Politechnika Rzeszowska
im. Ignacego Łukasiewicza
WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

Justyna Szczupiel

Rozwiązania nieliniowych kwadratowych równań całkowych Hammersteina-Stieltjesa zbieżne w nieskończoności do granic właściwych

Promotor: prof. dr hab. Józef Banaś

Rozprawa doktorska

dyscyplina naukowa matematyka

Rzeszów 2026

Składam serdeczne podziękowania Panu Promotorowi
prof. dr. hab. Józefowi Banasiowi
za nieocenioną pomoc, liczne wskazówki,
cierpliwość oraz poświęcony czas.

Spis treści

Wstęp **4**

1. Wiadomości pomocnicze **7**

1.1. Oznaczenia i podstawowe pojęcia 7

1.2. Pewne przestrzenie Banacha 8

2. Funkcja o wahaniu ograniczonym i całka Riemanna-Stieltjesa **11**

2.1. Funkcja o wahaniu ograniczonym i całka Riemanna-Stieltjesa na przedziale ograniczonym 12

2.2. Wahanie funkcji na przedziale nieograniczonym 14

2.3. Całka Riemanna-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym 29

3. Miary niezwartości **33**

3.1. Ogólna teoria miar niezwartości. Twierdzenie Darbo 34

3.2. Miary niezwartości w przestrzeniach $C([0,T])$ i $BC(\mathbb{R}_+)$ 37

4. Rozwiązania nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Hammersteina-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym znikające w nieskończoności **40**

5. Rozwiązania zbieżne w nieskończoności do granic właściwych dla nieliniowego kwadratowego równania całkowego Hammersteina-Stieltjesa **53**

6. Podsumowanie i dalsze kierunki badań **67**

Bibliografia **69**

Wstęp

Równania całkowe stanowią ważny dział analizy matematycznej, który znajduje zastosowania w wielu zagadnieniach teoretycznych oraz w modelowaniu różnych procesów i zjawisk [22, 23, 24, 27, 39, 58]. Pojawiają się między innymi w mechanice, fizyce, biologii, ekonomii oraz wielu innych dziedzinach nauki. Teoria równań całkowych jest ściśle związana z teorią równań różniczkowych. Wiele problemów opisanych za pomocą równań różniczkowych można bowiem sprowadzić do odpowiednich równań całkowych i odwrotnie [51].

Rozwój teorii równań całkowych związany jest z dokonaniami wielu matematyków. Już w XIX wieku zagadnienia prowadzące do równań całkowych pojawiły się w badaniach N. H. Abela, J. Fouriera czy P. S. Laplace'a. Istotny rozwój tego działu nastąpił na przełomie XIX i XX wieku, głównie dzięki pracom I. Fredholma dotyczącym liniowych równań całkowych [33, 34] oraz V. Volterry [2]. Z czasem coraz więcej uwagi poświęcano również nieliniowym równaniom całkowym. Bardzo istotny był tutaj wkład A. Hammersteina, który badał pewną klasę takich równań, nazwanych później jego nazwiskiem [38].

Współcześnie teoria równań całkowych jest nadal rozwijana i stanowi ważny obiekt zainteresowań matematyków. Obejmuje wiele rodzajów równań, liniowych oraz nieliniowych [4]. Szczególne miejsce zajmują równania Hammersteina i Urysohna oraz ich różne uogólnienia [5, 12, 15, 16, 25, 27, 31, 57]. Jednym z takich uogólnień są równania, w których występuje całka Riemanna-Stieltjesa. Umożliwia ona całkowanie względem odpowiednio dobranej funkcji. W tym kontekście bardzo ważną rolę odgrywają funkcje o wahaniu ograniczonym, dla których można sformułować wygodne warunki istnienia całki Riemanna-Stieltjesa.

W badaniach nad równaniami całkowymi podstawowym zagadnieniem jest sformułowanie warunków gwarantujących istnienie ich rozwiązań. W przypadku równań nieliniowych często nie jest możliwe wyznaczenie rozwiązań w postaci jawnej, dlatego istotne są metody umożliwiające wykazanie ich istnienia bez konieczności wyznaczania konkretnych wzorów. Do metod tych należą twierdzenia o punktach stałych odpowiednich operatorów.

Równie ważnym narzędziem wykorzystywanym w teorii równań całkowych są miary niezwartości. Początki teorii miar niezwartości związane są z pracami K. Kuratowskiego, który w 1930 roku wprowadził pierwszą z nich [43]. Istotny wkład w rozwój tej teorii wniósł również G. Darbo, który w 1955 roku sformułował twierdzenie o punkcie stałym,

stanowiące uogólnienie klasycznego twierdzenia Schaudera [30]. W kolejnych latach teoria miar niezwartości była rozwijana przez wielu matematyków i znalazła liczne zastosowania w badaniach nad istnieniem rozwiązań nieliniowych równań całkowych i różniczkowych [11, 19, 29, 40, 41, 52].

Szczególnie interesujące są zagadnienia dotyczące równań całkowych określonych na przedziałach nieograniczonych. W takich przypadkach, oprócz samej kwestii istnienia rozwiązań, istotne jest pytanie o ich zachowanie w nieskończoności. Można na przykład poszukiwać rozwiązań zbieżnych do zera, rozwiązań posiadających skończone granice w nieskończoności lub spełniających inne warunki asymptotyczne [10, 26]. Badanie owych własności wymaga skonstruowania odpowiednich przestrzeni funkcyjnych oraz zastosowania narzędzi pozwalających uwzględnić zachowanie funkcji w nieskończoności.

Celem niniejszej rozprawy jest ustalenie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań nieliniowych kwadratowych równań całkowych Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa, określonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. W szczególności rozważane są rozwiązania zbieżne w nieskończoności do zera oraz do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru.

Głównym przedmiotem badań przedkładanej pracy jest równanie całkowe postaci

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t, s)h(s, x(s))d_sK(t, s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Funkcje występujące w równaniu spełniają odpowiednie założenia przedstawione w dalszych częściach pracy. Badania prowadzone są w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$, złożonej ze wszystkich funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$, wyposażonej w normę supremum. Wybór tej przestrzeni związany jest zarówno z postacią równania, jak i z własnościami asymptotycznymi poszukiwanych rozwiązań. Podstawowymi narzędziami stosowanymi w dowodzie twierdzeń egzystencjalnych są odpowiednio dobrane miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ oraz twierdzenie Darbo o punkcie stałym. Dzięki tym narzędziom zagadnienie istnienia rozwiązań można sprowadzić do badania własności operatora związanego z rozważanym równaniem całkowym.

Istotnym elementem prowadzonych w tej pracy badań jest również wykorzystanie własności funkcji o wahaniu ograniczonym oraz całki Riemanna-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym. W szczególności przyjęte założenia umożliwiają rozpatrywanie całek Riemanna-Stieltjesa względem funkcji o wahaniu ograniczonym, bez konieczności zakładania ich monotoniczności.

Niniejsza rozprawa składa się z części wprowadzającej, zawierającej podstawowe pojęcia i fakty pomocnicze oraz części poświęconej głównym rezultatom dotyczącym istnienia rozwiązań rozważanego równania całkowego.

W pierwszym rozdziale zostały wprowadzone podstawowe oznaczenia i pojęcia wykorzystywane w dalszej części pracy. Omówiono pewne zagadnienia z analizy funkcjonalnej, w szczególności przestrzenie metryczne, unormowane i przestrzenie Banacha. Szczególną uwagę poświęcono przestrzeniom funkcji ciągłych na przedziałach ograniczonych oraz przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Przedstawiono też wybrane własności tych przestrzeni, istotne w dalszych rozważaniach.

Kolejny rozdział poświęcony jest teorii miar niezwartości. Przedstawiono w nim klasyczne miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa, a także aksjomatyczną definicję pojęcia miary niezwartości. Omówiono podstawowe własności wspomnianych miar, jak również przedstawiono wybrane miary niezwartości w opisanych wcześniej przestrzeniach Banacha. Szczególne znaczenie mają miary uwzględniające zachowanie rodzin funkcji w nieskończoności, używane w dowodach przedstawionych w pracy twierdzeń egzystencjalnych.

W dalszej części pracy przedstawiono własności funkcji o wahaniu ograniczonym oraz całki Riemanna-Stieltjesa. Rozważania obejmują zarówno przedziały ograniczone, jak i nieograniczone, ze szczególnym uwzględnieniem przedziału $\mathbb{R}_+$. Omówiono podstawowe własności wahania funkcji oraz warunki gwarantujące istnienie całki Riemanna-Stieltjesa na $\mathbb{R}_+$. Wyniki te stanowią podstawę do rozważania całek występujących w równaniach całkowych Hammersteina-Stieltjesa.

Główna część pracy, umieszczona w rozdziałach czwartym i piątym, poświęcona jest zagadnieniu istnienia rozwiązań nieliniowego kwadratowego równania całkowego Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa. Najpierw przedstawiono założenia, przy których istnieje co najmniej jedno rozwiązanie znikające w nieskończoności. W dowodzie zastosowano odpowiedni operator określony w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, miarę niezwartości oraz twierdzenie Darbo o punkcie stałym. Wynik ten zilustrowany został przykładem. Następnie rozważania rozszerzono na klasę rozwiązań zbieżnych w nieskończoności do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru. W tym celu wykorzystano odpowiednią miarę niezwartości, uwzględniającą badane własności asymptotyczne. Udowodniony rezultat zilustrowano również kilkoma przykładami.

Rozprawę kończy podsumowanie otrzymanych wyników oraz wskazanie możliwych kierunków dalszych badań.

Główne wyniki przedstawione w rozdziałach czwartym i piątym rozprawy opierają się na rezultatach zawartych w pracach [17, 18].

Rozdział 1
Wiadomości pomocnicze

W rozdziale tym wprowadzimy podstawowe oznaczenia i pojęcia, którymi będziemy posługiwać się w dalszej części pracy. Ponadto opiszemy wybrane przestrzenie Banacha, w których prowadzone będą nasze rozważania, oraz przypomnimy pewne ich własności istotne dla dalszych zastosowań, ze szczególnym uwzględnieniem relatywnej zwartości zbiorów w tych przestrzeniach.

1.1. Oznaczenia i podstawowe pojęcia

Na początku wprowadzimy podstawowe oznaczenia i pojęcia, którymi będziemy posługiwać się w dalszej części pracy.

Tradycyjnie, przez $\mathbb{R}$ oznaczamy zbiór liczb rzeczywistych, przez $\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych, zaś symbol $\mathbb{R}_+$ oznacza przedział $[0, \infty)$.

Niech M będzie zbiorem niepustym, zaś funkcja $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ - metryką określoną na zbiorze M. Parę (M, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

Niech teraz E będzie przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych. Jeżeli w przestrzeni E określona jest norma $||\cdot||_E$, to parę $(E, ||\cdot||_E)$ nazywamy przestrzenią unormowaną. Jeżeli ponadto przestrzeń ta jest zupełna względem metryki wyznaczonej przez normę, tj. $d(x, y) = ||x - y||_E$ dla $x, y \in E$, to nazywamy ją przestrzenią Banacha. Element zerowy przestrzeni E oznaczać będziemy przez θ.

Dla dowolnego $x \in E$ oraz $r > 0$ przez $B(x, r) = \{y \in E : ||x - y||_E < r\}$ oznaczać będziemy kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu r. W szczególności, kulę o środku w punkcie θ i promieniu r oznaczać będziemy przez B_r. Kulę o promieniu $r = 1$ nazywamy kulą jednostkową.

Niech ponadto $X \neq \emptyset$ będzie podzbiorem przestrzeni E. Przez $B(X, r)$ oznaczać będziemy kulę o środku w zbiorze X i promieniu r, tzn.

$$B(X, r) = \bigcup_{x \in X} B(x, r) = \{y \in E : \operatorname{dist}(y, X) < r\},$$

zaś $\operatorname{dist}(y, X)$ to odległość punktu y od zbioru X określona następująco

$$\operatorname{dist}(y, X) = \inf \{||y - x||_E : x \in X\}.$$

Kule domknięte oznaczamy odpowiednio przez $\overline{B}(x, r)$, $\overline{B_r}$, $\overline{B}(X, r)$.

Rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E oznaczać będziemy przez $\mathfrak{M}_E$, natomiast symbol $\mathfrak{N}_E$ oznacza jej podrodzinę, złożoną ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych.

Ponadto przez $\overline{X}$, conv X oraz Conv$X$ oznaczamy odpowiednio domknięcie, otoczkę wypukłą i domkniętą otoczkę wypukłą zbioru X.

Jeżeli ponadto zbiór X jest ograniczony, to jego średnicę oznaczamy przez diam$X$ i definiujemy następująco

$$\text{diam}X = \sup\{||x-y||_E : x, y \in X\}.$$

Dla dowolnych niepustych zbiorów $X, Y \subset E$ klasyczne operacje algebraiczne definiujemy następująco

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\},$$
$$\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wprowadzimy jeszcze pojęcie odległości Hausdorffa. Dla dowolnych zbiorów $X, Y \in \mathfrak{M}_E$ określamy

$$d_H(X,Y) = \inf\{r > 0 : X \subset B(Y,r)\}, \quad d_H(Y,X) = \inf\{r > 0 : Y \subset B(X,r)\},$$
$$D_H(X,Y) = \max\{d_H(X,Y), d_H(Y,X)\}.$$

Wielkości $d_H(X,Y)$ i $D_H(X,Y)$ nazywamy odpowiednio niesymetryczną i symetryczną odległością Hausdorffa między zbiorami X i Y.

1.2. Pewne przestrzenie Banacha

Omówimy teraz wybrane przestrzenie Banacha, których używać będziemy w dalszych rozważaniach [32, 49]. Rozważane w pracy przestrzenie określone są nad ciałem liczb rzeczywistych.

Pierwszą z nich jest przestrzeń funkcji ciągłych, określonych na przedziale $[0,T]$, gdzie $T > 0$, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych, tj. funkcji $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, ciągłych na przedziale $[0,T]$. Przestrzeń tę oznaczamy symbolem $C([0,T])$ i wprowadzamy w niej normę w następujący sposób:

$$||x||_{C([0,T])} = \sup\{|x(t)| : t \in [0,T]\}$$

dla $x \in C([0,T])$. Ponadto z podstawowych własności funkcji ciągłych wiemy, że supremum z powyższej normy możemy zastąpić przez maksimum, tzn.:

$$||x||_{C([0,T])} = \max\{|x(t)| : t \in [0,T]\}.$$

Przestrzeń $C([0,T])$ z podaną normą jest przestrzenią Banacha. Wśród najważniejszych własności przestrzeni $C([0,T])$ możemy wymienić jej ośrodkowość, wynikającą z twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji [49].

Kolejną z rozważanych w pracy przestrzeni Banacha jest przestrzeń funkcji ciągłych i ograniczonych, określonych na przedziale $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, o wartościach w zbiorze liczb rzeczywistych. Oznaczamy ją symbolem $BC(\mathbb{R}_+)$ i dla dowolnej funkcji $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ określamy normę następująco:

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+)} = \sup\{|x(t)| : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)$ z tą normą jest przestrzenią Banacha.
W dalszej części pracy normę supremum w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ będziemy oznaczać krótko symbolem $||\cdot||$, pomijając indeks.

Opisując powyższe przestrzenie, należy również zwrócić uwagę na opis zbiorów zwartych i relatywnie zwartych w tych przestrzeniach.
W przestrzeni $C([0,T])$ charakteryzację zbiorów relatywnie zwartych przedstawia twierdzenie Arzeli [11].

Twierdzenie 1.1. *Niech X będzie ograniczonym podzbiorem przestrzeni $C([0,T])$. Zbiór X jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe.*

Twierdzenie Arzeli dotyczy przestrzeni funkcji ciągłych określonych na zbiorach zwartych. Ponieważ $\mathbb{R}_+$ nie jest zbiorem zwartym, twierdzenie to nie może być bezpośrednio zastosowane do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. W przestrzeni tej nie znamy wygodnych warunków koniecznych i wystarczających dla relatywnej zwartości zbiorów. Znane są jedynie warunki wystarczające dla relatywnej zwartości zbiorów w $BC(\mathbb{R}_+)$, które teraz krótko przypomnimy [11, 14].

Twierdzenie 1.2. *Niech $X \subset BC(\mathbb{R}_+)$ będzie niepustym, ograniczonym zbiorem złożonym z funkcji lokalnie jednakowo ciągłych. Załóżmy ponadto, że funkcje ze zbioru X spełniają jeden z trzech poniższych warunków:*

1. *Funkcje należące do zbioru X zmierzają w nieskończoności do zera jednostajnie ze względu na zbiór X, tzn.*

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\bigexists_{T>0}\bigvee_{x\in X}\bigvee_{t\geqslant T}|x(t)| \leqslant \varepsilon$$

2. *Funkcje ze zbioru X zmierzają w nieskończoności do granic właściwych jednostajnie ze względu na zbiór X, tzn.*

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\bigexists_{T>0}\bigvee_{x\in X}\bigvee_{t_1,t_2\geqslant T}|x(t_1)-x(t_2)| \leqslant \varepsilon$$

3. *Wiązka utworzona przez wykresy funkcji należących do zbioru X ma grubość zmierzającą w nieskończoności do zera, tzn.*

$$\bigvee_{\varepsilon>0}\ \bigexists_{T>0}\ \bigvee_{x,y\in X}\ \bigvee_{t\geqslant T} |x(t)-y(t)| \leqslant \varepsilon$$

Wówczas zbiór X jest relatywnie zwarty w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Powyższe warunki są wystarczające, lecz nie są konieczne dla relatywnej zwartości. Oznacza to, że w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ istnieją zbiory relatywnie zwarte, które nie spełniają żadnego z nich.
Rzeczywiście, rozważmy funkcje $x(t) = \sin t$ oraz $y(t) = \sin(t+1)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Oczywiście $x, y \in BC(\mathbb{R}_+)$. Wówczas zbiór $X = \{x, y\}$, jako zbiór skończony, jest zbiorem zwartym, a więc również relatywnie zwartym. Łatwo jednak zauważyć, że nie spełnia on żadnego z trzech przedstawionych wcześniej warunków.

Rozdział 2
Funkcja o wahaniu ograniczonym i całka Riemanna-Stieltjesa

Rozdział ten poświęcony jest dwóm ważnym pojęciom, które będą odgrywać istotną rolę w dalszej części pracy: wahaniu (wariacji) funkcji oraz całce Riemanna-Stieltjesa [3, 46, 50]. Pierwsze z nich zostało wprowadzone pod koniec XIX wieku przez francuskiego matematyka Camille'a Jordana i znalazło szerokie zastosowanie w różnych zagadnieniach analizy matematycznej. Funkcje o wahaniu ograniczonym posiadają wiele istotnych własności, przydatnych w rozważaniach teoretycznych oraz zastosowaniach. Jednym z fundamentalnych wyników dotyczących tej klasy funkcji jest twierdzenie Jordana, zgodnie z którym każdą funkcję o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a, b]$ można przedstawić jako różnicę dwóch funkcji niemalejących.

Funkcje o wahaniu ograniczonym są ściśle związane z drugim z omawianych w tym rozdziale pojęć - całką Riemanna-Stieltjesa. Stanowi ona uogólnienie klasycznej całki Riemanna i znajduje zastosowania w wielu działach matematyki, szczególnie w teorii prawdopodobieństwa i analizie funkcjonalnej. Z punktu widzenia niniejszej pracy istotna jest możliwość wykorzystania całki Riemanna-Stieltjesa w konstrukcji i badaniu równań całkowych typu Stieltjesa.

Rozważania rozpoczniemy od przypomnienia podstawowych definicji i własności funkcji o wahaniu ograniczonym oraz całki Riemanna-Stieltjesa na przedziale ograniczonym. Następnie przejdziemy do ich odpowiedników na przedziale nieograniczonym. W szczególności przedstawimy pojęcie funkcji o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$ oraz określimy całkę Riemanna-Stieltjesa na tym przedziale. Wyniki te będą stanowiły podstawę rozważań dotyczących równań całkowych prowadzonych w kolejnych rozdziałach.

2.1. Funkcja o wahaniu ograniczonym i całka Riemanna-Stieltjesa na przedziale ograniczonym

Na początek przedstawimy podstawowe fakty dotyczące wahania funkcji na przedziale ograniczonym. Ponadto przypomnimy definicję oraz wybrane własności całki Riemanna-Stieltjesa [3, 54].

Załóżmy, że $x = x(t)$ jest funkcją rzeczywistą zdefiniowaną i ograniczoną na przedziale $[a, b]$. Skończony zbiór $P = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_m\}$ liczb z przedziału $[a, b]$ takich, że $a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_m = b$ nazywamy *podziałem przedziału* $[a, b]$. Rodzinę wszystkich podziałów przedziału $[a, b]$ oznaczamy symbolem $\mathcal{P}([a, b])$.

Definicja 2.1. Dla zadanego podziału $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a, b])$ nieujemną liczbę oznaczoną symbolem $Var(x, P)$ i określoną wzorem

$$Var(x, P) = Var(x, P; [a, b]) = \sum_{i=1}^{m} |x(t_i) - x(t_{i-1})| .$$

nazywamy wahaniem (wariacją) funkcji x na przedziale $[a, b]$ względem podziału P.

Natomiast wielkość (skończoną lub nie)

$$Var(x) = Var(x; [a, b]) = \sup \{Var(x, P; [a, b]) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

nazywamy wahaniem funkcji x na przedziale $[a, b]$ (w sensie Jordana).

Uwaga 2.2. *Zamiast symbolu* $Var(x; [a, b])$ *będziemy często używać oznaczenia* $\bigvee_{t=a}^{b} x$, *które jest wygodniejsze przy dłuższych obliczeniach i oszacowaniach.*

Definicja 2.3. Jeżeli $Var(x; [a, b]) < \infty$, to wtedy mówimy, że x jest funkcją o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a, b]$.
Zbiór wszystkich funkcji o wahaniu ograniczonym na $[a, b]$ oznaczamy przez $BV([a, b])$.

W podobny sposób można zdefiniować wahanie dla funkcji dwóch zmiennych, tzn. dla funkcji $u(t, s) = u : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ oznaczymy przez $\bigvee_{t=p}^{q} u(t, s)$ wahanie funkcji $t \to u(t, s)$ na przedziale $[p, q] \subset [a, b]$, gdzie $s \in [c, d]$ jest ustaloną liczbą. Analogicznie definiujemy wielkość $\bigvee_{s=p}^{q} u(t, s)$.

Wahanie funkcji posiada wiele użytecznych własności, wśród których można wymienić podaddytywność względem funkcji i addytywność względem przedziałów, bezwzględną jednorodność, zależność między wariacją funkcji a jej monotonicznością. Ponadto funkcje o wahaniu ograniczonym mają bardzo ważną strukturę algebraiczną. Wspomniane

właściwości omówimy dokładniej w następnym podrozdziale, rozszerzając pojęcie wahania funkcji na przedziały nieograniczone.

Przypomnimy teraz jedno z najważniejszych twierdzeń dotyczących funkcji o wahaniu ograniczonym - wspomniane wcześniej twierdzenie Jordana o rozkładzie.

