Zielona Góra, dnia 8 stycznia 2024r.

dr hab. Elżbieta Sidorowicz
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr. Adriana Michalskiego
pt. *Zbiory* $(1,2)$*-dominujące w grafach*

Tematyka rozprawy doktorskiej mgr. Adriana Michalskiego dotyczy zbiorów $(1,2)$-dominujących oraz związanych z nimi parametrów. Pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego wprowadzili w 2008 roku S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J. Knisely oraz D.F. Rall. Niech $k \in \mathbb{N}$, zbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy zbiorem $(1,k)$-dominującym, jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \setminus D$ istnieją w zbiorze D dwa różne wierzchołki u i v takie, że x sąsiaduje z u, a odległość pomiędzy x i v nie przekracza k. Moc najmniejszego zbioru $(1,k)$-dominującego w grafie G nazywamy liczbą $(1,k)$-dominowania i oznaczamy przez $\gamma_{1,k}(G)$. Hedetniemi *et al.* udowodnili, że jeśli graf jest spójny, to każdy zbiór dominujący zawierający co najmniej dwa wierzchołki jest również zbiorem $(1,4)$-dominującym. Ponieważ każdy zbiór $(1,l)$-dominujący jest także zbiorem $(1,k)$-dominującym, gdy $k > l$, rozważanie zbiorów dominujących ma sens jedynie dla $k \in \{1,2,3,4\}$. Jeśli $k = 1$, otrzymujemy zbiór $(1,1)$-dominujący D, taki że każdy wierzchołek nienależący do zbioru D ma dwóch sąsiadów w zbiorze D. W literaturze takie zbiory są nazywane również zbiorami 2-dominującymi lub podwójnie dominującymi. Tego typu zbiory są szeroko badane w literaturze. Autor w swojej rozprawie skupił się na przypadku $k = 2$, rozważając parametry związane z $(1,2)$-dominowaniem oraz problemy istnienia zbiorów $(1,2)$-dominujących przy nałożeniu dodatkowych warunków, takich jak niezależność lub brak podwójnego dominowania.

Rozprawa doktorska mgr. Adriana Michalskiego liczy 77 stron i składa się ze wstępu oraz pięciu rozdziałów. Wszystkie uzyskane wyniki w tej rozprawie, według mojej oceny, są merytorycznie poprawne.

W pierwszym rozdziale przedstawione są podstawowe definicje i oznaczenia. W rozdziale drugim wprowadzone zostało pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego, a także dokonano przeglądu znanych dotychczas wyników dotyczących $(1,k)$-dominowania i w szczególności $(1,2)$-dominowania. Przypadek $(1,2)$-dominowania jest wersją najczęściej badane w literaturze. W drugiej części tego rozdziału zaprezentowane zostały nowe wyniki uzyskane przez Autora rozprawy. Wyznaczona została liczba $(1,2)$-dominowania dla wybranych prostych klas grafów, w szczególności dla ścieżek, cykli i grafów pełnych dwudzielnych. Z samej definicji liczby dominowania oraz liczby $(1,2)$-dominowania wynika, że dla dowolnego grafu G zachodzi $\gamma(G) \leqslant \gamma_{1,2}(G)$. Autor pokazał, że różnica między liczbą $(1,2)$-dominowania a liczbą dominowania może być dowolnie duża oraz opisał klasę grafów, dla których $\gamma(G) = \gamma_{1,2}(G)$. Dodatkowo, wykazał, że liczba $(1,2)$-dominowania i górna liczba dominowania nie są porównywalne. Dla dowolnego n przedstawił konstrukcję grafu G, dla którego $\Gamma(G) - \gamma_{1,2}(G) = n$, oraz grafu H, gdzie $\gamma_{1,2}(H) - \Gamma(H) = n$

Ponieważ każdy zbiór $(1,1)$-dominujący jest także $(1,2)$-dominujący, Autor rozprawy wprowadził nowy rodzaj zbiorów dominujących, a mianowicie zbiory właściwie $(1,2)$-dominujące. Zbiór wierzchołków nazywamy właściwie $(1,2)$-dominującym, jeśli jest zbiorem $(1,2)$-dominującym, ale nie jest $(1,1)$-dominujący. Rozdział trzeci skupia się na właściwym $(1,2)$-dominowaniu oraz związanymi z nim parametrami, takimi jak liczba właściwego $(1,2)$-dominowania $\gamma_{1,\underline{k}}(G)$ oraz górna liczba właściwego $(1,2)$-dominowania $\Gamma_{1,\underline{k}}(G)$. Udowodniono, że jedynymi spójnymi grafami, które nie posiadają właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego, są grafy pełne. Ponadto wykazano, że dla spójnego grafu G, który nie jest grafem pełnym, jego liczba $(1,2)$-dominowania jest równa liczbie właściwego $(1,2)$-dominowania. Kolejnymi wynikami w tym rozdziale są dowody pokazujące, że ciąg nierówności $\gamma(G) \leqslant \gamma_{1,k}(G) = \gamma_{1,\underline{k}}(G) \leqslant \Gamma_{1,\underline{k}}(G) \leqslant \Gamma_{1,k}(G)$ zachodzi dla każdego grafu G posiadającego właściwy zbiór $(1,2)$-dominujący. Następnie przedstawiono dwie konstrukcje: pierwsza podaje klasę grafów, dla których wszystkie te parametry są równe, a druga opisuje klasę grafów, dla których różnice między tymi parametrami są dowolnie duże. Analogicznie jak dla $(1,2)$-dominowania, również dla właściwego $(1,2)$-dominowania parametry $\Gamma_{1,\underline{k}}(G)$ i $\Gamma(G)$ są nieporównywalne. Wykazano, że istnieją grafy, dla których górna liczba $(1,2)$-dominowania jest większa niż górna liczba dominowania, oraz grafy, dla których górna liczba dominowania jest większa niż górna liczba $(1,2)$-dominowania

W rozdziale czwartym Autor także wprowadza nowe pojęcie, dotąd nie rozważane w literaturze, jakim jest indeks przekroju. Indeks przekroju zdefiniowano jako najmniejszą możliwą liczbę wspólnych wierzchołków zbioru $(1,1)$-dominującego oraz właściwego zbioru $(1,2)$-dominującego. Autor określił wartość tego indeksu w niektórych klasach grafów, takich jak ścieżki, cykle, grafy pełne dwudzielne oraz pająki. Przedstawił również warunek konieczny, aby indeks przekroju drzewa wynosił zero.

