Prof. dr hab. Mariusz WOŹNIAK
Wydział Matematyki Stosowanej AGH
Katedra Matematyki Dyskretnej

Kraków, dnia 4 stycznia 2024 r.

Ocena rozprawy doktorskiej **pana mgra Adriana Michalskiego** pt: *Zbiory $(1,2)$-dominujące w grafach*

Głównym przedmiotem pracy są zbiory dominujące w grafach. Problematyka dominowania pojawiła się w latach 60-tych ubiegłego stulecia i od tej pory jest intensywnie badana. Jak podaje Autor rozprawy, w pracy Haynes i in. [33] [1] z roku 1998 opisanych jest ponad 70 parametrów związanych z różnymi rodzajami dominowania.

Praca skupia się na tzw. $(1,2)$-zbiorach dominujacych. Chodzi tu o takie zbiory wierzchołków D, że dla każdego wierzchołka x spoza tego zbioru istnieją dwa wierzchołki należące do zbioru D, jeden dominujący x (tzn. połączony z nim) oraz drugi w odległości co najwyżej 2 od x. Pojęcie to jest mocniejsze od pojęcia zbioru dominującego, gdzie dla wierzchołka x spoza zbioru D żądamy istnienia jedynie jednego wierzchołka dominujacego w D, a słabsze od pojęcia zbioru 2-dominującego, gdzie dla wierzchołka x spoza tego zbioru żądamy istnienia co najmniej dwóch wierzchołków dominujących w D. Pojęcie zbiorów $(1,k)$-dominujących zostało wprowadzone przez Hedetniemi i in. w 2008 roku w pracy [35].

Moc najmniejszego zbioru $(1,2)$-dominującego w grafie G oznaczamy przez $\gamma_{1,2}(G)$. Jest to podstawowy parametr rozprawy. Praca dotyczy także pewnych wariantów tego parametru.

Praca opiera się na czterech już opublikowanych artykułach (prace [42],[46], [47],[48]), których Autor jest współautorem. Część wyników rozprawy nie jest jeszcze opublikowana.

Wstęp zawiera rys historyczny, wzmiankę na temat zastosowań oraz krótkie omówienie zawartości kolejnych rozdziałów rozprawy, a także zestaw wspomniach powyżej artykułów oraz referatów Autora na konferencjach.

W krótkim rozdziale pierwszym Autor przypomina podstawowe pojęcia. Niemal wszystkie one są klasycznymi, standardowymi definicjami teorii gra-

[1]Numeracja prac i twierdzeń - jak w rozprawie.

fów. Zastrzeżenie budzi jedynie pojęcie drogi (str. 11), gdzie chyba brakuje założenia, że wszystkie wierzchołki drogi są różne z wyjątkiem, być może, pierwszego i ostatniego.

Rozdział drugi zawiera, zgodnie z tytułem, definicję podstawowych parametrów związanych z zagadnieniami dominowania, w tym głównego parametru $\gamma_{1,2}(G)$, oraz wstęne wyniki. Istotne dla rozprawy jest twierdzenie 2.2 (str. 16) z pracy [35], mówiące, że jeśli rząd grafu wynosi co namniej 2, to każdy zbiór dominujący jest też $(1,k)$-dominujący dla $k \geqslant 4$. Z tego wynika, że badanie parametrów $(1,k)$-dominowania (traktowane jako pojęcie mocniejsze niż zwykłe dominowanie) można ograniczyć do przypadku $(1,2)$-dominowania oraz $(1,3)$-dominowania. Praca skupia się na pierwszej z tych możliwości.

Rozdział drugi zawiera też wyniki Autora dotyczące wartości parametru $\gamma_{1,2}(G)$ dla pewnych klas grafów (ścieżki, cykle, grafy dwudzielne pełne), które to wartości najczęściej są równe klasycznemu parametrowi $\gamma(G)$. Najciekawsze w tej części pracy, jak sądzę, są twierdzenia o istnieniu grafów, gdzie parametry te mogą się dowolnie różnić (np. twierdzenia 2.23), a także twierdzenie 2.19 charakteryzujące grafy, dla których $\gamma_{1,2}(G) = \gamma(G)$. Pochodzą one z pracy [48], wspólnej z Włoch, Dettlaf i Lemańską.

