V(G) \setminus J_G$. Ponieważ J_G jest zbiorem $(1, 1)$-dominującym, więc dla każdego $y_l \in M$ wierzchołek (x_i, y_l) jest $(1, 1)$-dominowany przez J. Stąd wszystkie wierzchołki ze zbioru V_1 są $(1, 2)$-dominowane przez J. Pokażemy teraz, że wierzchołki ze zbioru V_2 są $(1, 2)$-dominowane przez J. Zbiór J_G jest $(1, 1)$-dominujący, więc dla każdego $x_i \in V(G) \setminus J_G$ istnieją wierzchołki $x_k, x_n \in J_G$, $x_k \neq x_n$ takie, że $x_i x_k, x_i x_n \in E(G)$. Ponieważ M jest maksymalnym zbiorem niezależnym, więc każdy wierzchołek $y_j \in V(H) \setminus M$ ma sąsiada $y_l \in M$. Z definicji silnego produktu otrzymujemy, że każdy wierzchołek $(x_i, y_j) \in V_2$ ma dwóch sąsiadów $(x_k, y_l), (x_n, y_l) \in J$, więc jest $(1, 2)$-dominowany przez J. Pozostaje pokazać, że wierzchołki ze zbioru V_3 są $(1, 2)$-dominowane przez J. Niech $x_k \in J_G$ oraz $y_l \in (V(H) \setminus M)$. Ponieważ M jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu H, więc wierzchołek $(x_k, y_j) \in V_3$ jest dominowany przez J. Z założenia J_G jest zbiorem

$(1, 1)$-dominującym, więc dla każdego $x_k \in J_G$ istnieje wierzchołek $x_t \in J_G$, $x_t \neq x_k$ taki, że $d_G(x_k, x_t) = 2$. Stąd dla każdego wierzchołka $(x_k, y_j) \in V_3$ znajdziemy wierzchołek $(x_t, y_l) \in J$ taki, że $d_{G \boxtimes H}((x_k, y_j), (x_t, y_l)) = 2$. To oznacza, że wierzchołki ze zbioru V_3 są $(1, 2)$-dominowane przez J. Z powyższych przypadków wynika, że w grafie $G \boxtimes H$ istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący J.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że w grafie $G \boxtimes H$ istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący J. Pokażemy, że zachodzi warunek *(i)* lub *(ii)*. Niech $J_G = \{u \in V(G) \colon (u, v) \in J\}$, $J'_G = V(G) \setminus J_G$, $J_H = \{v \in V(H) \colon (u, v) \in J\}$, $J'_H = V(H) \setminus J_H$. Zbiór $V(G \boxtimes H)$ możemy podzielić na cztery rozłączne podzbiory w następujący sposób: $V(G \boxtimes H) = J \cup (J_G \times J'_H) \cup (J'_G \times J_H) \cup (J'_G \times J'_H)$. Ponieważ J jest zbiorem niezależnym, więc z definicji grafu $G \boxtimes H$ wynika, że zbiory J_G oraz J_H też są niezależne. Pokażemy, że są to maksymalne zbiory niezależne. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że J_G jest zbiorem niezależnym grafu G, ale nie jest maksymalnym zbiorem niezależnym. To oznacza, że istnieje wierzchołek $x' \in J'_G$ taki, że $J_G \cup \{x'\}$ jest zbiorem niezależnym. Wtedy wierzchołek $(x', y) \in V(G \boxtimes H)$, gdzie $y \in V(H)$, nie jest dominowany przez J, co jest sprzeczne z założeniem, że J jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym. Zatem J_G jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G. Analogicznie wykazujemy, że J_H jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu H.

Rozważmy cztery, niekoniecznie rozłączne przypadki.

(a) Jeżeli każdy wierzchołek $(x', y) \in J'_G \times V(H)$ jest $(1, 1)$-dominowany przez J, to istnieją dwa wierzchołki $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in J$ sąsiednie z (x', y). To oznacza, że $x_1, x_2 \in J_G$ oraz $x_1x', x_2x' \in E(G)$. Zatem J_G jest niezależnym zbiorem $(1, 1)$-dominującym w G.

(b) Jeżeli każdy wierzchołek $(x, y') \in V(G) \times J'_H$ jest $(1, 1)$-dominowany przez J, to analogicznie jak w (a) pokazujemy, że zbiór J_H jest niezależnym zbiorem $(1, 1)$-dominującym w H.

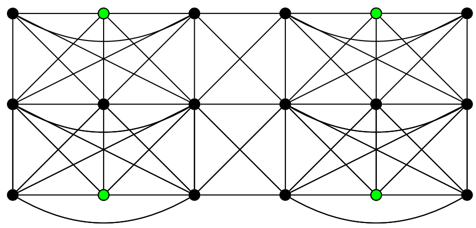
(c) Jeżeli istnieje wierzchołek $(x', y) \in J'_G \times V(H)$, który nie jest $(1, 1)$-dominowany przez J, to $N_{G \boxtimes H}(x', y) \cap J = \{(u, v)\}$ oraz $N_G(x') \cap J_G = \{u\}$. Aby wierzchołek $(u, y') \in J_G \times J'_H$ był $(1, 2)$-dominowany, musi zachodzić warunek $|N^2_H(y') \cap J_H| \geqslant 2$. Ponieważ J_H jest maksymalnym zbiorem niezależnym, więc jest zbiorem dominującym. Zatem J_H jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym w H.

(d) Jeżeli istnieje wierzchołek $(x, y') \in V(G) \times J'_H$, który nie jest $(1, 1)$-dominowany przez J, to analogicznie jak w (c) pokazujemy, że zbiór J_G jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym w G.

Zauważmy, że przypadki (a) i (c) oraz (b) i (d) wzajemnie się wykluczają, więc mamy cztery możliwości. Jeżeli zachodzą przypadki (a) i (b), to w grafach G i H istnieje niezależny zbiór $(1, 1)$-dominujący. Jeżeli zachodzą przypadki (a) i (d), to w grafie

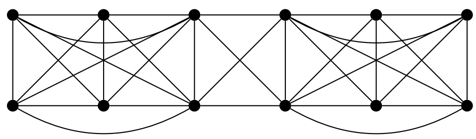
G istnieje niezależny zbiór $(1,1)$-dominujący. Jeżeli zachodzą przypadki (b) i (c), to w grafie H istnieje niezależny zbiór $(1,1)$-dominujący. Jeżeli zachodzą przypadki (c) i (d), to w grafach G i H istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Alternatywa powyższych czterech możliwości jest równoważna temu, że w grafie G lub w grafie H istnieje niezależny zbiór $(1,1)$-dominujący lub w obydwu grafach G i H istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Zatem spełniony jest warunek *(i)* lub *(ii)*, co kończy dowód. ■

Na rysunku 5.6 przedstawiony został silny produkt grafów $(P_2 \circ P_2) \boxtimes P_3$. Wierzchołki zaznaczone kolorem zielonym tworzą niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.



Rysunek 5.6: Niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący w grafie $(P_2 \circ P_2) \boxtimes P_3$

Natomiast rysunek 5.7 przedstawia graf $(P_2 \circ P_2) \boxtimes P_2$, w którym nie istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominującym. Wynika to z faktu, że nie jest spełniony ani warunek *(i)*, ani *(ii)* z twierdzenia 5.7.



Rysunek 5.7: Graf $(P_2 \circ P_2) \boxtimes P_2$

5.3 Niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące w G-złączeniu grafów

W tym podrozdziale przedstawimy warunki konieczne i wystarczające na to, aby w G-złączeniu grafów istniał niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. W literaturze G-złączenie znane jest także jako uogólniony produkt leksykograficzny. Produkt ten rozważany był w odniesieniu do niezależności lub dominowania między innymi w pracach [1, 18, 56, 58].

Dla podzbioru $S \subseteq V(G[\mathcal{H}])$ definiujemy jego rzuty na grafy składowe G-złączenia. *Rzutem zbioru S na graf G* nazywamy zbiór $\pi_G(S) = \{v \in V(G) \colon \exists_{u \in V(H_v)} (v,u) \in S\}$. Dla każdego $v \in V(G)$ *rzutem zbioru S na graf H_v* nazywamy zbiór $\pi_{H_v}(S) = \{u \in V(H_v) \colon (v,u) \in S\}$.

