

dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ  
Instytut Matematyki  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Uniwersytet Jagielloński

## Recenzja rozprawy doktorskiej mgr. Karola Aleksandrowicza

Rozprawa mgr. Karola Aleksandrowicza pt. *Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych* dotyczy stabilności i transferu własności geometrycznych (takich jak jednostajna wypukłość, niemal jednostajna wypukłość, własność Kadjeca–Klee’ego czy własność  $(\beta)$  Rolewicza) w konstrukcjach interpolacyjnych, a także odpowiedniki znanych własności w kratkach Banacha (jednostajna i lokalna jednostajna monotoniczność oraz porządkowa gładkość). Autor pracuje z trzema rodzinami narzędzi: ogólną dyskretną metodą interpolacji, rzeczywistą metodą (w wersji Yoshikawy–Sparra) oraz metodą zespoloną Calderóna.

Praca, zbierająca wyniki z opublikowanych publikacji, jest napisana dojrzałe i przejrzyste, z wyważonym wstępem i spójną narracją. Na poziomie ogólnym stanowi ona systematyczne studium *stabilności geometrycznej* metod interpolacyjnych, z wyraźnym akcentem na ujęcie ilościowe (moduły wypukłości/monotoniczności, kontrola stałych).

### Struktura i zakres pracy

Rozprawa składa się z czterech rozdziałów: (1) przypomnienie i rozwinięcie aparatu pojęciowego geometrii przestrzeni Banacha oraz krat Banacha (wraz z nowymi wynikami dotyczącymi gładkości porządkowej i relacji dualnych), (2) sumy proste i ogólna dyskretna metoda interpolacji (z nowymi twierdzeniami o przenoszeniu wypukłości i własności  $(\beta)$ ), (3) metoda Yoshikawy–Sparra dla układów wielu przestrzeni, (4) metoda zespolona Calderóna (z wynikami o [rzenormowaniach typu LUR, Kadjeca–Klee’go oraz stabilności monotoniczności w kratkach).

### Streszczenie treści i główne wyniki

#### Rozdział 1: Własności geometryczne przestrzeni i krat Banacha

Po zebraniu definicji (m.in. modułu wypukłości oraz jego wersji lokalnej), autor przechodzi do części autorskiej poświęconej *porządkowej gładkości* w kratkach Banacha oraz jej związkom z lokalną jednostajną monotonicznością. Kluczowym osiągnięciem jest nowa charakteryzacja porządkowej gładkości w punkcie, analogiczna do klasycznej charakteryzacji Szmuliana dla gładkości normy: porządkowa gładkość w punkcie  $x$  jest równoważna odpowiedniej zbieżności ciągów funkcjonałów dodatnich  $(f_n) - (g_n)$  w topologii  $\sigma(X^*, X)$  (tw. 1.2), także w wersji jednostajnej (tw. 1.3 i konsekwencja 1.4).

Następnie autor definiuje własności dualne do dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (lokalne wersje gładkości porządkowej) i ustanawia relacje dualne: z dolnej (resp. górnej) lokalnej LUR w  $X^*$  wynika dolna (resp. górna) lokalna gładkość

porządkowa w  $X$ , a z górnej lokalnej gładkości porządkowej  $X^*$  wynika górna LUR w  $X$  (tw. 1.7).

W klasie przestrzeni z bazą bezwarunkową o stałej bazowej 1 autor uzyskuje w przypadku refleksywnym elegancką równoważność:  $X$  jest górnio lokalnie jednostajnie monotoniczna  $\Leftrightarrow$  krata  $X^*$  jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka (tw. 1.8).

Wreszcie, autor podaje konstrukcje pokazujące *nieporównywalność* dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności (m.in. specjalne renormowanie  $c$ ), rozstrzygając negatywnie naturalne pytanie z literatury.