Twierdzenie 2.4. *Funkcja $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ ma ograniczone wahanie na przedziale $[a, b]$ wtedy i tylko wtedy, gdy x może być przedstawiona jako różnica dwóch funkcji niemalejących na przedziale $[a, b]$.*

W oparciu o pojęcie funkcji o wahaniu ograniczonym wprowadzimy teraz pojęcie całki Riemanna-Stieltjesa na przedziale ograniczonym.

Załóżmy, że x i ρ są funkcjami rzeczywistymi określonymi na przedziale $[a, b]$. Ustalmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_m\}$ przedziału $[a, b]$ i wybierzmy dowolnie liczby ξ_i $(i = 1, 2, ..., m)$ takie, że $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ dla $i = 1, 2, ..., m$. Wielkość określoną wzorem

$$S = \sum_{i=1}^{m} x(\xi_i)[\rho(t_i) - \rho(t_{i-1})]$$

nazywamy *sumą aproksymacyjną.*
Jeżeli dla każdego ciągu podziałów $a = t_0^n < t_{k_1}^n < ... < t_{k_n}^n = b$ takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i} |t_i^n - t_{i-1}^n| = 0$, oraz przy dowolnie wybranych punktach $\xi_i^n \in [t_{i-1}^n, t_i^n]$, ciąg sum aproksymacyjnych

$$S_n = \sum_{i=1}^{k_n} x(\xi_i^n)[\rho(t_i^n) - \rho(t_{i-1}^n)]$$

zmierza do tej samej skończonej granicy, to granicę tę nazywamy *całką Riemanna-Stieltjesa funkcji x względem funkcji ρ na przedziale $[a, b]$* i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b x(t)d\rho(t)$$

(por. [3, 46]).
Jeżeli powyższa całka istnieje, mówimy, że funkcja x jest *całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa (lub krótko: w sensie Stieltjesa) na przedziale $[a, b]$ względem funkcji ρ.* W literaturze można znaleźć kilka warunków gwarantujących całkowalność funkcji x w sensie Stieltjesa względem ρ. Przytoczymy teraz ten najczęściej używany.

Twierdzenie 2.5. *Załóżmy, że x jest funkcją ciągłą na przedziale $[a, b]$, zaś ρ - funkcją o wahaniu ograniczonym na $[a, b]$. Wówczas x jest całkowalna w sensie Stieltjesa na przedziale $[a, b]$ względem funkcji ρ.*

Przypomnijmy teraz dwa lematy, które będą przydatne w dalszych rozważaniach [3].

Lemat 2.6. *Jeżeli x jest całkowalna w sensie Stieltjesa na przedziale $[a,b]$ względem funkcji ρ o wahaniu ograniczonym, to*

$$\left|\int_a^b x(t)d\rho(t)\right| \leqslant \int_a^b |x(t)|d\left(\bigvee_a^t \rho\right).$$

Lemat 2.7. *Niech x_1, x_2 będą funkcjami całkowalnymi w sensie Stieltjesa na przedziale $[a,b]$ względem niemalejącej funkcji ρ, takimi, że $x_1(t) \leqslant x_2(t)$ dla $t \in [a,b]$. Wówczas*

$$\int_a^b x_1(t)d\rho(t) \leqslant \int_a^b x_2(t)d\rho(t).$$

Uwzględniając wcześniejszą uwagę dotyczącą wahania funkcji dwóch zmiennych, łatwo zauważyć, że można również rozważać całkę Riemanna-Stieltjesa postaci

$$\int_a^b x(s)d_s g(t,s),$$

gdzie $g : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ oraz symbol d_s oznacza całkowanie względem zmiennej s. Całki takiego typu będziemy rozważać w dalszych rozdziałach.

2.2. Wahanie funkcji na przedziale nieograniczonym

Rozważymy teraz pojęcie wahania funkcji na przedziale nieograniczonym. Dla uproszczenia będziemy rozpatrywać wahanie funkcji na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+$. Zajmiemy się również wahaniem funkcji na innych przedziałach, które nie są domknięte, tj. przedziałach typu $[a,b)$, $(a,b]$, gdzie $a,b \in \mathbb{R}$.

Warto zauważyć, że pojęcie wahania funkcji na przedziale nieograniczonym dotychczas tylko sporadycznie pojawiało się w literaturze. Przykładowo w książkach [3, 46, 50] wahanie funkcji rozważano tylko na przedziałach ograniczonych. Podobnie, w artykule przeglądowym [28] autorzy rozważają pojęcie wahania funkcji tylko na przedziale ograniczonym.

Z drugiej strony, w książce [53] pojawia się pojęcie wahania funkcji na przedziale nieograniczonym, głównie na $\mathbb{R}_+$. Zdefiniowano wahanie funkcji $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, przechodząc do granicy w nieskończoności. Oznacza to, że granica $\lim_{T\to\infty} Var(f,[0,T])$, o ile istnieje, określa wahanie funkcji f na przedziale $\mathbb{R}_+$, oznaczane przez $Var(f,\mathbb{R}_+)$. Nie przedstawiono jednak dalszych rozważań związanych z tym tematem.

Wahanie $Var(f,\mathbb{R}_+)$ rozważane było również w pracy [21]. Przedstawione tam podejście opiera się na utożsamieniu półosi $\mathbb{R}_+$, rozszerzonej do zbioru $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} = [0,\infty]$ z odpowiednim przedziałem ograniczonym postaci $[0,T]$, a następnie na przeniesieniu pojęcia wahania funkcji na $\mathbb{R}_+$ do pojęcia wahania na

przedziale $[0,T]$ za pomocą odpowiedniego odwzorowania. Autorzy rozszerzają rozważaną funkcję f z przedziału $\mathbb{R}_+$ na przedział $\overline{\mathbb{R}}_+$ przyjmując, że $f(\infty)=0$. Podejście to ma pewną wadę: każdej funkcji, która na $\mathbb{R}_+$ jest równa stałej $c\neq 0$, przypisuje wahanie równe $|c|$.

W pracy przyjmujemy inną definicję wahania funkcji na $\mathbb{R}_+$. Zaczniemy od wprowadzenia definicji podziału przedziału $\mathbb{R}_+$.

Definicja 2.8. Rosnący ciąg (t_n) liczb z przedziału $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ taki, że $0=t_0<t_1<t_2<...$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=\infty$ nazywamy *podziałem przedziału* $\mathbb{R}_+$ i oznaczamy przez P, tzn. $P=\{t_0,t_1,...\}$.

Zbiór wszystkich podziałów przedziału $\mathbb{R}_+$ oznaczamy przez $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.
Załóżmy, że $x:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną. Niech ponadto $P=\{t_0,t_1,t_2,...\}\in\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$.
Wielkość (skończoną lub nie) $Var(x,P)$ zdefiniowaną następująco:

$$Var(x,P)=Var(x,P;\mathbb{R}_+)=\sum_{n=1}^{\infty}|x(t_n)-x(t_{n-1})|$$

nazywamy *wahaniem funkcji x na przedziale $\mathbb{R}_+$ względem podziału P.*

Definicja 2.9. Wielkość

$$Var(x)=Var(x,\mathbb{R}_+)=\sup\{Var(x,P;\mathbb{R}_+):P\in\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)\}$$

nazywamy *wahaniem funkcji x na przedziale $\mathbb{R}_+$.*

Jeżeli $Var(x)<\infty$, to mówimy, że funkcja x ma *ograniczone wahanie na przedziale* $\mathbb{R}_+$. Zbiór wszystkich funkcji o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$ oznaczamy symbolem $BV(\mathbb{R}_+)$. W dalszych rozdziałach zamiast $Var(x)=Var(x,\mathbb{R}_+)$ będziemy używać symbolu $\bigvee_0^{\infty}x$ (podobnie, jak w przypadku przedziałów ograniczonych).

Uwaga 2.10. *W podobny sposób możemy wprowadzić pojęcie podziału przedziału $\mathbb{R}_-=(-\infty,0]$. Mianowicie, malejący ciąg (s_n) liczb z przedziału $\mathbb{R}_-$ taki, że $...<s_2<s_1<s_0=0$ i $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=-\infty$ nazywamy podziałem przedziału $\mathbb{R}_-$. Podział ten będziemy oznaczać przez $P=\{...,s_2,s_1,s_0\}$, zaś zbiór wszystkich podziałów przedziału $\mathbb{R}_-$ - symbolem $\mathcal{P}(\mathbb{R}_-)$.*

Analogicznie możemy zdefiniować podział przedziału $[a,b)$ lub $(a,b]$. Przykładowo, rosnący ciąg $P=\{t_0,t_1,t_2,...\}$ taki, że $a=t_0<t_1<t_2<...$ i $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=b$ nazywamy *podziałem przedziału* $[a,b)$. Zbiór wszystkich podziałów przedziału $[a,b)$ oznaczamy przez $\mathcal{P}([a,b))$.

Niech ponadto $x : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną, $P = \{..., s_2, s_1, s_0\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_-)$. Wartość (skończoną lub nie) $Var(x, P)$ określoną wzorem

$$Var(x, P) = Var(x, P; \mathbb{R}_-) = \sum_{i=1}^{\infty} |x(s_i) - x(s_{i-1})|$$

nazywamy *wahaniem funkcji x na przedziale $\mathbb{R}_-$ względem podziału P.*

Następnie wielkość

$$Var(x) = Var(x, \mathbb{R}_-) = \sup \{Var(x, P; \mathbb{R}_-) : P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_-)\}$$

nazywamy *wahaniem funkcji x na przedziale $\mathbb{R}_-$.*

Analogicznie możemy zdefiniować wahanie funkcji ograniczonej x na przedziale $[a, b)$ lub $(a, b]$. Wielkość (skończoną lub nie) $Var(x, [a, b))$ zdefiniowaną następująco:

$$Var(x, [a, b)) = \sup \{Var(x, P; [a, b)) : P \in \mathcal{P}([a, b))\}$$

nazywamy *wahaniem funkcji x na przedziale $[a, b)$.*
Podobnie definiujemy wielkość $Var(x, (a, b])$.

Wówczas wprowadzić można również pojęcie funkcji o ograniczonym wahaniu na przedziałach $\mathbb{R}_-$, $[a, b)$ lub $(a, b]$.

Przejdziemy teraz do twierdzenia pokazującego ważną zależność między wahaniem funkcji na $\mathbb{R}_+$ a wahaniem funkcji na przedziale ograniczonym.

Twierdzenie 2.11. *Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym, tj. $x \in BV(\mathbb{R}_+)$. Wówczas*

$$Var(x; \mathbb{R}_+) = \lim_{a \to \infty} Var(x; [0, a]) = \sup \{Var(x; [0, a]) : a \geqslant 0\}.$$

Dowód. Udowodnimy najpierw pierwszą część tezy, tj. równość

$$Var(x; \mathbb{R}_+) = \lim_{a \to \infty} Var(x; [0, a]).$$

Ustalmy dowolnie liczbę $a > 0$ oraz podział $P = \{t_0, t_1, t_2, .., t_m\}$ przedziału $[0, a]$, tj. $P \in \mathcal{P}([0, a])$. Wtedy $t_m = a$. Następnie weźmy rosnący ciąg $\{t_m, t_{m+1}, ...\}$ taki, że $t_n \to \infty$ przy $n \to \infty$. Wówczas ciąg $\overline{P} = \{t_0, t_1, t_2, ...\}$ jest podziałem przedziału $\mathbb{R}_+$ oraz

$$Var(x, P; [0, a]) = \sum_{j=1}^{m} |x(t_j) - x(t_{j-1})| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})|$$
$$= Var(x, \overline{P}; \mathbb{R}_+) \leqslant Var(x; \mathbb{R}_+)$$

dla dowolnego podziału $P \in \mathcal{P}([0, a])$. Otrzymujemy zatem nierówność

$$Var(x; [0, a]) \leqslant Var(x; \mathbb{R}_+).$$

Z dowolności $a > 0$ oraz faktu, że funkcja $a \to Var(x;[0,a])$ jest niemalejąca, otrzymujemy:

$$\lim_{a\to\infty} Var(x;[0,a]) \leqslant Var(x;\mathbb{R}_+). \tag{2.1}$$

Aby wykazać nierówność przeciwną, ustalmy $\varepsilon > 0$ i wybierzmy podział $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$, $P = \{t_0, t_1, t_2, ...\}$ taki, że

$$Var(x;\mathbb{R}_+) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant Var(x,P;\mathbb{R}_+). \tag{2.2}$$

Biorąc pod uwagę równość

$$Var(x,P;\mathbb{R}_+) = \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})|,$$

możemy wybrać wyraz t_n ciągu (t_j) tak, aby prawdziwa była nierówność:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x(t_j) - x(t_{j-1})|. \tag{2.3}$$

Z (2.2) i (2.3) dostajemy

$$Var(x;\mathbb{R}_+) - \varepsilon \leqslant Var(x,P;\mathbb{R}_+) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x(t_j) - x(t_{j-1})| \leqslant Var(x;[0,t_n]). \tag{2.4}$$

Następnie, oznaczając $a = t_n$, z (2.4) otrzymujemy

$$Var(x;\mathbb{R}_+) - \varepsilon \leqslant Var(x;[0,a]) \leqslant \lim_{a\to\infty} Var(x;[0,a]).$$

Z dowolności liczby $\varepsilon > 0$, z powyższego oszacowania wynika, że

$$Var(x;\mathbb{R}_+) \leqslant \lim_{a\to\infty} Var(x;[0,a]).$$

W połączeniu z nierównością (2.1), otrzymujemy równość:

$$Var(x;\mathbb{R}_+) = \lim_{a\to\infty} Var(x;[0,a]).$$

Pokażemy teraz, że

$$\lim_{a\to\infty} Var(x;[0,a]) = \sup\{Var(x;[0,a]) : a \geqslant 0\}.$$

Oznaczmy $M = \sup\{Var(x;[0,a]) : a \geqslant 0\}$. Wiemy, że dla dowolnej liczby $a \geqslant 0$ prawdziwa jest nierówność

$$Var(x;[0,a]) \leqslant M.$$

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas z definicji supremum otrzymujemy, że istnieje liczba $a_\varepsilon \geqslant 0$ taka, że

$$M - \varepsilon < Var(x; [0, a_\varepsilon]).$$

Ponadto funkcja $a \mapsto Var(x; [0, a])$ jest niemalejąca, więc dla $a \geqslant a_\varepsilon$ mamy:

$$M - \varepsilon < Var(x; [0, a_\varepsilon]) \leqslant Var(x; [0, a]) \leqslant M,$$

a stąd

$$|Var(x; [0, a]) - M| < \varepsilon,$$

co oznacza, że

$$\lim_{a \to \infty} Var(x; [0, a]) = M = \sup \{Var(x; [0, a]) : a \geqslant 0\}.$$

□

Przedstawimy teraz podstawowe własności wahania funkcji należących do przestrzeni $BV(\mathbb{R}_+)$.

Twierdzenie 2.12. *Niech $x, y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będą funkcjami o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Wówczas*

1. $Var(\alpha \cdot x; \mathbb{R}_+) = |\alpha| \cdot Var(x; \mathbb{R}_+), \quad \alpha \in \mathbb{R}$
2. $Var(x + y; \mathbb{R}_+) \leqslant Var(x; \mathbb{R}_+) + Var(y; \mathbb{R}_+),$
3. $Var(x; [a, b]) = Var(x; [a, c]) + Var(x; [c, b]), \quad a, b, c \in \mathbb{R}_+, \quad a < c < b$
4. $|x(a) - x(b)| \leqslant Var(x; [a, b]), \quad a, b \in \mathbb{R}_+, \quad a < b$

Dowód. 1. Ustalmy dowolnie podział $P = \{t_0, t_1, ...\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. Wówczas

$$Var(\alpha \cdot x, P; \mathbb{R}_+) = \sum_{j=1}^{\infty} |(\alpha \cdot x)(t_j) - (\alpha \cdot x)(t_{j-1})| = |\alpha| \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| =$$

$$= |\alpha| \cdot Var(x, P; \mathbb{R}_+).$$

Biorąc supremum po wszystkich podziałach przedziału $\mathbb{R}_+$, dostajemy

$$Var(\alpha \cdot x; \mathbb{R}_+) = |\alpha| \cdot Var(x; \mathbb{R}_+).$$

2. Niech $P = \{t_0, t_1, ...\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. Wtedy

$$Var(x + y, P; \mathbb{R}_+) = \sum_{j=1}^{\infty} |(x + y)(t_j) - (x + y)(t_{j-1})|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{\infty} |y(t_j) - y(t_{j-1})| = Var(x, P; \mathbb{R}_+) + Var(y, P; \mathbb{R}_+).$$

Biorąc supremum po wszystkich podziałach przedziału $\mathbb{R}_+$, otrzymujemy

$$Var(x + y; \mathbb{R}_+) \leqslant Var(x; \mathbb{R}_+) + Var(y; \mathbb{R}_+).$$

3. Wykażemy najpierw, że $Var(x;[a,c]) + Var(x;[c,b]) \leqslant Var(x;[a,b])$.
   Ustalmy dowolnie podziały: $P_1 = \{t_0, t_1, ..., t_m\} \in \mathcal{P}([a,c])$, $P_2 = \{s_0, s_1, ..., s_n\} \in \mathcal{P}([c,b])$, tzn. $a = t_0 < t_1 < ... < t_m = c = s_0 < s_1 < ... < s_n = b$. Wówczas $P_1 \cup P_2 \in \mathcal{P}([a,b])$ oraz

$$Var(x, P_1; [a,c]) + Var(x, P_2; [c,b]) = \sum_{j=1}^{m} |x(t_j) - x(t_{j-1})| + \sum_{j=1}^{n} |x(s_j) - x(s_{j-1})|$$

$$= Var(x, P_1 \cup P_2; [a,b]) \leqslant Var(x;[a,b]).$$

   Biorąc supremum po wszystkich podziałach $[a,c]$ oraz $[c,b]$, mamy:

$$Var(x;[a,c]) + Var(x;[c,b]) \leqslant Var(x;[a,b]).$$

   Udowodnimy teraz nierówność przeciwną. W tym celu weźmy podział $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ przedziału $[a,b]$ taki, że $t_{k-1} \leqslant c \leqslant t_k$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Wtedy

$$Var(x, P; [a,b]) = \sum_{j=1}^{n} |x(t_j) - x(t_{j-1})| \leqslant |x(t_1) - x(t_0)| + ... + |x(c) - x(t_{k-1})|$$

$$+|x(t_k) - x(c)| + ... + |x(t_n) - x(t_{n-1})| \leqslant Var(x;[a,c]) + Var(x;[c,b]).$$

   Biorąc supremum po wszystkich podziałach przedziału $[a,b]$, dostajemy:

$$Var(x;[a,b]) \leqslant Var(x;[a,c]) + Var(x;[c,b]).$$

4. Weźmy następujący podział przedziału $[a,b]$: $P_0 = \{a,b\}$. Wówczas

$$|x(a) - x(b)| = Var(x, P_0; [a,b]) \leqslant \sup_{P \in \mathcal{P}([a,b])} Var(x, P; [a,b]) = Var(x;[a,b]).$$

□

Twierdzenie 2.13. *Funkcja $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ma na przedziale $\mathbb{R}_+$ wahanie równe zeru wtedy i tylko wtedy, gdy jest funkcją stałą.*

Dowód. Załóżmy najpierw, że $Var(x;\mathbb{R}_+) = 0$. Z definicji mamy

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)} Var(x, P; \mathbb{R}_+) = 0,$$

tzn. dla dowolnego podziału $P = \{t_0, t_1, ...\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ mamy

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| = 0,$$

skąd wynika, że

$$|x(t_j) - x(t_{j-1})| = 0 \text{ dla każdego } j \in \mathbb{N},$$

co, z uwagi na dowolność wyboru podziału, oznacza, że x jest funkcją stałą.
Załóżmy teraz, że x jest funkcją stałą, tj. $x(t) = a$ dla $t \in \mathbb{R}_+$, $a \in \mathbb{R}$. Ustalmy dowolnie podział $P = \{t_0, t_1, ...\}$ przedziału $\mathbb{R}_+$. Wtedy

$$Var(x, P; \mathbb{R}_+) = \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\infty} |a - a| = 0,$$

$$Var(x; \mathbb{R}_+) = \sup_{P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)} Var(x, P; \mathbb{R}_+) = 0.$$

□

Twierdzenie 2.14. *Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Wówczas x jest funkcją ograniczoną na przedziale $\mathbb{R}_+$.*

Dowód. Ustalmy dowolnie $A > 0$. Wtedy

$$|x(A)| = |x(A) - x(0) + x(0)| \leqslant |x(A) - x(0)| + |x(0)|$$

$$\leqslant Var(x; [0, A]) + |x(0)| \leqslant Var(x; \mathbb{R}_+) + |x(0)| < \infty.$$

□

Twierdzenie 2.15. *Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Wówczas dla dowolnej liczby $a > 0$ prawdziwa jest równość*

$$Var(x; [0, a]) + Var(x; [a, \infty]) = Var(x; \mathbb{R}_+).$$

Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $b > a$, wtedy, z addytywności wahania, mamy

$$Var(x; [0, a]) + Var(x; [a, b]) = Var(x; [0, b]).$$

Ponadto na mocy Twierdzenia 2.11, otrzymujemy

$$Var(x; \mathbb{R}_+) = \lim_{b \to \infty} Var(x; [0, b]) = \lim_{b \to \infty} (Var(x; [0, a]) + Var(x; [a, b]))$$

$$= Var(x; [0, a]) + \lim_{b \to \infty} Var(x; [a, b]) = Var(x; [0, a]) + Var(x; [a, \infty]).$$

□

Uwaga 2.16. *W nawiązaniu do Uwagi 2.10, zauważmy, że można również zdefiniować wahanie funkcji na przedziale $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, a także na przedziałach otwartych postaci (a, b), (a, ∞) lub $(-\infty, b)$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Przykładowo, rozważmy funkcję $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i ustalmy dowolnie liczbę $a \in \mathbb{R}$. Wówczas wahanie funkcji x na przedziale $\mathbb{R}$ definiujemy następująco:*

$$Var(x; \mathbb{R}) = Var(x; (-\infty, a]) + Var(x; [a, \infty)).$$

Biorąc pod uwagę Twierdzenie 2.15 i własności wahania funkcji na przedziale ograniczonym (por. [3, 46]), łatwo zauważyć, że definicja ta nie zależy od wyboru liczby $a \in \mathbb{R}$.

W podobny sposób możemy zdefiniować wahanie funkcji na przedziałach postaci (a, b), (a, ∞) *lub* $(-\infty, b)$. *Na przykład, załóżmy, że* $x : (a, b) \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ograniczoną oraz wybierzmy dowolnie liczbę* $c \in (a, b)$. *Wówczas wahanie funkcji* x *na przedziale* (a, b) *definiujemy następująco:*

$$Var(x; (a, b)) = Var(x; (a, c]) + Var(x; [c, b)).$$

Podobnie, jak wcześniej, biorąc pod uwagę własności wahania funkcji na przedziale ograniczonym i powyższe rozważania, łatwo zauważyć, że przedstawiona definicja nie zależy od wyboru liczby $c \in (a, b)$.

W dalszej części przedstawimy twierdzenie ukazujące bardzo ważną własność funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Twierdzenie 2.17. *Jeżeli* $x \in BV(\mathbb{R}_+)$, *to istnieje skończona granica* $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$.