W tym podrozdziale podamy pełną charakteryzację G-złączenia mającego niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Zaczniemy od przypomnienia znanych w literaturze charakteryzacji zbiorów niezależnych i dominujących w G-złączeniu, które będą wykorzystywane w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 5.8. (W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch [57]) *Podzbiór $S \subset V(G[\mathcal{H}])$ jest zbiorem niezależnym w grafie $G[\mathcal{H}]$ wtedy i tylko wtedy gdy rzut $\pi_G(S)$ jest zbiorem niezależnym w grafie G oraz dla każdego $v \in \pi_G(S)$ zbiór $\pi_{H_v}(S)$ jest zbiorem niezależnym w grafie H_v.*

Twierdzenie 5.9. (J. Topp [58]) *Podzbiór $S \subset V(G[\mathcal{H}])$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie $G[\mathcal{H}]$ wtedy i tylko wtedy gdy rzut $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie G oraz dla każdego $v \in \pi_G(S)$ rzut $\pi_{H_v}(S)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie H_v.*

Twierdzenie 5.10. (W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch [57]) *Podzbiór $D \subseteq V(G[\mathcal{H}])$ jest zbiorem dominującym w grafie $G[\mathcal{H}]$ wtedy i tylko wtedy gdy*

(i) rzut $\pi_G(D)$ jest zbiorem dominującym w grafie G oraz

(ii) jeżeli $v \in \pi_G(D)$ oraz $N(v) \cap \pi_G(D) = \emptyset$, to zbiór $\pi_{H_v}(D)$ jest zbiorem dominującym grafu H_v.

Kolejne twierdzenie podaje pełną charakteryzację zbiorów $(1,2)$-dominujących w G-złączeniu.

Twierdzenie 5.11. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Podzbiór $D \subseteq V(G[\mathcal{H}])$ jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) rzut $\pi_G(D)$ jest zbiorem dominującym w grafie G oraz

(ii) jeżeli $v \in \pi_G(D)$ oraz $N(v) \cap \pi_G(D) = \emptyset$, wtedy rzut $\pi_{H_v}(D)$ jest zbiorem dominującym grafu H_v oraz

(iii) jeżeli istnieje taki wierzchołek $v_0 \in \pi_G(D)$, że $|\pi_{H_{v_0}}(D)| = 1$, to

(A) $H_{v_0} \cong N_1$ lub istnieje taki wierzchołek $v \in \pi_G(D)$, $v \neq v_0$, że $d_G(v, v_0) \leqslant 2$ oraz

(B) każdy wierzchołek grafu G dominowany przez v_0 jest $(1,2)$-dominowany przez $\pi_G(D)$.

Dowód. Niech $D \subseteq V(G[\mathcal{H}])$. Załóżmy, że spełnione są warunki *(i), (ii), (iii)*. Pokażemy, że zbiór D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$. Niech $(a,b) \in V(G[\mathcal{H}]) \setminus D$. Rozważmy dwa przypadki.

1. $a \notin \pi_G(D)$.
Wtedy z warunku *(i)* wiemy, że musi istnieć wierzchołek $a' \in \pi_G(D)$ taki, że $aa' \in E(G)$. Oczywiście $|\pi_{H_{a'}}(D)| > 0$. Jeżeli $|\pi_{H_{a'}}(D)| \geqslant 2$, wtedy z definicji G-złączenia istnieją co najmniej dwa wierzchołki (a', y_1), (a', y_2) należące do zbioru D oraz sąsiednie z wierzchołkiem (a, b). Załóżmy zatem, że zbiór $\pi_{H_{a'}}(D) = \{b'\}$. Wtedy prawdziwy jest poprzednik implikacji z warunku *(iii)* dla $v_0 = a'$. Stąd musi być spełniony warunek *(B)*, z którego wynika, że wierzchołek a jest $(1,2)$-dominowany w grafie G przez zbiór $\pi_G(D)$. Zatem istnieje wierzchołek $a'' \in \pi_G(D)$, $a'' \neq a'$ taki, że $d_G(a, a'') \leqslant 2$. To oznacza, że wierzchołek (a, b) jest dominowany przez $(a', b') \in D$ oraz istnieje co najmniej jeden wierzchołek $(a'', b'') \in D$ taki, że $d_{G[\mathcal{H}]}\Big((a'', b''), (a, b)\Big) \leqslant 2$, co implikuje, że (a, b) jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór D.

2. $a \in \pi_G(D)$.
Wtedy wierzchołek b nie należy do zbioru π_{H_a}, w przeciwnym wypadku $(a, b) \in D$, co jest sprzeczne z założeniem, że $(a, b) \in V(G[\mathcal{H}]) \setminus D$. Zatem istnieje wierzchołek $b_0 \in \pi_{H_a}(D)$, $b_0 \neq b$ taki, że $(a, b_0) \in D$. Rozważmy następujące możliwości.

2.1. Istnieje wierzchołek $a' \in \pi_G(D)$ taki, że $aa' \in E(G)$.
Wtedy (a, b) jest dominowany przez pewien wierzchołek $(a', b') \in \{a'\} \times \pi_{H_{a'}}(D) \subseteq D$. Ponadto istnieje droga $(a, b) - (a', b') - (a, b_0)$, zatem (a, b) jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór D.

2.2. Dla każdego $v \in \pi_G(D)$ nie istnieje krawędź av w grafie G.
Z warunku *(ii)* wiemy, że $\pi_{H_a}(D)$ jest zbiorem dominującym w grafie H_a, zatem wierzchołek b ma sąsiada $b^* \in \pi_{H_a}(D)$, więc wierzchołek (a, b) jest dominowany przez $(a, b^*) \in D$. Jeżeli $|\pi_{H_a}(D)| \geqslant 2$, wtedy z definicji grafu $G[\mathcal{H}]$ wierzchołek (a, b) jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór $\{a\} \times \pi_{H_a}(D) \subseteq D$. Przypuśćmy, że $|\pi_{H_a}(D)| = 1$. Poprzednik implikacji z warunku *(iii)* jest prawdziwy dla $v_0 = a$, stąd musi zachodzić warunek *(A)*. Ponieważ $H_a \ncong N_1$, więc istnieje wierzchołek $a'' \in \pi_G(D)$ taki, że $d_G(a, a'') = 2$. To oznacza, że istnieje wierzchołek postaci $(a'', b'') \in \{a''\} \times \pi_{H_{a''}}(D) \subseteq D$ w odległości 2 od (a, b).

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie $G[\mathcal{H}]$. Pokażemy, że zachodzą warunki *(i), (ii), (iii)*.

Z definicji grafu $G[\mathcal{H}]$ wynika, że $\pi_G(D)$ jest zbiorem dominującym grafu G, więc zachodzi warunek *(i)*.

Załóżmy, że istnieje $v \in \pi_G(D)$ taki, że dla każdego $u \in \pi_G(D)$ wierzchołki u i v nie są sąsiednie. Pokażemy, że $\pi_{H_v}(D)$ jest zbiorem dominującym grafu H_v. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\pi_{H_v}(D)$ nie jest dominujący, czyli istnieje wierzchołek $b'' \in$

$V(H_v) \setminus \pi_{H_v}(D)$, który nie ma żadnego sąsiada w zbiorze $\pi_{H_v}(D)$. Zatem istnieje wierzchołek $(v, b'') \in V(G[\mathcal{H}]) \setminus D$, który nie ma sąsiada w zbiorze D, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$. Stąd wnioskujemy, że zachodzi warunek *(ii)*.

Załóżmy, że istnieje $v_0 \in \pi_G(D)$ taki, że zbiór $\pi_{H_{v_0}}(D) = \{u_0\}$. Pokażemy, że spełnione są warunki *(A)* oraz *(B)*.

Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że warunek *(A)* nie jest spełniony. To oznacza, że graf H_{v_0} ma co najmniej dwa wierzchołki oraz dla wszystkich $v \in \pi_G(D)$, $v \neq v_0$, prawdziwa jest nierówność $d_G(v, v_0) > 2$. Ponieważ graf H_{v_0} ma co najmniej dwa wierzchołki, więc istnieje wierzchołek $u' \in V(H_{v_0}) \setminus \pi_{H_{v_0}}(D)$, czyli w grafie $G[\mathcal{H}]$ istnieje wierzchołek $(v_0, u') \notin D$. Ponieważ wszystkie wierzchołki ze zbioru $\pi_G(D)$ są w odległości większej niż dwa od v_0, więc jedynym wierzchołkiem w zbiorze D będącym w odległości co najwyżej dwa od wierzchołka (v_0, u') jest wierzchołek (v_0, u_0). Przeczy to założeniu, że D jest zbiorem $(1,2)$-dominującym w $G[\mathcal{H}]$, zatem warunek *(A)* musi być spełniony.

