Prof. dr hab. Tadeusz Kuczumow
Instytut Matematyki UMCS
pl. Marii Curie-Skłodowskiej 1
20-031 Lublin
tadek@hektor.umcs.lublin.pl

Lublin, 20. 02. 2025 r.

Recenzja rozprawy doktorskiej pani mgr Justyny Madej „Technika miar niezwartości w zastosowaniu do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym"

Opiniowana praca doktorska pani mgr Justyny Madej składa się ze wstępu, sześciu rozdziałów i na koniec bardzo obszernej bibliografi. Poświęcona jest problemowi istnienia rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna lub nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Hammersteina. W ostatnim rozdziale autorka wprowadza nowy nieskończony układ równań różniczkowych modelujący proces urodzin i śmierci i związany z nim nieskończony układ równań całkowych.

Wyniki recenzowanej pracy doktorskiej zostały opublikowane w 3 pracach autorki tej rozprawy o numerach w bibliografii [7], [14], [15] i [16]. Z oświadczenia autorki rozprawy wynika, że miała ona decydujący wpływ (od 45% do do 60%) na merytoryczną zawartość tych prac.

W pierwszym rozdziale autorka podaje podstawowe definicje i pojęcia używane w dalszych częściach pracy, a w szczególności przypomina przestrzenie funkcyjne Banacha

$BC(\mathbb{R}_+, c_0) = BC_0$, $BC(\mathbb{R}_+, c)$ i $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty) = BC_\infty$. Są to przestrzenie ciągłych i ograniczonych funkcji określonych na półprostej $\mathbb{R}_+$ i o wartościach odpowiednio w c_0, c i l_∞. Przestrzenie te mają standardową normę równą supremum norm wartości funkcji.

W drugim rozdziale doktorantka przypomina ogólne pojęcie miary niezwartości w przestrzeni Banacha i podaje definicje miar niezwartości χ_0 w BC_0 i μ^3 w BC_∞. Miary te są zastosowane w następnych rozdziałach w dowodach egzystencjalnych.

Przytoczę teraz 3 główne twierdzenia rozprawy kolejno z rozdziałów 3, 4, 5 (nie będę tutaj przytaczać szczegółowych założeń występujących w tych twierdzeniach).

Twierdzenie 3.5 *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(x). Wtedy nieskończony układ równań całkowych Urysohna określony wzorem 3.1*

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), ...) \int_0^\infty u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), ...) d\tau$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ *i* $n = 1, 2, ...$ *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* BC_0.

Twierdzenie 4.4 *Rozważmy nieskończony układ równań całkowych Urysohna określony wzorem 4.1*

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), ...) \int_0^\infty u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), ...) d\tau$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ *i* $n = 1, 2, ...$ *oraz załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(x). Wtedy układ ten ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* BC_∞. *Ponadto rozwiązania tego układu mają tę własność, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji tworzących te rozwiązania dąży do zera w nieskończoności.*

Twierdzenie 5.2 *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(xi). Wtedy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Hammersteina 5.1*

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), ...) \int_0^\infty g_n(t,\tau) h_n(t,\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), ...) d\tau$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ *i* $n = 1, 2, ...$ *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* BC_∞*. Ponadto rozwiązania układu (5.1) mają tę własność, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji należących do tych rozwiązań dąży do zera w nieskończoności.*

W twierdzeniach 3.5 i 4.4 mamy to samo równanie Urysona, ale rozpatrywane w innych przestrzeniach funkcyjnych i dlatego częściowo zmienione są założenia i tym samym są też inne dowody tych twierdzeń.

W Twierdzeniu 5.2 mamy szczególny przypadek układu równań z Twierdzenia 4.4 (w miejsce operatora Urysohna jest operator Hammersteina). Mamy więc w twierdzeniu 5.2 słabsze założenia.

Należy tutaj podkreślić, że do każdego z powyższych twierdzeń egzystencjalnych dodano nietrywialny przykład układu spełniającego założenia tego twierdzenia.

W ostatnim rozdziale autorka wprowadza nowy nieskończony układ równań różniczkowych modelujący proces urodzin i śmierci i związany z nim nieskończony semiliniowy układ okołoprzekątniowy równań różniczkowych (całkowych)

$$c'(t) = Ac(t) + f(t, c(t))$$

$$\left(c(t) = A \int_0^t c(s) ds + \int_0^t f(s, c(s)) ds \right),$$

gdzie $t \in [0, T]$ (lub $t \in [0, \infty]$), $c(t)$ jest wektorem w przestrzeni ciągów funkcyjnych, a A jest stałą macierzą postaci

$$A = \begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda & -(\lambda+2\mu) & 3\mu & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda & -(\lambda+3\mu) & 4\mu & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}.$$

Zauważmy tutaj, że w przypadku procesów urodzin i śmierci rozważano dotychczas analogiczy skończony układ różniczkowych (całkowych).

Okazuje się jednak, że w nieskończonym przypadku operacja liniowa A nie przekształca np. l_∞ w l_∞. Wystarczy bowiem wziąć wektor $(1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 1, ...)$ aby się o tym przekonać (oszacowania pokazane na str. 97 (linie 13 - 22) dotyczące operatora Q są złe ponieważ są od góry a nie od dołu). Stąd w rozprawie sformułowany jest następujący otwarty problem:

Znaleźć ciągową przestrzeń Banacha (lub Frécheta) oraz sformułować odpowiednio założenia gwarantujące, że nieskończony układ równań różniczkowych

$$c'(t) = Ac(t) + f(t, c(t))$$

lub nieskończony układ równań całkowych

$$c(t) = A\int_0^t c(s)ds + \int_0^t f(s, c(s))ds$$

ma rozwiązanie należące do wspomnianej przestrzeni Banacha (Frécheta).

Przedstawiona do recenzji rozprawa doktorska poświęcona zagadnieniom związanym z nieskończonymi układami równań całkowych jest z pewnością dużym osiagnięciem matematycznym nie tylko w porównaniu z wcześniej uzyskanymi przez innych matematyków rezultatami, ale także przez wyznaczenie nowych obszarów badań, tzn. badań związanych z nieskończonym układem równań różniczkowych modelującym proces urodzin i śmierci i stowarzyszonym z nim nieskończonym układem równań całkowych. Doktorantka wykazała się w w swojej rozprawie bardzo dużą wiedzą i dojrzałością naukową, tzn. znajomością różnych nietrywialnych technik dowodowych i pokazaniem bardzo ładnych przykładów układów spełniających założenia udowodnionych przez nią twierdzeń egzystencjalnych.

Konkluzja: Podsumowując stwierdzam, że recenzowana praca jest starannie zredagowana, zawiera nietrywialne oryginalne wyniki i w pełni spełnia wymogi Ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. „Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce" i innych przepisów z nią związanych (Dz.U. 574/2022 z późniejszymi zmianami). Dlatego wnioskuję o dopuszczenie pani mgr Justyny Madej do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Dodatkowo uwzględniając bardzo dużą wartość naukową rozprawy doktorskiej składam wniosek o uznanie rozprawy za wyróżniającą.

Tadeusz Kuczumow

Prof. dr hab. Tadeusz Kuczumow