prof. dr hab. Monika Pilśniak
Wydział Matematyki Stosowanej
Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Mateusza Pirgi pt. „Zbiory niezależne i dominujące w grafach zawierające zbiór liści"

1. Tematyka

Problematyka pracy związana jest z rozważaniem niezależnych zbiorów dominujących w grafach. W badaniach matematyków, wśród których wymienić trzeba C. Palmera, B. Patkosa, H. Prodingera, R. Tichy'ego, czy J. Kratochvila, rozważane jest zliczanie wszystkich lub maksymalnych takich zbiorów w szczególnych klasach grafów, na przykład w drzewach z ustaloną liczbą liści, w grafach z jednym cyklem, czy w grafach z ograniczoną liczbą wierzchołkowo rozłącznych trójkątów. Badania teoretyczne rozwijają się wciąż żywo, ostatnio również z niemałą intensywnością w Azji. Innym podejściem do tematu jest zliczanie szczególnych zbiorów niezależnych, bowiem w pewnych klasach grafów łączy się to z liczbami typu Fibonacciego. To właśnie w ten wariant rozważań wpisują się badania Doktoranta.

Tematyka podejmowana w rozprawie jest dość intensywnie rozważana w ostatnich trzydziestu latach, zatem można uznać, że jest aktualna i budząca zainteresowanie na świecie, także znajdując zastosowanie w kombinatoryce chemicznej. Potwierdzeniem są publikacje w dobrych i bardzo dobrych czasopismach matematyki dyskretnej takich jak Journal Graph Theory, Discrete Mathematics, czy Discrete Applied Mathematics. Mimo to żadnego wyniku ze swojego niemałego dorobku Doktorant nie opublikował w żadnym z tych czasopism – może szkoda.

2. Wyniki

Problem badawczy, którym zajął się pan mgr Mateusz Pirga, dotyczył zbadania liczby niezależnych zbiorów dominujących zawierajacych zbiór liści w pewnych grafach z dwoma cyklami (grafy z jednym cyklem były badane wcześniej) oraz powiązanie tej liczby z liczbami typu Fibonacciego.

W pierwszym rozdziale Kandydat prowadzi bardzo eleganckie i wyczerpujące wprowadzenie we wszystkie tematy, które zbadał, by osiągnąć postawiony cel. Natomiast w drugim rozdziale czytelnik znajdzie przedstawiony z dużym wyczuciem obecny stan wiedzy i miejsce wyników Doktoranta w tym procesie. Niektóre wyniki kontynuują dotychczasowe badania (rozdział 3. i 4.), a niektóre są wejściem w ciekawą nową przestrzeń do rozważań (rozdział 5.). Autor powołuje się tutaj między innymi na twierdzenie 2.13., które pochodzi z manuskryptu. Nie wiadomo zatem, czy jest prawdziwe. Chciałabym poznać dowód tego twierdzenia.

W rozdziale trzecim, który jest w istocie pracą [53] ze spisu literatury, Autor pokazuje najpierw, że największa badana liczba w klasie grafów z dwoma cyklami o wspólnym wierzchołku jest osiągana dla grafów $G_n^{k,l,r}$. Jest to twierdzenie 3.10. jako kulminacja analizy strukturalnej w podrozdziale 3.1. Nie nazywałabym tutaj pośrednich wyników twierdzeniami – może co najwyżej lematami. Następnie w podrozdziale 3.2. wyznaczana jest wartość $\sigma_L(G)$ dla grafów ekstremalnych i wskazane są ciekawe, wręcz zaskakujące związki z liczbami Fibonacciego. Wydaje się, że Kandydat nie przyjrzał się dobrze sformułowaniu lematu 3.15., które w prezentowanej formie wymaga doprecyzowania (co to jest A, B, C, D i skąd je wziąć). Zwieńczeniem tej części pracy jest twierdzenie 3.18., jako ładny wniosek trzech twierdzeń, między innymi twierdzenia 3.10.

Następnie w rozdzaile 4. uwaga kieruje się na problem liczby niezależnych zbiorów (1,2)-dominujących w ścieżkach i cyklach, czyli pewnego uogólnienia 2-dominowania. Autor uzyskuje nowy wzór dwumianowy liczb Padovana, wykorzystując ich interpretację grafową w twierdzeniu 4.10., oraz wzór na wielomian Padovana grafu – twierdzenie 4.20. Mimo, iż jest to główny wynik tej części rozprawy oraz pracy [52] z literatury, to sformułowanie tego twierdzenia przerosło Kandydata – nie odnalazłam wyjaśnienia (G, n, p), co to jest p i czy jest dowolne.

Podrozdziały 4.4. i 4.5. pochodzą z publikacji [51] i dotyczą uogólnienia niezależności zbioru na k-niezależność. Zliczanie takich zbiorów w grafach prowadzi do uogólnień ciągów typu Fibonacciego. I tak Autor rozważając w twierdzeniu 4.26. (o najdłuższym dowodzie w rozprawie liczącym 3 strony) liczbę wszystkich t-elementowych maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżce P_n, otrzymuje kolejny nowy wzór dwumianowy liczb Padovana oraz uogólnione wielomiany Padovana dla ścieżek – twierdzenie 4.35.