Załóżmy nie wprost, że warunek *(B)* nie zachodzi. Zatem istnieje wierzchołek $v' \in V(G) \setminus \pi_G(D)$, który jest dominowany przez v_0 i dla każdego wierzchołka $v'' \in \pi_G(D)$, $v'' \neq v_0$, zachodzi warunek $d_G(v', v'') > 2$. Stąd istnieje wierzchołek $(v', u'') \in (\{v'\} \times V(H_{v'})) \setminus D$, który jest dominowany przez (v_0, u_0), ale nie jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór D, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem warunek *(B)* jest spełniony, co kończy dowód. ∎

Przy pomocy powyższych twierdzeń możemy w pełni scharakteryzować niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące w G-złączeniu, a następnie podać warunek konieczny i wystarczający, jaki muszą spełniać graf G oraz grafy z rodziny $\mathcal{H}$, aby graf $G[\mathcal{H}]$ posiadał niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.

Twierdzenie 5.12. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Podzbiór $J \subset V(G[\mathcal{H}])$ jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *rzut $\pi_G(J)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G oraz dla każdego $v \in \pi_G(J)$ rzut $\pi_{H_v}(J)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu H_v oraz*

(ii) *jeżeli istnieje taki wierzchołek $v_0 \in \pi_G(J)$, że $|\pi_{H_{v_0}}(J)| = 1$, to*

  (A) *$H_{v_0} \cong N_1$ lub istnieje taki wierzchołek $v \in \pi_{H_v}(D)$, $v \neq v_0$, że $d_G(v, v_0) = 2$ oraz*

  (B) *każdy wierzchołek grafu G dominowany przez v_0 jest $(1,2)$-dominowany przez $\pi_G(J)$.*

Dowód. Niech $J \subset V(G[\mathcal{H}])$ i załóżmy, że warunki *(i)*, *(ii)* są spełnione. Pokażemy, że J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Z warunku *(i)* oraz twierdzenia 5.9

wnioskujemy, że J jest zbiorem niezależnym. Ponadto, prawdziwość warunku *(i)* oznacza, że spełnione są warunki *(i), (ii)* z twierdzenia 5.11, natomiast prawdziwość warunku *(ii)* implikuje prawdziwość warunku *(iii)* z twierdzenia 5.11. Zatem z twierdzenia 5.11 otrzymujemy, że J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym.

Załóżmy, że J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$. Pokażemy, że spełnione są warunki *(i)* i *(ii)*. Z twierdzenia 5.3 wynika, że J jest maksymalnym zbiorem niezależnym i z twierdzenia 5.9 wnioskujemy, że warunek *(i)* jest spełniony. Aby udowodnić warunek *(ii)* załóżmy, że istnieje $v_0 \in \pi_G(J)$takie, że $|\pi_{H_{v_0}}(J)| = 1$. Wtedy z twierdzenia 5.11 spełnione są warunki *(A)* i *(B)*. Zatem implikacja z warunku *(ii)* jest prawdziwa, co kończy dowód. ■

Twierdzenie 5.13. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *W grafie $G[\mathcal{H}]$ istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie G istnieje maksymalny zbiór niezależny $S \subset V(G)$ taki, że*

(i) dla wszystkich $v \in S$ graf H_v nie jest grafem pełnym albo

(ii) jeżeli istnieje $v \in S$ takie, że H_v jest grafem pełnym, to

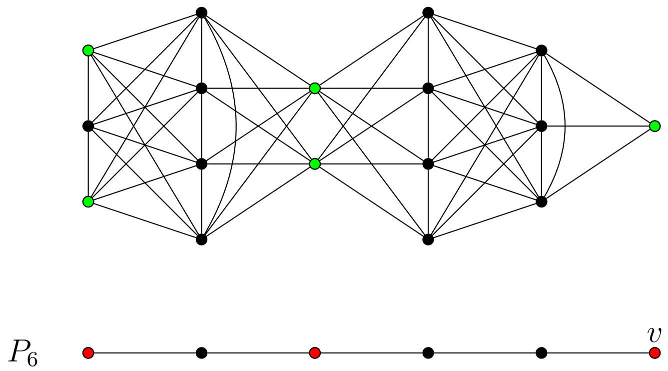
  (A) $H_v \cong N_1$ lub istnieje wierzchołek $w \in S$ taki, że $d_G(v,w) = 2$ oraz

  (B) każdy wierzchołek grafu G dominowany przez v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S.

Dowód. Załóżmy, że w grafie G istnieje maksymalny zbiór niezależny S spełniający jeden z warunków *(i)* albo *(ii)*. Dla każdego $v \in S$ wybierzmy dowolny największy zbiór niezależny grafu H_v i oznaczmy go przez S_v. Rozważmy zbiór $S^* = \bigcup_{v\in S}(\{v\} \times S_v)$. Jeżeli dla każdego $v \in S$ graf H_v nie jest grafem pełnym, to zbiory S_v zawierają co najmniej dwa wierzchołki, więc z twierdzenia 5.12 zbiór S^* jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$. Jeśli istnieje $v_0 \in S$ takie, że graf H_{v_0} jest grafem pełnym, to $|S_{v_0}| = 1$ i z założenia spełnione są warunki *(A), (B)*. Zatem spełniony jest warunek *(ii)* z twierdzenia 5.12, więc S^* jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G[\mathcal{H}]$.

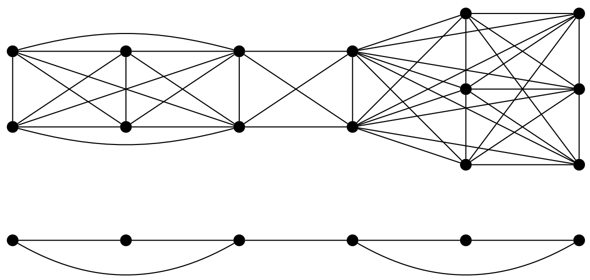
Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że w grafie $G[\mathcal{H}]$ istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący i oznaczmy go przez S^{**}. Z twierdzenia 5.12 zbiór $\pi_G(S^{**})$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G. Jeśli nie istnieje wierzchołek $v \in \pi_G(S^{**})$ taki, że H_v jest grafem pełnym, to otrzymujemy tezę twierdzenia. Jeżeli taki wierzchołek istnieje, to z twierdzenia 5.12 wynika, że spełniony jest warunek *(ii)*, co kończy dowód. ■

Aby zilustrować twierdzenie 5.13 rozważmy graf $P_6[\{P_3, C_4, N_2, P_4, K_3, N_1\}]$ przedstawiony na rysunku 5.8. W grafie P_6 na czerwono został zaznaczony maksymalny zbiór niezależny S. Ponieważ w grafie G istnieje wierzchołek $v \in S$ taki, że graf H_v jest grafem pełnym, $H_v \cong N_1$ oraz jedyny wierzchołek dominowany przez v jest $(1, 2)$-dominowany przez zbiór S, więc spełniony jest warunek *(ii)* twierdzenia 5.13. W tym grafie istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący zaznaczony na rysunku kolorem zielonym.



Rysunek 5.8: Niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący w grafie $P_6[\{P_3, C_4, N_2, P_4, K_3, N_1\}]$

Rysunek 5.9 przedstawia graf $(P_2 \circ P_2)[\{P_2, P_2, P_2, P_2, P_3, P_3\}]$, w którym nie istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący. Każdy maksymalny zbiór S w grafie $P_2 \circ P_2$ zawiera wierzchołek $v \in S$ taki, że graf H_v jest grafem pełnym, zatem nie jest spełniony warunek *(i)* z twierdzenia 5.13. Ponadto można zauważyć, że dla każdego maksymalnego zbioru niezależnego w grafie $P_2 \circ P_2$ nie jest spełniony warunek *(ii)* z twierdzenia 5.13. Stąd w przedstawionym grafie nie istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.



Rysunek 5.9: Graf $(P_2 \circ P_2)[\{P_2, P_2, P_2, P_2, P_3, P_3\}]$

Zauważmy, że brak grafów pełnych w rodzinie $\mathcal{H}$ jest warunkiem wystarczającym do istnienia niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących w G-złączeniu. Nie jest to jednak warunek konieczny, co potwierdza przykład grafu $P_6[\{P_3, C_4, N_2, P_4, K_3, N_1\}]$ przedstawionego na rys. 5.8. Pomimo że rodzina $\mathcal{H}$ zawiera grafy pełne K_3 i N_1, to w grafie tym istnieje niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.

Wniosek 5.14. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Jeżeli rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafu pełnego, to graf $G[\mathcal{H}]$ ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.*

Ponieważ G-złączenie jest szeroką operacją, z powyższych twierdzeń otrzymujemy wnioski dotyczące istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w złączeniu grafów, kompozycji grafów oraz duplikacji podzbioru wierzchołków w grafie.

