Załącznik do uchwały nr 13/2026 Senatu Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza z dnia 26 marca 2026 r.

Uzasadnienie wniosku o przyznanie nagrody Prezesa Rady Ministrów dla dr Justyny Madej za wyróżniającą się rozprawę doktorską pt. „Technika miar niezwartości w zastosowaniu do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych na przedziale nieograniczonym".

Senat Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza po zapoznaniu się z wnioskiem wraz z dokumentacją oraz pozytywnymi rekomendacjami dwóch Profesorów, których zainteresowania naukowe mieszczą się w dyscyplinie matematyka – Pana prof. dr. hab. Stanisława Prusa i Pana dr. hab. Dariusza Cichonia – stwierdza, że wniosek spełnia wymagania określone w rozporządzeniu Prezesa Rady Ministrów z dnia 15 lipca 2024 r. w sprawie kryteriów i trybu przyznawania nagród Prezesa Rady Ministrów oraz wzoru wniosku o ich przyznanie (Dz. U. z 2024r., poz. 1099).

Przedmiotem pracy doktorskiej Kandydatki, której dotyczy wniosek jest oryginalne rozwiązanie istotnego problemu naukowego. Rozwiązanie będące przedmiotem rozprawy, ma wybitnie nowatorski i innowacyjny charakter oraz prezentuje wysoki poziom wiedzy teoretycznej Kandydatki w dyscyplinie naukowej matematyka oraz wyróżniający poziom Jej umiejętności w zakresie samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Rozprawa doktorska została wysoko oceniona i wyróżniona przez Radę Dyscypliny Matematyka Politechniki Rzeszowskiej im. Ignacego Łukasiewicza.

Równania całkowe, podobnie jak równania różniczkowe stanowią podstawowe narzędzie opisu wielu praw przyrody. Równania całkowe znajdują zastosowanie w takich dziedzinach jak mechanika, termodynamika, astronomia, hydrodynamika, fizyka matematyczna, ekonomia, biologia. Ponadto wiele problemów sformułowanych za pomocą równań różniczkowych — np. w teorii obwodów elektrycznych czy kinetyce chemicznej — można przekształcić do postaci równań całkowych. Zależność ta działa również w drugą stronę, co pokazuje, że teoria równań całkowych jest ściśle powiązana z teorią równań różniczkowych i stanowi istotne narzędzie w analizie współczesnych modeli matematycznych. W szczególności nieskończone układy równań całkowych pojawiają się naturalnie w modelowaniu złożonych procesów występujących m.in. w teorii sieci neuronowych, chemii czy mechanice.

Rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu dwóch rodzajów nieskończonych układów równań całkowych. W szczególności poszukujemy rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Hammersteina i Urysohna rozważanych na przedziale nieograniczonym. W niniejszej rozprawie przedziałem tym jest półprosta rzeczywista $R_+ = [0, \infty)$. W pracy przedstawiono twierdzenia egzystencjalne dla wspomnianych układów równań całkowych, ich dowody oraz przykłady zastosowań. Główne rezultaty zawarte w rozprawie zostały opublikowane w pracach [1-4], z których jedna jest w trakcie recenzji. Ze względu na to, iż rozważane układy równań całkowych są układami nieskończonymi, to powoduje, że rozwiązania tych układów są ciągami funkcyjnymi spełniającymi pewne, założone z góry warunki w nieskończoności. W pracy rozważamy dwa takie warunki. Mianowicie, poszukujemy rozwiązań rozważanych układów, które znikają w nieskończoności lub są asymptotycznie stabilne. W tym celu nakładamy na rozważane nieskończone układy równań całkowych odpowiednie założenia, które gwarantują nie tylko istnienie rozwiązań, ale także wykazanie, że rozwiązania te spełniają jeden ze wspomnianych wyżej warunków. Główne rezultaty przedstawione w rozprawie doktorskiej są zawarte w twierdzeniach 3.5, 4.4 oraz 5.2.

W dowodach przedstawionych twierdzeń wykorzystujemy odpowiednio do tych celów skonstruowane miary niezwartości, czyli funkcje pozwalające mierzyć stopień niezwartości zbioru. Technika miar niezwartości pozwala nam zastosować klasyczne twierdzenie Schaudera o punkcie stałym lub dobrze znane twierdzenie typu Darbo powiązane w swej naturze z tą techniką. W pracy wykorzystujemy ujęcie aksjomatyczne miary niezwartości, ponieważ pozwala nam ono na konstrukcje miar o zadanych własnościach oraz na rozważanie przestrzeni, dla których nie znamy odpowiednich kryteriów relatywnej zwartości zbiorów.

