Prof. dr hab. Jarosław Grytczuk
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych
Politechnika Warszawska, 00-662 Warszawa
E-mail: jaroslaw.grytczuk@pw.edu.pl

Warszawa, 15.01.2024

Recenzja rozprawy doktorskiej Adriana Michalskiego

Zbiory $(1, 2)$*-dominujące w grafach*

Praca doktorska Adriana Michalskiego dotyczy pewnego problemu dominowania w grafach. *Dominowanie* to obszerna dziedzina teorii grafów mająca liczne powiązania i zastosowania w matematyce i informatyce (np. w teorii *kodów*). Jak wiele zagadnień teorii grafów, historycznie wywodzi się ze sfery popularnych łamigłówek, w tym wypadku dotyczących rozmieszczenia figur na szachownicy. Na przykład, słynny problem królówek (hetmanów) polega na takim ich rozmieszczeniu, aby każde puste pole szachownicy było zagrożone atakiem, tzn. aby którąś z królówek można było w jednym ruchu przesunąć na to pole. Zbiór pól zajętych przez królówki jest wówczas zbiorem *dominującym* w grafie, którego wierzchołkami są pola szachownicy, a krawędzie łączą pola wzajemnie osiągalne jednym ruchem królówki.

Ogólnie, zbiór *dominujący* grafu to taki zbiór wierzchołków, z którego można przedostać się do każdego innego wierzchołka grafu w jednym kroku (wzdłuż krawędzi grafu). W typowym problemie dominowania poszukuje się jak najlepszych ograniczeń na wielkość zbioru dominującego w grafie G, czyli tzw. *liczbę dominującą* grafu, oznaczaną przez $\gamma(G)$. Rozważa się oczywiście całe spektrum typów dominowania, w których narzuca się rozmaite dodatkowe warunki na zbiór dominujący (np. *niezależność*).

Rozprawa Adriana Michalskiego dotyczy pewnej odmiany dominowania wielokrotnego z warunkiem odległości. W ogólności, zbiór D wierzchołków grafu jest (a, b)*-dominujący* jeżeli z każdego wierzchołka spoza zbioru D wiodą ścieżki do dwóch różnych wierzchołków w D, jedna długości co najwyżej a, druga długości co najwyżej b. Autor rozprawy koncentruje się na przypadku $a = 1$, $b = 2$, stanowiącym pierwszą możliwą relaksację tzw. dominowania *dwukrotnego*, odpowiadającego przypadkowi $a = b = 1$, gdzie każdy wierzchołek spoza zbioru D ma co najmniej dwóch różnych sąsiadów w zbiorze D. Odnosząc się do przykładu szachowego, figury powinny być tak rozstawione, aby każde puste pole było zagrożone bezpośrednio przez co najmniej dwie z nich (w przypadku dwukrotnym), a w przypadku $(1, 2)$-dominowania, przez jedną z figur w co najwyżej dwóch ruchach. Okazuje się, że już tak prosta modyfikacja prowadzi do dość nieoczekiwanych rezultatów, z których część omówię nieco dokładniej poniżej. Warto jeszcze dodać, że pojęcie (a, b)-dominowania zostało wprowadzone stosunkowo niedawno, bo w roku 2008, przez czołowych ekspertów w dziedzinie dominowania.

Niech $\gamma_{1,2}(G)$ oznacza wielkość najmniejszego zbioru $(1, 2)$-dominującego w grafie G. W rozdziale 2, stanowiącym wprowadzenie do tematyki, znajdziemy kilka wyników podających dokładne wartości tego parametru dla prostych klas grafów, jak ścieżki, cykle, czy kliki dwudzielne (Wnioski 2.13, 2.16, 2.17). Ponadto dowiadujemy się, że z jednej strony $\gamma_{1,2}(G) = \gamma(G)$ w każdym grafie bez trójkątów i bez liści (Wniosek 2.20), a z drugiej, że różnica $\gamma_{1,2}(G) - \gamma(G)$ może być dowolnie duża (Twierdzenie 2.23). Podobnie rzecz się ma jeśli idzie o tzw. *górną* liczbę dominującą $\Gamma(G)$ zdefiniowaną jako maksymalna wielkość minimalnego (ze względu na zawieranie) zbioru dominującego (Twierdzenie 2.24).