Wniosek 5.15. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Niech H_1, H_2 będą dowolnymi grafami. Złączenie $H_1 + H_2$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy co najmniej jeden z grafów H_1, H_2 nie jest grafem pełnym.*

Dowód. Zauważmy, że złączenie $H_1 + H_2$ jest izomorficzne z grafem $G[\mathcal{H}]$, gdzie $G \cong P_2$. Niech $V(G) = \{v, u\}$ oraz $\mathcal{H} = \{H_u, H_v\}$. Wystarczy wykazać powyższy wniosek dla grafu $P_2[\{H_u, H_v\}]$.

Załóżmy, że co najmniej jeden z grafów H_v, H_u nie jest grafem pełnym, bez straty ogólności przyjmijmy, że jest to graf H_v. Wtedy zbiór $S = \{v\}$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu P_2. Z warunku *(i)* twierdzenia 5.13 w grafie $P_2[\{H_u, H_v\}]$ istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że graf $H_v + H_u$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Przypuśćmy nie wprost, że obydwa grafy H_v, H_u są pełne. Wtedy graf $H_v + H_u$ także jest pełny, co jest sprzeczne z założeniem, że posiada niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Stąd co najmniej jeden z grafów H_u, H_v nie jest grafem pełnym. ■

Wniosek 5.16. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Niech G, H będą grafami o co najmniej dwóch wierzchołkach i niech G będzie spójny. Kompozycja grafów $G[H]$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy*

(i) *H nie jest grafem pełnym lub*

(ii) *H jest grafem pełnym oraz w grafie G istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący J taki, że dla każdego $v \in J$ istnieje taki wierzchołek $u \in J$, że $d_G(u,v) = 2$.*

Dowód. Kompozycja $G[H]$ jest izomorficzna z grafem $G[\mathcal{H}]$, jeżeli wszystkie grafy z rodziny $\mathcal{H}$ są izomorficzne z grafem H.

Załóżmy, że zachodzi jeden z warunków *(i)* lub *(ii)*. Jeżeli H nie jest grafem pełnym, wtedy z wniosku 5.14 graf $G[H]$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Rozważmy przypadek, gdy H jest grafem pełnym oraz G posiada niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący J taki, że dla każdego wierzchołka $v \in J$ istnieje wierzchołek $u \in J$ taki, że $d_G(u,v) = 2$. Wtedy zbiór J jest maksymalnym zbiorem niezależnym spełniającym warunek *(ii)* twierdzenia 5.13, stąd w grafie $G[H]$ istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.

Załóżmy, że $G[H]$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący oraz przyjmijmy nie wprost, że nie zachodzi żaden z warunków *(i)*, *(ii)*. To oznacza, że H jest grafem pełnym oraz dla dowolnego niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego J grafu G istnieje wierzchołek

$v \in J$ taki, że dla wszystkich $u \in J, u \neq v$ zachodzi nierówność $d_G(u,v) \geqslant 3$. Zatem nie istnieje w grafie G maksymalny zbiór niezależny spełniający warunek *(i)* lub *(ii)* z twierdzenia 5.13. Stąd graf $G[H]$ nie ma niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego, co jest sprzeczne z założeniem. To oznacza, że musi być spełniony jeden z warunków *(i)* lub *(ii)* z dowodzonego wniosku. ■

Wniosek 5.17. (A. Michalski, I. Włoch [47]) *Niech $X \subseteq V(G)$, gdzie $X \neq \emptyset$. Duplikacja G^X ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje maksymalny zbiór niezależny $S \subset V(G)$ taki, że jeżeli istnieje wierzchołek $v \in V(G) \setminus S$ dominowany przez zbiór $S \setminus X$, to v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S.*

Dowód. Niech $X \subseteq V(G)$, gdzie $X \neq \emptyset$.

Załóżmy, że w grafie G istnieje maksymalny zbiór niezależny S taki, że jeżeli istnieje wierzchołek $v \in V(G) \setminus S$ dominowany przez zbiór $S \setminus X$, to v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S. Pokażemy, że G^X ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Jeżeli $S \subset X$, wtedy dla wszystkich $v \in S$ graf H_v nie jest grafem pełnym, więc z twierdzenia 5.13 graf G^X ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Przypuśćmy zatem, że $S \setminus X \neq \emptyset$ oraz $v \in S \setminus X$. Wówczas $H_v \cong N_1$ oraz, z założenia, każdy wierzchołek dominowany przez v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S. Ponieważ spełnione są warunki *(A)* oraz *(B)* z twierdzenia 5.13, więc wnioskujemy, że G^X ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że graf G^X ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Z twierdzenia 5.13 otrzymujemy, że istnieje maksymalny zbiór niezależny S grafu G taki, że jeśli $v \in S$ oraz $H_v \cong N_1$, to każdy wierzchołek dominowany przez v jest $(1,2)$-dominowany przez S. Ponieważ zbiór wszystkich wierzchołków $v \in S$ takich, że $H_v \cong N_1$ jest zbiorem $S \setminus X$, więc otrzymujemy tezę, co kończy dowód. ■

5.4 Niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące w uogólnionej koronie grafów

W tym podrozdziale zajmiemy się problemem istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w uogólnionej koronie grafów.

Korona dwóch grafów $G \circ H$ została wprowadzona przez R. Fruchta i F. Harary'ego w [23]. W kolejnych latach zdefiniowane zostały różne uogólnienia, w których były badane także zbiory dominujące i niezależne zbiory dominujące, między innymi w pracach [3, 19, 41, 64].

Zanim podamy warunek konieczny i wystarczający na istnienie niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w uogólnionej koronie, wprowadzimy niezbędne oznaczenia i udowodnimy wykorzystywane w dalszej części lematy.

Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 2$ oraz niech $\mathcal{H} = \{H_v : v \in V(G)\}$ będzie rodziną dowolnych grafów, indeksowaną wierzchołkami grafu G. Niech $V_0 = \{v \in V(G) : H_v = \emptyset\}$ oraz $V_K = \{v \in V(G) : H_v \cong K_n, n \geqslant 2\}$.

Lemat 5.18. (A. Michalski, P. Bednarz [46]) *Niech J będzie niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym w uogólnionej koronie $G \circ \mathcal{H}$. Jeżeli $v \in V(G) \setminus V_0$, to $v \notin J$.*

Dowód. Niech J będzie niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym. Dla dowodu nie wprost załóżmy, że dla istnieje wierzchołek $v \in V(G) \setminus V_0$ taki, że $v \in J$. Wtedy $V(H_v) \cap J = \emptyset$ oraz dla każdego $u \in V(G)$ takiego, że $uv \in E(G)$ zachodzi $u \notin J$. Zatem dla każdego wierzchołka $y \in V(H_v)$ otrzymujemy, że $N^2_{G\circ\mathcal{H}}[y] \cap J = \{v\}$, co oznacza, że y nie jest $(1,2)$-dominowany przez J, sprzeczność z założeniem, co kończy dowód. ■

Lemat 5.19. (A. Michalski, P. Bednarz [46]) *Niech graf $G \circ \mathcal{H}$ będzie grafem mającym niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Jeżeli $v \in V_K$, to istnieje wierzchołek $u \in V_0$ taki, że $uv \in E(G)$.*

Dowód. Załóżmy, że graf $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący J. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że istnieje wierzchołek $v \in V_K$ taki, że nie istnieje w zbiorze V_0 wierzchołek sąsiedni z v. Z lematu 5.18 wynika, że $v \notin J$ oraz nie istnieje sąsiad wierzchołka v w grafie G należący do J. To oznacza, że v jest dominowany przez pewien wierzchołek $y' \in V(H_v) \cap J$. Ponieważ graf H_v jest grafem pełnym, więc otrzymujemy, że $V(H_v) \cap J = \{y'\}$, w przeciwnym wypadku J nie jest zbiorem niezależnym. Z powyższych rozważań otrzymujemy, że dla wszystkich wierzchołków $y \in V(H_v) \setminus \{y'\}$ zachodzi warunek $N^2_{G\circ\mathcal{H}}[y] \cap J = \{y'\}$, co oznacza, że wierzchołki te nie są $(1,2)$-dominowane przez J. Jest to sprzeczne z założeniem, że J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym, co kończy dowód. ■

Najpierw rozważymy uogólnioną koronę dla przypadku, gdy rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafów pustych. Wtedy $V_0 = \emptyset$.

