Opinia o rozprawie doktorskiej
magister Justyny Madej
zatytułowanej

Technika miar niezwartości w zastosowaniu do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych w przedziale nieograniczonym.

Rozprawa doktorska magister Justyny Madej dotyczy zastosowania twierdzeń o punktach stałych w dowodach istnienia rozwiązań pewnych równiań całkowych. Składa się ona ze wstępu, sześciu rozdziałów i bibliografii liczącej 93 pozycji.
Głównym celem rozprawy jest udowodnienie twierdzeń o istnieniu rozwiązań dla nieskończonych układów równań całkowych typu Hammersteina i Urysohna rozwazanych w przedziale nieograniczonym.

Rozdział pierwszy i drugi mają charakter wstępny. Przedstawiono w nich oznaczenia, podstawowe pojęcia i twierdzenia wykorzystywane w dalszych rozdziałach. Między innymi w rozdziale pierwszym mamy definicję odległości Hausdorffa oraz definicje pewnych przestrzeni Banacha takich jak c_o, $C[a,b]$ i $BC(\mathbb{R}_+, E)$, gdzie E jest ustaloną przestrzenią Banacha.
Rozdział drugi poświęcony jest głównemu pojęciu wykorzystywanemu w dalszej części rozprawy, a mianowicie miarom niezwartości. I tak w podrozdziale 2.1 podana jest aksjomatyczna definicja miar niezwartości wprowadzona przez J. Banasia i K. Goebla. W podrozdziale 2.2 przedstawiono podstawowe własności dwóch klasycznych miar niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa. W podrozdziale 2.3 skonstruowane zostały konkretne miary niezwartości w przestrzeniach c_o (Tw. 2.3.1), c, (wzór (2.5) i (2.6)) oraz l_∞, (wzory (2.7), (2.8), (2.9)). Analogicznie w podrozdziale 2.4 podano wzory na pewne miary niezwartości w przestrzeniach $BC([0,T], E)$, $BC(\mathbb{R}_+, E)$, $BC(\mathbb{R}_+, c_o)$ oraz $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.

Orginalne rezultaty uzyskane przez autorkę znajdują się w rozdziałach trzecim, czwartym, piątym i szóstym.
Głównym wynikiem rozdziału trzeciego jest Twierdzenie 3.5 dotyczące istnienia rozwiązania układu równań całkowych Urysohna w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_o)$ (zob. wzór (3.1), str. 28) przy załozeniach (i)-(x) (zob. str. 28 -31). Technika dowodu polega na pokazaniu ze przy tych załozeniach mozna uzyskać istnienie rozwiązania stosując twierdzenie Schaudera o punkcie stałym do operatora Q skojarzonego z układem (3.1) (zob. str.31). W tym celu autorka pokazuje najpierw ze istnieje kula domknięta B_{r_o} w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_o)$ taka ze $Q(B_{r_o}) \subset B_{r_o}$, a następnie ze istnieje zbiór niepusty, zwarty i wypukły $\Omega \subset B_{r_o}$ taki ze $Q(\Omega) \subset \Omega$ i Q w restrykcji do Ω jest operatorem ciągłym. Z tych faktów i twierdzenia Schaudera o punkcie stałym wynika teza Twierdzenia 3.5. Ponadto Przykład 3.6 pokazuje ze załozenia (i)-(x) z Twierdzenia 3.5 są spełnione przez konkretny (w miarę naturalny) układ równań dany wzorem (3.22), str. 42, co w istotny sposób podnosi wartość Twierdzenia 3.5.