Rozdział trzeci zaczyna się od definicji tzw. właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących tzn. takich, które nie są $(1,1)$-dominujące. Pomysł badania takich zbiorów pochodzi od Autora rozprawy. Jak pokazuje twierdzenie 3.3 odpowiedni parametr jest (z wyjątkami) zawsze równy podstawowemu parametrowi $\gamma_{1,2}$. Różnice pojawiają się gdy zamiast najmniejszych zbiorów rozważamy największe minimalne zbiory dominujące (por. np. twierdzenie 3.7). Wyniki Autora w tym rozdziale pochodzą także ze wspomnianej wyżej pracy [48].

W kolejnym, czwartym rozdziale Autor kontynuuje tematykę właściwych zbiorów $(1,2)$-dominujących skupiając się na zagadnieniu jak bardzo mogą się takie zbiory różnić od zbiorów $(1,1)$-dominujących. Okazuje się, że dla pewnych grafów istnieją rozłączne zbiory, z których jeden jest właściwie $(1,2)$-dominujący, a drugi $(1,1)$-dominujący. Główne twierdzenia tego rozdziału (twierdzenia 4.8 i 4.9) dotyczą drzew i zostały uzyskane wspólnie z Kosiorowską i Włoch w pracy [42].

W piątym, najobszerniejszym rozdziale pracy, Autor omawia wyniki dotyczące niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących. Problematyka ta została zapoczątkowana w pracy we wspomnianej już wyżej pracy [35]. W pracy tej, autorzy badali m.in. kwestię istnienia zbiorów $(1,2)$-dominujących w iloczynie kartezjańskim grafów. Autor rozprawy rozważa to zagadnienie dla iloczynu tensorowego (twierdzenie 5.6) oraz iloczynu silnego (twierdzenie 5.7). Oba twierdzenia są autorstwa mgra Michalskiego i nie zostały jeszcze opublikowane. Kolejne podrozdziały dotyczą tego samego zagadnienia dla tzw. G-złączenia grafów (podrozdział 5.3) i tzw. uogólnionej korony grafów (podrozdział 5.4). Główne twierdzenia podrozdziału 5.3 zostały uzyskane wspólnie z I. Włoch (w pracy [47]), a główne twierdzenia podrozdziału 5.4 zostały uzyskane wspólnie z P. Bednarzem (w pracy [46]).

Praca jest bardzo dobrze napisana pod względem językowym. Z nielicznych, poważniejszych usterek wymieńmy nadużywanie trybu bezosobowego (zwłaszcza we wstępie), kilkukrotnie użyty zwrot „załóżmy nie wprost..." (zamiast „dla dowodu nie wprost, załóżmy ...) czy też używanie anglicyzmu „produkt" (zamiast „iloczyn").

Z drobniejszych usterek wymieńmy przykładowo:

W oznaczeniu *diam* (str. 11) nie powinna by użyta kursywa.

Wykaz oznaczeń (str. 2 i 3) byłby bardziej użyteczny gdyby zawierał numery stron, gdzie dany symbol został zdefiniowany. Ponadto ta część symboli, które nie zaczynają się od zmiennych powinna być w porządku alfabetycznym.

Chciałbym wyraźnie podkreślić, że ww. usterki nie umniejszają mojego przekonania, że mamy do czynienia z bardzo dobrą rozprawą. Praca dobrze świadczy o wyrobieniu matematycznym Autora, a także o jej pomysłowości.

Bibliografia licząca 67 pozycji wydaje się w miarę kompletna i świadczy o znajomości zagadnień związanych z tematyką rozprawy.

Reasumując, uważam, że praca w pełni zasługuje na przyjęcie jej jako rozprawy doktorskiej pana mgra Adriana Michalskiego. W konsekwencji, wnoszę o dopuszczenie pana mgra Adriana Michalskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Ponadto, biorąc pod uwagę rozległość tematyki, fakt, że niektóre problemy zostały zaproponowane przez Autora, liczbę współautorów oraz obszerność i jakość rozprawy uważam, że zasługuje ona na wyróżnienie.

Mariusz Woźniak