UNIWERSYTET MARII CURIE-SKŁODOWSKIEJ
W LUBLINIE
Szkoła Doktorska Nauk Ścisłych i Przyrodniczych

Dziedzina: nauk ścisłych i przyrodniczych
Dyscyplina: matematyka

Karol Szczepan Aleksandrowicz
nr albumu: 269480

Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych
(Selected geometric properties of interpolation spaces)

Rozprawa doktorska przygotowywana pod kierunkiem naukowym
prof. dr. hab. Stanisława Prusa

w Instytucie Matematyki UMCS

LUBLIN, 2024

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

ROZPRAWA DOKTORSKA

dyscyplina naukowa matematyka

Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych

Karol Szczepan Aleksandrowicz

Promotor
prof. dr hab. Stanisław Prus

Rzeszów 2024

Spis treści

Wstęp

Jednostajna wypukłość jest jedną z klasycznych własności rozważanych w geometrii przestrzeni Banacha. Własność ta, jej liczne modyfikacje i uogólnienia znalazły wiele zastosowań, w szczególności w metrycznej teorii punktów stałych. Równie intensywne badania prowadzone są także w zakresie geometrii krat Banacha. Podstawową własnością geometryczną normy związaną z porządkiem jest jednostajna monotoniczność, będąca w pewnym sensie odpowiednikiem jednostajnej wypukłości. Również jednostajna monotoniczność ma szereg odmian i zastosowań.

Jednym z zagadnień geometrii przestrzeni Banacha jest problem zachowania geometrycznych własności przy pewnych konstrukcjach rozważanych w analizie funkcjonalnej. Należą do nich konstrukcje przestrzeni Lebesgue'a-Bochnera, sum prostych, a także przestrzeni interpolacyjnych. W przypadku tych ostatnich główne problemy dotyczą interpolacji operatorów, ale jest także obszerna literatura dotycząca własności geometrycznych.

W tej rozprawie rozważamy problem przenoszenia pewnych własności geometrycznych przestrzeni i krat Banacha z jednej z przestrzeni wyjściowych na przestrzeń powstałą w wyniku ich interpolacji. Metody interpolacji, jakie rozpatrujemy, to ogólna dyskretna metoda interpolacji, rzeczywista metoda interpolacji Lionsa-Peetrego i jej uogólnienie na więcej niż dwie przestrzenie – metoda Yoshikawy-Sparra oraz zespolona metoda interpolacji Calderóna. Warto podkreślić, że nawet jeśli dwie metody interpolacji dają tę samą przestrzeń, to normy otrzymane w ich wyniku są na ogół różne i badanie własności geometrycznych wymaga osobnego rozpatrywania poszczególnych norm.

W pierwszym rozdziale podajemy definicje rozważanych własności geometrycznych przestrzeni i krat Banacha. Dla krat badamy lokalne wersje jednostajnej monotoniczności – dolną i górną. W rozdziale tym przedstawiamy również nowe wyniki dotyczące charakteryzacji innej własności krat Banacha – porządkowej gładkości. Charakteryzacja ta prowadzi także do definicji nowych własności geometrycznych, dualnych do lokalnych wersji jednostajnej monotoniczności. Wykazujemy twierdzenia o dualności tych nowych własności geometrycznych i dolnej oraz górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Na koniec tego rozdziału podajemy również przykłady, które pokazują, że dolna i górna lokalna jednostajna monotoniczność są własnościami nieporównywalnymi. W szczególności prezentujemy metodę konstruowania krat Banacha, które są dolnie, ale nie górnie lokalnie jednostajnie monotoniczne oraz opisujemy takie przenormowanie klasycznej przestrzeni ciągów zbieżnych c, że powstała w ten sposób krata Banacha jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, ale nie jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Drugi rozdział jest poświęcony ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji i sumom prostym przestrzeni Banacha. Dyskretna metoda interpolacji znalazła interesujące zastosowanie w teorii operatorów. W pracy [14] metoda ta posłużyła do znalezienia faktoryzacji operatorów słabo zwartych przez przestrzenie refleksywne. Problem stabilności własności geometrycznych dla tej metody interpolacji nie był dotąd obszernie studiowany. Jednym ze znanych wyników w tym zakresie jest twierdzenie o stabilności jednostajnej wypukłości, które zostało udowodnione w pracy [44]. W tej rozprawie dowodzimy twierdzenia, które dotyczą zarówno własności słabszych od jednostajnej wypukłości, jak i jej nieskończenie wymiarowych odpowiedników. W szczególności pokazujemy, że (przy odpowiednich założeniach o przestrzeni E w definicji rozpatrywanej metody) ścisła i lokalna jednostajna wypukłość przenoszą się z jednej z przestrzeni z wyjściowej pary przestrzeni Banacha na przestrzeń interpolacyjną otrzymaną za pomocą ogólnej dyskretnej metody interpolacji oraz, że to samo dotyczy niemal jednostajnej wypukłości i własności (β). Aby udowodnić twierdzenie o własności (β), wykazujemy również twierdzenie o przenoszeniu się własności (β) na sumy proste.