Treść rozdziału piątego i pracy [6] to wyniki dotyczące nowego parametru tzw. właściwego 2-dominowania. W twierdzeniu 5.3. Autor podaje ciekawą i zaskakującą charakteryzację istnienia właściwego zbioru 2-dominującego. Jest to drugi dłuższy dowód tej rozprawy (dwie i pół strony). We wnioskach z tego twierdzenia omówione są własności zbiorów zawierających liście. W dalszej części Kandydat prezentuje własności tego parametru, porównuje go ze znaną liczbą 2-dominowania grafu (twierdzenie 5.14.) oraz wyzna-

MP

cza wartość dla drzew (twierdzenie 5.17.). Chcę podkreślić, że wyniki tej części rozprawy spotkały się z zainteresowaniem i są kontynuowane w dwóch kolejnych publikacjach. Ten rozdział uważam za najciekawszy.

Zakończenie jest bardzo dobrze napisane, wskazując między innymi dalsze kierunki badań, które sam Autor już rozpoczął. Znalazły się tutaj też otwarte problemy, które powinny stanowić idealną motywację dla Autora do samodzielnej pracy naukowej. Żywię nadzieję, że w przyszłości Kandydat zmierzy się z nimi.

Podsumowanie

Warte docenienia jest, iż pan mgr Mateusz Pirga osiągnął nowe rezultaty, mając istotny wkład w obecny stan nauki w istniejących już wcześniej tematach badawczych. Bezsprzecznie jasno postawił cel, a rezultaty badań stanowią oryginalne rozwiązanie tego problemu naukowego.

Metody zastosowane w dowodach są znane w literaturze, wymagały jednak modyfikacji i dostosowania do konkretnych problemów. Na uwagę i uznanie zasługuje powtórnie mnogość różnych rozważonych tematów, z których każdy wymagał innych narzędzi i sposobu dedukcji. Warto podkreślić też, że w pracy bardzo elegancko prowadzona jest narracja, tłumaczone są cele i sposoby ich osiągnięcia na tle znanych już wyników.

Doceniam konsekwentną i równomierną konstrukcję, budowę kolejnych trzech rozdziałów, stanowiących rdzeń pracy. Wszystko to poprzedzone zostało rozdziałem z istotnymi definicjami oraz rozdziałem z genezą problemu, umieszczeniem badań w dotychczasowym stanie wiedzy w omawianym temacie i jasno sprecyzowanym celem naukowym.

Ogólnie w omawianej rozprawie pojawia się wiele wątków, dużo wyników, czasami tylko (wydawać by się mogło) w szczególnych klasach grafów, a mimo to już i tak trudnych do uzyskania – jest to specyfika tematyki. Praca zawiera bardzo dobrze napisane omówienie wyników wraz z motywacją i miejscem ich w badaniach prowadzonych na świecie. Czytelnik jest prowadzony między kolejnymi rozdziałami i wynikami bardzo celną narracją. Na uznanie zasługuje redakcja pracy, poprawnie napisana, z dbałością o styl języka polskiego, a także o kulturę tekstu naukowegoz eleganckim cytowaniem wyników, ich autorów i źródeł. Wszystko to stanowi, że przedstawiona została bardzo solidna praca z matematyki. Godna pochwały jest praca w różnych grupach badawczych, z różnymi współautorami. Żywię nadzieję, że w przyszłości Kandydat będzie też prowadził badania w zespole międzynarodowym.

3. Szczegółowe uwagi techniczne i językowe

- Słowo *liczność* w konteście mocy zbioru jest stosowane niepoprawnie. Autor zapewne miał na myśli *liczebność* zbioru.
- Szkoda, że Autor nie uniknął błędów interpunkcyjnych – język polski wymaga przecinków w wielu miejscach, w których nie zostały użyte oraz kropek po numerach rozdziałów, twierdzeń, itp. jako liczebnikach porządkowych.

- Nie ma potrzeby stosowania anglicyzmu typu *produkt grafów*. W języku polskim mamy odpowiednik tego pojęcia – *iloczyn*.
- Wykaz oznaczeń jest bardzo przydatnym elementem takiej monografii. Brakuje mi tutaj strony występowania definicji symbolu.
- Przy niektórych twierdzeniach, jak na przykład wniosek 4.15., warto może byłoby wprowadzić oznaczenie na $\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor$, żeby indeks górny sumatora wyglądał bardziej elegancko.
- Rysunki czasami wymuszają niepotrzebnie zbyt szybki koniec strony. Autor trafnie powołuje sie na rysunki, a one też są opisane i ponumerowane – wystraczyłoby zatem użyć komendy pozwalającej swobodnie umieszczać rysunki w tekście.
- Spis literatury zawiera pozycję [34] w formacie niezgodnym z poporzednim.

4. Konkluzja

Podsumowując, praca spełnia ustawowe wymogi stawiane rozprawom doktorskim, stanowi oryginalne rozwiązanie problemu naukowego, wykazuje ogólną wiedzę teoretyczną Kandydata w dyscyplinie matematyka oraz umiejętność samodzielnego prowadzenia pracy naukowej. Wnioskuję o dopuszczenie pana mgra Mateusza Pirgę do publicznej obrony.

Monika Pilśniak

Kraków, 4 maja 2026 r.