Dowód. Ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Następnie, na mocy Twierdzenia 2.11 możemy wybrać liczbę $A > 0$ taką, że

$$|Var(x; \mathbb{R}_+) - Var(x; [0, a])| < \varepsilon$$

dla wszystkich $a \geqslant A$.
Korzystając teraz z Twierdzenia 2.15, dla $a \geqslant A$ otrzymujemy

$$|Var(x; [0, a]) + Var(x; [a, \infty)) - Var(x; [0, a])| = Var(x; [a, \infty)) < \varepsilon.$$

W szczególności, prawdziwa jest nierówność

$$Var(x; [A, \infty)) < \varepsilon. \tag{2.5}$$

Ustalmy teraz dowolnie liczby b, c takie, że $A \leqslant b < c$. Na mocy Twierdzenia 2.15 i nierówności (2.5), możemy zapisać:

$$Var(x; [A, \infty)) = Var(x; [A, b]) + Var(x; [b, c]) + Var(x; [c, \infty)) < \varepsilon,$$

a zatem również

$$Var(x; [b, c]) < \varepsilon.$$

Z powyższej nierówności oraz własności wahania funkcji wynika oszacowanie:

$$|x(b) - x(c)| \leqslant Var(x; [b, c]) < \varepsilon$$

dla dowolnych $b, c \in [A, \infty)$.
Otrzymany warunek jest warunkiem Cauchy'ego, który jest równoważny istnieniu skończonej granicy $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$. □

Przedstawimy teraz przykład pokazujący, że twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 2.17 nie jest prawdziwe.

Przykład 2.18. Rozważmy funkcję $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & \text{dla } t = n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Oczywiście,

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Z drugiej strony,

$$Var(x; \mathbb{R}_+) = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right) = +\infty,$$

a zatem $x \notin BV(\mathbb{R}_+)$.

Uwaga 2.19. *Warto ponadto wspomnieć, że nie zachodzi żadna bezpośrednia zależność pomiędzy ograniczonym wahaniem funkcji a jej ciągłością na danym przedziale. W szczególności funkcja o wahaniu ograniczonym nie musi być ciągła, zaś funkcja ciągła na danym przedziale nie musi mieć na nim skończonego wahania.*

Na przykład, dla funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ określonej wzorem

$$x(t) = \begin{cases} t & dla\ t \in [0, 1) \\ 2 & dla\ t \in [1, \infty) \end{cases}$$

mamy: $Var(x; \mathbb{R}_+) = 2 < \infty$, czyli $x \in BV(\mathbb{R}_+)$, natomiast jest ona nieciągła w punkcie $t = 1$. Z drugiej strony, rozważmy funkcję $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$y(t) = \begin{cases} 0 & dla\ t = 0 \\ t\sin(\frac{1}{t}) & dla\ t \in (0, 1] \\ \sin 1 & dla\ t \in (1, \infty). \end{cases}$$

Wówczas $Var(y; \mathbb{R}_+) = \infty$, tzn. $y \notin BV(\mathbb{R}_+)$ oraz funkcja y jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Uwaga 2.20. *Zauważmy, że można sformułować wynik analogiczny do Twierdzenia 2.17 dotyczący funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziałach $\mathbb{R}_-$, $[a, b)$ i $(a, b]$. Na przykład, jeżeli $x \in BV([a, b))$, to istnieje skończona granica $\lim_{t\to b^-} x(t)$.*

Twierdzenie 2.21. *Jeżeli funkcja $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna i ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$, to $x \in BV(\mathbb{R}_+)$ oraz $Var(x; \mathbb{R}_+) = \lim_{A\to\infty} |x(A) - x(0)|$.*

Dowód. Bez straty ogólności możemy założyć, że x jest funkcją niemalejącą. Ustalmy dowolnie podział $P = \{t_0, t_1, ...\}$ przedziału $\mathbb{R}_+$. Wówczas

$$Var(x, P; \mathbb{R}_+) = \sum_{j=1}^{\infty} |x(t_j) - x(t_{j-1})| = \sum_{j=1}^{\infty} (x(t_j) - x(t_{j-1})) = \lim_{n\to\infty} (x(t_n) - x(0)),$$

zatem

$$\sup_{P\in\mathcal{P}(\mathbb{R}_+)} Var(x,P;\mathbb{R}_+) = Var(x;\mathbb{R}_+) = \lim_{A\to\infty}(x(A)-x(0)).$$

Analogicznie dla funkcji nierosnących mamy:

$$Var(x;\mathbb{R}_+) = \lim_{A\to\infty}(x(0)-x(A)).$$

□

Zauważmy, że wyniki podobne do tych zawartych w Twierdzeniach 2.17 i 2.21 możemy sformułować również, gdy przedział $\mathbb{R}_+$ zastąpimy przez $\mathbb{R}_-$, $(a,b]$ lub $[a,b)$.

Własności i wyniki, które teraz przedstawimy, dostarczą więcej informacji o strukturze zbioru funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Twierdzenie 2.22. *Niech $x,y:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ będą funkcjami o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$, tzn. $x,y\in BV(\mathbb{R}_+)$. Wówczas $x\cdot y\in BV(\mathbb{R}_+)$.*

Dowód. Weźmy dowolny podział $P=\{t_0,t_1,...\}$ przedziału $\mathbb{R}_+$. Wówczas:

$$Var(x\cdot y,P;\mathbb{R}_+) = \sum_{i=1}^{\infty}|x(t_i)\cdot y(t_i)-x(t_{i-1})\cdot y(t_{i-1})|$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}|x(t_i)\cdot y(t_i)-x(t_{i-1})\cdot y(t_i)+x(t_{i-1})\cdot y(t_i)-x(t_{i-1})\cdot y(t_{i-1})|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}|(x(t_i)-x(t_{i-1}))|\cdot|y(t_i)| + \sum_{i=1}^{\infty}|(y(t_i)-y(t_{i-1}))|\cdot|x(t_{i-1})|.$$

Na mocy Twierdzenia 2.14 wiemy, że każda funkcja z przestrzeni $BV(\mathbb{R}_+)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$, zatem prawdziwa jest nierówność

$$Var(x\cdot y,P;\mathbb{R}_+)\leqslant||y||_\infty\cdot Var(x,P;\mathbb{R}_+)+||x||_\infty\cdot Var(y,P;\mathbb{R}_+)<\infty,$$

gdzie $||x||_\infty=\sup\{|x(t)|:t\in\mathbb{R}_+\}$, $||y||_\infty=\sup\{|y(t)|:t\in\mathbb{R}_+\}$.
Biorąc supremum po wszystkich podziałach przedziału $\mathbb{R}_+$, otrzymujemy, że

$$Var(x\cdot y;\mathbb{R}_+)\leqslant||y||_\infty\cdot Var(x;\mathbb{R}_+)+||x||_\infty\cdot Var(y;\mathbb{R}_+)<\infty.$$

□

Twierdzenie 2.23. *Niech $x:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Załóżmy ponadto, że istnieje $\alpha>0$ takie, że $|x(t)|\geqslant\alpha$ dla każdego $t\in\mathbb{R}_+$. Wówczas $\frac{1}{x}\in BV(\mathbb{R}_+)$.*

Dowód. Dla dowolnie ustalonego podziału $P = \{t_0, t_1, ...\}$ przedziału $\mathbb{R}_+$ mamy

$$Var\left(\frac{1}{x}, P; \mathbb{R}_+\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x(t_i)} - \frac{1}{x(t_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x(t_{i-1}) - x(t_i)|}{|x(t_i) \cdot x(t_{i-1})|}$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i) - x(t_{i-1})| = \frac{1}{\alpha^2} \cdot Var(x, P; \mathbb{R}_+) \leqslant \frac{1}{\alpha^2} \cdot \ Var(x; \mathbb{R}_+) < \infty.$$

□

Łatwo teraz zauważyć, że zbiór $BV(\mathbb{R}_+)$ z klasycznymi działaniami na funkcjach jest przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{R}$, ponadto tworzy on algebrę.

Twierdzenie 2.24. *Wzór*

$$||x||_{BV} = |x(0)| + Var(x; \mathbb{R}_+)$$

określa normę w przestrzeni $BV(\mathbb{R}_+)$. Ponadto norma ta jest zupełna, tzn. $BV(\mathbb{R}_+)$ z tą normą jest przestrzenią Banacha.

Dowód. Pokażemy najpierw, że $||\cdot||_{BV}$ jest normą. Oczywiście $||x||_{BV} \geqslant 0$ dla wszystkich $x \in BV(\mathbb{R}+)$. Mamy następnie:

1. $||x||_{BV} = 0 \iff |x(0)| = 0 \ \wedge \ Var(x; \mathbb{R}_+) = 0 \iff x(0) = 0 \ \wedge \ x$ jest funkcją stałą $\iff x \equiv 0$
2. $||\lambda x||_{BV} = |(\lambda x)(0)| + Var(\lambda x; \mathbb{R}_+) = |\lambda| \cdot |x(0)| + |\lambda| Var(x; \mathbb{R}_+)$ $= |\lambda| \left(|x(0)| + Var(x; \mathbb{R}_+)\right) = |\lambda| \cdot ||x||_{BV}$
3. $||x + y||_{BV} = |x(0) + y(0)| + Var(x + y; \mathbb{R}_+) \leqslant |x(0)| + |y(0)| + Var(x; \mathbb{R}_+)$ $+Var(y; \mathbb{R}_+) = ||x||_{BV} + ||y||_{BV}$

W kolejnym kroku pokażemy, że norma ta jest zupełna. Niech $(x_n) \subset BV(\mathbb{R}_+)$ będzie ciągiem Cauchy'ego. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że dla wszystkich $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n \geqslant n_0$

$$||x_n - x_m||_{BV} = |x_n(0) - x_m(0)| + Var(x_n - x_m; \mathbb{R}_+) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

W szczególności $|x_n(0) - x_m(0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, więc $(x_n(0))$ jest ciągiem Cauchy'ego zbieżnym do pewnej liczby $x(0)$.
Ponadto $Var(x_n - x_m; \mathbb{R}_+) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, więc dla $T > 0$ mamy

$$Var(x_n - x_m; [0, T]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Biorąc podział $P = \{0, T\}$ przedziału $[0, T]$ otrzymujemy

$$|x_n(T) - x_m(T)| - |x_n(0) - x_m(0)| \leqslant |(x_n(T) - x_m(T)) - (x_n(0) - x_m(0))|$$

$$= Var(x_n - x_m, P; [0, T]) \leqslant Var(x_n - x_m; [0, T]) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

oraz $|x_n(T) - x_m(T)| \leqslant |x_n(0) - x_m(0)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon$. Zatem dla każdego $T \geqslant 0$ ciąg (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, zbieżnym do $x(T)$. Innymi słowy, ciąg (x_n) jest zbieżny punktowo do x.

Na koniec wykażemy zbieżność tego ciągu w normie. Rzeczywiście, ponieważ (x_n) jest ciągiem Cauchy'ego, zatem jest ograniczony, czyli istnieje liczba $M > 0$ taka, że $||x_n||_{BV} \leqslant M$. W szczególności $Var(x_n, \mathbb{R}_+) \leqslant M$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zatem wahania funkcji x_n są wspólnie ograniczone. Pokażemy teraz, że $x \in BV(\mathbb{R}_+)$. Ustalmy dowolnie podział $P = \{t_0, t_1, ...\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$. Dla każdego $k \in \mathbb{N}$, korzystając z punktowej zbieżności ciągu (x_n) do funkcji x, otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} |x(t_i) - x(t_{i-1})| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})| \leqslant M.$$

Przechodząc z $k \to \infty$, otrzymujemy

$$Var(x, P; \mathbb{R}_+) \leqslant M.$$

Ponieważ podział $P \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+)$ był dowolny, mamy

$$Var(x; \mathbb{R}_+) \leqslant M,$$

a zatem $x \in BV(\mathbb{R}_+)$.
Oczywiście $Var(x_n - x_m; \mathbb{R}_+) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ i przy $m \to \infty$ mamy

$$Var(x_n - x) \leqslant \liminf_{m\to\infty} Var(x_n - x_m) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

więc $||x_n - x||_{BV} \leqslant \varepsilon$, czyli ciąg (x_n) jest zbieżny w normie do funkcji x o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Oznacza to, że przestrzeń $BV(\mathbb{R}_+)$ jest przestrzenią zupełną, a zatem jest to przestrzeń Banacha.

□

Twierdzenie 2.25. *Norma określona wzorem*

$$||x||^1_{BV} = ||x||_\infty + Var(x; \mathbb{R}_+)$$

jest równoważna normie $||x||_{BV}$.

Dowód. Oczywiście funkcja $||\cdot||^1_{BV} : BV(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}_+$ jest normą. Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $x \in BV(\mathbb{R}_+)$. Wówczas

$$||x||_{BV} = |x(0)| + Var(x; \mathbb{R}_+) \leqslant ||x||_\infty + Var(x; \mathbb{R}_+) = ||x||^1_{BV}.$$

Ponadto w oparciu o Twierdzenie 2.14 wiemy, że $||x||_\infty \leqslant |x(0)| + Var(x; \mathbb{R}_+)$, zatem

$$||x||^1_{BV} = ||x||_\infty + Var(x; \mathbb{R}_+) \leqslant |x(0)| + 2Var(x; \mathbb{R}_+)$$

$$\leqslant 2|x(0)| + 2Var(x;\mathbb{R}_+) = 2||x||_{BV}.$$

Mamy więc oszacowanie:

$$\frac{1}{2}||x||^1_{BV} \leqslant ||x||_{BV} \leqslant ||x||^1_{BV}.$$

□

Twierdzenie 2.26. *Przestrzeń $BV(\mathbb{R}_+)$ tworzy z normą $||\cdot||_{BV}$ algebrę Banacha taką, że $||x\cdot y||_{BV} \leqslant 4||x||_{BV}\cdot||y||_{BV}$, zaś z normą $||\cdot||^1_{BV}$ tworzy znormalizowaną algebrę Banacha, tzn. $||x\cdot y||^1_{BV} \leqslant ||x||^1_{BV}\cdot||y||^1_{BV}$.*

Dowód. Ustalmy $x, y \in BV(\mathbb{R}_+)$. Wówczas

$$||x\cdot y||^1_{BV} = ||x\cdot y||_\infty + Var(x\cdot y;\mathbb{R}_+) \leqslant ||x||_\infty\cdot||y||_\infty + ||x||_\infty Var(y;\mathbb{R}_+)$$

$$+||y||_\infty Var(x;\mathbb{R}_+) \leqslant ||x||_\infty\cdot||y||_\infty + ||x||_\infty Var(y;\mathbb{R}_+) + ||y||_\infty Var(x;\mathbb{R}_+)$$

$$+Var(x;\mathbb{R}_+)\cdot Var(y;\mathbb{R}_+) = ||y||_\infty(||x||_\infty + Var(x;\mathbb{R}_+))$$

$$+Var(y;\mathbb{R}_+)(||x||_\infty + Var(x;\mathbb{R}_+))$$

$$= (||x||_\infty + Var(x;\mathbb{R}_+))(||y||_\infty + Var(y;\mathbb{R}_+)) = ||x||^1_{BV}\cdot||y||^1_{BV}$$

oraz, w oparciu o Twierdzenie 2.25, mamy

$$||x\cdot y||_{BV} \leqslant ||x\cdot y||^1_{BV} \leqslant ||x||^1_{BV}\cdot||y||^1_{BV}$$

$$\leqslant 2||x||_{BV}\cdot 2||y||_{BV} = 4||x||_{BV}\cdot||y||_{BV}.$$

□

Zwróćmy następnie uwagę na fakt, że funkcji należącej do $BV(\mathbb{R}_+)$ można sformułować twierdzenie analogiczne do dobrze znanego, wspominanego wcześniej twierdzenia Jordana o rozkładzie funkcji [3].
Mianowicie, mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.27. *Niech $x = x(t)$ będzie funkcją rzeczywistą, określoną i ograniczoną na przedziale $\mathbb{R}_+$. Wówczas $x \in BV(\mathbb{R}_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją dwie niemalejące i ograniczone funkcje $u = u(t)$, $v = v(t)$ określone na $\mathbb{R}_+$ takie, że funkcję x można przedstawić jako ich różnicę, tzn. $x(t) = u(t) - v(t)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$.*

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy najpierw, że $x(t) = u(t) - v(t)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz funkcje u, v są niemalejące i ograniczone. Z Twierdzenia 2.21 wiemy, że $u, v \in BV(\mathbb{R}_+)$. Ponadto wahania funkcji u i v wyrażone są następująco

$$Var(u; \mathbb{R}_+) = \lim_{A\to\infty}(u(A) - u(0)), \quad Var(v; \mathbb{R}_+) = \lim_{A\to\infty}(v(A) - v(0)).$$

$BV(\mathbb{R}_+)$ jest przestrzenią liniową, zatem $x \in BV(\mathbb{R}_+)$ jako kombinacja liniowa funkcji należących do $BV(\mathbb{R}_+)$.
($\Rightarrow$) Udowodnimy teraz implikację przeciwną. Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$. Rozważmy ponadto funkcję $V_x(t) = Var(x; [0, t])$, $t \in \mathbb{R}_+$. Funkcja ta jest niemalejąca, ponieważ dla dowolnych $t_1, t_2 > 0$, takich, że $t_1 < t_2$, mamy

$$V_x(t_2) - V_x(t_1) = Var(x; [0, t_2]) - Var(x; [0, t_1]) = Var(x; [t_1, t_2]) \geqslant 0.$$

Połóżmy teraz $u(t) = V_x(t)$ oraz $v(t) = V_x(t) - x(t)$. Funkcja v również jest niemalejąca, dla dowolnych $t_1, t_2 > 0$, takich, że $t_1 < t_2$ mamy bowiem

$$v(t_2) - v(t_1) = Var(x; [0, t_2]) - x(t_2) - Var(x; [0, t_1]) + x(t_1)$$

$$= Var(x; [t_1, t_2]) - (x(t_2) - x(t_1)) \geqslant 0.$$

Oczywiście $x(t) = u(t) - v(t)$ oraz funkcje u i v spełniają założenia twierdzenia.

□

Uwaga 2.28. *Rozkład $x(t) = u(t) - v(t)$ przedstawiony w powyższym dowodzie nie jest jednoznaczny, tzn. do funkcji u i v możemy dodać dowolną niemalejącą, ograniczoną funkcję ϕ. Wówczas nadal zachodzi*

$$x(t) = (u + \phi)(t) - (v + \phi)(t).$$

W tym miejscu wspomnimy o pewnym szczególnym rozkładzie, nazywanym *kanonicznym rozkładem Jordana*. Jest to rozkład dowolnej funkcji $x \in BV(\mathbb{R}_+)$ na różnicę dwóch funkcji niemalejących i ograniczonych u_k i v_k określonych następująco:

$$u_k(t) = \frac{Var(x; [0, t]) + x(t)}{2} = \frac{Var_x(t) + x(t)}{2},$$
$$v_k(t) = \frac{Var(x; [0, t]) - x(t)}{2} = \frac{Var_x(t) - x(t)}{2}.$$

Oczywiście $x(t) = u_k(t) - v_k(t)$ oraz dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$ mamy

$$u_k(t_2) - u_k(t_1) = \frac{Var(x; [0, t_2]) + x(t_2) - Var(x; [0, t_1]) - x(t_1)}{2}$$

$$= \frac{Var(x;[t_1,t_2]) + x(t_2) - x(t_1)}{2} = \frac{Var(x;[t_1,t_2]) - (x(t_1) - x(t_2))}{2} \geqslant 0,$$

$$v_k(t_2) - v_k(t_1) = \frac{Var(x;[0,t_2]) - x(t_2) - Var(x;[0,t_1]) + x(t_1)}{2}$$

$$= \frac{Var(x;[t_1,t_2]) - (x(t_2) - x(t_1))}{2} \geqslant 0,$$

czyli funkcje u_k i v_k są niemalejące.

Ponadto funkcje te są możliwie najsłabiej niemalejące, tzn. dla dowolnych funkcji $\overline{u}, \overline{v} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ takich, że $x(t) = \overline{u}(t) - \overline{v}(t)$ oraz dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$ mamy

$$u_k(t_2) - u_k(t_1) \leqslant \overline{u}(t_2) - \overline{u}(t_1),$$

$$v_k(t_2) - v_k(t_1) \leqslant \overline{v}(t_2) - \overline{v}(t_1).$$

Przedstawimy teraz kolejne bardzo ważne twierdzenie, zwane zasadą majoranty. Twierdzenie to, powszechnie znane dla funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale $[a, b]$, zostanie uogólnione na przedział nieograniczony $\mathbb{R}_+$.

Twierdzenie 2.29. *Niech $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Funkcja x ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niemalejąca i ograniczona funkcja $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ taka, że*

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant y(t_2) - y(t_1)$$

dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$.

Dowód. ($\Leftarrow$) Załóżmy najpierw, że istnieje funkcja $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ o wspomnianych w twierdzeniu własnościach. Wówczas dla dowolnie ustalonego podziału $P = \{t_0, t_1, t_2, ...\}$ przedziału $\mathbb{R}_+$ mamy

$$Var(x, P; \mathbb{R}_+) = \sum_{i=1}^{\infty} |x(t_i) - x(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (y(t_i) - y(t_{i-1})) = \lim_{A \to \infty} (y(A) - y(0)).$$

Korzystając z dowolności podziału P oraz faktu, że funkcja y jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$ i ograniczona, a więc ma granicę właściwą w nieskończoności, dostajemy nierówność

$$Var(x; \mathbb{R}_+) \leqslant \lim_{A \to \infty} (y(A) - y(0)) < \infty,$$

co oznacza, że $x \in BV(\mathbb{R}_+)$.

($\Rightarrow$) Wykażemy teraz implikację odwrotną. Załóżmy, że $x \in BV(\mathbb{R}_+)$. Zdefiniujmy funkcję $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ następująco: $y(t) = V_x(t) = Var(x; [0, t])$. Oczywiście funkcja y jest niemalejąca i ograniczona. Wtedy dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$ mamy oszacowanie

$$|x(t_2) - x(t_1)| \leqslant Var(x; [t_1, t_2]) = Var(x; [0, t_2]) - Var(x; [0, t_1]) = y(t_2) - y(t_1).$$

□

2.3. Całka Riemanna-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym

Podrozdział ten poświęcony jest pojęciu całki Riemanna-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym oraz jej podstawowym własnościom. Nasze rozważania będziemy prowadzić dla przedziału $\mathbb{R}_+$. Przedstawimy też kilka faktów związanych ze wspomnianą całką, istotnych w dalszych rozdziałach pracy. Oczywiście, rozważania te opierają się na pojęciu całki Riemanna-Stieltjesa na przedziale ograniczonym, omówionym na początku rozdziału, szerzej opisywanym w wielu pracach [3, 46, 50, 53].