W trzecim rozdziale zaprezentowane są nowe wyniki otrzymane dla metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Jeden z pierwszych wyników dotyczących stabilności własności geometrycznych przy rzeczywistej metodzie interpolacji został otrzymany przez Bernarda Beauzamy'ego w pracy [5]. Udowodnił on, że jeżeli co najmniej jedna z przestrzeni X_0, X_1 jest jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna otrzymana dla tej pary przestrzeni za pomocą ciągłej wersji metody interpolacji Lionsa-Peetrego również ma tę własność. Bernard Beauzamy badał także własność słabszą niż jednostajna wypukłość – ścisłą wypukłość. Udowodnił że, przy dodatkowych założeniach o parze porównywalnych przestrzeni Banacha, ścisła wypukłość przenosi się z jednej z przestrzeni na przestrzeń interpolacyjną otrzymaną za pomocą dyskretnej wersji metody interpolacji Lionsa-Peetrego. Dowód tego twierdzenia można znaleźć w monografii [32].

Nieskończenie wymiarowe odpowiedniki jednostajnej wypukłości – takie jak własność Kadeca-Klee'ego, były studiowane w pracy [19]. Autorzy tej pracy rozpatrywali konstrukcje ogólniejsze niż klasyczna metoda Lionsa-Peetrego dla dwóch przestrzeni. Z twierdzenia, które udowodnili, wynika w szczególności, że własność Kadeca-Klee'ego przenosi się z jednej z przestrzeni z pary przestrzeni Banacha (X_0, X_1) na przestrzeń interpolacyjną Lionsa-Peetrego otrzymaną zarówno przez ciągłą, jak i dyskretną wersję tej metody.

Wyniki dotyczące niemal jednostajnej wypukłości oraz własności (β) są również znane, jednak tylko dla dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Zostały one przedstawione w pracy [37]. Autorzy tej pracy udowodnili, że jeżeli jedna z przestrzeni z $n+1$ porównywalnych przestrzeni $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ jest niemal jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna otrzymana za pomocą dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra również ma tę własność. W powyżej cytowanej pracy znajduje się również analogiczny wynik dla własności (β), jednak w dowodzie twierdzenia dla tej własności autorzy wykorzystali wynik dotyczący stabilności własności (β) dla sum prostych, który ostatecznie nigdy się nie ukazał. Wynik z rozdziału drugiego uzupełnia tę lukę.

W twierdzeniach, o których mowa powyżej rozpatruje się przestrzenie interpolacyjne wyposażone w pewne szczególne normy. W tej rozprawie rozważamy szereg innych norm i osiągniętych dla nich rezultatów nie można w bezpośredni sposób wyprowadzić ze znanych wcześniej twierdzeń.