## Rozdział 2: Sumy proste i ogólna dyskretna metoda interpolacji

W części wprowadzającej zebrano użyteczne narzędzia dla sum prostych i uogólnionego schematu dyskretnego. Nowe wyniki obejmują:

- transfer lokalnej jednostajnej wypukłości (LUR) i jej słabszych wersji w ogólnej metodzie dyskretniej pod naturalnymi założeniami na przestrzeń bazową  $E$  i jedną z przestrzeni z pary;
- stabilność niemal jednostajnej wypukłości (NUC) w przestrzeniach  $K_{p,\theta}(X, E)$ , gdy  $E$  jest NUC i jednostajnie monotoniczna (tw. 2.5);
- twierdzenie o zachowaniu własności  $(\beta)$  przez *sumy proste* z oszacowaniami ilościowymi na poziomie moduli (tw. 2.8), co jest ważnym krokiem technicznym obiecany w starszej literaturze i tu przeprowadzonym wraz z pełnym dowodem;
- przeniesienie własności  $(\beta)$  na przestrzenie powstałe ogólną *dyskretną* metodą interpolacji (tw. 2.9).

## Rozdział 3: Rzeczywista metoda interpolacji (Yoshikawa–Sparra)

Autor analizuje dwie równoważne normy definiujące przestrzenie Yoshikawy–Sparra i pokazuje stabilność wypukłości: dla normy we wzorze (3.7) uzyskano wprost jednostajną wypukłość w przestrzeni interpolacyjnej pod klasycznym założeniem, że jedna z przestrzeni wejściowych jest jednostajnie wypukła (tw. 3.3). Dla normy alternatywnej (3.2) autor dowodzi oszacowań modułu wypukłości w kategoriach danych wejściowych (tw. 3.6), co dostarcza *ilościowego* ujęcia stabilności. W rozdziale tym zebrano też analogi dla NUC i własności  $(\beta)$  w ustawieniu dla skończenie wielu przestrzeni, co pięknie rozszerza klasyczne twierdzenia Beauzamy’ego (dla par) na konstrukcje Yoshikawy–Sparra.

## Rozdział 4: Zespólna metoda interpolacji (Calderóna)

Część autorska zaczyna się od twierdzeń o stabilności ściślejszych form wypukłości; następnie autor dowodzi, że *lokalna* jednostajna wypukłość przenosi się z jednej z przestrzeni wejściowych na przestrzeń dolnej metody Calderóna, gdy obie przestrzenie są refleksywne i spełniony jest techniczny warunek gęstości  $X_0^* \cap X_1^*$  (tw. 4.3). Kolejno, wprowadza on naturalne warunki na rodzinę rzutów  $(\Pi_\lambda)$  i wykazuje, że wystarczają one by przenieść własność Kadjeca–Klee’ego na zespolone przestrzenie interpolacyjne (tw. 4.4), a także transfer własności  $(\beta)$  (tw. 4.5). Rozdział zwięźcza rezultat dla *krat funkcyjnych*: jednostajna monotoniczność przenosi się z jednej z przestrzeni wejściowych na iloczyn Calderóna  $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$  (tw. 4.8).

## Wkład autora i nowatorskość wyników

Wkład autorski jest wielowątkowy i dobrze udokumentowany we wstępie oraz partiach „Nowe wyniki” każdego rozdziału. Najistotniejsze elementy to:

- (i) Charakteryzacja porządkowej gładkości w punkcie (tw. 1.2) oraz jej wersja jednostajna (tw. 1.3 wraz z tw. 1.4), analogiczne do klasycznych kryteriów Szmuliana.
- (ii) Zdefiniowanie i analiza *lokalnych* wersji gładkości porządkowej dualnych do dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności oraz ustanowienie precyzyjnych relacji dualnych między tymi rodzinami własności (tw. 1.5 i 1.7).
- (iii) Równoważność: górna lokalna jednostajna monotoniczność  $X \Leftrightarrow$  lokalna jednostajna gładkość porządkowa  $X^*$  w klasie refleksywnych przestrzeni z bazą 1-bezwarunkową (tw. 1.8).
- (iv) Rozstrzygnięcie nieporównywalności dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności poprzez jawne przykłady i przernormowania (w tym na  $c$ ).
- (v) Stabilność NUC w przestrzeniach  $K_{p,\theta}(X, E)$  pod naturalnymi założeniami na  $E$  i jedną z przestrzeni wejściowych (tw. 2.5), wraz z przejrzystym schematem dowodu opartym na sumach prostych.
- (vi) Pełne twierdzenie o własności  $(\beta)$  dla sum prostych (tw. 2.8) oraz jego zastosowanie do ogólnej dyskretnej metody interpolacji (tw. 2.9), z *ilościową* kontrolą moduli.
- (vii) Stabilność jednostajnej wypukłości dla przestrzeni Yoshikawy–Sparra zarówno w normie (3.7) (tw. 3.3), jak i w normie alternatywnej (3.2) z oszacowaniem modułu (tw. 3.6).
- (viii) W metodzie zespolonej: przeniesienie LUR (tw. 4.3), schemat operatorowy zapewniający własność Kadjeca–Klee’go (tw. 4.4) oraz warunki przenoszące własność  $(\beta)$  (tw. 4.5).
- (ix) W kratkach funkcyjnych: stabilność *jednostajnej monotoniczności* dla produktu Calderóna (tw. 4.8).