Twierdzenie 5.20. (A. Michalski, P. Bednarz [46]) *Niech G będzie dowolnym, spójnym, n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 2$ i niech $\mathcal{H}$ będzie rodziną grafów niezawierającą grafów pustych. Uogólniona korona $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafów pełnych K_t, $t \geqslant 2$.*

Dowód. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafów pełnych $K_t, t \geqslant 2$. To oznacza, że $V_K = \emptyset$. Pokażemy, że $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. W każdym grafie $H_v, v \in V(G)$ wybierzmy największy zbiór niezależny i oznaczmy go przez J_v. Niech $J = \bigcup_{v\in V(G)} J_v$. Pokażemy, że J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym grafu $G \circ \mathcal{H}$. Z definicji grafu $G \circ \mathcal{H}$ wiemy, że J jest zbiorem niezależnym, zatem wystarczy

pokazać, że J jest $(1,2)$-dominujący. Niech $x \in V(G \circ \mathcal{H}) \setminus J$. Rozważmy następujące przypadki.
1. $x \in V(G)$.
Jeżeli $|J_x| \geqslant 2$, to x jest $(1,1)$-dominowany przez J_x. Jeżeli $|J_x| = 1$, to x jest dominowany przez J_x. Ponieważ G jest grafem spójnym mającym co najmniej dwa wierzchołki, to istnieje wierzchołek $u \in V(G)$ taki, że $xu \in E(G)$. To oznacza, że istnieje droga $x - u - J_u$ długości dwa, czyli x jest $(1,2)$-dominowany przez J.
2. $x \in V(H_{v'})$ dla pewnego $v' \in V(G)$.
Ponieważ rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafów pełnych K_t, $t \geqslant 2$, więc $H_{v'}$ jest grafem jednowierzchołkowym albo w grafie $H_{v'}$ istnieją dwa wierzchołki niesąsiednie. Jeżeli $H_{v'} \cong N_1$, to $V(H_{v'}) = J_{v'}$, sprzeczność z faktem, że $x \in V(H_{v'})$. W przeciwnym wypadku największy zbiór niezależny $J_{v'}$ zawiera co najmniej dwa wierzchołki, oznaczmy je przez y_1, y_2. Ponieważ zbiór $J_{v'}$ jest największym zbiorem niezależnym grafu $H_{v'}$, więc jest też zbiorem dominującym grafu $H_{v'}$. To oznacza, że x jest dominowany przez co najmniej jeden z nich, powiedzmy y_1. Z definicji uogólnionej korony wiemy, że istnieje droga $x - v' - y_2$. Stąd J jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym w grafie $G \circ \mathcal{H}$.

Aby udowodnić warunek konieczny, załóżmy, że graf $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący J i załóżmy nie wprost, że $V_K \neq \emptyset$. Wtedy z lematu 5.19 wnioskujemy, że $V_0 \neq \emptyset$, co jest sprzeczne z założeniem, że $V_0 = \emptyset$. Zatem rodzina $\mathcal{H}$ nie zawiera grafów pełnych K_t, $t \geqslant 2$, czyli $V_K = \emptyset$, co kończy dowód. ■

Z twierdzenia 5.20 otrzymujemy warunek konieczny i wystarczający na istnienie niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego w koronie dwóch grafów.

Wniosek 5.21. (A. Michalski [45]) *Niech G będzie dowolnym, spójnym grafem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 2$ oraz niech H będzie grafem niepustym. Korona $G \circ H$ posiada niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy $H \ncong K_t, t \geqslant 2$.*

Kolejne twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający na istnienie niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w uogólnionej koronie grafów przy założeniu, że rodzina $\mathcal{H}$ zawiera grafy puste.

Twierdzenie 5.22. (A. Michalski, P. Bednarz [46]) *Niech G będzie dowolnym, spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 2$ i niech $\mathcal{H}$ będzie rodziną dowolnych grafów zawierającą co najmniej jeden graf pusty. Graf $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy podgraf indukowany $G[V_0]$ ma maksymalny zbiór niezależny S taki, że spełnione są następujące warunki:*

(i) jeżeli $v \in V_K$, to istnieje $u \in S$ takie, że $uv \in E(G)$ oraz

(ii) dla każdego wierzchołka $v' \in V_0 \setminus S$ spełniony jest co najmniej jeden z poniższych warunków:

(A) istnieje wierzchołek $w \in V(G) \setminus V_0$ taki, że $v'w \in E(G)$ lub

(B) wierzchołek v' jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S.

Dowód. Aby udowodnić warunek wystarczający załóżmy, że $V_0 \neq \emptyset$ oraz podgraf indukowany $G[V_0]$ ma maksymalny zbiór niezależny S taki, że spełnione są warunki *(i)* oraz *(ii)*. Dla każdego $v \in V(G)$ takiego, że $v \notin V_0$ wybierzmy w grafie H_v największy zbiór niezależny i oznaczmy go przez J_v. Niech $J = (\bigcup_{v \notin V_0} J_v) \cup S$. Z definicji grafu $G \circ \mathcal{H}$ oraz konstrukcji zbioru J wynika, że J jest niezależny. Pokażemy, że J jest $(1,2)$-dominujący. Niech $v \in V(G)$. Możliwe są cztery przypadki.

1. Jeżeli v jest taki, że graf H_v ma co najmniej dwa wierzchołki i nie jest grafem pełnym, to wtedy $|J_v| \geqslant 2$, zatem v jest $(1,1)$-dominowany przez J_v. Ponadto dowolny $y \in V(H_v) \setminus J_v$ jest dominowany przez zbiór J_v, ponieważ J_v jest największym zbiorem niezależnym. Z definicji uogólnionej korony wiemy, że dla wszystkich wierzchołków $y \in V(H_v) \setminus J_v$ zachodzi $|N^2_{G\circ\mathcal{H}}(y) \cap J_v| \geqslant 2$. Zatem w tym przypadku, wszystkie wierzchołki ze zbioru $\{v\} \cup V(H_v) \setminus J$ są $(1,2)$-dominowane przez zbiór J.

2. Jeżeli v jest taki, że $H_v \cong N_1$, to wtedy jedyny wierzchołek grafu H_v należy do zbioru J, więc v jest przez niego dominowany. Jeżeli v ma sąsiada $u \in V(G) \setminus V_0$, to $|N^2_{G\circ\mathcal{H}}(v) \cap J_u| \geqslant 1$, więc v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór J. Przypuśćmy zatem, że wszyscy sąsiedzi wierzchołka v w grafie G należą do zbioru V_0. Jeżeli jeden z tych sąsiadów należy do zbioru S, wtedy v jest $(1,1)$-dominowany przez podzbiór $J_v \cup S \subseteq J$. W przeciwnym wypadku, z maksymalności zbioru S w podgrafie $G[V_0]$ wynika, że istnieje wierzchołek w zbiorze S w odległości dwa od v. Zatem v jest $(1,2)$-dominowany przez J.

3. Jeżeli $v \in V_K$, to wtedy warunek *(i)* gwarantuje, że v jest $(1,1)$-dominowany przez zbiór $J_v \cup S$, natomiast wszystkie wierzchołki grafu ze zbioru $V(H_v) \setminus J_v$ są $(1,2)$-dominowane przez zbiór $J_v \cup S$.

4. Jeżeli $v \in V_0$, to wtedy $v \in S$ albo $v \in V(G) \setminus S$. Jeżeli $v \in V(G) \setminus S$, to z maksymalności zbioru S w podgrafie $G[V_0]$ oraz z warunku *(ii)* wiemy, że wierzchołek v jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S lub przez zbiór $S \cup J_{u'}$, gdzie $u' \in V(G) \setminus V_0$.

Z powyższych przypadków wynika, że zbiór J jest $(1,2)$-dominujący grafie $G \circ \mathcal{H}$.

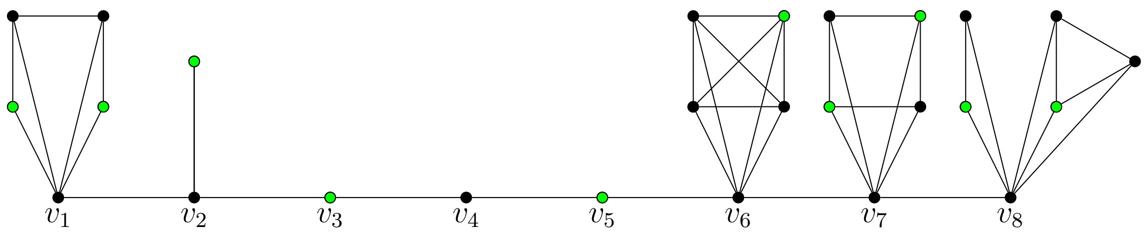
Udowodnimy teraz warunek konieczny. Załóżmy, że graf $G \circ \mathcal{H}$ ma niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący J. Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że w podgrafie indukowanym $G[V_0]$ nie istnieje maksymalny zbiór niezależny, który spełnia jednocześnie warunki *(i)* i *(ii)*. Oznacza to, że dla każdego maksymalnego zbioru niezależnego S podgrafu $G[V_0]$ spełniony jest co najmniej jeden z dwóch warunków:

(A') istnieje wierzchołek $v \in V_K$, który nie ma sąsiada w zbiorze S,

(B') istnieje wierzchołek $v' \in V_0 \setminus S$, który nie jest $(1,2)$-dominowany przez S i nie ma sąsiada w zbiorze $V(G) \setminus V_0$.