Na początku trzeciego rozdziału są przedstawione podstawowe pojęcia i definicje związane z rzeczywistą metodą interpolacji. Następnie podajemy dwa nowe twierdzenia dotyczące stabilności jednostajnej wypukłości przy metodzie interpolacji Yoshikawy-Sparra. W dalszej części tego rozdziału zajmujemy się głównie nieskończenie wymiarowymi odpowiednikami jednostajnej wypukłości. Najpierw dowodzimy twierdzenia dotyczące stabilności niemal jednostajnej wypukłości i własności (β) w przypadku, gdy przestrzeń interpolacyjna jest wyposażona w normę w wersji dyskretnej. Następnie przechodzimy do przedstawienia metody, która umożliwia otrzymanie wyników dla ciągłej wersji tej metody interpolacji, korzystając z wcześniej udowodnionych twierdzeń dla jej dyskretnego odpowiednika. W ten sposób otrzymujemy twierdzenia o stabilności jednostajnej wypukłości, niemal jednostajnej wypukłości i własności (β) dla ciągłej wersji metody Yoshikawy-Sparra. Podajemy także przykład, który pokazuje, że przestrzenie interpolacyjne otrzymane za pomocą ciągłej i dyskretnej wersji rozważanej metody interpolacji mogą nie być izometryczne, a zatem twierdzenia dotyczące stabilności własności geometrycznych dla tych wersji należy rozpatrywać oddzielnie.

Ostatni, czwarty rozdział tej rozprawy poświęcony jest zespolonej metodzie interpolacji Alberto Calderóna. Dla tej metody jest mniej znanych wyników dotyczących stabilności własności geometrycznych niż dla rzeczywistej metody interpolacji.

Stabilność jednostajnej wypukłości przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna była najpierw studiowana przez Michaela Cwikela i Shlomo Reisnera w pracy [13]. Wykazali oni, że jeżeli jedna z przestrzeni z pary porównywalnych przestrzeni Banacha jest jednostajnie wypukła, to tę samą własność ma również przestrzeń interpolacyjna. Inny dowód tego twierdzenia w ogólniejszej wersji został podany przez Maura Salvatoriego i Marco Vignatiego w pracy [51].

Na początku rozdziału czwartego przytaczamy pojęcia i definicje związane z zespoloną metodą interpolacji. Prezentację nowych wyników zaczynamy od twierdzeń dotyczących stabilności własności geometrycznych słabszych od jednostajnej wypukłości. Wykazujemy twierdzenia dotyczące stabilności ścisłej wypukłości i lokalnej jednostajnej wypukłości przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna.

W dalszej części czwartego rozdziału skupiamy się na nieskończenie wymiarowych odpowiednikach jednostajnej wypukłości. Problem stabilności takich własności jak własność Kadeca-Klee'ego i własność (β) pozostaje nierozwiązany w ogólnej postaci. W tej rozprawie przedstawiamy wyniki pokazujące, że przy dodatkowych założeniach o parze porównywalnych przestrzeni Banacha, własności te przenoszą się z jednej z przestrzeni na przestrzeń interpolacyjną otrzymaną za pomocą zespolonej metody interpolacji Calderóna.

Na koniec rozdziału czwartego zajmujemy się jeszcze problemem stabilności własności geometrycznych krat Banacha przy zespolonej metodzie interpolacji. Wykazujemy, że jednostajna monotoniczność przenosi się z jednej z interpolowanych przestrzeni na przestrzeń interpolacyjną otrzymaną za pomocą tej metody.

Część autorskich wyników przedstawionych w tej pracy znajduje się również w artykułach [2], [3] i [4].

Rozdział 1

Geometryczne własności przestrzeni i krat Banacha

1.1 Geometryczne własności przestrzeni Banacha

W tym rozdziale przypominamy definicje studiowanych własności geometrycznych przestrzeni Banacha. Przestrzenie Banacha będziemy oznaczać przez $X, Y, Z, \ldots$, natomiast ich normy – przez $\|\cdot\|, \|\cdot\|_X, \|\cdot\|_\infty$ i tym podobnie. Ponadto przez B_X oznaczamy domkniętą kulę jednostkową przestrzeni Banacha X: $B_X = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$, a przez S_X – jej brzeg, czyli sferę jednostkową: $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Jedną z najwcześniej zdefiniowanych własności geometrycznych przestrzeni Banacha jest jednostajna wypukłość. Jej definicję podał James Clarkson w pracy [11] z roku 1936.