Rozpoczniemy od następującego twierdzenia, mającego istotne znaczenie w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 2.30. *Załóżmy, że $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją o wahaniu ograniczonym na przedziale $\mathbb{R}_+$ oraz $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją ograniczoną i lokalnie całkowalną na $\mathbb{R}_+$ w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $\alpha(t)$. Wówczas istnieje skończona granica*

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A x(t)d\alpha(t). \tag{2.6}$$

Dowód. Rozważmy funkcję $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ określoną wzorem

$$\Phi(A) = \int_0^A x(t)d\alpha(t).$$

Pokażemy, że funkcja Φ spełnia warunek Cauchy'ego w nieskończoności. W tym celu ustalmy dowolnie liczby B, C takie, że $0 < B < C$. Wówczas, na mocy Lematu 2.6, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} |\Phi(C) - \Phi(B)| &= \left| \int_0^C x(t)d\alpha(t) - \int_0^B x(t)d\alpha(t) \right| = \left| \int_B^C x(t)d\alpha(t) \right| \\ &\leqslant \int_B^C |x(t)| d\left(\bigvee_B^t \alpha \right) \leqslant ||x||_\infty \int_B^C d\left(\bigvee_B^t \alpha \right) = ||x||_\infty \bigvee_B^C \alpha, \end{aligned} \tag{2.7}$$

gdzie

$$\bigvee_B^t \alpha = Var(\alpha; [B, t]),$$

$$\bigvee_B^C \alpha = Var(\alpha; [B, C]).$$

Zauważmy teraz, że na mocy Twierdzenia 2.11 istnieje skończona granica

$$\lim_{A\to\infty} Var(\alpha; [0, A]) = \lim_{A\to\infty} \bigvee_0^A \alpha.$$

Wnioskujemy stąd, że funkcja $A \to Var(\alpha; [0, A])$ spełnia warunek Cauchy'ego w nieskończoności. Zatem, dla zadanego $\varepsilon > 0$ możemy wybrać liczbę $a > 0$ taką, że dla dowolnych $B, C \geqslant a$ (bez straty ogólności załóżmy, że $B < C$) zachodzi nierówność

$$\bigvee_B^C \alpha = Var(\alpha; [B, C]) \leqslant \varepsilon.$$

Łącząc ten fakt z nierównością (2.7) otrzymujemy, że funkcja Φ spełnia warunek Cauchy'ego w nieskończoności. Zatem istnieje skończona granica (2.6). □

Z udowodnionego powyżej Twierdzenia 2.30 wynika bezpośrednio, że jeśli funkcja $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ma ograniczone wahanie na przedziale $\mathbb{R}_+$ i funkcja $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i lokalnie całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa na $\mathbb{R}_+$ względem funkcji α, to wówczas możemy zdefiniować całkę

$$\int_0^\infty x(t)d\alpha(t),$$

czyli całkę w sensie Riemanna-Stieltjesa z funkcji $x(t)$ względem funkcji $\alpha(t)$ na przedziale $\mathbb{R}_+$, przyjmując

$$\int_0^\infty x(t)d\alpha(t) = \lim_{A\to\infty} \int_0^A x(t)d\alpha(t). \tag{2.8}$$

Całka ta jest dobrze określona na mocy Twierdzenia 2.30.

Udowodnimy teraz prostą, ale bardzo ważną własność zdefiniowanej powyżej całki Riemanna-Stieltjesa.
Oczywiście, mówiąc o całce określonej równością (2.8), będziemy zawsze zakładać, że spełnione są założenia Twierdzenia 2.30, tzn. funkcja $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest funkcją o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$, zaś funkcja $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest ograniczona i lokalnie całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa na przedziale $\mathbb{R}_+$ względem funkcji α.

Twierdzenie 2.31. *Załóżmy, że funkcje $\alpha, x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ spełniają założenia Twierdzenia 2.30. Wówczas dla dowolnej liczby $A > 0$ prawdziwa jest równość*

$$\int_0^A x(t)d\alpha(t) + \int_A^\infty x(t)d\alpha(t) = \int_0^\infty x(t)d\alpha(t).$$

Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $A > 0$. Wówczas, z własności całki Riemanna-Stieltjesa [46] dla dowolnego $B > A$ otrzymujemy

$$\int_0^A x(t)d\alpha(t) + \int_A^B x(t)d\alpha(t) = \int_0^B x(t)d\alpha(t).$$

Stąd, na mocy Twierdzenia 2.30 dostajemy

$$\lim_{B\to\infty}\left(\int_0^A x(t)d\alpha(t)+\int_A^B x(t)d\alpha(t)\right)=\lim_{B\to\infty}\int_0^B x(t)d\alpha(t).$$

Następnie, biorąc pod uwagę założenia twierdzenia, mamy

$$\int_0^A x(t)d\alpha(t)+\lim_{B\to\infty}\int_A^B x(t)d\alpha(t)=\lim_{B\to\infty}\int_0^B x(t)d\alpha(t).$$

Ostatecznie, na mocy równości (2.8) otrzymujemy

$$\int_0^A x(t)d\alpha(t)+\int_A^\infty x(t)d\alpha(t)=\int_0^\infty x(t)d\alpha(t).$$

□

Podane poniżej twierdzenia, przedstawiające własności całki Riemanna-Stieltjesa, są rozszerzeniem na przedział nieograniczony $\mathbb{R}_+$ faktów podanych w Lematach 2.6 i 2.7. Własności te będą często stosowane w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 2.32. *Jeżeli funkcja $x=x(t)$ jest całkowalna na przedziale $\mathbb{R}_+$ w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $\alpha(t)$ o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$, to prawdziwa jest następująca nierówność*

$$\left|\int_0^\infty x(t)d\alpha(t)\right|\leqslant\int_0^\infty|x(t)|\,d\left(\bigvee_0^t\alpha\right).$$

Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $T>0$. Wówczas z założeń wiemy, że funkcja $x(t)$ jest całkowalna na przedziale $[0,T]$ w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $\alpha(t)$ o wahaniu ograniczonym na $[0,T]$. Wówczas, na mocy Lematu 2.6, otrzymujemy nierówność

$$\left|\int_0^T x(t)d\alpha(t)\right|\leqslant\int_0^T|x(t)|d\left(\bigvee_0^t\alpha\right).$$

Stosując teraz Twierdzenie 2.30, dostajemy

$$\lim_{T\to\infty}\left|\int_0^T x(t)d\alpha(t)\right|=\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T x(t)d\alpha(t)\right|$$

$$=\left|\int_0^\infty x(t)d\alpha(t)\right|\leqslant\lim_{T\to\infty}\int_0^T|x(t)|d\left(\bigvee_0^t\alpha\right)=\int_0^\infty|x(t)|d\left(\bigvee_0^t\alpha\right),$$

co kończy dowód. □

Twierdzenie 2.33. *Niech $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą i ograniczoną na przedziale $\mathbb{R}_+$. Załóżmy ponadto, że $x_1, x_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ są ograniczone i lokalnie całkowalne w sensie Riemanna-Stieltjesa na przedziale $\mathbb{R}_+$ względem funkcji α oraz $x_1(t) \leqslant x_2(t)$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas prawdziwa jest następująca nierówność*

$$\int_0^\infty x_1(t)d\alpha(t) \leqslant \int_0^\infty x_2(t)d\alpha(t).$$

Dowód. Ustalmy dowolnie liczbę $A > 0$. Wówczas, na mocy Lematu 2.7, otrzymujemy

$$\int_0^A x_1(t)d\alpha(t) \leqslant \int_0^A x_2(t)d\alpha(t).$$

Ponieważ funkcja α jest niemalejąca i ograniczona na $\mathbb{R}_+$, ma ona ograniczone wahanie na tym przedziale. Na mocy Twierdzenia 2.30 istnieją więc skończone granice

$$\lim_{A\to\infty} \int_0^A x_1(t)d\alpha(t), \quad \lim_{A\to\infty} \int_0^A x_2(t)d\alpha(t).$$

Przechodząc z $A \to \infty$ w uzyskanej wyżej nierówności, otrzymujemy

$$\int_0^\infty x_1(t)d\alpha(t) \leqslant \int_0^\infty x_2(t)d\alpha(t).$$

□

Rozdział 3
Miary niezwartości

Rozdział ten poświęcony jest teorii miar niezwartości, która stanowi jedno z podstawowych narzędzi wykorzystywanych w dalszej części pracy. Przedstawimy najważniejsze pojęcia i zależności, ze szczególnym uwzględnieniem tych, które stosować będziemy do badania rozważanych przez nas równań całkowych. Rozpoczniemy od krótkiego rysu historycznego, a następnie omówimy aksjomatyczną definicję miary niezwartości oraz klasyczne przykłady - miarę Kuratowskiego i Hausdorffa. W dalszej części przedstawimy konstrukcję miar niezwartości w wybranych przestrzeniach Banacha, które rozważane są w niniejszej pracy.

Początki teorii miar niezwartości sięgają 1930 roku, kiedy K. Kuratowski wprowadził pierwszą tego typu miarę do badania zagadnień topologicznych [43]. Jednakże spore zainteresowanie owym pojęciem i rozwój teorii nastąpiły dopiero w 1955 roku za sprawą G. Darbo, który wykorzystał miarę Kuratowskiego do uogólnienia twierdzenia Schaudera o punkcie stałym [30].

Kolejnym ważnym etapem było wprowadzenie w 1957 roku przez L. S. Goldenšteina, I. T. Gohberga i A. S. Markusa miary niezwartości Hausdorffa [36]. Jej własności były następnie przedmiotem dalszych badań L. S. Goldenšteina i A. S. Markusa [37]. W kolejnych latach teoria miar niezwartości była intensywnie rozwijana, wprowadzono nowe rodzaje miar i rozszerzono zakres ich zastosowań [29, 40, 52].

Szczególnie istotne dla dalszego rozwoju były zastosowania twierdzeń o punktach stałych typu Darbo. Począwszy od lat 70., metody wykorzystujące miary niezwartości używane były między innymi do badania istnienia rozwiązań równań różniczkowych. Wraz z rozwojem zastosowań pojawiła się potrzeba skonstruowania miar, które można byłoby wykorzystać w konkretnych przestrzeniach Banacha. Klasyczne miary niezwartości, mimo ich fundamentalnego znaczenia, nie zawsze są bowiem łatwe do bezpośredniego wyznaczenia.

Trudności związane z konstrukcją i stosowaniem konkretnych miar przyczyniły się do rozwoju aksjomatycznego podejścia do teorii miar niezwartości, zaproponowanego przez B. N. Sadovskiiego. Spośród powstałych w ten sposób definicji szczególne znaczenie zyskało ujęcie aksjomatyczne zaproponowane w 1980 roku przez J. Banasia i K. Goebla [11]. Definicja ta stała się jedną z podstawowych i powszechnie stosowanych, stanowiąc dogodną podstawę zarówno dalszego rozwoju teorii, jak i jej licznych zastosowań [1, 7]. Właśnie tę definicję przyjmiemy w dalszych rozważaniach.

3.1. Ogólna teoria miar niezwartości. Twierdzenie Darbo

W podrozdziale tym wprowadzimy definicję miary niezwartości. Przedstawimy także różne rodzaje miar niezwartości, w zależności od posiadanych przez nie własności oraz ważne przykłady. Przypomimy też twierdzenie Darbo o punkcie stałym, które, ściśle związane z miarami niezwartości, będzie kluczowe w następnych rozdziałach, w dowodach twierdzeń egzystencjalnych.
Zaczniemy od podania aksjomatycznej definicji miary niezwartości, wprowadzonej przez J. Banasia i K. Goebla [11]. Załóżmy najpierw, że $(E, ||\cdot||)$ jest rzeczywistą przestrzenią Banacha.

Definicja 3.1. Odwzorowanie $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ nazywamy *miarą niezwartości w przestrzeni* E, jeśli spełnia ono następujące warunki:

i) Rodzina $\ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta oraz $\ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$.
ii) $X \subset Y \implies \mu(X) \leqslant \mu(Y)$.
iii) $\mu(\overline{X}) = \mu(ConvX) = \mu(X)$.
iv) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0,1]$.
v) Jeżeli (X_n) jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych z $\mathfrak{M}_E$, tzn. $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, ...$ oraz jeśli $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, to wtedy zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.

Rodzinę $\ker\mu$ zdefiniowaną w aksjomacie i) nazywamy *jądrem miary niewartości* μ. Zauważmy, że zbiór X_∞ przedstawiony w aksjomacie v) należy do rodziny $\ker\mu$. Jest to konsekwencja inkluzji $X_\infty \subset X_n$ $(n = 1, 2, ...)$ i aksjomatu ii), tj. monotoniczności miary, z którego wynika, że $\mu(X_\infty) \leqslant \mu(X_n)$ $(n = 1, 2, ...)$. Otrzymujemy stąd, że $\mu(X_\infty) = 0$, tzn. $X_\infty \in \ker\mu$. Ta prosta obserwacja jest bardzo istotna w zastosowaniach.

Załóżmy dalej, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E. Miarę μ nazywamy *subliniową*, jeśli jest subaddytywna i jednorodna, tzn. spełnia następujące warunki:

vi) $\mu(X + Y) \leqslant \mu(X) + \mu(Y)$,
vii) $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

Jeżeli zaś miara μ spełnia warunek

viii) $\mu(X \cup Y) = \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$,

to mówimy, że μ *ma własność maksimum*. Nie każda bowiem miara niezwartości posiada własność maksimum. Jako przykład możemy tu wskazać miarę opisaną wzorem $\mu(X) = \mathrm{diam}X$, $X \subset E$. Wówczas dla dowolnych dwóch odpowiednio odległych od siebie zbiorów jednoelementowych $X, Y \subset E$ mamy nierówność: $\mu(X \cup Y) > \max\{\mu(X), \mu(Y)\}$.
Miarę niezwartości μ, która spełnia warunek

ix) $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$

nazywamy *miarą pełną*. Nie każda miara niezwartości jest pełna. Jako prosty przykład możemy tu również wskazać miarę przytoczoną wcześniej, tj. $\mu(X) = \operatorname{diam}(X)$. Jej jądro składa się ze wszystkich zbiorów jednoelementowych, zatem zachodzi jedynie inkluzja $\ker \mu \subset \mathfrak{N}_E$.

Uwzględniając warunki vi)-ix), możemy wprowadzić następujące pojęcie.

Definicja 3.2. Miarę niezwartości μ w przestrzeni E nazywamy *regularną*, jeśli jest ona pełna, subliniowa oraz ma własność maksimum.

Przejdziemy teraz do przedstawienia dwóch kluczowych przykładów regularnych miar niezwartości: miary niezwartości Kuratowskiego oraz miary niezwartości Hausdorffa. Zaczniemy od miary Kuratowskiego, wprowadzonej przez polskiego matematyka K. Kuratowskiego w 1930 r.

Definicja 3.3. Niech (M, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną, zaś $X \subset M$ - zbiorem ograniczonym. Funkcję $\alpha : \mathfrak{M}_M \to \mathbb{R}_+$ określoną następująco

$$\alpha(X) = \inf \Big\{ \varepsilon > 0 : X \text{ można pokryć skończoną liczbą zbiorów o średnicy mniejszej od } \varepsilon \Big\}$$

nazywamy *miarą Kuratowskiego zbioru* X. Równoważnie wzór ten można zapisać w sposób symboliczny:

$$\alpha(X) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : X \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i : X_i \subset M, \operatorname{diam}(X_i) < \varepsilon, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jak łatwo zauważyć, dla dowolnego zbioru $X \subset M$ prawdziwa jest nierówność $\alpha(X) \leqslant \operatorname{diam}(X)$.

Zwróćmy teraz uwagę na własności tej miary [11]:

a) $\alpha(X) = 0 \iff X$ jest relatywnie zwarty,

b) $\alpha(\overline{X}) = \alpha(X)$,

c) $X \subset Y \implies \alpha(X) \leqslant \alpha(Y)$,

d) $\alpha(X \cup Y) = \max\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$,

e) $\alpha(X \cap Y) \leqslant \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$,

f) Jeżeli (X_n) jest zstępującym ciągiem zbiorów domkniętych, niepustych i ograniczonych z przestrzeni M oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0$, to wtedy zbiór $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty i zwarty.

Zauważmy, że własność f) jest uogólnieniem twierdzenia Cantora [44].

Ponadto, jeżeli M jest przestrzenią Banacha, to

g) $\alpha(X+Y) \leqslant \alpha(X) + \alpha(Y)$,

h) $\alpha(\lambda X) = |\lambda|\alpha(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$,

i) $\alpha(\mathrm{ConvX}) = \alpha(X)$.

Z własności a) wynika, że miara Kuratowskiego jest miarą pełną, a z własności d) wynika zaś, że ma ona własność maksimum. Uwzględniając z kolei g) i h), dostajemy, że jest ona subliniowa. Oznacza to, że miara Kuratowskiego jest miarą regularną.

Ponadto, jeżeli przestrzeń M jest nieskończenie wymiarowa, to dla dowolnych $X_1, X_2 \in \mathfrak{M}_M$ prawdziwa jest nierówność

$$|\alpha(X_1) - \alpha(X_2)| \leqslant 2d_H(X_1, X_2). \tag{3.1}$$

Miara Kuratowskiego jest niełatwa w zastosowaniach, zwłaszcza w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych. Oczywiście, dla przestrzeni skończenie wymiarowych mamy: $\alpha(B_1) = 0$, natomiast w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowych było to trudne i dopiero w 1970 r. pokazano, że $\alpha(B_1) = 2$ [35, 49].

Przejdziemy teraz do omówienia kolejnej miary niezwartości - miary Hausdorffa. Choć została ona skonstruowana w 1957 r. przez L. S. Goldenšteina, I. T. Gohberga i A. S. Markusa, jej nazwa nawiązuje do odległości Hausdorffa, z którą jest ściśle związana [11, 15].

Definicja 3.4. Rozważmy przestrzeń metryczną (M, d) oraz jej niepusty, ograniczony podzbiór X. Funkcję $\chi : \mathfrak{M}_M \to \mathbb{R}_+$ określoną następująco

$$\chi(X) = \inf \Big\{\varepsilon > 0 : X \text{ można pokryć skończoną liczbą kul o promieniach mniejszych od } \varepsilon\Big\}$$

nazywamy *miarą Hausdorffa zbioru* X. Równoważnie

$$\chi(X) = \inf \left\{\varepsilon > 0 : X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i) : x_i \in M, r_i < \varepsilon, i = 1, 2, ..., n, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Miara niezwartości χ posiada własności wymienione w a)-i) dla miary Kuratowskiego, jest więc regularna. Poniższa nierówność pokazuje związek miary χ ze wspominaną wcześniej metryką Hausdorffa. Dla dowolnych $X_1, X_2 \in \mathfrak{M}_M$ mamy bowiem

$$|\chi(X_1) - \chi(X_2)| \leqslant d_H(X_1, X_2). \tag{3.2}$$

Przed przedstawieniem zależności między miarami Kuratowskiego i Hausdorffa wprowadzimy pojęcie równoważności miar niezwartości.

Definicja 3.5. Niech $\mu_1, \mu_2 : \mathfrak{M}_M \to \mathbb{R}_+$ będą miarami niezwartości. Mówimy, że miary μ_1 i μ_2 są *równoważne*, jeśli istnieją stałe $c_1, c_2 > 0$ takie, że

$$c_1\mu_1(X) \leqslant \mu_2(X) \leqslant c_2\mu_1(X)$$

dla każdego $X \in \mathfrak{M}_M$.

Twierdzenie 3.6. *Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną, zaś $\emptyset \neq X \subset M$ - zbiorem ograniczonym. Wówczas*

$$\chi(X) \leqslant \alpha(X) \leqslant 2\chi(X).$$

Z powyższego twierdzenia wynika, że miary niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa są równoważne. Naturalne jest zatem pytanie, czy każda regularna miara niezwartości jest równoważna mierze Hausdorffa. Odpowiedź na nie jest negatywna. Można bowiem skonstruować w pewnych przestrzeniach regularną miarę niezwartości, która nie jest równoważna mierze Hausdorffa [13].

Dalsze fakty dotyczące miar niezwartości można znaleźć w [11, 47, 48, 56].

Pojęcie miary niezwartości umożliwia sformułowanie bardzo użytecznego twierdzenia o punkcie stałym typu Darbo [11, 30]. Twierdzenie to stanowi uogólnienie twierdzenia Banacha o kontrakcji oraz twierdzenia Schaudera o punkcie stałym.

Twierdzenie 3.7. *Niech μ będzie miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Załóżmy, że Ω jest niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni E, zaś $Q : \Omega \to \Omega$ jest operatorem ciągłym takim, że istnieje stała $k \in [0,1)$ taka, że spełniona jest nierówność $\mu(QX) \leqslant k\mu(X)$ dla dowolnego $X \subset \Omega$. Wówczas operator Q ma co najmniej jeden punkt stały w zbiorze Ω.*

Warto wspomnieć, że $FixQ$, tj. zbiór wszystkich punktów stałych operatora Q należących do Ω jest elementem rodziny $\ker\mu$ ([11]). Ta prosta obserwacja jest bardzo użyteczna przy charakteryzowaniu rozwiązań równań operatorowych, czym zajmiemy się w następnych rozdziałach.

3.2. Miary niezwartości w przestrzeniach $C([0,T])$ i $BC(\mathbb{R}_+)$

W podrozdziale 1.2. omówiliśmy przestrzenie Banacha $C([0,T])$ i $BC(\mathbb{R}_+)$ oraz warunki dla relatywnej zwartości ich podzbiorów. Teraz z kolei przedstawimy wybrane miary niezwartości w wymienionych przestrzeniach [8, 11]. Stanowić one będą podstawy dalszych rozdziałów.

Zacznijmy od przestrzeni $C([0,T])$, gdzie $T > 0$. Niech X będzie jej niepustym i ograniczonym podzbiorem. Wówczas dla dowolnej funkcji $x \in X$ i liczby $\varepsilon > 0$ określamy moduł ciągłości funkcji x następującym wzorem

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| : t,s \in [0,T], |t-s| \leqslant \varepsilon\}.$$

Następnie dla zbioru X definiujemy wielkości

$$\omega^T(X,\varepsilon) = \sup\left\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\right\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^T(X,\varepsilon).$$

Jak łatwo zauważyć, $\omega_0^T(X)$ określa stopień braku jednakowej ciągłości funkcji ze zbioru X. W szczególności, gdy $\omega_0^T(X) = 0$, to funkcje z X są jednakowo ciągłe, a zatem, w oparciu o Twierdzenie 1.1, X jest zbiorem relatywnie zwartym.

Otrzymujemy zatem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.8. *Funkcja $\omega_0^T : \mathfrak{M}_{C([0,T])} \to \mathbb{R}_+$ jest miarą niezwartości w przestrzeni Banacha $C([0,T])$. Ponadto miara ta jest regularna. Jądro miary ω_0^T składa się ze wszystkich niepustych i ograniczonych zbiorów X złożonych z funkcji jednakowo ciągłych na $[0,T]$, czyli, w oparciu o twierdzenie Arzeli, zbiorów relatywnie zwartych.*

Przejdźmy teraz do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Jak już wspomniano w rozdziale pierwszym, sytuacja w tej przestrzeni jest bardziej skomplikowana, głównie przez nieograniczoność przedziału $\mathbb{R}_+$. Zatem oprócz własności związanych z ciągłością, konieczne jest uwzględnienie zachowania rozważanych funkcji w nieskończoności.