Rozważane w rozprawie układy równań całkowych są układami równań kwadratowych, czyli mających postać operatora superpozycji wymnożonego przez operator całkowy. To wymaga od nas wyboru do badań odpowiednich przestrzeni funkcyjnych zamkniętych ze względu na punktowe mnożenie funkcji, czyli algebr Banacha. Przedstawione w pracy rozważania prowadzone są w przestrzeniach Banacha złożonych z funkcji określonych, ciągłych i ograniczonych na półosi R_+ o wartościach w przestrzeniach ciągowych Banacha. Dokładniej, dla ustalonej przestrzeni Banacha E rozważamy przestrzeń Banacha $BC(R_+, E)$ złożoną ze wszystkich funkcji $x: R_+ \to E$ ciągłych i ograniczonych na R_+.

Każda funkcja $x \in \mathrm{BC}(\mathrm{R}_+, E)$ jest zatem ciągiem funkcyjnym postaci

$$x = x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), \dots .)$$

takim, że dla ustalonego $t \in R_+ (x_n(t))$ jest ciągiem liczbowym należącym do przestrzeni Banacha E. W przestrzeni $BC(R_+, E)$ określamy klasyczną normę supremum:

$$||x||_\infty = \sup\left\{||x(t)||_E : t \in R_+\right\}, dla \;\; x \in BC(R_+, E).$$

Jako przestrzeń Banacha E przyjmujemy przestrzeń c_0 złożoną z ciągów liczb rzeczywistych zbieżnych do zera lub przestrzeń l_∞ złożoną ze wszystkich ciągów ograniczonych otrzymując odpowiednio przestrzenie $BC(R_+, c_0)$ oraz $BC(R_+, l_\infty)$.

Zasadnicze rezultaty badań zawarte są w rozdziałach 3, 4, 5 oraz 6.

W trzecim rozdziale rozprawy rozważamy przestrzeń $BC(R_+, c_0)$ i badamy istnienie rozwiązań następującego nieskończonego układu kwadratowych równań całkowych Urysohna

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^\infty u_n(t), \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau \quad (1)$$

$dla\ t \in R_+\ i\ n = 1,2, \dots$.

Wykazujemy, że przy odpowiednich założeniach układ ten ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ w przestrzeni $BC(R_+, c_0)$.

W dowodzie przedstawionego twierdzenia egzystencjalnego wykorzystujemy odpowiednią miarę niezwartości w przestrzeni $BC(R_+, c_0)$, która umożliwia nam skonstruowanie odpowiedniego zwartego podzbioru przestrzeni Banacha $BC(R_+, c_0)$, a następnie wykorzystanie twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.

Ponadto ujęcie aksjomatyczne pojęcia miary niezwartości pozwala nam na uzyskanie dodatkowych informacji na temat rozwiązań rozważanego układu. Mianowicie, wykorzystując wybrane własności jądra rozważanej miary wnioskujemy, że rozwiązania układu (1) jako elementy jądra dążą w nieskończoności do tera z tą samą prędkością. Otrzymujemy zatem założony z góry warunek o rozwiązaniach znikających w nieskończoności.

Czwarty rozdział rozprawy także poświęcamy badaniu rozwiązań nieskończonego układu kwadratowych równań całkowych Urysohna (1) z tą różnicą, że rozważamy przestrzeń Banacha $BC(R_+, l_\infty)$.

Prezentujemy założenia, przy których układ ten ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni $BC(R_+, l_\infty)$.

Dowód przedstawionego w pracy twierdzenia egzystencjalnego wykorzystuje twierdzenie Darbo o punkcie stałym oraz odpowiednią miarę niezwartości w przestrzeni $BC(R_+, l_\infty)$.

Ponadto, dzięki odpowiednio dobranej mierze niezwartości i własnościom jej jądra możemy wywnioskować, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji będących rozwiązaniami układu (1) dąży w nieskończoności do zera. Łącząc tę własność z pojęciem asymptotycznej stabilności otrzymujemy, że wspomniane rozwiązania są asymptotycznie stabilne.