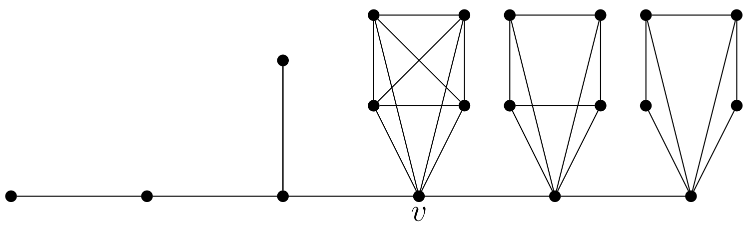
Zbiór $J \cap V_0$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym w grafie $G[V_0]$, ponieważ w przeciwnym wypadku wierzchołki ze zbioru $V_0 \setminus J$ nie są dominowane przez J. To oznacza, że zawsze znajdziemy co najmniej jeden wierzchołek $y \in V(H_v) \setminus J, v \in V_K$ (z warunku (A')) lub wierzchołek $v' \in V_0 \setminus J$ (z warunku (B')), które nie będą $(1,2)$-dominowane przez zbiór J. Jest to sprzeczne z założeniem, że J jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Zatem w podgrafie $G[V_0]$ istnieje maksymalny zbiór niezależny spełniający warunki *(i)* oraz *(ii)*, co dowodzi warunku koniecznego. ■

Aby zilustrować powyższe twierdzenie, rozważmy graf $P_6 \circ \{P_4, N_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset, K_4, C_4, P_2 \cup C_3\}$ przedstawiony na rysunku 5.10. Wtedy $V_0 = \{v_3, v_4, v_5\}$, $V_K = \{v_6\}$. Podzbiór zaznaczony na zielono jest niezależnym zbiorem $(1,2)$-dominującym tego grafu. Podzbiór $S = \{x_3, x_5\}$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym podgrafu $G[V_0]$ spełniającym warunki *(i)* i *(ii)*. Warunek *(i)* jest spełniony, ponieważ $v_5v_6 \in E(G)$, natomiast warunek *(ii)* jest spełniony, ponieważ wierzchołek v_4 jest $(1,2)$-dominowany przez zbiór S.



Rysunek 5.10: Niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący w $P_6 \circ \{P_4, N_1, \emptyset, \emptyset, \emptyset, K_4, C_4, P_2 \cup C_3\}$

Na rysunku 5.11 przedstawiony został graf $P_6 \circ \{\emptyset, \emptyset, N_1, K_4, C_4, P_4\}$, który nie ma niezależnego zbioru $(1,2)$-dominującego. Wynika to z faktu, że nie jest spełniony warunek *(i)* z twierdzenia 5.22, ponieważ wierzchołek $v \in V_K$ nie ma sąsiada w zbiorze V_0.



Rysunek 5.11: Graf $P_6 \circ \{\emptyset, \emptyset, N_1, K_4, C_4, P_4\}$

Podsumowanie i dalsze kierunki badań

W przedłożonej rozprawie zostały przedstawione wyniki dotyczące własności zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach i ich produktach. Rozważane były zarówno problemy związane z badaniem parametrów $(1,2)$-dominowania, jak i problemy istnienia zbiorów $(1,2)$-dominujących przy nałożeniu dodatkowych warunków takich jak niezależność lub brak podwójnego dominowania.

Wykazane zostały zależności pomiędzy liczbą $(1,2)$-dominowania, a liczbą dominowania lub górną liczba dominowania. O ile pomiędzy liczbą $(1,2)$-dominowania, a liczbą dominowania w dowolnym grafie zachodzi nierówność $\gamma_{1,2}(G) \leqslant \gamma(G)$, to okazuje się, że nie można ustalić w ogólnym przypadku zależności pomiędzy $\gamma_{1,2}(G)$ i $\Gamma(G)$. Zostało pokazane, że istnieją grafy w których $\gamma_{1,2}(G) < \Gamma(G)$ oraz grafy, dla których $\gamma_{1,2}(G) > \Gamma(G)$. W każdym z omawianych przypadków podane zostały konstrukcje grafów, dla których różnica pomiędzy rozważanymi parametrami jest równa ustalonej liczbie naturalnej n, czyli innymi słowy pokazano, że różnica pomiędzy omawianymi parametrami może być dowolnie duża. Problemem otwartym pozostaje pytanie dotyczące zależności pomiędzy górną liczbą (1,2)-dominowania $\Gamma_{1,2}(G)$ a liczbą dominowania $\Gamma(G)$. W pracy [48] została postawiona hipoteza, że dla dowolnego grafu G zachodzi nierówność $\Gamma(G) \leqslant \Gamma_{1,2}(G)$.

Wiemy, że każdy zbiór $(1,1)$-dominujący jest zbiorem $(1,2)$-dominującym. Aby wykluczyć z rozważań przypadki zbiorów $(1,2)$-dominujących będących jednocześnie zbiorami $(1,1)$-dominującymi, została wprowadzona rodzina właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących. Ponieważ nie każdy graf ma właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący, w pierwszej kolejności została podana pełna charakteryzacja grafów, w których taki zbiór istnieje. Udowodniono, że dla każdego grafu spójnego, który nie jest grafem pełnym zachodzi równość $\gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Problemem otwartym pozostaje pełna charakteryzacja klasy grafów, dla których $\Gamma_{1,2}(G) = \Gamma_{1,\overline{2}}(G)$. Zostały określone zależności pomiędzy parametrami $(1,2)$-dominowania, właściwego $(1,2)$-dominowania i klasycznego dominowania.

Uzyskana zależność (3.3) postaci

$$\gamma(G) \leqslant \gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,\overline{2}}(G) \leqslant \Gamma_{1,2}(G)$$

została poddana analizie przypadków ekstremalnych, to znaczy w odniesieniu do rozważanych w tej zależności parametrów podane zostały konstrukcje grafów, dla których wszystkie parametry z (3.3) są równe albo wszystkie nierówności są ostre. Co więcej, zostało pokazane, że istnieje graf, dla którego różnica pomiędzy tymi parametrami jest wielomianowa. Analogicznie jak dla $(1,2)$-dominowania, również w odniesieniu do właściwego $(1,2)$-dominowania nie można ustalić w ogólnym przypadku zależności pomiędzy górną liczbą dominowania $\Gamma(G)$, dlatego parametr ten nie występuje w zależności (3.3). Została podana konstrukcja grafów, dla których różnica pomiędzy $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$ oraz $\Gamma(G)$ jest równa ustalonej liczbie naturalnej na korzyść każdej z tych liczb.

Ze względu na wyróżnienie podrodziny właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących, w rozprawie został przedstawiony również problem znajdowania najmniejszych przekrojów zbiorów $(1,1)$-dominujących i właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach. W tym celu został wprowadzony indeksu przekroju $\rho(G)$, a następnie wyznaczony w wybranych klasach grafów takich jak: ścieżki, cykle, grafy pełne dwudzielne i pająki. Zostały również zainicjowane badania dotyczące istnienia w drzewach rozłącznych zbiorów $(1,1)$-dominujących i właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących. Udowodniony został warunek konieczny na to, aby $\rho(T) = 0$. Znalezienie pełnej charakteryzacji drzew, dla których $\rho(T) = 0$ jest nadal problemem otwartym. Pewne problemy otwarte związane z indeksem przekroju $\rho(T)$ zaproponowane zostały w procesie recenzowania artykułu [42], gdzie jeden z recenzentów zasugerował umieszczenie w wersji końcowej artykułu następujących otwartych problemów:

- jaka jest największa możliwa wartość indeksu $\rho(G)$ w n-wierzchołkowym grafie G,
- jaka jest złożoność obliczeniowa problemu wyznaczania indeksu $\rho(G)$,
- czy dla dostatecznie dużych n w n-wierzchołkowym grafie G takim, że $\delta(G) > 2$ zachodzi równość $\rho(G) = 0$.

Poszukiwanie odpowiedzi na powyższe pytania będzie przedmiotem dalszych badań dotyczących indeksu $\rho(G)$, ponadto można postawić jeszcze wiele innych ciekawych i nietrywialnych problemów.