Weźmy dowolny niepusty i ograniczony podzbiór X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ oraz ustalmy $\varepsilon > 0$. Wówczas dla dowolnej funkcji $x \in X$ definiujemy wielkość

$$\omega^\infty(x,\varepsilon) = \sup\left\{|x(t) - x(s)| : t,s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Zauważmy, że $\lim_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(x,\varepsilon) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja x jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+$ (por. [9]).
Następnie definiujemy wielkości

$$\omega^\infty(X,\varepsilon) = \sup\left\{\omega^\infty(x,\varepsilon) : x \in X\right\},$$

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^\infty(X,\varepsilon). \tag{3.3}$$

Wielkość $\omega_0^\infty(X)$ określa stopień braku jednakowej jednostajnej ciągłości funkcji ze zbioru X. W szczególności, $\omega_0^\infty(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje należące do X są jednakowo jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

Sama wielkość ω_0^∞ nie uwzględnia zachowania funkcji ze zbioru X w nieskończoności, niezbędne jest więc zdefiniowanie kolejnego składnika miary niezwartości. Jeden z nich związany jest ze znikaniem funkcji w nieskończoności. Dla ustalonej liczby $T > 0$ definiujemy

$$a_T(X) = \sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{|x(t)| : t \geqslant T\right\}\right\}$$

oraz

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} a_T(X). \tag{3.4}$$

Warunek $a_\infty(X) = 0$ oznacza, że funkcje należące do X dążą w nieskończoności do zera jednostajnie ze względu na zbiór X. Łącząc formuły (3.3) i (3.4), otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.9. *Funkcja $\mu_a : \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)} \to \mathbb{R}_+$ określona wzorem*

$$\mu_a(X) = \omega_0^\infty(X) + a_\infty(X)$$

jest miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Jest ona subliniowa i posiada własność maksimum, nie jest jednak miarą pełną. Jądro $\ker \mu_a$ składa się z niepustych i ograniczonych zbiorów X, których elementy są funkcjami jednakowo jednostajnie ciągłymi na $\mathbb{R}_+$ oraz dążą w nieskończoności do zera jednostajnie ze względu na zbiór X. (por. [9])

Inną miarę niezwartości otrzymujemy, uwzględniając oscylację funkcji z zadanego zbioru X w nieskończoności. Dla ustalonego niepustego, ograniczonego zbioru $X \subset BC(\mathbb{R}_+)$ oraz liczby $T > 0$ połóżmy

$$b_T(X) = \sup_{x\in X} \{\sup \{|x(t) - x(s)| : t, s \geqslant T\}\},$$

a następnie

$$b(X) = \lim_{T\to\infty} b_T(X). \tag{3.5}$$

Wielkość $b(X)$ opisuje zachowanie funkcji ze zbioru X w nieskończoności. W szczególności, z równości $b(X) = 0$ uzyskujemy jednostajny względem X warunek Cauchy'ego w nieskończoności. Oznacza to, że $b(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy każda funkcja ze zbioru X ma w nieskończoności granicę właściwą, a zbieżność ta zachodzi jednostajnie względem X.

Łącząc (3.3) i (3.5), otrzymujemy kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3.10. *Funkcja $\mu_b : \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)} \to \mathbb{R}_+$ zadana wzorem*

$$\mu_b(X) = \omega_0^\infty(X) + b(X)$$

jest miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Miara ta jest subliniowa i ma własność maksimum, ale nie jest miarą pełną. Jądro $\ker \mu_b$ składa się z niepustych i ograniczonych zbiorów X, których elementy są funkcjami jednakowo jednostajnie ciągłymi na $\mathbb{R}_+$ oraz dążą w nieskończoności do skończonych granic, przy czym zbieżność ta zachodzi jednostajnie względem zbioru X. (por. [9])

Rozdział 4
Rozwiązania nieliniowych kwadratowych równań całkowych typu Hammersteina-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym znikające w nieskończoności

W rozdziale tym przedstawimy wyniki dotyczące istnienia rozwiązań kwadratowego równania całkowego Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa postaci

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t, s)h(s, x(s))d_sK(t, s) \tag{4.1}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Równanie (4.1) rozważać będziemy w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ omówionej w poprzednich rozdziałach. Poszukiwać będziemy rozwiązań równania (4.1) należących do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ i zbieżnych do zera w nieskończoności.

Pokażemy, że przy odpowiednich założeniach równanie całkowe (4.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ zbieżne do zera w nieskończoności.
Zaczniemy od sformułowania założeń, na podstawie których będziemy badać istnienie rozwiązań równania (4.1). Zakładamy, że spełnione są następujące warunki:

i) Funkcja $a = a(t)$ należy do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ oraz $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$.

ii) Funkcja $f(t, x) = f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska względem zmiennej x, jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}_+$, tzn. istnieje funkcja $k(r) = k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, niemalejąca i ciągła na $\mathbb{R}_+$, taka, że $k(0) = 0$ oraz dla każdego $r > 0$ zachodzi nierówność

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k(r)|x - y|,$$

dla $x, y \in [-r, r]$ i dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

iii) $\lim_{t\to\infty} f(t, 0) = 0$.

W dalszej części przez $\overline{F}$ oznaczać będziemy stałą określoną równością

$$\overline{F} = \sup\{|f(t, 0)| : t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Zauważmy, że na mocy założeń (ii) i (iii) mamy, że $\overline{F} < \infty$.

iv) Funkcja $t \to f(t,x)$ spełnia warunek Cauchy'ego w nieskończoności lokalnie jednostajnie względem x, tzn. spełniony jest warunek

$$\bigvee_{r>0}\bigvee_{\varepsilon>0}\bigvee_{T>0}\bigvee_{t,s\geqslant T}\bigvee_{x\in[-r,r]}|f(t,x)-f(s,x)|\leqslant\varepsilon.$$

v) Funkcja $g(t,s)=g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła i ograniczona na zbiorze $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

Ponadto przez G oznaczać będziemy stałą

$$G=\sup\left\{|g(t,s)|:(t,s)\in\mathbb{R}_+^2\right\}.$$

vi) Funkcja $h=h(t,x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ i jednostajnie ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+\times[-r,r]$ dla każdego $r>0$. Ponadto istnieje ciągła i niemalejąca funkcja $\Phi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ taka, że

$$|h(t,x)|\leqslant\Phi(|x|)$$

dla $t\in\mathbb{R}_+$ i $x\in\mathbb{R}$.

vii) Funkcja $K(t,s)=K:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, $K(t,0)=0$ dla $t\in\mathbb{R}_+$ oraz dla każdego ustalonego $t\in\mathbb{R}_+$ funkcja $s\to K(t,s)$ ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Ponadto funkcja $t\to\bigvee\limits_{s=0}^{\infty}K(t,s)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$.

Na mocy powyższego założenia stała $\overline{K}$ określona wzorem

$$\overline{K}=\sup\left\{\bigvee_{s=0}^{\infty}K(t,s):t\in\mathbb{R}_+\right\}$$

jest skończona, tzn. $\overline{K}<\infty$.

viii) Dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że dla wszystkich $t_1,t_2\in\mathbb{R}_+$, $t_1<t_2$, $t_2-t_1\leqslant\delta$, zachodzi nierówność

$$\bigvee_{s=0}^{\infty}[K(t_2,s)-K(t_1,s)]\leqslant\varepsilon.$$

ix) Funkcja $s\to|g(t,s)|$ jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $s\to K(t,s)$ na przedziale $\mathbb{R}_+$ dla każdego $t\in\mathbb{R}_+$. Ponadto funkcja

$$t\to\int_0^{\infty}|g(t,s)|d_sK(t,s)$$

jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$.

x) Nierówność

$$||a||+(rk(r)+\overline{F})G\overline{K}\Phi(r)\leqslant r$$

ma dodatnie rozwiązanie r_0 takie, że

$$G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)<1.$$

Przedstawimy teraz główny wynik tego rozdziału.

Twierdzenie 4.1. *Przy założeniach (i)-(x) istnieje co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t)$ równania (4.1) w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, zbieżne do zera w nieskończoności.*

Dowód. Mając na uwadze równanie (4.1), rozważmy operatory F, H i Q określone w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ następująco:

$$\begin{aligned}(Fx)(t) &= f(t, x(t)),\\ (Hx)(t) &= \int_0^\infty g(t,\tau)h(\tau, x(\tau))d_\tau K(t,\tau),\\ (Qx)(t) &= a(t) + (Fx)(t)\cdot(Hx)(t),\end{aligned} \tag{4.2}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas równanie (4.1) można zapisać w postaci $x(t) = (Qx)(t)$.

W pierwszej kolejności pokażemy, że operator Q przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)$ w siebie. W tym celu ustalmy dowolną funkcję $x \in BC(\mathbb{R}_+)$. Wykażemy, że funkcja $Qx \in BC(\mathbb{R}_+)$, tzn. Qx jest ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}_+$.
Najpierw pokażemy, że funkcja Qx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. Zauważmy, że w tym celu wystarczy wykazać ciągłość funkcji Fx i Hx.
Zacznijmy od funkcji Hx. Ustalmy dowolnie liczbę $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolne $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Wówczas, mając na uwadze wzór (4.2) określający operator H, na mocy twierdzeń 2.32 i 2.33 oraz założeń (v), (vi) oraz (vii), otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Hx)(t) - (Hx)(s)| &= \left|\int_0^\infty g(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau) - \int_0^\infty g(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(s,\tau)\right|\\
&\leqslant \left|\int_0^\infty g(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau) - \int_0^\infty g(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau)\right|\\
&+ \left|\int_0^\infty g(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau) - \int_0^\infty g(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(s,\tau)\right|\\
&\leqslant \left|\int_0^\infty [g(t,\tau) - g(s,\tau)]h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau)\right|\\
&+ \left|\int_0^\infty g(s,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau [K(t,\tau) - K(s,\tau)]\right|\\
&\leqslant \int_0^\infty |g(t,\tau) - g(s,\tau)|\cdot|h(\tau,x(\tau))|d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right)\\
&+ \int_0^\infty |g(s,\tau)|\cdot|h(\tau,x(\tau))|d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau}[K(t,p) - K(s,p)]\right)\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^\infty \omega_1(g,\varepsilon)\Phi(|x(\tau)|)d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right)$$

$$+\int_0^\infty |g(s,\tau)|\Phi(|x(\tau)|)d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau}[K(t,p)-K(s,p)]\right)$$

$$\leqslant \omega_1(g,\varepsilon)\Phi(||x||)\int_0^\infty d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right)$$

$$+G\cdot\Phi(||x||)\int_0^\infty d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau}[K(t,p)-K(s,p)]\right)$$

$$\leqslant \omega_1(g,\varepsilon)\Phi(||x||)\bigvee_{\tau=0}^{\infty} K(t,\tau)+G\cdot\Phi(||x||)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau)-K(s,\tau)]$$

$$\leqslant \omega_1(g,\varepsilon)\Phi(||x||)\overline{K}+G\cdot\Phi(||x||)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau)-K(s,\tau)], \tag{4.3}$$

gdzie

$$\omega_1(g,\varepsilon)=\sup\{|g(t,\tau)-g(s,\tau)| : t,s,\tau\in\mathbb{R}_+, |t-s|\leqslant\varepsilon\},$$

zaś stałe G i $\overline{K}$ zostały zdefiniowane odpowiednio w założeniach (v) i (vii).
Zauważmy, że na mocy założenia (v) mamy, że $\omega_1(g,\varepsilon)\to 0$ przy $\varepsilon\to 0$.
Zatem, biorąc pod uwagę oszacowanie (4.3), założenie (viii) oraz powyższą własność, wnioskujemy, że funkcja Hx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Pokażemy teraz, że funkcja Fx jest ciągła na $\mathbb{R}_+$. Weźmy dowolne $t,s\in\mathbb{R}_+$, wtedy na mocy założeń (ii) i (iv) dostajemy

$$|(Fx)(t)-(Fx)(s)|=|f(t,x(t))-f(s,x(s))|\leqslant|f(t,x(t))-f(t,x(s))|$$

$$+|f(t,x(s))-f(s,x(s))|\leqslant k(||x||)|x(t)-x(s)|+|f(t,x(s))-f(s,x(s))|. \tag{4.4}$$

Ustalmy dowolnie $\varepsilon_1>0$. Następnie wybierzmy liczbę $T>0$ zgodnie z założeniem (iv), tzn. taką, że

$$|f(t,y)-f(s,y)|\leqslant\varepsilon_1$$

dla $t,s\geqslant T$ oraz $y\in[-||x||,||x||]$.
Stąd mamy, że

$$|f(t,x(s))-f(s,x(s))|\leqslant\varepsilon_1, \tag{4.5}$$

dla $t,s\geqslant T$.

Następnie ustalmy $\varepsilon>0$. Wówczas, biorąc $t,s\in[0,T]$ takie, że $|t-s|\leqslant\varepsilon$, dostajemy

$$|f(t,x(s))-f(s,x(s))|\leqslant\omega^1_{T,||x||}(f,\varepsilon), \tag{4.6}$$

gdzie

$$\omega^1_{T,||x||}(f,\varepsilon) = \sup\{|f(t,y) - f(s,y)| : t,s \in [0,T], |t-s| \leqslant \varepsilon, y \in [-||x||, ||x||]\}.$$

Łącząc oszacowania (4.4) i (4.6), dla $t,s \in [0,T]$, $|t-s| \leqslant \varepsilon$, otrzymujemy

$$|(Fx)(t) - (Fx)(s)| \leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + \omega^1_{T,||x||}(f,\varepsilon). \tag{4.7}$$

Z drugiej strony, dla $t,s \geqslant T$ i $|t-s| \leqslant \varepsilon$, z oszacowań (4.4) i (4.5) mamy

$$|(Fx)(t) - (Fx)(s)| \leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + \varepsilon_1. \tag{4.8}$$

Rozważmy na koniec $t,s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $s < t$, $s \leqslant T$, $t \geqslant T$ i $|t-s| \leqslant \varepsilon$. Wówczas, na mocy (4.4), (4.5) oraz (4.6), otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Fx)(t) - (Fx)(s)| &\leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + |f(t,x(s)) - f(T,x(s))| \\ &+|f(T,x(s)) - f(s,x(s))| \leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + \varepsilon_1 + \omega^1_{T,||x||}(f,\varepsilon).\end{aligned}$$

Powyższa nierówność wraz z oszacowaniami (4.7) i (4.8) implikuje ciągłość funkcji Fx na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Wobec postaci operatora Q, założenia (i) oraz wykazanej powyżej ciągłości funkcji Hx i Fx wnioskujemy, że funkcja Qx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Następnie wykażemy, że funkcja Qx jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$. W tym celu ustalmy liczbę $t \in \mathbb{R}_+$. Na mocy przyjętych założeń oraz twierdzeń 2.32 i 2.33 otrzymujemy następujące oszacowania:

$$|(Fx)(t)| \leqslant |f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| \leqslant k(||x||)|x(t)| + |f(t,0)|, \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}|(Hx)(t)| &\leqslant \int_0^\infty |g(t,\tau)| \cdot |h(\tau,x(\tau))| d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right) \\ &\leqslant \int_0^\infty |g(t,\tau)| \cdot \Phi(|x(\tau)|) d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right) \\ &\leqslant G \cdot \Phi(||x||) \int_0^\infty d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p)\right) \leqslant G \cdot \Phi(||x||) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(t,p).\end{aligned} \tag{4.10}$$

Łącząc oszacowania (4.9), (4.10) oraz wzór określający operator Q, mamy

$$\begin{aligned}|(Qx)(t)| &\leqslant |a(t)| + |(Fx)(t)| \cdot |(Hx)(t)| \leqslant |a(t)| + [k(||x||)|x(t)| \\ &+|f(t,0)|] \cdot G \cdot \Phi(||x||) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(t,p) \\ &\leqslant |a(t)| + [k(||x||)|x(t)| + |f(t,0)|] \cdot G \cdot \overline{K} \cdot \Phi(||x||).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Oznacza to, że funkcja Qx jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$ oraz zachodzi nierówność

$$||Qx|| \leqslant ||a|| + (k(||x||)||x|| + \overline{F}) \cdot G\overline{K}\Phi(||x||). \tag{4.12}$$

Łącząc wykazaną wcześniej ciągłość funkcji Qx z jej ograniczonością, wnioskujemy, że $Qx \in BC(\mathbb{R}_+)$, czyli operator Q odwzorowuje przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)$ w siebie.

Ustalmy teraz $r_0 > 0$. Pokażemy, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie. Na mocy oszacowania (4.12) oraz faktu, że funkcje k i Φ są niemalejące, dla $x \in \overline{B}_{r_0}$, tzn. takiego, że $||x|| \leqslant r_0$, mamy

$$||Qx|| \leqslant ||a|| + (r_0 k(r_0) + \overline{F}) \cdot G\overline{K}\Phi(r_0).$$

Z założenia (x) wynika, że istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że

$$||a|| + (r_0 k(r_0) + \overline{F}) \cdot G\overline{K}\Phi(r_0) \leqslant r_0.$$

W konsekwencji $||Qx|| \leqslant r_0$, zatem $Q(\overline{B}_{r_0}) \subset \overline{B}_{r_0}$. Ponadto, zgodnie z drugą częścią założenia (x), $G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0) < 1$.

Następnie wykażemy, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.
Ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$ i wybierzmy dowolnie funkcje $x, y \in \overline{B}_{r_0}$ takie, że $||x - y|| \leqslant \varepsilon$. Wtedy, na mocy założenia (ii), dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ dostajemy

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| = |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| \leqslant k(r_0)|x(t) - y(t)|.$$

Stąd

$$||Fx - Fy|| \leqslant k(r_0)||x - y|| \leqslant k(r_0)\varepsilon. \tag{4.13}$$

Oznacza to, że operator F jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. Następnie, uwzględniając założenia (v), (vi), (vii) i (ix), otrzymujemy następujące oszacowania:

$$|(Hx)(t) - (Hy)(t)| = \left| \int_0^\infty g(t,\tau)[h(\tau, x(\tau)) - h(\tau, y(\tau))] d_\tau K(t,\tau) \right|$$

$$\leqslant \int_0^\infty |g(t,\tau)| \cdot |h(\tau, x(\tau)) - h(\tau, y(\tau))| d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p) \right)$$

$$\leqslant \int_0^\infty G \cdot \omega_{r_0}^2(h,\varepsilon) d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t,p) \right) \leqslant G\omega_{r_0}^2(h,\varepsilon) \bigvee_{\tau=0}^{\infty} K(t,\tau) \leqslant G\overline{K}\omega_{r_0}^2(h,\varepsilon), \tag{4.14}$$

gdzie

$$\omega_{r_0}^2(h,\varepsilon) = \sup\left\{ |h(\tau,x) - h(\tau,y)| : \tau \in \mathbb{R}_+, x, y \in [-r_0, r_0], |x - y| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Ponieważ, na mocy założenia (vi) mamy, że $\omega_{r_0}^2(h,\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$, to z oszacowania (4.14) wynika, że operator H jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Uwzględniając postać operatora Q daną wzorem (4.2), dla $x, y \in \overline{B}_{r_0}$ otrzymujemy oszacowanie

$$|(Qx)(t) - (Qy)(t)| = |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fy)(t)(Hy)(t)|$$
$$\leqslant |(Fx)(t)||(Hx)(t) - (Hy)(t)| + |(Hy)(t)||(Fx)(t) - (Fy)(t)|.$$

Łącząc oszacowania (4.9), (4.10), (4.13) i (4.14) dostajemy, że

$$||Qx - Qy|| \leqslant (r_0 k(r_0) + \overline{F})G\overline{K}\omega_{r_0}^2(h, \varepsilon) + G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)\varepsilon.$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności dąży do zera przy $\varepsilon \to 0$, więc operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Ustalmy teraz dowolnie niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$. W dalszej części dowodu wyprowadzimy oszacowania dla miary niezwartości μ_a obrazu zbioru X przez operator Q. W tym celu oszacujemy kolejno wielkości $\omega_0^\infty(QX)$ oraz $a_\infty(QX)$, występujące w definicji tej miary.

Wybierzmy teraz dowolnie funkcję $x \in X$ oraz liczby $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Wtedy, na mocy oszacowania (4.3) otrzymanego wyżej, mamy

$$|(Hx)(t) - (Hx)(s)| \leqslant \Phi(||x||)\overline{K}\omega_1(g, \varepsilon) + G\Phi(||x||)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t, \tau) - K(s, \tau)]$$
$$\leqslant \overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g, \varepsilon) + G\Phi(r_0)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t, \tau) - K(s, \tau)], \tag{4.15}$$

gdzie wielkość $\omega_1(g, \varepsilon)$ jest zdefiniowana następująco:

$$\omega_1(g, \varepsilon) = \sup\{|g(t, \tau) - g(s, \tau)| : t, s, \tau \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon\}.$$

Przypomnijmy, że $\omega_1(g, \varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$, na mocy założenia (v).