Rozdziały 3 i 4 poświęcone są badaniu zbiorów $(1,2)$-dominujących *właściwych*, czyli takich, które nie są zbiorami dwukrotnie dominującymi (klasa zbiorów $(1,2)$-dominujących zawiera w sobie klasę zbiorów $(1,1)$-dominujących). Analogicznie symbolem $\gamma_{1,\overline{2}}(G)$ oznacza się moc najmniejszego zbioru $(1,2)$-dominującego właściwego. Okazuje się, że dla wszystkich grafów spójnych, oprócz grafów pełnych, zachodzi równość $\gamma_{1,2}(G) = \gamma_{1,\overline{2}}(G)$ (Twierdzenie 3.3). Natomiast dla górnych liczb dominowania różnica (w obie strony) pomiędzy $\Gamma_{1,\overline{2}}(G)$ i $\Gamma(G)$ może przybierać dowolną wartość (Twierdzenie 3.7). Ciekawy są też wyniki (Twierdzenia 3.8 i 3.9) pokazujące, że wszystkie rozważane liczby dominowania mogą być równe dowolnej liczbie naturalnej n, bądź różnić się między sobą wzajemnie o wartość wielomianową zmiennej n. Rozdział 4 zawiera kilka rezultatów dotyczących minimalnego rozmiaru przekroju zbiorów $(1,1)$-dominujących i $(1,2)$-dominujących właściwych. Parametr ten został wyznaczony dla kilku prostych klas grafów (ścieżki, cykle, kliki dwudzielne), a także dla dość szczególnego typu drzew (Twierdzenia 4.4, 4.5, 4.6 i 4.8). Ponadto w Twierdzeniu 4.9 podano dość skomplikowany warunek konieczny dla drzew, na to aby parametr ten wynosił zero.

Ostania, moim zdaniem najciekawsza część rozprawy (rozdział 5) dotyczy niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w produktach grafów. Zbiór wierzchołków grafu jest *niezależny* jeżeli żadne dwa wierzchołki ze zbioru nie są połączone krawędzią. W przykładzie szachowym, królówki powinny być tak rozstawione, aby każde puste pole było zagrożone, ale żeby żadne dwie królówki nie atakowały siebie nawzajem. W Twierdzeniach 5.6 i 5.7 podano ciekawe warunki konieczne i wystarczające dla produktu *tensorowego* i produktu *silnego* dwóch grafów spójnych na istnienie zbioru niezależnego $(1,2)$-dominującego. W pierwszym przypadku zachodzi to prawie zawsze, za wyjątkiem sytuacji gdy jeden ze składników jest pojedynczą krawędzią. W drugim, wtedy gdy składniki zawierają odpowiednie niezależne zbiory dominujące. Kolejne wyniki (Twierdzenia 5.11, 5.12 i 5.13) podają pełną charakteryzację zbiorów $(1,2)$-dominujących i niezależnych zbiorów tego typu w tzw. *G-złączeniu* grafów oraz warunki na ich istnienie. Ostatni fragment rozprawy zawiera szereg podobnych rezultatów dla tzw. uogólnionej *korony* grafów (Twierdzenia 5.20 i 5.22).

Dowody wszystkich rezultatów pracy są elementarne ale zróżnicowane pod względem trudności technicznej. Obok dość prostych spostrzeżeń znajdziemy kilka bardziej wyrafinowanych konstrukcji czy rozumowań wymagających sporej sprawności warsztatowej i pewnej pomysłowości. Warto podkreślić, że większość rezultatów została już opublikowana w znanych czasopismach bądź zaprezentowana na konferencjach.

Rozprawa jest napisana z dużą starannością i dbałością o szczegóły. Zawiera odpowiednią liczbą przykładów, komentarzy, rysunków, dobrze ilustrujących niełatwą miejscami materię. W szczególności, podoba mi się umieszczenie w końcowej części pracy przemyśleń autora o możliwych dalszych kierunkach badań w tematyce rozprawy, choć brakuje mi tu ciągle jakiegoś jednego, centralnego problemu otwartego, w stylu słynnej hipotezy Vizinga (o liczbie dominującej produktu Kartezjańskiego grafów).

Podsumowując stwierdzam, że praca Adriana Michalskiego to solidny doktorat zawierający szereg nowych i wartościowych rezultatów dotyczących ciekawego nurtu w klasycznej tematyce dominowania w grafach. Ich uzyskanie świadczy o dobrym opanowaniu warsztatu badawczego i determinacji poznawczej autora. Uważam zatem, że przedłożona rozprawa doktorska spełnia wymogi ustawowe i wnoszę o dopuszczenie Adriana Michalskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

J. Grytczuk

Jarosław Grytczuk