Część rozprawy dotyczy niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących. W szczególności pojawia się interesujący problem istnienia takich zbiorów w grafach. Nie jest znana pełna charakteryzacja grafów mających niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący a problem ten jest problemem $\mathcal{NP}$-zupełnym w ogólnym przypadku. W rozprawie problem istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących został w pełni rozwiązany w produktach grafów: produkcie tensorowym dwóch grafów, silnym produkcie dwóch grafów oraz w G-złączeniu i uogólnionej koronie grafów. W każdym przypadku została podana pełna charakteryzacja produktu mającego niezależny zbiór (1,2)-dominujący w zależności od własności grafów będących czynnikami. Rozstrzygnięcie problemu istnienia rozważanych zbiorów we wspomnianych produktach nie rozwiązuje problemu pełnej charakteryzacji grafów mających niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący, należy nadal poszukiwać pełnego rozwiązania.

Innym kierunkiem badań związanym ze zbiorami $(1,2)$-dominującymi jest zdefiniowanie i badanie doskonałych zbiorów $(1,2)$-dominujących czyli zbiorów $(1,2)$-dominujących, dla których nie istnieje wierzchołek, który jest $(1,1)$-dominowany. Badania nad tymi zbiorami zostały zapoczątkowane i można stwierdzić, że jednym z podstawowych problemów jest problem ich istnienia, który wydaje się być niełatwym do rozwiązania.

Oprócz wspomnianych problemów warto zainicjować badania dotyczące kolejnego szczególnego przypadku zbiorów $(1,k)$-dominujących, mianowicie zbiorów $(1,3)$-dominujących. Z rezultatów, które udowodnili S. T. Hedetniemi i in. w [35] wynika, że rozważanie zbiorów $(1,k)$-dominujących ma sens jedynie dla $k \in \{1,2,3,4\}$, przy czym dla $k = 4$ i dla $k = 1$ są to dobrze zbadane przypadki odpowiednio klasycznego dominowania i podwójnego dominowania. Dlatego, oprócz zbiorów $(1,2)$-dominujących, to właśnie zbiory $(1,3)$-dominujące są naturalną rodziną zbiorów, którą warto w dalszej kolejności badać.

W trakcie dalszych badań naukowych dotyczących zbiorów $(1,2)$-dominujących zapewne pojawią się także inne, niewymienione tutaj problemy. Przedstawione powyżej podsumowanie pokazuje, że zawarta w pracy tematyka może być nadal rozwijana, a wskazane wybrane otwarte problemy będą wyznaczać kierunek dalszych badań naukowych.

Bibliografia

[1] S. Anderson, B. Brešar, S. Klavžar, K. Kuenzel, D. F. Rall, *Orientable domination in product-like graphs*, Discrete Applied Mathematics, 326 (2023) 62–69.

[2] D. Angel, *Application of graph domination to defend medical information networks against cyber threats*, Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing, 13 (2022) 3765–3770.

[3] A. Bachstein, W. Goddard, M. A. Henning, *Bipartite domination in graphs*, Mathematica Pannonica New Series, 28(2) (2022) 118–126.

[4] P. Bednarz, *On (2-d)-kernels in the tensor product of graphs*, Symmetry, 13(2) (2021) 230.

[5] P. Bednarz, N. Paja, *On (2-d)-kernels in two generalizations of the Petersen graph*, Symmetry, 13(10) (2021) 1948.

[6] P. Bednarz, I. Włoch, *On (2-d)-kernels in the cartesian product of graphs*, Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, sectio A–Mathematica, 70(2) (2016) 1–8.

[7] P. Bednarz, I. Włoch, *An algorithm determining (2-d)-kernels in trees*, Utilitas Mathematica, 102 (2017) 215–222.

[8] C. Berge, *The theory of graphs and its applications*, New York: Wiley, (1962).

[9] S. Bermudo, J. C. Hernández-Gómez, J. M. Sigarreta, *Total k-domination in strong product graphs*, Discrete Applied Mathematics, 263 (2019) 51–58.

[10] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*, Australasian Journal of Combinatorics, 33 (2005) 317–327.

[11] A. Bonato, T. Lidbetter, *Bounds on the burning numbers of spiders and path-forests*, Theoretical Computer Science, 794 (2019) 12–19.

[12] M. Borowiecki, A. Fiedorowicz, E. Sidorowicz, Z. Tuza, *Independent $(k+1)$-domination in k-trees*, Discrete Applied Mathematics, 284 (2020) 99–110.

[13] B. Brešar, S. Klavžar, D. F. Rall, *Dominating direct product of graphs*, Discrete Mathematics, 307(13) (2007) 1636–1642.

[14] A. Cabrera-Martinez, A. Estrada-Moreno, *Double domination in rooted product graphs*, Discrete Applied Mathematics, 339 (2023) 127–135.

[15] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, *Towards a theory of domination in graphs*, Networks, 7(3) (1977) 247–261.

[16] P. Dankelmann, D. J. Erwin, *Distance domination and generalized eccentricity in graphs with given minimum degree*, Journal of Graph Theory, 94(1) (2020) 5–19.

[17] C. F. de Jaenisch, *Traite des applications de l'analyse mathematique au jeu des echecs*, St. Petersbourg Academie Imperiale des Sciences, (1862).

[18] M. Dettlaff, M. Lemańska, J. A. Rodriguez-Velazquez, R. Zuazua, *On the super domination number of lexicographic product graphs*, Discrete Applied Mathematics, 263 (2019) 118–129.

[19] M. Dettlaff, J. Raczek, I. G. Yero, *Edge subdivision and edge multisubdivison versus some domination related parameters in generalized corona graphs*, Opuscula Mathematica, 36(5) (2016) 575–588.

[20] R. Diestel, *Graph Theory. 5th Electronic Edition*, (2016).

[21] Z. Dvořak, *On distance r-dominating and $2r$-independent sets in sparse graphs*, Journal of Graph Theory, 91(2) (2019) 162–173.

[22] J. F. Fink, M. S. Jacobson, *n-Domination in graphs*, In *Graph theory with applications to algorithms and computer science*, 283–300. John Wiley & Sons, Inc., (1985).

[23] R. Frucht, F. Harary, *On the corona of two graphs*, Aequationes mathematicae, 4(3) (1970) 322–325.

[24] W. Goddard, M. A. Henning, *Independent domination in graphs: A survey and recent results*, Discrete Mathematics, 313(7) (2013) 839–854.

[25] T. Godquin, M. Barbier, C. Gaber, J. Grimault, J. Le Bars, *Applied graph theory to security: A qualitative placement of security solutions within IoT networks*, Journal of Information Security and Applications, 55 (2020) 102640.

[26] G. Gunther, B. Hartnell, D. F. Rall, *Graphs whose vertex independence number is unaffected by single edge addition or deletion*, Discrete Applied Mathematics, 46(2) (1993) 167–172.

[27] A. Hansberg, L. Volkmann, *On graphs with equal domination and* 2*-domination numbers*, Discrete Mathematics, 308(11) (2008) 2277–2281.

[28] A. Hansberg, D. Meierling, L. Volkmann, *Distance Domination and Distance Irredundance in Graphs*, The Electronic Journal of Combinatorics, 14 (2007) R35.

[29] A. Hansberg, L. Volkmann, *Multiple Domination*, In *Topics in Domination in Graphs*, 151–203. Springer International Publishing, Cham, 2020.

[30] J. Harant, M. A. Henning, *On double domination in graphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 25 (2005) 29–34.

[31] B. L. Hartnell, D. F. Rall, *On dominating the cartesian product of a graph and* K_2, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 24 (2004) 389–402.

[32] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Domination in Graphs. Advanced Topics*, Marcel Dekker Inc., New York, (1998).

[33] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc, New York, (1998).

[34] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning, *Topics in Domination in Graphs*, Springer International Publishing, Cham, (2020).

[35] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall, *Secondary domination in graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb, 5(2) (2008) 117–125.

[36] C. Hoppen, G. Mansan, *Minimum* 2*-dominating sets in regular graphs*, Discrete Applied Mathematics, 323 (2022) 268–285.

[37] N. B. Ibrahim, A. A. Jund, *Edge Connected Domination Polynomial of a Graph*, Palestine Journal of Mathematics, 7(2) (2018) 458–467.

[38] A. H. Karbasi, R. E. Atani, *Application of dominating sets in wireless sensor networks*, International Journal of Security and Its Applications, 7(4) (2013) 185–202.

[39] K. Kayathri, S. Vallirani, *(1, 2)-Domination in Graphs*, In *Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics*, 128–133. Springer International Publishing, Cham, (2017).

[40] L. L. Kelleher, M. B. Cozzens, *Dominating sets in social network graphs*, Mathematical Social Sciences, 16(3) (1988) 267–279.