Definicja 1.1.
Przestrzeń Banacha X jest jednostajnie wypukła, jeżeli dla każdego $\varepsilon \in (0, 2]$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych dwóch wektorów $x, y \in S_X$ takich, że $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ mamy

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta.$$

W cytowanej powyżej pracy James Clarkson udowodnił, że klasyczne przestrzenie L_p są jednostajnie wypukłe dla $1 < p < \infty$ oraz, że skończone sumy proste przestrzeni jednostajnie wypukłych również mają tę własność (przy dodatkowych założeniach o normie w sumie prostej).

Jednostajna wypukłość jest własnością, która ma wiele zastosowań, na przykład przestrzenie jednostajnie wypukłe są refleksywne oraz mają strukturę normalną, a zatem podzbiory domknięte, wypukłe i ograniczone w tych przestrzeniach mają własność punktu stałego dla przekształceń nieoddalających (zobacz [26]).

Jednostajną wypukłość przestrzeni Banacha X można opisać przy pomocy modułu tej własności.

Definicja 1.2 ([15, str. 145]).
Funkcję $\delta_X : [0,2] \to [0,1]$ *określoną wzorem*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}$$

nazywamy modułem wypukłości przestrzeni Banacha X.

Przestrzeń Banacha X jest jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_X(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0,2]$. W powyższej definicji warunek $x, y \in S_X$ można zastąpić przez $x, y \in B_X$, a także $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ przez $\|x-y\| = \varepsilon$. Ponadto funkcja $\delta_X(\varepsilon)$ jest niemalejąca i ciągła na przedziale $(0,2)$ oraz te same własności ma funkcja $\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$ (zobacz [27]).

W przestrzeniach jednostajnie wypukłych spełniona jest silniejsza wersja nierówności trójkąta dla normy. Z pracy Lecha Maligrandy [42] wiemy, że w każdej przestrzeni Banacha X spełniona jest nierówność

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| - \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\},$$

gdzie $x, y \in X$ są dowolnymi niezerowymi wektorami. Z powyższej nierówności, uwzględniając definicję modułu wypukłości, otrzymujemy następującą nierówność, z której będziemy korzystali w dalszej części tej rozprawy

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant \frac{\|x\| + \|y\|}{2} - \delta_X\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \min\{\|x\|, \|y\|\}. \tag{1.1}$$

Zauważmy, że ponieważ $\frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$ jest funkcją niemalejącą, więc

$$\frac{\delta_X(\lambda\varepsilon)}{\lambda\varepsilon} \leqslant \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon}$$

dla dowolnego $\lambda \in (0,1]$. Przy uwzględnieniu tej obserwacji, z nierówności (1.1) wnioskujemy, że jeśli $\|x\| = \min\{\|x\|, \|y\|\} \leqslant 1$, to

$$\begin{aligned}\|x+y\| &\leqslant \|x\| + \|y\| - 2\|x\|\delta_X\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \\ &\leqslant \|x\| + \|y\| - 2\delta_X\left(\left\|x - \frac{\|x\|}{\|y\|}y\right\|\right).\end{aligned} \tag{1.2}$$

Nierówność analogiczna do nierówności (1.1) została wykazana już przez Clarksona w pracy [11].

Lokalną wersję jednostajnej wypukłości zdefiniował Lovaglia w pracy [40].

Definicja 1.3.

Przestrzeń Banacha X jest lokalnie jednostajnie wypukła, jeżeli dla każdego $x \in S_X$ i każdego $\varepsilon \in (0,2]$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $y \in S_X$ takiego, że $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ mamy

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Lokalną jednostajną wypukłość można także scharakteryzować przy użyciu ciągów. Istotnie, przestrzeń X jest lokalnie jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $x \in S_X$ i dla dowolnego ciągu (y_n) in X takiego, że $\lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1$ i $\lim_{n\to\infty} \|x + y_n\| = 2$ ma miejsce równość $\lim_{n\to\infty} \|x - y_n\| = 0$ (patrz [40]). Wynika stąd, że w definicji 1.3 warunek $y \in S_X$ można zastąpić przez $y \in B_X$ i zdefiniować następujący moduł lokalnej jednostajnej wypukłości w punkcie $x \in S_X$:

$$\delta_{X,l}(\varepsilon, x) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : y \in B_X,\ \|x-y\| \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Przestrzeń X jest lokalnie jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy każdego $x \in S_X$ i każdego $\varepsilon \in (0,2]$ zachodzi nierówność $\delta_{X,l}(\varepsilon, x) > 0$.