Piąty rozdział pracy poświęcony jest badaniu istnienia rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Hammersteina mających następującą postać

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^\infty g_n(t, \tau) h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau, \quad (2)$$

$gdzie\ t \in R_+\ oraz\ n = 1,2, \dots$.

Rozważania prowadzimy w przestrzeni $BC(R_+, l_\infty)$.

Ze względu na to, że równania całkowe Hammersteina stanowią szczególny przypadek równań całkowych Urysohna oraz rozważania prowadzone są w tej samej przestrzeni co poprzednio, otrzymujemy szczególny przypadek rozdziału czwartego. W związku z tym możemy nałożyć na rozważany układ słabsze założenia, które są łatwiejsze do weryfikacji w konkretnych przykładach.

Pokazujemy, że przy odpowiednich założeniach nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Hammersteina (2) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni $BC(R_+, l_\infty)$.

Ze względu na zastosowanie tej samej miary niezwartości co w poprzednim rozdziale, w tym przypadku także otrzymujemy rozwiązania asymptotycznie stabilne.

Warto podkreślić fakt, że wszystkie przedstawione w rozprawie twierdzenia egzystencjalne są zilustrowane odpowiednimi przykładami pokazującymi, że mogą one być w naturalny sposób z powodzeniem stosowane.

W pracy zwracamy dużą uwagę na pokazanie, że nieskończone układy równań całkowych znajdują zastosowanie w różnych zagadnieniach. W związku z tym ostatni, szósty rozdział pracy poświęcamy na omówienie konkretnego przykładu zastosowania nieskończonego układu równań całkowych do modelowania procesu stochastycznego urodzin i śmierci. Wynikiem tych rozważań jest przedstawienie pewnego problemu otwartego dotyczącego istnienia rozwiązań niekończonego układu nieliniowych równań całkowych (lub różniczkowych) otrzymanego podczas modelowania procesu stochastycznego urodzin i śmierci.

Mianowicie, otrzymujemy następujący nieskończony układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\lambda c_1(t) + \mu c_2(t) + f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \\ c_2'(t) = \lambda c_1(t) - (\lambda + 2\mu) c_2(t) + 3\mu c_3(t) + f_2(t, c_1(t), c_2(t), \dots) \\ c_3'(t) = \lambda c_2(t) - (\lambda + 3\mu) c_3(t) + 4\mu c_4(t) + f_3(t, c_1(t), c_2(t), \dots) \\ \vdots \\ c_n'(t) = \lambda c_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) c_n(t) + (n+1)\mu c_{n+1}(t) + f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \qquad dla\ n = 2,3,\dots. \end{cases} (3)$$

oraz równoważny mu następujący nieskończony układ równań całkowych

$$c(t) = A\int_0^t c(s)ds + \int_0^t f\big(s, c(s)\big)ds, (4)$$

gdzie $t \in R_+, A$ jest odpowiednią macierzą stałą oraz $c(t)$ jest wektorem w przestrzeni ciągów funkcyjnych następującej postaci

$$c(t) = \left(c_n(t)\right) = (c_1(t), c_2(t), \dots).$$

Podsumowując, w rozprawie przedstawiliśmy następujący otwarty problem: Znaleźć ciągową przestrzeń Banacha (lub Frécheta) oraz sformułować odpowiednie założenia gwarantujące, że nieskończony układ równań różniczkowych (3) lub nieskończony układ równań całkowych (4) ma rozwiązanie należące do wspomnianej przestrzeni Banacha (Frécheta). Rozwiązanie powyższego problemu w odpowiedniej przestrzeni Frécheta przedstawiono w pracy:

S. Dudek, L. Olszowy, The Solvability of an Infinite System of Nonlinear Integral Equations Associated with the Birth-And-Death Stochastic Process, Symmetry 2025, 17, 757.

Rezultaty rozprawy rozszerzają i uogólniają znane w literaturze twierdzenia dotyczące układów równań całkowych oraz wnoszą istotny wkład do rozwoju teorii nieskończonych układów równań funkcyjnych. Wyniki badań zostały przygotowane w formie publikacji naukowych w recenzowanych czasopismach międzynarodowych.

Ze względu na oryginalność uzyskanych rezultatów, wysoki poziom merytoryczny oraz znaczenie dla dalszego rozwoju badań w zakresie równań całkowych i analizy funkcjonalnej, rozprawa doktorska stanowi wyróżniający się wkład w rozwój matematyki i w pełni zasługuje na uhonorowanie Nagrodą Prezesa Rady Ministrów.