Zdefiniujemy teraz funkcję $M(\varepsilon)$, potrzebną w dalszej części dowodu. Połóżmy

$$M(\varepsilon) = \sup\left\{\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t, \tau) - K(s, \tau)] : s, t \in \mathbb{R}_+, s < t, t - s \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Zauważmy, że na mocy założenia (viii) mamy, że $M(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$. Stąd, po uwzględnieniu oszacowania (4.15), otrzymujemy nierówność

$$\omega(Hx, \varepsilon) \leqslant \overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g, \varepsilon) + G\Phi(r_0)M(\varepsilon). \tag{4.16}$$

Następnie, podobnie jak wcześniej, weźmy funkcję $x \in X$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Załóżmy, że $s < t$. Wówczas, na mocy założeń (ii) i (iv) oraz oszacowań (4.5)-(4.8), dostajemy

$$|(Fx)(t) - (Fx)(s)| \leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + \omega_{r_0}^1(f, \varepsilon), \tag{4.17}$$

gdzie

$$\omega_{r_0}^1(f,\varepsilon) = \sup\{|f(t,x) - f(s,x)| : t,s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon, x \in [-r_0, r_0]\}.$$

Zauważmy, że z oszacowań (4.5)-(4.8) wynika, że $\omega_{r_0}^1(f,\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$.
Korzystając teraz z definicji operatora Q oraz oszacowań (4.9) i (4.10), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|(Qx)(t) - (Qx)(s)| &\leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fx)(s)(Hx)(s)| \\
&\leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fx)(t)(Hx)(s)| \\
&\quad + |(Fx)(t)(Hx)(s) - (Fx)(s)(Hx)(s)| \\
&\leqslant \omega(a,\varepsilon) + |(Fx)(t)| \cdot |(Hx)(t) - (Hx)(s)| + |(Hx)(s)| \cdot |(Fx)(t) - (Fx)(s)| \\
&\leqslant \omega(a,\varepsilon) + [k(||x||)|x(t)| + |f(t,0)|] \cdot |(Hx)(t) - (Hx)(s)| \\
&\quad + G\Phi(||x||) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(t,p) \cdot |(Fx)(t) - (Fx)(s)|.
\end{aligned}$$

Stąd, biorąc pod uwagę oszacowania (4.16) i (4.17), mamy

$$\begin{aligned}
|(Qx)(t) - (Qx)(s)| &\leqslant \omega(a,\varepsilon) + (r_0 k(r_0) + \overline{F})(\overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g,\varepsilon) \\
&\quad + G\Phi(r_0)M(\varepsilon)) + G\overline{K}\Phi(r_0)(k(r_0)\omega(x,\varepsilon) + \omega_{r_0}^1(f,\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Ostatecznie, uwzględniając własności funkcji $\varepsilon \to \omega(a,\varepsilon)$, $\varepsilon \to \omega_1(g,\varepsilon)$, $\varepsilon \to M(\varepsilon)$ oraz $\varepsilon \to \omega_{r_0}^1(f,\varepsilon)$, dostajemy oszacowanie

$$\omega_0^\infty(QX) \leqslant G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)\omega_0^\infty(X). \tag{4.18}$$

Przejdziemy teraz do oszacowania drugiej wielkości występującej w definicji rozważanej miary niezwartości μ_a. Niech x będzie dowolną funkcją z niepustego zbioru X, gdzie $X \subset \overline{B}_{r_0}$. Ustalmy dowolną liczbę $T > 0$ i weźmy $t \in \mathbb{R}_+$ takie, że $t \geqslant T$.
Wówczas, z oszacowań (4.9) i (4.10) dostajemy

$$\begin{aligned}
|(Qx)(t)| &\leqslant |a(t)| + |f(t,x(t))| \cdot \left| \int_0^\infty g(t,\tau)h(\tau,x(\tau))d_\tau K(t,\tau) \right| \\
&\leqslant |a(t)| + [k(r_0)|x(t)| + |f(t,0)|] \cdot G\Phi(r_0)\overline{K} \\
&\leqslant \sup\{|a(t)| : t \geqslant T\} + G\Phi(r_0)\overline{K}k(r_0)\sup\{|x(t)| : t \geqslant T\} \\
&\quad + G\Phi(r_0)\overline{K}\sup\{|f(t,0)| : t \geqslant T\}.
\end{aligned}$$

Biorąc supremum względem $x \in X$ i uwzględniając definicję $a_T(X)$, otrzymujemy

$$a_T(QX) \leqslant \sup_{t\geqslant T}|a(t)| + G\Phi(r_0)\overline{K}k(r_0)a_T(X) + G\Phi(r_0)\overline{K}\sup_{t\geqslant T}|f(t,0)|.$$

Przechodząc w powyższym oszacowaniu z $T \to \infty$ i korzystając z założeń (i) i (iii), dostajemy nierówność

$$a_\infty(QX) \leqslant G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)a_\infty(X), \tag{4.19}$$

gdzie wielkość $a_\infty = a_\infty(X)$ została zdefiniowana wzorem (3.4).

Łącząc finalnie oszacowania (4.18) i (4.19), mamy

$$\mu_a(QX) \leqslant G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)\mu_a(X), \tag{4.20}$$

gdzie μ_a jest miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ określoną w Twierdzeniu 3.9. Na mocy drugiej części założenia (x) mamy $G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0) < 1$.

Zatem z oszacowania (4.20) oraz Twierdzenia 3.7 wynika, że operator Q ma co najmniej jeden punkt stały $x \in \overline{B}_{r_0}$. Punkt ten jest rozwiązaniem równania (4.1). Ponadto z własności miary μ_a wynika, że rozwiązanie to jest zbieżne do zera w nieskończoności. Tym samym otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Przedstawimy teraz przykład ilustrujący zastosowanie wyniku zawartego w Twierdzeniu 4.1.

Przykład 4.2. Rozważmy następujące kwadratowe równanie całkowe Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa

$$x(t) = \frac{t}{t^3+2} + \sin\left(\frac{t+x^2(t)}{t^2+9}\right)\int_0^\infty \frac{s}{t^2+s^2+1}x^2(s)d_sK(t,s), \tag{4.21}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie $K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\arctan\frac{s}{\sqrt{1+t^2}}$.
Oczywiście

$$d_sK(t,s) = \frac{1}{t^2+s^2+1}ds$$

dla $t, s \in \mathbb{R}_+$, zatem równanie (4.21) można zapisać w postaci

$$x(t) = \frac{t}{t^3+2} + \sin\left(\frac{t+x^2(t)}{t^2+9}\right)\int_0^\infty \frac{s}{t^2+s^2+1}x^2(s)\frac{1}{t^2+s^2+1}ds. \tag{4.22}$$

Zauważmy, że równanie (4.21) jest szczególnym przypadkiem równania (4.1), przy czym

$$a(t) = \frac{t}{t^3+2},$$

$$f(t,x) = \sin\left(\frac{t+x^2}{t^2+9}\right),$$

$$g(t,s) = \frac{s}{t^2+s^2+1},$$

$$h(t,x) = x^2,$$

$$K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \arctan \frac{s}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Wykażemy, że powyższe funkcje spełniają założenia Twierdzenia 4.1.

Na początek zauważmy, że funkcja $a = a(t)$ jest ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}_+$ oraz $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$. Ponadto $||a|| = a(1) = \frac{1}{3}$. Zatem założenie (i) jest spełnione.

W celu sprawdzenia założenia (ii) zauważmy, że funkcja $f(t,x)$ jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Ponadto dla $t \in \mathbb{R}_+$ i $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \left|\frac{t+x^2}{t^2+9} - \frac{t+y^2}{t^2+9}\right| = \frac{|x^2-y^2|}{t^2+9} = \frac{|x-y||x+y|}{t^2+9} \leqslant \frac{(|x|+|y|)|x-y|}{9}.$$

Zatem jeśli $x, y \in [-r, r]$, gdzie $r > 0$, dostajemy

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \frac{2r}{9}|x-y|,$$

możemy więc przyjąć $k(r) = \frac{2r}{9}$. Funkcja k jest ciągła i niemalejąca na $\mathbb{R}_+$ oraz $k(0) = 0$, zatem założenie (ii) jest spełnione.

Przejdźmy teraz do weryfikacji założenia (iii). Zauważmy, że

$$f(t,0) = \sin \frac{t}{t^2+9}.$$

Oczywiście $\lim_{t\to\infty} f(t,0) = 0$. Zauważmy ponadto, że aby wyznaczyć maksimum funkcji $f(t,0)$, wystarczy wyznaczyć maksimum funkcji $z(t) = \frac{t}{t^2+9}$. Mamy więc

$$\overline{F} = \max\{\sin z(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = \sin z(3) = \sin \frac{1}{6} \leqslant \frac{1}{6} < \infty,$$

czyli spełnione jest założenie (iii).

Aby sprawdzić założenie (iv), wystarczy zauważyć, że

$$\lim_{t\to\infty} f(t,x) = \lim_{t\to\infty} \sin\left(\frac{t+x^2}{t^2+9}\right) = 0$$

oraz że granica ta jest jednostajna względem x należącego do dowolnego przedziału postaci $[-r, r]$, gdzie $r > 0$. Oznacza to, że założenie (iv) jest spełnione.

Powyższy fakt można również wykazać bezpośrednio. Ustalmy dowolnie liczbę $r > 0$ i załóżmy, że $x \in [-r, r]$. Niech ponadto $T \geqslant 3$, $t, s \geqslant T$. Mamy wówczas

$$|f(t,x) - f(s,x)| \leqslant \left|\frac{t+x^2}{t^2+9} - \frac{s+x^2}{s^2+9}\right|$$

$$= \left|\frac{ts^2 - st^2}{(t^2+9)(s^2+9)} + \frac{9(t-s)}{(t^2+9)(s^2+9)} + x^2\frac{s^2-t^2}{(t^2+9)(s^2+9)}\right|$$

$$\leqslant \frac{ts^2 + st^2}{(t^2+9)(s^2+9)} + \frac{9t+9s}{(t^2+9)(s^2+9)} + r^2\frac{t^2+s^2}{(t^2+9)(s^2+9)}$$

$$\leqslant \frac{ts^2}{(t^2+9)(s^2+9)} + \frac{st^2}{(t^2+9)(s^2+9)} + 9\frac{t}{(t^2+9)(s^2+9)}$$

$$+9\frac{s}{(t^2+9)(s^2+9)} + r^2\frac{t^2}{(t^2+9)(s^2+9)} + r^2\frac{s^2}{(t^2+9)(s^2+9)} \leqslant \frac{t}{t^2+9} + \frac{s}{s^2+9}$$

$$+\frac{t}{t^2+9} + \frac{s}{s^2+9} + r^2\frac{1}{s^2+9} + r^2\frac{1}{t^2+9} \leqslant 4\frac{T}{T^2+9} + 2r^2\frac{1}{T^2+9}.$$

Powyższe oszacowanie pokazuje, że nierówność występująca w założeniu (iv) jest spełniona dla dostatecznie dużego $T \geqslant 3$.

Przejdźmy teraz do sprawdzenia założenia (v). Mamy

$$g(t,s) = \frac{s}{t^2+s^2+1}.$$

Łatwo zauważyć, że funkcja $g(t,s)$ jest jednostajnie ciągła i ograniczona na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Ponadto

$$G = \sup\{|g(t,s)| : t,s \in \mathbb{R}_+\} = \frac{1}{2}.$$

Następnie rozważamy założenie (vi). Mamy, że $h(t,x) = x^2$, zatem

$$|h(t,x)| = |x|^2$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $x \in \mathbb{R}$. Widzimy zatem, że funkcja $h(t,x) = x^2$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times [-r,r]$ dla dowolnego $r > 0$. Ponadto możemy przyjąć, że $\Phi(r) = r^2$, Φ jest funkcją ciągłą i niemalejącą na $\mathbb{R}_+$. Oznacza to, że założenie (vi) jest spełnione.

Przejdźmy teraz do następnego założenia, tzn. założenia (vii). Zauważmy, że

$$K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \arctan \frac{s}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Następnie

$$d_s K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{1}{1+\frac{s^2}{t^2+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} ds$$

$$= \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{t^2+s^2+1} ds = \frac{1}{t^2+s^2+1} ds.$$

Zauważmy teraz, że funkcja $K(t,s)$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ oraz

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial s} = \frac{1}{t^2+s^2+1} > 0$$

dla $t,s \in \mathbb{R}_+$. Oznacza to, że funkcja $s \to K(t,s)$ jest rosnąca na $\mathbb{R}_+$. Jest ona także ograniczona na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Zatem funkcja $s \to K(t,s)$, jako funkcja monotoniczna i ograniczona, ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Mamy

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) = \lim_{s\to\infty}[K(t,s) - K(t,0)]$$

$$= \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \arctan \frac{s}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\pi}{2} < \infty.$$

Oczywiście funkcja $t \to \bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s)$ jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$ oraz

$$\overline{K} = \sup\left\{\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) : t \in \mathbb{R}_+\right\} = \sup\left\{\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\pi}{2} : t \in \mathbb{R}_+\right\} = \frac{\pi}{2}.$$

Zauważmy teraz, że w celu sprawdzenia założenia (viii) wystarczy pokazać, że spełnione jest założenie (vii) oraz następujący warunek (por. [6]):

(viii') Dla dowolnych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $t_1 < t_2$, funkcja $s \to K(t_2,s) - K(t_1,s)$ jest niemalejąca (nierosnąca) na przedziale $[0, t_1]$.

Zatem w świetle powyższego stwierdzenia wystarczy pokazać, że funkcja $K = K(t,s)$ spełnia założenie (viii').

W tym celu ustalmy $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takie, że $t_1 < t_2$ oraz rozważmy funkcję $s \to K(t_2,s) - K(t_1,s)$. Wówczas

$$K(t_2,s) - K(t_1,s) = \frac{1}{\sqrt{t_2^2+1}} \arctan\frac{s}{\sqrt{t_2^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{t_1^2+1}} \arctan\frac{s}{\sqrt{t_1^2+1}}.$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(K(t_2,s) - K(t_1,s)\right) = \frac{t_1^2 - t_2^2}{(t_1^2+s^2+1)(t_2^2+s^2+1)} < 0.$$

Powyższa nierówność oznacza, że funkcja $s \to K(t_2,s) - K(t_1,s)$ jest nierosnąca na $\mathbb{R}_+$. W szczególności funkcja ta jest nierosnąca na przedziale $[0, t_1]$. Zatem funkcja $K(t,s)$ spełnia warunek (viii'). W konsekwencji spełnia ona założenie (viii).

Przejdziemy teraz do sprawdzenia założenia (ix). W tym celu rozważmy funkcję

$$g(t,s) = \frac{s}{t^2+s^2+1}.$$

Dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \to |g(t,s)|$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+$, zaś funkcja $s \to K(t,s)$ ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Zatem funkcja $s \to |g(t,s)|$ jest lokalnie całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $s \to K(t,s)$. Ponadto mamy

$$\int_0^{\infty} |g(t,s)| d_s K(t,s) = \int_0^{\infty} \frac{s}{t^2+s^2+1} \cdot \frac{1}{t^2+s^2+1} ds = \int_0^{\infty} \frac{s}{(t^2+s^2+1)^2} ds. \tag{4.23}$$

Następnie, stosując w ostatniej całce z (4.23) podstawienie

$$s = \sqrt{t^2+1} \cdot u,$$

otrzymujemy

$$ds = \sqrt{t^2+1} du$$

i, w konsekwencji,

$$\int_0^\infty |g(t,s)|d_sK(t,s) = \int_0^\infty \frac{\sqrt{t^2+1}u}{[(t^2+1)+(t^2+1)u^2]^2}\sqrt{1+t^2}du$$

$$= \frac{1}{t^2+1}\int_0^\infty \frac{u}{(u^2+1)^2}du = \frac{1}{t^2+1}\int_1^\infty \frac{\frac{1}{2}dz}{z^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t^2+1}.$$

Stąd wynika, że funkcja $s \to |g(t,s)|$ jest całkowalna w sensie Riemanna-Stieltjesa względem funkcji $s \to K(t,s)$ na przedziale $\mathbb{R}_+$. Ponadto funkcja $t \to \int_0^\infty |g(t,s)|d_sK(t,s)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$.

Na koniec sprawdzimy, czy spełnione jest założenie (x). Zauważmy, że stałe oraz funkcje występujące w pierwszej nierówności z założenia (x) są następujące:

$$||a|| = \frac{1}{3},\ \overline{F} = \sin\frac{1}{6},\ G = \frac{1}{2},\ \overline{K} = \frac{\pi}{2},\ \Phi(r) = r^2,\ k(r) = \frac{2r}{9}.$$

Wobec tego pierwsza nierówność z założenia (x) przyjmuje postać:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{2r^2}{9} + \sin\frac{1}{6}\right)\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot r^2 \leqslant r.$$

Łatwo sprawdzić, że liczba $r_0 = 1$ spełnia powyższą nierówność. Ponadto dla $r_0 = 1$ mamy

$$G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{9} = \frac{\pi}{18} < 1,$$

zatem spełniona jest również druga nierówność z założenia (x).

Ostatecznie, na mocy Twierdzenia 4.1 wnioskujemy, że kwadratowe równanie całkowe Hammersteina (4.21) (lub równoważnie (4.22)) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, dążące do zera w nieskończoności. Ponadto rozwiązanie to należy do kuli jednostkowej $\overline{B}_1$ przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Rozdział 5
Rozwiązania zbieżne w nieskończoności do granic właściwych dla nieliniowego kwadratowego równania całkowego Hammersteina-Stieltjesa

W rozdziale tym rozważymy nieliniowe kwadratowe równanie całkowe Hammersteina-Stieltjesa postaci

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t, s)h(s, x(s))d_sK(t, s), \tag{5.1}$$

gdzie $t \in \mathbb{R}_+$. Naszym celem jest ustalenie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań należących do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ i zbieżnych w nieskończoności do granic właściwych. Rozważania te stanowią rozszerzenie wyników przedstawionych w poprzednim rozdziale, w którym badaliśmy istnienie rozwiązań równania (5.1) dążących do zera przy $t \to \infty$.

Na początku przedstawimy założenia, przy których badać będziemy rozwiązywalność równania (5.1).

(i) Funkcja $a = a(t)$ należy do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Ponadto granica $\lim_{t\to\infty} a(t)$ istnieje i jest skończona.

(ii) Funkcja $f(t, x) = f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła i lokalnie lipschitzowska względem drugiej zmiennej, jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}_+$, tzn. istnieje niemalejąca, ciągła funkcja $k(r) = k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że $k(0) = 0$ oraz dla każdego $r > 0$ spełniona jest nierówność

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leqslant k(r)|x - y|,$$

dla $x, y \in [-r, r]$ i dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

(iii) Funkcja $t \to f(t, x)$ spełnia warunek Cauchy'ego w nieskończoności jednostajnie względem zmiennej x należącej do dowolnego przedziału ograniczonego, tzn.

$$\bigwedge_{r>0} \bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{T>0} \bigwedge_{t,s\geqslant T} \bigwedge_{x\in[-r,r]} |f(t, x) - f(s, x)| \leqslant \varepsilon.$$

Zauważmy, że na podstawie założenia (iii) oraz znanych własności wnioskujemy, że dla każdego ustalonego $x \in \mathbb{R}$ istnieje skończona granica

$$\lim_{t\to\infty} f(t, x).$$

W szczególności istnieje skończona granica $\lim_{t\to\infty} f(t,0)$ oraz

$$\overline{F} := \sup\{|f(t,0)| : t \in \mathbb{R}_+\} < \infty.$$

(iv) Funkcja $g(t,s) = g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest jednostajnie ciągła i ograniczona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.
Ponadto

$$G := \sup\{|g(t,s)| : t,s \in \mathbb{R}_+\} < \infty$$

(v) Funkcja $h = h(t,x)$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ oraz jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+ \times [-r,r]$ dla każdego $r > 0$. Ponadto istnieje ciągła i niemalejąca funkcja $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$|h(t,x)| \leqslant \Phi(|x|)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $x \in \mathbb{R}$.

(vi) Funkcja $K(t,s) = K : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, $K(t,0) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \to K(t,s)$ ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Ponadto funkcja $t \to \bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$.
Mamy więc

$$\overline{K} := \sup\left\{\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) : t \in \mathbb{R}_+\right\} < \infty.$$

(vii) Dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} [K(t_2,s) - K(t_1,s)] \leqslant \varepsilon$$

dla wszystkich $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $t_1 < t_2$ oraz $t_2 - t_1 \leqslant \delta$.

(viii) Spełnione są następujące warunki:

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left[\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau) - K(s,\tau)] : T \leqslant s < t\right]\right\} = 0,$$

$$\lim_{T\to\infty}\{\sup[|g(t,\tau) - g(s,\tau)| : T \leqslant s,t,\tau \in \mathbb{R}_+, \tau \leqslant s, \tau \leqslant t]\} = 0.$$

(ix) Istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że

$$||a|| + (r_0 k(r_0) + \overline{F})G\overline{K}\Phi(r_0) \leqslant r_0$$

oraz

$$G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0) < 1.$$

Sformułujemy teraz główny wynik tego rozdziału dotyczący rozwiązalności równania (5.1).

Twierdzenie 5.1. *Przy założeniach (i)-(ix) równanie (5.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t)$ należące do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ i zbieżne w nieskończoności do granicy właściwej.*

Dowód. Podobnie jak w dowodzie twierdzenia egzystencjalnego w poprzednim rozdziale, w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ określamy operatory F, H i Q w następujący sposób:

$$\begin{aligned}(Fx)(t) &= f(t, x(t)),\\ (Hx)(t) &= \int_0^\infty g(t,\tau)h(\tau, x(\tau))d_\tau K(t,\tau),\\ (Qx)(t) &= a(t) + (Fx)(t)\cdot(Hx)(t),\end{aligned} \tag{5.2}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas równanie (5.1) można zapisać w postaci $x(t) = (Qx)(t)$.

Pierwsza część dowodu przebiega analogicznie do odpowiadającej jej części dowodu Twierdzenia 4.1. W szczególności, z uwagi na jednakową postać równań (4.1) i (5.1) oraz operatorów (4.2) i (5.2), w analogiczny sposób wykazujemy, że operator Q przekształca przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+)$ w siebie oraz, przy ustalonym $r_0 > 0$, przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie i jest na niej ciągły. Dlatego pominiemy tę część dowodu i przejdziemy bezpośrednio do drugiej części, tj. do oszacowań wielkości $\omega_0^\infty(QX)$ oraz $b(QX)$, które wymagają wykorzystania założeń (vii)-(viii) oraz miary niezwartości μ_b.
W dalszej części dowodu będziemy również korzystać z oszacowań (4.3)-(4.10), otrzymanych w dowodzie Twierdzenia 4.1.

Ustalmy dowolnie liczbę $r_0 > 0$ i w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ rozważmy kulę $\overline{B}_{r_0}$. Następnie, niech X będzie dowolnym niepustym podzbiorem tej kuli. Ustalmy $x \in X$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Wówczas, na podstawie oszacowania (4.3), dostajemy

$$\begin{aligned}|(Hx)(t) - (Hx)(s)| &\leqslant \Phi(||x||)\overline{K}\omega_1(g,\varepsilon) + G\Phi(||x||)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau) - K(s,\tau)]\\ &\leqslant \overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g,\varepsilon) + G\Phi(r_0)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau) - K(s,\tau)],\end{aligned} \tag{5.3}$$

gdzie

$$\omega_1(g,\varepsilon) = \sup\{|g(t,\tau) - g(s,\tau)| : t, s, \tau \in \mathbb{R}_+, |t - s| \leqslant \varepsilon\}.$$

Przypomnijmy, że na mocy założenia (iv) mamy, że $\omega_1(g,\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$.

Połóżmy teraz

$$M(\varepsilon) = \sup\left\{\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau) - K(s,\tau)] : s, t \in \mathbb{R}_+, s < t, t - s \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Z założenia (vii) otrzymujemy, że $M(\varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$. Na podstawie oszacowania (5.3) mamy

$$\omega(Hx,\varepsilon) \leqslant \overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g,\varepsilon) + G\Phi(r_0)M(\varepsilon). \tag{5.4}$$

Następnie, podobnie jak powyżej, ustalmy $x \in X$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t-s| \leqslant \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Wówczas, na podstawie założeń (ii) i (iii) oraz oszacowań (4.5)–(4.8), otrzymujemy

$$|(Fx)(t) - (Fx)(s)| \leqslant k(||x||)|x(t) - x(s)| + \omega_{r_0}^1(f, \varepsilon), \tag{5.5}$$

gdzie

$$\omega_{r_0}^1(f, \varepsilon) = \sup\{|f(t, x) - f(s, x)| : t, s \in \mathbb{R}_+, |t-s| \leqslant \varepsilon, x \in [-r_0, r_0]\}.$$

Z oszacowań (4.5)–(4.8) wynika, że $\omega_{r_0}^1(f, \varepsilon) \to 0$ przy $\varepsilon \to 0$.