Następujący techniczny lemat pozwala w warunku lokalnej jednostajnej wypukłości uwolnić się od założenia, że $x \in S_X$.

Lemat 1.1.

Jeżeli przestrzeń Banacha X jest lokalnie jednostajnie wypukła, to dla dowolnych wektorów $x, y \in B_X$ takich, że $x \neq 0$ i $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$ zachodzi nierówność

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \frac{1}{4}\delta_{X,l}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{x}{\|x\|}\right).$$

Dowód.

Załóżmy, że przestrzeń X jest lokalnie jednostajnie wypukła i wektory $x, y \in B_X$ spełniają założenia lematu. Oznaczmy $\delta_1 = \delta_{X,l}\left(\frac{\varepsilon}{2}, \frac{x}{\|x\|}\right)$. Jeśli $\|x\| < 1 - \frac{1}{2}\delta_1$, to

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x\| + \|y\|) < 1 - \frac{1}{4}\delta_1.$$

Załóżmy teraz, że $\|x\| \geqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_1$. Wtedy $\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|x\|}\right\| = \frac{1}{\|x\|}\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ oraz $\left\|\frac{y}{\|x\|}\right\| \leqslant (1 - \frac{1}{2}\delta_1)^{-1} \leqslant 1 + \delta_1$, więc lemat 1 z pracy [53] pokazuje, że $\frac{1}{2}\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|x\|}\right\| \leqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_1$, czyli

$$\frac{1}{2}\|x + y\| \leqslant \|x\|\left(1 - \frac{1}{2}\delta_1\right) \leqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_1.$$

□

Inną własnością słabszą niż jednostajna wypukłość jest ścisła wypukłość, która była studiowana już przez Jamesa Clarksona w cytowanej wyżej pracy [11], gdzie udowodnił on, że dla każdej ośrodkowej przestrzeni Banacha X można skonstruować normę równoważną, dla której przestrzeń X jest ściśle wypukła.

Definicja 1.4.
Mówimy, że przestrzeń Banacha X jest ściśle wypukła, jeżeli dla każdych wektorów $x, y \in S_X$ takich, że $x \neq y$ mamy

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1.$$

Jednostajna wypukłość implikuje ścisłą wypukłość. Ponadto w przestrzeniach skończenie wymiarowych obie te własności są równoważne, co wynika ze zwartości kul w takich przestrzeniach. Mimo że ścisła wypukłość jest własnością słabszą od jej jednostajnej wersji, ściśle wypukłe przestrzenie również mają wiele „dobrych" własności, na przykład dowolny funkcjonał liniowy i ciągły określony na podprzestrzeni przestrzeni Banacha X ma jednoznaczne rozszerzenie do całej przestrzeni wtedy i tylko wtedy, gdy przestrzeń Banacha X^* jest ściśle wypukła (twierdzenie to znane jest jako twierdzenie Taylora-Foguela, zobacz [27]).