Analogiczną do rozdziału trzeciego strukturę ma rozdział czwarty. Tutaj głów-

nym wynikiem jest Twierdzenie 4.4 dotyczące istnienia rozwiązania nieskończonego układu równań kwadratowych typu Urysohna (zob. wzór (4.1), str. 51)w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Tutaj strategia dowodu polega na zastosowaniu twierdzenia Darbo (zob. Tw. 4.1, str. 51) do operatora Q zdefiniowanego na stronie 54 i miary μ_c^3 określonej wzorem (2.28). W tym celu najpierw doktorantka dowodzi ze istnieje $r_o > 0$ takie ze Q przekształca kulę domkniętą B_{r_o} o promieniu r_o w siebie w sposób ciągły. Następnie dowodzi ze istnieje $k \in (0,1)$ takie ze dla dowolnego $X \subset B_{r_o}$ $\mu_c^3(X) \leqslant k\mu_c^3(QX))$, co pozwala zastosować twierdzenie Darbo. Dodatkowym wynikiem tego rozdziału jest Twierdzenie 4.6 mówiące ze otrzymane w Twierdzeniu 4.4 rozwiązanie jest asymptotycznie stabilne. Ponadto Przykład 4.7 pokazuje ze założenia (i)-(x) z Twierdzenia 3.5 są spełnione przez konkretny (rówiez w miarę naturalny) układ równań dany wzorem (4.26), str. 42, co w istotny sposób podnosi wartość Twierdzenia 4.4.
Pewnym uzupełnieniem rozdziału czwartego jest rozdział piąty, w którym autorka rozwaza układy równań Hammersteina, które są szczególnym przypadkiem układów równań rozwazanych w rozdziale czwartym. Tutaj głównym rezultatem jest analogiczne do Twierdzenia 4.4, Twierdzenie 5.2 udowodnione przy słabszych załozeniach niz Twierdzenie 4.4. Ponadto autorka ilustruje zastosowanie Twierdzenia 5.2 do dowodu istnienia rozwiązania układu równań podanego w Przykładzie 5.4.
Rozdział szósty związany jest z tak zwanym procesem urodzin i śmierci, który ma praktyczne zastosowania m.in. w analizie zjawisk finansowych, zjawisk towarzyszących wybuchowi bomby atomowej i innych (zob. [44,45] w bibliografii rozprawy). Celem rozdziału jest skonstruowanie układu równań rózniczkowych (zob. wzór 6.8, str. 95) oraz równowaznewgo mu układu równań całkowych (zob. wzór 6.11, str. 98) modelującego wspomniany proces urodzin i śmierci. W rozdziale postawiono równiez otwarty problem dotyczący znalezienia przestrzeni ciągowej Banacha lub Frécheta w której układ (6.11) ma rozwiązanie.

Moim zdaniem dowody głównych twierdzeń z rozprawy doktorskiej magister Justyny Madej są trudne technicznie i wymagały od doktorantki duzej sprawności rachunkowej. Ponadto zeby zastosować tw. Darbo do dowodu Twierdzenia 4.4, należało skonstruować odpowiednią miarę niezwartości, którą jest wspomniana wcześniej miara μ_c^3. Oczywiście widać, ze założenia z Twierdzeń 3.5, 4.4 i 5.2 są tak dobrane zeby udało się skorzystać z klasycznych rezultatów o punktach stałych i nie wiadomo na ile są one optymalne, co stanowi pewnien mankament rozprawy. Nie znalazłem tez w rozprawie rozwazań dotyczących mozliwości algorytmicznego wyznaczenia istniejących na mocy Twierdzeń 3.5, 4.4 i 5.2 rozwiązań. Ale moze to wynikać z faktu ze problemy rozwazane w tych twierdzeniach są naprawdę trudne. Istotne jest tez podanie, jak juz wcześniej napisalem, w miarą naturalych przykładów do których mozna zastosować Twierdzenia 3.5, 4.4 i 5.2. Bogata bibliografia rozprawy licząca 93 pozycji świadczy o dobrej orientacji doktorantki w literaturze związanej z tematyką rozprawy. Ponadto w rozdziale szóstym autorka formułuje interesujący nierozwiązany problem nad którym warto w przyszłości pracować. Wypada wspomnieć, że rozprawa jest dobrze zredagowana, co nie jest proste w przypadku trudnych technicznie dowodów. Ponadto magister Justyna Madej jest współautorką trzech publikacji a czwarty artykuł, którego jest równiez współautorką, jest przyjęty do druku.

Biorąc pod uwagę wyżej wymienione argumenty, z pełną odpowiedzialnością

stwierdzam, że rozprawa doktorska magister Justyny Madej spełnia warunki określone w art. 187 Ustawy z dnia 20 lipca 2018 roku /Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce/ (Dz. U. z 2022 r. poz 574 z pózn. zm.).
Zatem wnioskuję o nadanie magister Justynie Madej stopnia naukowego doktora w dyscyplinie matematyka.

Kraków, dnia 11 marca 2025 roku

Prof. dr hab. Grzegorz Lewicki
Profesor zwyczajny w Instytucie Matematyki
Uniwersytetu Jagiellońskiego w Krakowie

Grzegorz Lewicki