Następnie, korzystając z postaci operatora Q oraz oszacowań (4.9) i (4.10), dostajemy

$$|(Qx)(t) - (Qx)(s)| \leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fx)(s)(Hx)(s)|$$

$$\leqslant |a(t)-a(s)|+|(Fx)(t)(Hx)(t)-(Fx)(t)(Hx)(s)|+|(Fx)(t)(Hx)(s)-(Fx)(s)(Hx)(s)|$$

$$\leqslant \omega(a, \varepsilon) + |(Fx)(t)| \cdot |(Hx)(t) - (Hx)(s)| + |(Hx)(s)| \cdot |(Fx)(t) - (Fx)(s)|$$

$$\leqslant \omega(a, \varepsilon) + [k(||x||)|x(t)| + |f(t, 0)|] \cdot |(Hx)(t) - (Hx)(s)|$$

$$+G\Phi(||x||) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(s, p) \cdot |(Fx)(t) - (Fx)(s)|.$$

Stąd, wykorzystując oszacowania (5.4) i (5.5), mamy

$$|(Qx)(t) - (Qx)(s)| \leqslant \omega(a, \varepsilon) + (r_0 k(r_0) + \overline{F})(\overline{K}\Phi(r_0)\omega_1(g, \varepsilon)$$

$$+G\Phi(r_0)M(\varepsilon)) + G\overline{K}\Phi(r_0)(k(r_0)\omega(x, \varepsilon) + \omega_{r_0}^1(f, \varepsilon)).$$

Biorąc pod uwagę własności funkcji $\varepsilon \to \omega_1(g, \varepsilon)$, $\varepsilon \to M(\varepsilon)$, $\varepsilon \to \omega_{r_0}^1(f, \varepsilon)$, oraz przechodząc z $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy

$$\omega_0^\infty(QX) \leqslant G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)\omega_0^\infty(X). \tag{5.6}$$

Przejdziemy teraz do oszacowania wielkości $b(QX)$. Niech X będzie niepustym podzbiorem kuli $\overline{B}_{r_0}$. Ustalmy dowolnie funkcję $x \in X$ oraz liczbę $T > 0$. Dla ustalonego $T > 0$ wybierzmy $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, że $t, s \geqslant T$. Podobnie jak poprzednio, bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Wprowadźmy funkcje pomocnicze

$$U(T) = \sup\left\{\bigvee_{\tau=0}^{\infty} [K(t, \tau) - K(s, \tau)] : T \leqslant s < t\right\},$$

$$V(T) = \sup\{|f(t, u) - f(s, u)| : T \leqslant s < t, u \in [-r_0, r_0]\}$$

oraz

$$W(T) = \sup\{|g(t, \tau) - g(s, \tau)| : t, s \geqslant T, \tau \in \mathbb{R}_+, \tau \leqslant s, \tau \leqslant t\}.$$

Z założenia (viii) wynika, że $U(T) \to 0$ i $W(T) \to 0$ przy $T \to \infty$. Ponadto, na podstawie założenia (iii) mamy, że $V(T) \to 0$ przy $T \to \infty$.

Następnie, dla $t, s \geqslant T$, przy $s < t$, na mocy przyjętych założeń otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Qx)(t) - (Qx)(s)| &\leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fx)(s)(Hx)(s)| \\ &\leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)(Hx)(t) - (Fx)(t)(Hx)(s)| \\ &\quad + |(Fx)(t)(Hx)(s) - (Fx)(s)(Hx)(s)| \\ &\leqslant |a(t) - a(s)| + |(Fx)(t)| \cdot |(Hx)(t) - (Hx)(s)| \\ &\quad + |(Hx)(s)| \cdot |(Fx)(t) - (Fx)(s)|. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Ponadto mamy następujące oszacowania:

$$\begin{aligned}|(Fx)(t)| &\leqslant |f(t, x(t)) - f(t, 0)| + |f(t, 0)| \\ &\leqslant k(r_0)|x(t)| + |f(t, 0)| \leqslant r_0 k(r_0) + \overline{F}, \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned}|(Hx)(s)| &= \left| \int_0^\infty g(s, \tau) h(\tau, x(\tau)) d_\tau K(s, \tau) \right| \leqslant \int_0^\infty |g(s, \tau)| \Phi\left(|x(\tau)|\right) d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(s, p) \right) \\ &\leqslant G \cdot \Phi(||x||) \int_0^\infty d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(s, p) \right) \leqslant G \cdot \Phi(||x||) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(s, p) \\ &\leqslant G \cdot \Phi(r_0) \bigvee_{p=0}^{\infty} K(s, p) \leqslant G \cdot \overline{K} \cdot \Phi(r_0). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Następnie, wykorzystując oszacowanie (4.4), dostajemy

$$\begin{aligned}|(Fx)(t) - (Fx)(s)| &\leqslant k(r_0)|x(t) - x(s)| + |f(t, x(s)) - f(s, x(s))| \\ &\leqslant k(r_0)|x(t) - x(s)| + V(T), \end{aligned} \tag{5.10}$$

dla $t, s \geqslant T$, gdzie funkcja $V(T)$ została zdefiniowana powyżej.

Postępując analogicznie jak przy wyprowadzaniu oszacowania (4.3), dla $t, s \geqslant T$ mamy

$$\begin{aligned}|(Hx)(t) - (Hx)(s)| &\leqslant \int_0^\infty |g(t, \tau) - g(s, \tau)| \cdot |h(\tau, x(\tau))| d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t, p) \right) \\ &\quad + \int_0^\infty |g(s, \tau)| \cdot |h(\tau, x(\tau))| d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} [K(t, p) - K(s, p)] \right) \\ &\leqslant \int_0^\infty W(T) \Phi(|x(\tau)|) d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} K(t, p) \right) + \int_0^\infty G \Phi(|x(\tau)|) d_\tau \left(\bigvee_{p=0}^{\tau} [K(t, p) - K(s, p)] \right) \end{aligned}$$

$$\leqslant W(T)\Phi(r_0)\int_0^\infty d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau}K(t,p)\right)+G\cdot\Phi(r_0)\int_0^\infty d_\tau\left(\bigvee_{p=0}^{\tau}[K(t,p)-K(s,p)]\right)$$

$$\leqslant W(T)\Phi(r_0)\overline{K}+G\Phi(r_0)\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau)-K(s,\tau)]$$

$$\leqslant W(T)\Phi(r_0)\overline{K}+G\Phi(r_0)U(T), \tag{5.11}$$

gdzie $U(T)$ i $W(T)$ są funkcjami zdefiniowanymi powyżej.

Łącząc oszacowania (5.7)–(5.11), dla $t,s\geqslant T$ dostajemy

$$|(Qx)(t)-(Qx)(s)|\leqslant|a(t)-a(s)|+(r_0k(r_0)+\overline{F})\left[W(T)\Phi(r_0)\overline{K}+G\Phi(r_0)U(T)\right]$$
$$+G\overline{K}\Phi(r_0)\left[k(r_0)|x(t)-x(s)|+V(T)\right]$$
$$=|a(t)-a(s)|+(r_0k(r_0)+\overline{F})\left[W(T)\Phi(r_0)\overline{K}+G\Phi(r_0)U(T)\right]$$
$$+G\overline{K}\Phi(r_0)V(T)+G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)|x(t)-x(s)|.$$

Korzystając z powyższego oszacowania, definicji wielkości $b(X)$, własności funkcji $U(T)$, $V(T)$ i $W(T)$ oraz założenia (i), otrzymujemy nierówność

$$b(QX)\leqslant G\overline{K}k(r_0)\Phi(r_0)b(X). \tag{5.12}$$

Ostatecznie, łącząc definicję miary niezwartości μ_b z oszacowaniami (5.6) oraz (5.12), otrzymujemy nierówność

$$\mu_b(QX)\leqslant G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)\mu_b(X)$$

dla każdego niepustego podzbioru $X\subset\overline{B}_{r_0}$. Ponadto, na mocy założenia (ix), dostajemy

$$G\overline{K}\Phi(r_0)k(r_0)<1.$$

Zatem, korzystając z Twierdzenia 3.7, wnioskujemy, że operator Q ma co najmniej jeden punkt stały $x\in\overline{B}_{r_0}$, a tym samym równanie (5.1) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x=x(t)$ należące do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$. Ponadto, na podstawie uwagi umieszczonej po Twierdzeniu 3.7, otrzymane rozwiązanie należy do jądra $\ker\mu_b$ miary niezwartości μ_b. Z charakterystyki jądra $\ker\mu_b$ wynika, że rozwiązanie to jest zbieżne w nieskończoności do granicy właściwej. To kończy dowód. □

Na zakończenie tego rozdziału przedstawimy trzy przykłady ilustrujące zastosowanie Twierdzenia 5.1.

Przykład 5.2. Rozważmy następujące nieliniowe kwadratowe równanie całkowe Hammersteina-Stieltjesa

$$x(t) = \frac{t}{2t+1} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{t^2+x^2(t)}{t^2+1}\right)\int_0^\infty \frac{s}{t^2+s^2+8}x^2(s)d_sK(t,s), \tag{5.13}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie

$$K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\arctan\frac{s}{\sqrt{t^2+1}}. \tag{5.14}$$

Ponieważ

$$d_sK(t,s) = \frac{1}{t^2+s^2+1}ds$$

dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}_+$, więc równanie (5.13) można równoważnie zapisać w postaci

$$x(t) = \frac{t}{2t+1} + \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{t^2+x^2(t)}{t^2+1}\right)\int_0^\infty \frac{s}{t^2+s^2+8}x^2(s)\frac{1}{t^2+s^2+1}ds. \tag{5.15}$$

Równanie (5.13) jest szczególnym przypadkiem równania (5.1) z poszczególnymi funkcjami zadanymi następująco:

$$a(t) = \frac{t}{2t+1},$$

$$f(t,x) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{t^2+x^2}{t^2+1}\right),$$

$$g(t,s) = \frac{s}{t^2+s^2+8},$$

$$h(t,x) = x^2,$$

$$K(t,s) = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\arctan\frac{s}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Sprawdzimy, czy powyższe funkcje spełniają założenia (i)-(ix) Twierdzenia 5.1.

Zauważmy najpierw, że funkcja $a = a(t)$ spełnia założenie (i). Istotnie, $\lim\limits_{t\to\infty} a(t) = \frac{1}{2}$ oraz $||a|| = \frac{1}{2}$.

W następnym kroku sprawdzimy założenie (ii). Oczywiście funkcja f jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Ustalmy dowolnie $r > 0$, $t \in \mathbb{R}_+$ oraz weźmy $x, y \in [-r, r]$. Wówczas

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqslant \frac{2}{\pi}\left|\frac{t^2+x^2}{t^2+1} - \frac{t^2+y^2}{t^2+1}\right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{|x^2-y^2|}{t^2+1} \leqslant \frac{2}{\pi}|x-y||x+y| \leqslant \frac{2}{\pi}\cdot 2r|x-y| = \frac{4}{\pi}r|x-y|.$$

Zatem założenie (ii) jest spełnione oraz $k(r) = \frac{4r}{\pi}$.

W celu sprawdzenia założenia (iii) zauważmy najpierw, że dla każdego ustalonego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\lim_{t\to\infty} f(t,x) = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{t^2+x^2}{t^2+1}\right) = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{t^2}{t^2+1} + \frac{x^2}{t^2+1}\right) = \frac{2}{\pi}\sin 1.$$

Ponadto dla każdego $r > 0$ i $x \in [-r, r]$ mamy

$$\left| f(t,x) - \frac{2}{\pi}\sin 1 \right| \leqslant \frac{2}{\pi} \left| \frac{t^2+x^2}{t^2+1} - 1 \right| \leqslant \frac{2}{\pi} \frac{r^2+1}{t^2+1}.$$

Ponieważ prawa strona powyższej nierówności dąży do zera przy $t \to \infty$, zbieżność ta jest jednostajna względem $x \in [-r, r]$. Zatem założenie (iii) jest spełnione. W szczególności,

$$\lim_{t\to\infty} f(t,0) = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{\pi} \sin \frac{t^2}{t^2+1} = \frac{2}{\pi}\sin 1$$

i w konsekwencji

$$\overline{F} = \sup\{|f(t,0)| : t \in \mathbb{R}_+\} = \frac{2}{\pi}\sin 1.$$

Przejdźmy teraz do sprawdzenia założenia (iv). Funkcja $g = g(t,s)$ jest ograniczona i jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Ponadto

$$G = \sup\{|g(t,s)| : t, s \in \mathbb{R}_+\} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Dla funkcji $h(t,x) = x^2$ mamy

$$|h(t,x)| = |x|^2$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$. Ponadto funkcja $h(t,x)$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times [-r, r]$ dla każdego $r > 0$. Zatem założenie (v) jest spełnione oraz $\Phi(r) = r^2$.

Przejdziemy teraz do weryfikacji założenia (vi) dla funkcji $K(t,s)$ określonej wzorem (5.14). Oczywiście $K(t,0) = 0$ oraz funkcja K jest ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Ponadto

$$\frac{\partial K(t,s)}{\partial s} = \frac{1}{t^2+s^2+1} > 0$$

dla wszystkich $t, s \in \mathbb{R}_+$. Zatem dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \to K(t,s)$ jest rosnąca na $\mathbb{R}_+$. Jest ona również ograniczona, co, w połączeniu z monotonicznością, oznacza, że ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Ponadto

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) = \lim_{s\to\infty}[K(t,s) - K(t,0)] = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \arctan \frac{s}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Oznacza to, że funkcja $t \to \bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s)$ jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$ oraz

$$\overline{K} = \sup\left\{ \bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) : t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \sup\left\{ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{\pi}{2} : t \in \mathbb{R}_+ \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

W celu weryfikacji założenia (vii) skorzystamy z następującego rezultatu otrzymanego w pracy [6]. Zgodnie z tym rezultatem, przy założeniu, że spełniony jest warunek (vi), wystarczy wykazać, że

(vii') Dla wszystkich $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $t_1 < t_2$ funkcja $s \to K(t_2, s) - K(t_1, s)$ jest niemalejąca (nierosnąca) na $[0, t_1]$.

Zauważmy, że dla funkcji K określonej wzorem (5.14) mamy

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[K(t_2, s) - K(t_1, s)\right] = \frac{1}{t_2^2 + s^2 + 1} - \frac{1}{t_1^2 + s^2 + 1}$$
$$= \frac{t_1^2 - t_2^2}{(t_1^2 + s^2 + 1)(t_2^2 + s^2 + 1)} < 0.$$

Zatem funkcja $s \to K(t_2, s) - K(t_1, s)$ jest nierosnąca na $\mathbb{R}_+$, a w szczególności na przedziale $[0, t_1]$. W konsekwencji, spełnione jest założenie (vii).

Przejdziemy teraz do sprawdzenia założenia (viii). Ustalmy dowolne $T > 0$. Wówczas dla $t, s \geqslant T$ takich, że $s < t$, mamy

$$\bigvee_{\tau=0}^{\infty}\left[K(t, \tau) - K(s, \tau)\right] \leqslant \bigvee_{\tau=0}^{\infty} K(t, \tau) + \bigvee_{\tau=0}^{\infty} K(s, \tau)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2} \leqslant 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{T^2+1}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Stąd

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left[\bigvee_{\tau=0}^{\infty}\left[K(t, \tau) - K(s, \tau)\right] : T \leqslant s < t\right]\right\} = 0,$$

a więc pierwszy warunek z założenia (viii) jest spełniony.

Aby sprawdzić drugi warunek, ustalmy ponownie dowolnie $T > 0$, $t, s \geqslant T$ oraz $\tau \in \mathbb{R}_+$ takie, że $\tau \leqslant s < t$. Wtedy otrzymujemy

$$|g(t, \tau) - g(s, \tau)| \leqslant |g(t, \tau)| + |g(s, \tau)| \leqslant \frac{\tau}{t^2 + \tau^2 + 8} + \frac{\tau}{s^2 + \tau^2 + 8}$$
$$\leqslant 2 \cdot \frac{\tau}{\tau^2 + T^2 + 8} \leqslant 2 \cdot \frac{\sqrt{T^2+8}}{2(T^2+8)} = \frac{\sqrt{T^2+8}}{T^2+8}.$$

Zatem

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left[|g(t, \tau) - g(s, \tau)| : t, s \geqslant T, \tau \in \mathbb{R}_+, t, s \geqslant \tau\right]\right\} = 0.$$

Wobec tego drugi warunek z założenia (viii) jest również spełniony. Zatem spełnione jest założenie (viii).

Na koniec sprawdzimy założenie (ix). Korzystając z otrzymanych powyżej wartości wielkości $||a||$, $\overline{F}$, G, $\overline{K}$ oraz wzorów dla funkcji $k(r)$ i $\Phi(r)$, mamy, że pierwsza nierówność z założenia (ix) przyjmuje postać

$$\frac{1}{2} + \left(r \cdot \frac{4r}{\pi} + \frac{2}{\pi} \cdot \sin 1\right) \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot r^2 \leqslant r,$$

a więc, równoważnie,

$$\frac{1}{2} + \left(2r^2 + \sin 1\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot r^2 \leqslant r.$$

Druga nierówność z założenia (ix) przyjmuje z kolei postać

$$\frac{\sqrt{2}}{4} r^3 < 1.$$

Łatwo sprawdzić, że obie nierówności są spełnione dla $r_0 = 0.9$. Zatem możemy przyjąć $r_0 = 0.9$.

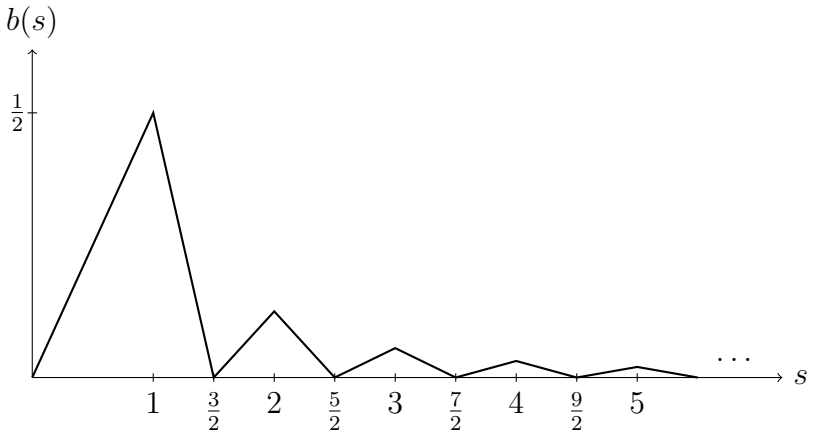
Na mocy Twierdzenia 5.1 wnioskujemy więc, że równanie (5.13) ma co najmniej jedno rozwiązanie należące do przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$ i zbieżne w nieskończoności do granicy właściwej. Rozwiązanie to należy do kuli $\overline{B}_{0.9}$ przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

W kolejnym przykładzie pokażemy, że Twierdzenie 5.1 można zastosować również w przypadku, gdy funkcja $s \mapsto K(t,s)$ nie jest monotoniczna, ale ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$.

Przykład 5.3. Rozważmy ponownie kwadratowe równanie całkowe Hammersteina-Stieltjesa postaci

$$x(t) = \frac{t}{2t+1} + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{t^2 + x^2(t)}{t^2+1}\right) \int_0^\infty \frac{s}{t^2+s^2+8} x^2(s) d_s K(t,s) \tag{5.16}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, gdzie funkcja K jest określona inaczej niż w Przykładzie 5.2.
Najpierw zdefiniujemy funkcję $b(s) = b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ za pomocą jej wykresu.
Na początek określamy wykres funkcji $b(s)$ na przedziale $[0,1]$ jako odcinek łączący punkty $(0,0)$ oraz $(1, \frac{1}{2})$. Następna część wykresu funkcji $b(s)$ jest odcinkiem łączącym punkty $(1, \frac{1}{2})$ i $(\frac{3}{2}, 0)$. W kolejnym kroku mamy odcinek łączący punkt $(\frac{3}{2}, 0)$ z punktem $\left(2, \frac{1}{2\cdot 2^2}\right)$. Następnie bierzemy odcinek łączący $\left(2, \frac{1}{2\cdot 2^2}\right)$ i $(\frac{5}{2}, 0)$, zaś w kolejnym kroku - odcinek łączący punkt $(\frac{5}{2}, 0)$ z punktem $\left(3, \frac{1}{2\cdot 3^2}\right)$. Konstrukcję tę kontynuujemy w analogiczny sposób, otrzymując wykres funkcji przedstawiony poniżej.

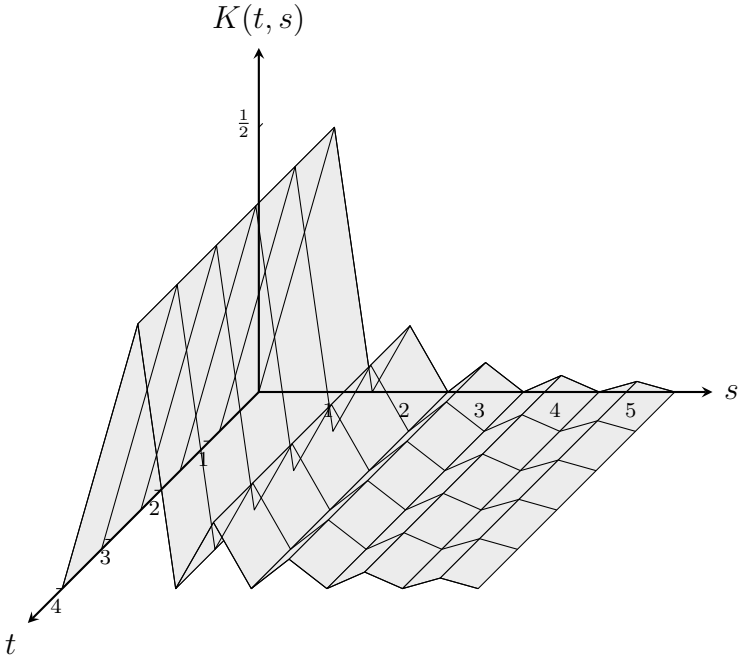


Rys. 5.1. Wykres funkcji $b = b(s)$.

Po skonstruowaniu funkcji $b = b(s)$ definiujemy funkcję $K(t, s)$ wzorem

$$K(t, s) = b(s)$$

dla dowolnych $t, s \in \mathbb{R}_+$. Wykres tej funkcji przedstawiony jest poniżej.



Rys. 5.2. Wykres funkcji $K(t, s) = b(s)$.

Jak widać na pierwszym wykresie, funkcja b nie jest monotoniczna na $\mathbb{R}_+$, jest jednak ciągła i ma ograniczone wahanie na tym przedziale. W konsekwencji, dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \mapsto K(t, s)$ również nie jest monotoniczna, ale ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Przykład ten pokazuje zatem możliwość zastosowania rozważanego twierdzenia w przypadku, gdy funkcja $s \mapsto K(t, s)$ nie jest monotoniczna.

Ponieważ funkcje a, f, g oraz h są takie same jak w Przykładzie 5.2, wiemy już, że założenia (i)–(v) są spełnione. Pozostaje więc sprawdzić założenia (vi)–(ix) dla obecnej postaci funkcji K.

Zacznijmy od założenia (vi). Funkcja K jest ciągła na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ oraz $K(t, 0) = b(0) = 0$. Ponadto dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t, s) = \bigvee_{s=0}^{\infty} b(s) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

i w konsekwencji $\overline{K} = \frac{\pi^2}{6}$. Założenie (vi) jest więc spełnione.