Część wyników została wcześniej opublikowana w artykułach cytowanych w pracy; dysertacja przedstawia ich pełne, uporządkowane ujęcie i lekkie uogólnienia.

## Znaczenie i umiejscowienie w literaturze

Rezultaty rozdziałów 2–4 istotnie rozwijają klasyczne prace Beauzamy’ego nad stabilnością wypukłości w interpolacji rzeczywistej (dla par), poszerzając je na ogólną metodę dyskretną i układy skończenie wielu przestrzeni w ujęciu Yoshikawy–Sparra, a także dostarczając *ilościowych* oszacowań modułów dla norm równoważnych. Nowy aparat lokalnej gładkości porządkowej wiąże geometrię krat z dualnymi własnościami w sposób, który w literaturze nie był dotąd sformułowany tak precyzyjnie. Część wyników ma charakter przejściowy (transfer z ujęć dyskretnych do ciągłych), co czyni je użytecznymi jako narzędzia w dalszych badaniach (np. w metrycznej teorii punktów stałych).

## Drobne uwagi redakcyjne

Styl i notacja są w większości jednorodne i spójne. W kilku miejscach, gdzie pojawiają się równoważne normy (np. (3.2) vs. (3.7)), autor słusznie akcentuje przejścia ilościowe; dobrym zwyczajem jest podsumowanie zależności stałych (jak w (3.16)–(3.19)) w jednym miejscu, co już w pracy zrobiono, ale można by jeszcze bardziej wyeksponować. Nie podoba mi się stwierdzenie na stornie 46, że moduł własności ( $\beta$ ) można uznać za funkcję ciągłą; jednak sens tego niezgrabnego stwierdzenia wyjaśnia Uwaga 1.1. Dowód Tw. 3.3 w przypadku  $q = 1$  jest poprawny jednak nie zaszkodziłoby doprecyzowanie punktu (A) jawnie rozstrzygnając przypadek  $\|y_0\| = 0$ .

Powyższe uwagi te w żadnym stopniu nie wpływają na ocenę pracy.

## Konkluzja

Rozprawa stanowi spójny i wartościowy wkład w geometrię przestrzeni Banacha oraz analizę interpolacyjną. Szczególnie cenne są: (a) nowe charakterystyki i relacje dualne w kratkach, (b) komplet wyników o stabilności NUC i ( $\beta$ ) dla sum prostych i ogólnej metody dyskretnej, (c) ujęcie wieloprzestrzenne metody Yoshikawy–Sparra z kontrolą modułów oraz (d) wyniki zespolone (własności LUR, Kadjeca–Klee’go, ( $\beta$ )) wraz ze stabilnością monotoniczności w kratkach funkcyjnych.

Reasumując, stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr Karola Szczepana Aleksandrowicza pt. *Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych* jest dziełem dojrzałym, świadczącym o dużej samodzielności badawczej, matematycznej erudycji oraz umiejętności twórczego rozwijania problemów analizy funkcjonalnej. Autor uzyskał szereg nowych, oryginalnych i wartościowych rezultatów, dobrze umiejscowionych w kontekście współczesnych badań. Tekst jest przejrzysty, poprawny pod względem merytorycznym i językowym, a przedstawione wyniki poszerzają wiedzę o własnościach geometrycznych przestrzeni interpolacyjnych.

**Z pełnym przekonaniem wnoszę o dopuszczenie Autora do dalszych etapów postępowania w sprawie nadania stopnia doktora.**

Z poważaniem,

dr hab. Tomasz Kania, prof. UJ