[41] A. Kosiorowska, I. Włoch, *On the Existence of Independent [j, k]-Dominating Sets in the Generalized Corona of Graphs*, Symmetry, 15(4) (2023) 802.

[42] A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch, *On minimum intersections of certain secondary dominating sets in graphs*, Opuscula Mathematica, 43(6) (2023) 813–827.

[43] A. Meir, J. W. Moon, *Relations between packing and covering numbers of a tree*, Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975) 225–233.

[44] A. Michalski, *Secondary dominating sets in graphs and their modification*, Book of abstracts, The 7th Gdańsk Workshop on Graph Theory (2019).

[45] A. Michalski, *Some remarks about* $(1,2)$*-dominating sets*, manuskrypt, .

[46] A. Michalski, P. Bednarz, *On Independent Secondary Dominating Sets in Generalized Graph Products*, Symmetry, 13(12) (2021) 2399.

[47] A. Michalski, I. Włoch, *On the existence and the number of independent* $(1,2)$*-dominating sets in the G-join of graphs*, Applied Mathematics and Computation, 377 (2020) 125155.

[48] A. Michalski, I. Włoch, M. Dettlaff, M. Lemańska, *On proper* $(1,2)$*-dominating sets in graphs*, Mathematical Models in the Applied Sciences, 45(11) (2022) 7050–7057.

[49] F. Molnar, N. Derzsy, B. K. Szymanski, G. Korniss, *Building Damage-Resilient Dominating Sets in Complex Networks against Random and Targeted Attacks*, Scientific Reports, 5 (2015) 8321.

[50] J. C. Nacher, T. Akutsu, *Analysis of critical and redundant nodes in controlling directed and undirected complex networks using dominating sets*, Journal of Complex Networks, 2(4) (2014) 394–412.

[51] Z. L. Nagy, *Generalizing Erdős, Moon and Moser's result—The number of k-dominating independent sets*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 61 (2017) 909–915.

[52] Z. L. Nagy, *On the Number of k-Dominating Independent Sets*, Journal of Graph Theory, 84(4) (2017) 566–580.

[53] O. Ore, *Theory of graphs*, volume 38, American Mathematical Society, (1962).

[54] A. Panpa, T. Poomsa-ard, *On Graceful Spider Graphs with at Most Four Legs of Lenghts Greater than One*, Journal of Applied Mathematics, 2016 (2016) 5327026.

[55] J. Raczek, *Polynomial Algorithm for Minimal* $(1, 2)$*-Dominating Set in Networks*, Electronics, 11(3) (2022) 300.

[56] V. Samodivkin, *Domination related parameters in the generalized lexicographic product of graphs*, Discrete Applied Mathematics, 300 (2021) 77–84.

[57] W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch, *On the existence and on the number of (k, l)-kernels in the lexicographic product of graphs*, Discrete Mathematics, 308(20) (2008) 4616–4624.

[58] J. Topp, *Domination, independence and irredundance in graphs*, Dissertationes Math., Warszawa, (1995).

[59] S. Vallirani, *Generalization of secondary domination in graphs*, Madurai Kamaraj University, PhD Dissertation, (2019).

[60] S. Varghese, S. Varghese, A. Vijayakumar, *Power domination in Mycielskian of spiders*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 19(2) (2022) 154–158.

[61] A. Włoch, *On 2-dominating kernels in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics, 53 (2012) 273–284.

[62] A. Włoch, I. Włoch, *On (k, l)-kernels in generalized products*, Discrete Mathematics, 164 (1997) 295–301.

[63] A. Włoch, I. Włoch, *On (k, l)-kernels in the corona of digraphs*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 53(4) (2009) 571–582.

[64] I. Włoch, *On kernels by monochromatic paths in the corona of digraphs*, Central European Journal of Mathematics, 6(4) (2008) 537–542.

[65] A. M. Yaglom, I. M. Yaglom, *Challenging mathematical problems with elementary solutions*, Dover Publications, Inc., New York, (1964).

[66] I. G. Yero, J. A. Rodriguez-Velazquez, *Roman domination in cartesian product graphs and strong product graphs*, Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 7 (2013) 262–274.

[67] J. Yu, N. Wang, G. Wang, D. Yu, *Connected dominating sets in wireless ad hoc and sensor networks – A comprehensive survey*, Computer Communications, 36(2) (2013) 121–134.

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

Rzeszów, 01.10.2023

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Tytuł: *Zbiory* $(1,2)$*-dominujące w grafach*
Autor: mgr Adrian Michalski
Promotor: dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

Pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego wprowadzili w 2008 S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely oraz D. F. Rall. Niech $k \in \mathbb{N}$. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest zbiorem $(1,k)$-dominującym, jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \setminus D$ istnieją w zbiorze D dwa różne wierzchołki u, v takie, że x jest sąsiedni z u i odległość pomiędzy x i v nie przekracza k.

W rozprawie doktorskiej rozważane są własności zbiorów $(1,2)$-dominujących i związanych z nimi parametrów. W szczególności wyznaczone zostały wartości liczby $(1,2)$-dominowania w wybranych klasach grafów oraz podane zostały związki pomiędzy liczbą dominowania i liczbą $(1,2)$-dominowania.

Ponieważ dowolny zbiór $(1,1)$-dominujący jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, w rozprawie zostały omówione właściwe zbiory $(1,2)$-dominujące, czyli zbiory $(1,2)$-dominujące, które nie są zbiorami $(1,1)$-dominującymi. Rozstrzygnięty został problem istnienia właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach. Ponadto zostało pokazane, że dla spójnego grafu niebędącego grafem pełnym liczby $(1,2)$-dominowania i właściwego $(1,2)$-dominowania są równe. W rozprawie został podany, a następnie zbadany ciąg zależności pomiędzy parametrami właściwego $(1,2)$-dominowania, $(1,2)$-dominowania oraz klasycznego dominowania.

Został także wprowadzony indeks przekroju zbiorów $(1,1)$-dominujących oraz właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących grafu, będący najmniejszą możliwą liczbą wspólnych wierzchołków zbioru $(1,1)$-dominującego oraz właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego w danym grafie. Została wyznaczona wartość tego indeksu w niektórych klasach grafów takich jak ścieżki, cykle, grafy pełne dwudzielne i pająki. Ponadto została podana częściowa charakteryzacja drzew, których indeks przekroju jest równy zero.

W rozprawie znajdują się również rezultaty dotyczące istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w grafach i ich produktach, w szczególności w produkcie tensorowym, silnym produkcie, G-złączeniu oraz uogólnionej koronie grafów. W każdym przypadku została podana pełna charakteryzacja produktu, w którym istnieje niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący.

Rzeszow University of Technology
The Faculty of Mathematics and Applied Physics

Rzeszów, 01.10.2023

Abstract of the doctoral thesis

Title: $(1,2)$*-dominating sets in graphs*

Author: mgr Adrian Michalski

Supervisor: dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

The concept of a $(1,k)$-dominating set was introduced in 2008 by S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely and D. F. Rall. Let $k \in \mathbb{N}$. The subset $D \subseteq V(G)$ is a $(1,k)$-dominating set if for every vertex $x \in V(G) \setminus D$ there are two distinct vertices u, v in D such that x is adjacent to u and the distance between x and v does not exceed k.

The thesis deals with properties of $(1,2)$-dominating sets and parameters related to $(1,2)$-domination. In particular, exact values of the $(1,2)$-domination number were determined in certain classes of graphs. Moreover, relations between the $(1,2)$-domination number and the domination number were given.

Since every $(1,1)$-dominating set is also a $(1,2)$-dominating set, we discussed proper $(1,2)$-dominating sets, namely $(1,2)$-dominating sets which are not $(1,1)$-dominating. We solved the problem of the existence of proper $(1,2)$-dominating sets in graphs. Furthermore, we showed that in a connected, non-complete graph the $(1,2)$-domination number and the proper $(1,2)$-domination number are equal. We also gave a chain of inequalities between parameters of proper $(1,2)$-domination, $(1,2)$-domination and classical domination, which was later analysed.

Next, we studied $(1,\overline{2})$-intersection index, which is defined as the smallest possible number of common vertices of a $(1,1)$-dominating set and a proper $(1,2)$-dominating set in a graph. We determined the exact value of this index in some classes of graphs such as paths, cycles, complete bipartite graphs and spiders. Additionally, a partial characterization of trees with $(1,\overline{2})$-intersection index equal to zero was proved.

In the thesis there are also results concerning the problem of the existence of independent $(1,2)$-dominating sets in graph and their products, in particular the tensor product, the strong product, the G-join of graphs and the generalized corona of graphs. In each case we gave a complete characterization of the product, which has an independent $(1,2)$-dominating set.