Przejdźmy teraz do weryfikacji założenia (vii). Dla dowolnych $t_1, t_2, s \in \mathbb{R}_+$ takich, że $t_1 < t_2$, mamy

$$K(t_1, s) = K(t_2, s) = b(s),$$

czyli

$$K(t_2, s) - K(t_1, s) = 0.$$

Wobec tego

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} [K(t_2, s) - K(t_1, s)] = 0.$$

Zatem założenie (vii) jest spełnione.

Z tej samej obserwacji wynika, że dla wszystkich $t, s, \tau \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$K(t, \tau) - K(s, \tau) = b(\tau) - b(\tau) = 0.$$

Zatem pierwszy warunek z założenia (viii) jest spełniony. Drugi warunek z kolei dotyczy tylko funkcji g, która jest taka sama jak w Przykładzie 5.2, a zatem jest on również spełniony. Wobec tego spełnione jest założenie (viii).

Na koniec sprawdzimy założenie (ix). Korzystając z otrzymanych wcześniej wartości $||a||$, $\overline{F}$, G, $\overline{K}$ oraz wzorów funkcji $k(r)$ i $\Phi(r)$, otrzymujemy, że pierwsza nierówność z założenia (ix) jest postaci

$$\frac{1}{2} + \left(2r^2 + \sin 1\right) \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{24} \cdot r^2 \leqslant r,$$

zaś druga ma formę

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{12} r^3 < 1.$$

Łatwo sprawdzić, że liczba $r_0 = 0.9$ spełnia obie nierówności.

Na mocy Twierdzenia 5.1 wnioskujemy, że równanie (5.16) ma co najmniej jedno rozwiązanie z przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, dążące w nieskończoności do granicy właściwej. Rozwiązanie to należy do kuli $\overline{B}_{0.9}$ przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Przykład 5.4. Rozważmy ponownie kwadratowe równanie całkowe Hammersteina-Stieltjesa postaci

$$x(t) = \frac{t}{2t+1} + \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{t^2 + x^2(t)}{t^2+1}\right) \int_0^{\infty} \frac{s}{t^2 + s^2 + 8} x^2(s) d_s K(t, s), \qquad (5.17)$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$. Niech funkcja $b = b(s)$ będzie określona jak w Przykładzie 5.3, natomiast

$$K(t, s) = \frac{t+1}{t+2} \cdot b(s), \qquad t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do Przykładu 5.3, funkcja K zależy teraz w sposób istotny od obu zmiennych. Ponadto dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ funkcja $s \mapsto K(t, s)$ nie jest monotoniczna, ale ma ograniczone wahanie na $\mathbb{R}_+$. Przykład ten pokazuje więc możliwość zastosowania rozważanego twierdzenia także w przypadku funkcji K zależnej od obu zmiennych, niemonotonicznej względem drugiej zmiennej.

Ponieważ funkcje a, f, g oraz h są takie same jak w Przykładach 5.2 i 5.3, wiemy już, że założenia (i)-(v) są spełnione. Pozostaje więc sprawdzić założenia (vi)–(ix) dla obecnej postaci funkcji K.

Zacznijmy od założenia (vi). Funkcja K jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ oraz $K(t,0) = 0$. Ponadto dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} K(t,s) = \frac{t+1}{t+2} \bigvee_{s=0}^{\infty} b(s) = \frac{t+1}{t+2} \cdot \frac{\pi^2}{6}.$$

Stąd

$$\overline{K} = \sup_{t \geqslant 0} \left(\frac{t+1}{t+2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right) = \frac{\pi^2}{6},$$

a zatem założenie (vi) jest spełnione.

Przejdźmy teraz do weryfikacji założenia (vii). Niech $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, $t_1 < t_2$. Wówczas

$$K(t_2,s) - K(t_1,s) = \left(\frac{t_2+1}{t_2+2} - \frac{t_1+1}{t_1+2} \right) b(s).$$

Zatem mamy

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} [K(t_2,s) - K(t_1,s)] = \left| \frac{t_2+1}{t_2+2} - \frac{t_1+1}{t_1+2} \right| \frac{\pi^2}{6}.$$

Ponieważ

$$\left| \frac{t_2+1}{t_2+2} - \frac{t_1+1}{t_1+2} \right| = \frac{t_2 - t_1}{(t_1+2)(t_2+2)} \leqslant \frac{t_2 - t_1}{4},$$

to otrzymujemy

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} [K(t_2,s) - K(t_1,s)] \leqslant \frac{\pi^2}{24}(t_2 - t_1).$$

Dla dowolnego $\varepsilon > 0$ możemy więc wziąć $\delta = \frac{24\varepsilon}{\pi^2}$. Wówczas z nierówności $t_2 - t_1 \leqslant \delta$ wynika, że

$$\bigvee_{s=0}^{\infty} [K(t_2,s) - K(t_1,s)] \leqslant \varepsilon.$$

W konsekwencji, założenie (vii) jest spełnione.

Następnie sprawdzimy pierwszy warunek z założenia (viii). Niech $T > 0$ oraz $T \leqslant s < t$. Wówczas

$$\bigvee_{\tau=0}^{\infty} [K(t,\tau) - K(s,\tau)] = \left| \frac{t+1}{t+2} - \frac{s+1}{s+2} \right| \frac{\pi^2}{6} = \frac{t-s}{(s+2)(t+2)} \frac{\pi^2}{6}.$$

Ponieważ

$$\frac{t-s}{(s+2)(t+2)} \leqslant \frac{1}{s+2} \leqslant \frac{1}{T+2},$$

otrzymujemy

$$\sup\left\{\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau)-K(s,\tau)] : T \leqslant s < t\right\} \leqslant \frac{\pi^2}{6(T+2)}.$$

Mamy więc

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left[\bigvee_{\tau=0}^{\infty}[K(t,\tau)-K(s,\tau)] : T \leqslant s < t\right]\right\} = 0.$$

Zatem pierwszy warunek z założenia (viii) jest spełniony. Drugi warunek dotyczy tylko funkcji g i został już sprawdzony w Przykładzie 5.2. Wobec tego założenie (viii) jest spełnione.

Na koniec zauważmy, że ponieważ $\overline{K} = \frac{\pi^2}{6}$, to weryfikacja założenia (ix) przebiega tak samo, jak w Przykładzie 5.3. W szczególności, możemy ponownie przyjąć $r_0 = 0.9$.

Na mocy Twierdzenia 5.1 wnioskujemy, że równanie (5.17) ma co najmniej jedno rozwiązanie z przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, zbieżne w nieskończoności do granicy właściwej. Rozwiązanie to należy do kuli $\overline{B}_{0.9}$ przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

Rozdział 6
Podsumowanie i dalsze kierunki badań

W niniejszej rozprawie zostały przedstawione wyniki dotyczące istnienia rozwiązań nieliniowych kwadratowych równań całkowych Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa określonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+$. Głównym celem prowadzonych badań było ustalenie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań rozważanych równań oraz określenie ich zachowania w nieskończoności. W szczególności zbadane zostało istnienie rozwiązań zbieżnych w nieskończoności do zera oraz zbieżnych do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru.

Rozważania były prowadzone w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$, złożonej z funkcji ciągłych i ograniczonych na przedziale $\mathbb{R}_+$, o wartościach rzeczywistych, z klasyczną normą supremum. Podstawowymi narzędziami wykorzystanymi w pracy były odpowiednio dobrane miary niezwartości oraz twierdzenie Darbo o punkcie stałym. Zastosowanie tych narzędzi pozwoliło na sprowadzenie zagadnienia istnienia rozwiązań rozważanych równań całkowych do badania własności odpowiednich operatorów określonych w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$.

W początkowej części rozprawy przedstawione zostały podstawowe pojęcia i wyniki z zakresu analizy funkcjonalnej, własności funkcji o wahaniu ograniczonym oraz całki Riemanna-Stieltjesa. Szczególną uwagę poświęcono własnościom funkcji o wahaniu ograniczonym na przedziale nieograniczonym, a także warunkom na istnienie całki Riemanna-Stieltjesa na dodatniej półosi rzeczywistej. Omówiona została też teoria miar niezwartości, ze szczególnym uwzględnieniem tych miar określonych w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, stosowanych następnie do badania istnienia rozwiązań równania całkowego.

Główną część rozprawy poświęcono nieliniowemu kwadratowemu równaniu całkowemu Hammersteina-Stieltjesa postaci

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t,s)h(s,x(s))d_sK(t,s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Najpierw zbadane zostało istnienie takich rozwiązań tego równania, które w nieskończoności dążą do zera. Przy odpowiednich założeniach dotyczących funkcji występujących w równaniu udowodniono istnienie co najmniej jednego rozwiązania $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ takiego, że $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. W dowodzie zastosowane zostały własności operatora związanego z tym równaniem oraz odpowiednia miara niezwartości, uwzględniająca zachowanie poszukiwanych rozwiązań w nieskończoności.

W kolejnej części pracy prowadzone rozważania zostały rozszerzone na klasę rozwiązań zbieżnych w nieskończoności do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru. Przedstawione zostały założenia dotyczące funkcji występujących w równaniu, po czym, stosując odpowiednią miarę niezwartości i twierdzenie Darbo, uzyskano twierdzenie gwarantujące istnienie co najmniej jednego rozwiązania $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ takiego, że granica $\lim_{t\to\infty} x(t)$ istnieje i jest skończona.

Istotnym elementem prowadzonych rozważań było całkowanie w sensie Riemanna-Stieltjesa. Przyjęte założenia pozwalają rozpatrywać całkę względem funkcji o wahaniu ograniczonym na $\mathbb{R}_+$, bez konieczności zakładania ich monotoniczności. Możliwości zastosowania uzyskanych twierdzeń do konkretnych równań pokazane zostały w przykładach. W części z nich widać, że podane założenia mogą być spełnione również wtedy, gdy całkujemy względem funkcji, która nie jest monotoniczna względem zmiennej całkowania.

Uzyskane wyniki dostarczają zatem warunków wystarczających dla istnienia rozwiązań omawianego równania całkowego o określonych własnościach w nieskończoności. Przedstawione podejście opiera się na zastosowaniu techniki miar niezwartości, która umożliwia badanie zarówno istnienia rozwiązań, jak i ich zachowania przy $t \to \infty$.

Otrzymane rezultaty mogą stanowić punkt wyjścia do dalszych badań nad rozwiązywalnością nieliniowych równań całkowych Hammersteina-Stieltjesa. Jednym z możliwych kierunków może być badanie asymptotycznej stabilności rozwiązań tych równań. Interesującym zagadnieniem może być również rozszerzenie przedstawionych rozważań na nieskończone układy równań całkowych typu Hammersteina-Stieltjesa.

Bibliografia

[1] R. R. Akhmerov, M. I. Kamenski, A. S. Potapov, A. E. Rodkina and B. N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*, Oper. Theory Adv. Appl. Vol. 55, Birkhäuser, Basel, 1992.

[2] E.S. Allen, *The scientific work of Vito Volterra*, The American Mathematical Monthly, Vol. 48, No. 8, Part I, pp. 516-519 (1941).

[3] J. Appell, J. Banaś and N. Merentes, *Bounded Variation and Around*, Series in Nonlinear Analysis and Applications 17, De Gruyter, Berlin, 2014.

[4] I. K. Argyros, *Quadratic equations and applications to Chandrasekhar's and related equations*, Bull. Aust. Math. Soc. **32** (1985), 275-282.

[5] N. K. Ashirbayev, J. Banaś and R. Bekmoldayeva, *A unified approach to some classes of nonlinear integral equations*, J. Funct. Spaces, **2014**, Art. ID 306231, 9 pp.

[6] N. K. Ashirbayev, J. Banaś and A. Dubiel, *Solvability of an integral equation of Volterra-Wiener-Hopf type*, Abstr. Appl. Anal. **2014**, Art. ID 982079, 9 pp.

[7] J. M. Ayerbe Toledano, T. Domínguez Benavides and G. L. Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[8] J. Banaś and A. Chlebowicz, *On solutions of an infinite system of nonlinear integral equations on the real half-axis*, Banach J. Math. Anal. **13** (4), (2019), 941-968.

[9] J. Banaś, A. Chlebowicz and W. Woś, *On measures of noncompactness in the space of functions defined on the half-axis with values in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **489** (2020), 124187.

[10] J. Banaś and A. Dubiel, *Solvability of a Volterra-Stieltjes integral equation in the class of functions having limits at infinity*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **2017**, No. 53, 1-17.

[11] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lect. Notes Pure Appl. Math., vol. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[12] J. Banaś and J. Madej, *On solutions vanishing at infinity of infinite systems of quadratic Urysohn integral equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **63** (1), (2024), 53-77.

[13] J. Banaś and A. Martinon, *Measures of noncompactness in Banach sequence spaces*, Math. Slovaca **42** (1992), 497-503.

[14] J. Banaś, N. Merentes and B. Rzepka, *Measures of noncompactness in the space of continuous and bounded functions defined on the real half-axis*, w: Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness, Springer Nature Singapore, Singapore, 2017, 1-57.

[15] J. Banaś and M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi, 2014.

[16] J. Banaś and L. Olszowy, *On solutions of a quadratic Urysohn integral equation on an unbounded interval*, Dyn. Syst. Appl. **17** (2008), 255-270.

[17] J. Banaś and J. Szczupiel, *Existence of Solutions Converging at Infinity of a Quadratic Hammerstein–Stieltjes Integral Equation*, Symmetry **18** (10), (2026), 1592.

[18] J. Banaś and J. Szczupiel, *Solvability of a quadratic Hammerstein-Stieltjes integral equation on an unbounded interval*, Bull. Math. Sci. 2650003 (2026) 29.

[19] J. Banaś and R. Taktak, *Measures of noncompactness in the study of solutions of infinite systems of Volterra-Hammerstein-Stieltjes integral equations*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM (2023), 117:95.

[20] T. D. Benavides, *Set-contractions and ball-contractions in some classes of spaces*, J. Math. Anal. Appl. **159** (1991), 500-506.

[21] M. Borkowski and D. Bugajewska, *Applications of Henstock-Kurzweil integrals on an unbounded interval to differential and integral equations*, Math. Slovaca **68** (2018), 77-88.

[22] T.A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, 1983.

[23] L.W. Busbridge, *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[24] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer*, Oxford University Press, London, 1950.

[25] A. Chlebowicz and B. Rzepka, *On the existence of solutions of infinite systems of Volterra-Hammerstein-Stieltjes integral equations in the space BC_1*, Adv. Nonlin. Anal. **14** (1), (2025), 20250105.

[26] A. Chlebowicz and B. Rzepka, *Asymptotic stability of solutions to an infinite system of Volterra-Urysohn-Stieltjes integral equations*, Bull. Math. Sci. 2650014 (2026) 20.

[27] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[28] D. Cruz-Uribe and J. Glidewell, *The Ross-Darboux-Stieltjes integral*, Topol. Methods Nonlinear Anal. (w druku).

[29] J. Daneš, *On the Istratescu's measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie **16** (1972), 403-406.

[30] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto* (in Italian), Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 84-92.

[31] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[32] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators I*, Interscience, New York, 1958.

[33] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Mathematica, 27, 365-390 (1903).

[34] I. Fredholm, *Les équations intégrales linéaires*, Comptes Rendus du Congrés de Mathematiciens tenu á Stockholm, 92–100, 1909.

[35] M. Furi, A. Vignoli, *On a property of the unit sphere in a linear normed space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astron. Phys. 18, 6(1970), 333-334.

[36] L. S. Goldenštein, I. T. Gohberg and A. S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norms*, Učen. Zap. Kishinevsk. Un-ta **29** (1957), 29-36.

[37] L. S. Goldenštein and A. S. Markus, *On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators*, Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Kishinev, 1965, 45-54.

[38] A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Mathematica, 54 (1930) 117-176.

[39] S. Hu, M. Khavanin and W. Zhuang, *Integral equations in the kinetic theory of gases*, Appl. Anal. **34** (1989), 261-266.

[40] V. I. Istrătescu, *On a measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie **16** (1972), 195-197.

[41] T. Jalal and A. H. Jan, *Measure of noncompactness in the Banach space* $BC(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, E)$ *and its application to the infinite system of integral equations in two variables*, Filomat **37** (12), (2023), 3791-3817.

[42] A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematic Studies, Vol. 204, Elsevier Sciences, Amsterdam, 2006.

[43] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. **15** (1930), 301-309.

[44] K. Kuratowski, *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii*, PWN, Warszawa, 1977.

[45] S. Li, Q. Deng, Z. Li, J. Liu, C. Yu, K. Cui and P. Luo, *Identification and* H_∞ *Robust Control of Wireless Power Transfer System by Hammerstein Model*, IEEE Transactions on Power Electronics **39** (7), (2024), 8883-8893.

[46] S. Łojasiewicz, *An Introduction to the Theory of Real Functions*, J. Wiley & Sons, Chichester, 1988.

[47] E. Malkowsky and V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, Jordan J. Math. Stat. **1** (1), (2008), 1-29.

[48] M. Mursaleen, S. M. H. Rizvi and B. Samet, *Measures of Noncompactness and Their Applications*, w Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness, Springer, Singapore, 2017, 59-125.

[49] J. Musielak, *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*, PWN, Warszawa, 1976.

[50] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Ungar, New York, 1960.

[51] W. Pogorzelski, *Integral Equations and Their Applications*, Pergamon Press, Oxford-New York-Frankfurt, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1966.

[52] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications*, Filomat **12** (2), (1998), 87-120.

[53] R. Sikorski, *Funkcje Rzeczywiste*, Państw. Wyd. Naukowe, Warszawa, 1958.

[54] J. Szczupiel, *Functions of bounded variation on real half-axis*, w: Selected Topics in Operator Theory and Topology, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, 2025, 13-32.

[55] J. Wang, C. Zhu and M. Fečkan, *Solvability of fully nonlinear functional equations involving Erdélyi-Kober fractional integrals on the unbounded interval*, Optimization **63** (2014), 1235-1248.

[56] J. R. L. Webb and W. Zhao, *On connections between set and ball measures of noncompactness*, Bull. London Math. Soc. **22** (1990), 471-477.

[57] M. Younis and D. Singh, *On the existence of the solution of Hammerstein integral equations and fractional differential equations*, Journal of Applied Mathematics and Computing **68** (2022) 1087-1105.

[58] P. P. Zabrejko, A. I. Koshelev, M. A. Krasnosel'skii, S. G. Mikhlin, L. S. Rakovshchik and J. Stetsenko, *Integral Equations*, Nordhoff, Leyden, 1975.

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

Rzeszów, 18.10.2026

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Tytuł: Rozwiązania nieliniowych kwadratowych równań całkowych Hammersteina-Stieltjesa zbieżne w nieskończoności do granic właściwych

Autor: mgr Justyna Szczupiel

Promotor: prof. dr hab. Józef Banaś

Rozprawa doktorska poświęcona jest badaniu istnienia rozwiązań nieliniowych kwadratowych równań całkowych Hammersteina typu Riemanna-Stieltjesa, określonych na dodatniej półosi rzeczywistej $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Głównym celem pracy jest ustalenie warunków gwarantujących istnienie rozwiązań rozważanych równań oraz określenie ich zachowania w nieskończoności. W szczególności badane jest istnienie rozwiązań zbieżnych do zera oraz rozwiązań zbieżnych do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru.

Rozważania prowadzone są w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+)$, złożonej z funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Podstawowymi narzędziami wykorzystywanymi w pracy są odpowiednio dobrane miary niezwartości oraz twierdzenie Darbo o punkcie stałym.

W początkowych rozdziałach rozprawy przedstawione zostały podstawowe pojęcia i wyniki z zakresu analizy funkcjonalnej, teorii funkcji o wahaniu ograniczonym oraz całki Riemanna-Stieltjesa. Szczególną uwagę poświęcono własnościom funkcji o wahaniu ograniczonym i całce Riemanna-Stieltjesa na przedziale nieograniczonym. Omówiono również wybrane miary niezwartości, w szczególności miary określone w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+)$, wykorzystywane w dalszej części pracy.

Główne wyniki rozprawy dotyczą nieliniowego kwadratowego równania całkowego Hammersteina-Stieltjesa postaci

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t, s)h(s, x(s))d_sK(t, s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

W pierwszej kolejności przedstawiono warunki gwarantujące istnienie co najmniej jednego rozwiązania rozważanego równania, które dąży do zera w nieskończoności. Następnie rozważania rozszerzono na rozwiązania zbieżne w nieskończoności do granic właściwych, niekoniecznie równych zeru. W obu przypadkach dowody opierają się na zastosowaniu odpowiednich miar niezwartości oraz twierdzenia Darbo o punkcie stałym.

W pracy przedstawiono również przykłady ilustrujące możliwość zastosowania uzyskanych wyników do konkretnych równań całkowych. Przyjęte założenia pozwalają między innymi rozpatrywać całki Riemanna-Stieltjesa względem funkcji o wahaniu ograniczonym, bez konieczności zakładania ich monotoniczności.
Rozprawę kończy podsumowanie otrzymanych rezultatów oraz wskazanie możliwych kierunków dalszych badań nad rozwiązywalnością nieliniowych równań całkowych typu Hammersteina-Stieltjesa.

Rzeszow University of Technology
The Faculty of Mathematics and Applied Physics

Rzeszów, 18.10.2026

Abstract of the doctoral thesis

Title: Solutions of nonlinear quadratic Hammerstein–Stieltjes integral equations converging to finite limits at infinity

Author: mgr Justyna Szczupiel
Supervisor: prof. dr hab. Józef Banaś

The doctoral thesis is devoted to the study of the existence of solutions of nonlinear quadratic Hammerstein–Stieltjes integral equations defined on the real half-axis $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. The main aim of the thesis is to establish conditions guaranteeing the existence of solutions of the considered equations and to investigate their behavior at infinity. In particular, the existence of solutions converging to zero and solutions converging to finite limits, not necessarily equal to zero, is investigated.

The investigations are conducted in the Banach space $BC(\mathbb{R}_+)$, consisting of all real-valued continuous and bounded functions defined on $\mathbb{R}_+$. The main tools used in the thesis are suitably chosen measures of noncompactness and the Darbo fixed point theorem.

The initial chapters of the thesis present basic concepts and results from functional analysis, the theory of functions of bounded variation, and the Riemann–Stieltjes integral. Particular attention is paid to the properties of functions of bounded variation and the Riemann–Stieltjes integral on an unbounded interval. Selected measures of noncompactness are also discussed, especially those defined in the space $BC(\mathbb{R}_+)$, which are subsequently used in the main part of the thesis.

The main results of the thesis concern the nonlinear quadratic Hammerstein–Stieltjes integral equation of the form

$$x(t) = a(t) + f(t, x(t)) \int_0^\infty g(t, s) h(s, x(s)) d_s K(t, s), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

First, conditions guaranteeing the existence of at least one solution of the considered equation converging to zero at infinity are established. Next, the investigations are extended to solutions converging to finite limits at infinity, not necessarily equal to zero. In both cases, the proofs are based on the application of suitable measures of noncompactness and the Darbo fixed point theorem.

The thesis also presents examples illustrating the applicability of the obtained results to particular integral equations. The adopted assumptions allow, among other things, the consideration of Riemann–Stieltjes integrals with respect to functions of bounded variation, without requiring their monotonicity.

The thesis concludes with a summary of the obtained results and an indication of possible directions for further research on the solvability of nonlinear Hammerstein–Stieltjes integral equations.