Rozdział piąty poświęcony jest niezależnym zbiorom $(1,2)$-dominującym. Nie każdy graf posiada niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący, a pełna charakteryzacja grafów posiadających taki zbiór nie jest znana z uwagi na NP-zupełność tego problemu. Hedetniemi *et al.* przedstawili warunek na istnienie niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w iloczynie kartezjańskim dwóch grafów. Autor rozprawy kontynuuje badanie istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w produktach grafów. Problem istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w takich produktach, jak iloczyn tensorowy dwóch grafów, silny iloczyn dwóch grafów, G-złączenie oraz uogólniona korona, został w pełni rozwiązany. Dla każdego z tych przypadków przedstawiona została pełna charakteryzacja produktu posiadającego niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący, zależnie od grafów będących składnikami.

Podsumowując, praca zawiera dwa rodzaje wyników. Pierwszy rodzaj dotyczy pojęć zdefiniowanych już w literaturze, takich jak zbiory $(1,2)$-dominujące i niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące. Są one kontynuacją badań obecnych w literaturze, rozszerzając wyniki na nowe klasy grafów. Drugi rodzaj wyników dotyczy nowych pojęć zdefiniowanych przez Autora, takich jak zbiory właściwie $(1,2)$-dominujące i indeks przekroju. Te nowe pojęcia ściśle wiążą się ze zbiorami $(1,2)$-dominującymi i w pewnym sensie ilustrują ich własności i strukturę. Być może wyniki uzyskane dla zbiorów właściwie $(1,2)$-dominujących w przyszłości posłużą do otrzymania ogólnych twierdzeń związanych ze zbiorami $(1,2)$-dominującymi. Najciekawsze wyniki rozprawy znajdują się w rozdziale piątym i dotyczą niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących. W szczególności twierdzenia charakteryzujące niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące w G-złączeniu oraz warunki konieczne i wystarczające, które muszą spełniać graf G oraz grafy z rodziny $\mathcal{H}$, aby graf $G[\mathcal{H}]$ (czyli G-złączenie) posiadał niezależny zbiór $(1,2)$-dominujący. Te wyniki zostały opublikowane we współautorskim artykule w Applied Mathematics and Computation. Kolejnymi interesującymi wynikami z tego rozdziału są twierdzenia, które Autor uzyskał samodzielnie i które nie zostały jeszcze opublikowane. Dotyczą one produktu tensorowego i silnego produktu grafów, podają warunki konieczne i wystarczające dla istnienia niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w tych produktach.

W rozprawie Autor nie stosuje zaawansowanych metod dowodowych, lecz korzysta z podejścia opartego na standardowych metodach, powszechnie używanych do dowodzenia wyników związanych z różnymi wariantami dominowania. Większość dowodów opiera się na wskazaniu podzbioru wierzchołków w danym grafie lub klasie grafów, a następnie na wykazaniu, że ten właśnie zbiór spełnia kryteria bycia $(1,2)$-dominującym lub $(1,2)$-dominującym z uwzględnieniem dodatkowych warunków. Zależności między parametrami dowodzone są za pomocą konstrukcji odpowiednich grafów. Przedstawione konstrukcje grafów oraz zbiorów dominujących są oryginalne i pomysłowe, co sprawia, że stanowią istotny wkład w dziedzinę. Autor przedstawił je w sposób klarowny i czyta się je bardzo dobrze. Cała praca jest bardzo dobrze zredagowana. Znalazłam niewiele drobnych pomyłek i literówek. W szczególności:

- str. 10 ostatnia linia, str. 11 linia 1-3, definicja drogi i cyklu – W definicji drogi należy dodać założenie, że wierzchołki w ciągu muszą być różne. W takim przypadku nie możemy zdefiniować cyklu jako drogi, w której wierzchołek pierwszy i ostatni są tymi samymi wierzchołkami.

- str. 24 ostatnia linia – Zamiast $\gamma(G) = 3n$ powinno być $\gamma_{1,2}(G) = 3n$.

- str. 33 linia 21 – Zamiast $1 \leqslant i \leqslant \gamma_{1,2}(G)$ powinno być $1 \leqslant i \leqslant \frac{\gamma_{1,2}(G)}{2}$.

- str. 66, definicja zbioru V_K – n jest liczbą wierzchołków grafu G, lepiej byłoby napisać $V_K = \{v \in V(G) : H_v \text{ jest izomorficzny z grafem pełnym}\}$.

- str. 66 linia 6,5 od dołu, str. 67 linia 9, 25 – Lepiej usunąć oznaczenie K_t, aby nie sugerować, że t jest ustaloną liczbą.

Przedstawione uwagi mają charakter redakcyjny i nie obniżają wartości merytorycznej rozprawy. Uważam, że rozprawa doktorska mgr. Adriana Michalskiego spełnia wymogi stawiane pracom doktorskim w Ustawie o stopniach i tytule naukowym, dlatego wnioskuję o dopuszczenie mgr. Adriana Michalskiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Sidorowicz