Wszystkie powyżej zdefiniowane własności, mimo że zazwyczaj są stosowane do przestrzeni nieskończenie wymiarowych, mają charakter skończenie wymiarowy. Nieskończenie wymiarowy odpowiednik jednostajnej wypukłości został zdefiniowany przez

Roberta Huffa w pracy [31]. Jest to niemal jednostajna wypukłość. Poniżej przez $\operatorname{sep}(x_n)$ będziemy oznaczali separator ciągu (x_n), tj. $\operatorname{sep}(x_n) = \inf\{\|x_n - x_m\| : n \neq m\}$ oraz przez $\operatorname{co}(x_n)$ – powłokę wypukłą zbioru złożonego z elementów ciągu (x_n), czyli

$$\operatorname{co}(x_n) = \left\{ x \in X : x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_{n_i}, \lambda_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Definicja 1.5 ([31]).
Mówimy, że przestrzeń Banacha X:

1. *ma własność Kadeca-Klee'ego, jeżeli dla każdego ciągu (x_n) elementów kuli jednostkowej B_X takiego, że* $\operatorname{sep}(x_n) > 0$ *oraz (x_n) dąży słabo do elementu x, mamy*

$$\|x\| < 1,$$

2. *ma jednostajną własność Kadeca-Klee'ego jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego ciągu (x_n) elementów kuli jednostkowej B_X, który spełnia warunek* $\operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon$ *oraz dąży słabo do elementu x, mamy*

$$\|x\| \leqslant 1 - \delta,$$

3. *jest niemal jednostajnie wypukła jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego ciągu (x_n) elementów kuli jednostkowej B_X, który spełnia warunek* $\operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon$*, istnieje taki element $x \in \operatorname{co}(x_n)$, że*

$$\|x\| \leqslant 1 - \delta.$$

Warunki z definicji 1.5 mają istotny sens jedynie dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych, ale formalnie przyjmuje się, że również przestrzenie skończenie wymiarowe mają zdefiniowane powyżej własności. W pracy [31] Robert Huff udowodnił, że przestrzeń X jest niemal jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy X ma jednostajną własność Kadeca-Klee'ego i jest refleksywna. Niezależnie własność równoważną niemal jednostajnej wypukłości wprowadzili Kazimierz Goebel i Tadeusz Sękowski w pracy [28]. Dla swojej własności używali oni nazwy niezwarta jednostajna wypukłość. Zdefiniowali oni moduł tej własności i udowodnili, że przestrzenie niemal jednostajnie wypukłe są refleksywne i mają strukturę normalną, a co za tym idzie – zbiory wypukłe, domknięte i ograniczone w tych przestrzeniach mają własność punktu stałego dla przekształceń nieoddalających.

Moduły niemal jednostajnej wypukłości oraz własności Kadeca-Klee'ego definiujemy następująco (zobacz na przykład [28], [46]).

Definicja 1.6 ([28]).
Funkcję Δ_X daną wzorem

$$\Delta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \inf\{\|x\| : x \in \mathrm{co}(x_n)\} : (x_n) \subset B_X,\ \mathrm{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon\}$$

nazywamy modułem niemal jednostajnej wypukłości przestrzeni Banacha X.

Definicja 1.7 ([46]).
Funkcję $\Delta_{K,X}$ daną wzorem

$$\Delta_{K,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x\| : (x_n) \subset B_X,\ \mathrm{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon,\ (x_n) \text{ dąży słabo do } x\}$$

nazywamy modułem własności Kadeca-Klee'ego przestrzeni Banacha X.

Inną własnością o charakterze nieskończenie wymiarowym jest własność (β). Była ona badana w związku z własnością znaną jako „drop property" (zobacz [49], [50]). Definicję własności (β) podał Stefan Rolewicz w pracy [50], my jednak przytoczymy definicję równoważną, zawartą w pracy [18].

Definicja 1.8.
Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma własność (β) jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego elementu $x \in B_X$ i dowolnego ciągu (x_n) w kuli jednostkowej B_X takiego, że $\mathrm{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon$ istnieje taki indeks n_0, że

$$\left\|\frac{x + x_{n_0}}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

Własność (β) ma istotny sens jedynie dla przestrzeni nieskończenie wymiarowych, ale przyjmuje się, że przestrzenie skończenie wymiarowe mają własność (β). Przy rozważaniu własności (β) będzie nam potrzebny moduł tej własności. Definicja, którą podamy, różni się nieznacznie od tych, które można znaleźć w literaturze, na przykład w pracy [18], jednak jest ona bardziej odpowiednia dla naszych rozważań.

Definicja 1.9.
Funkcję β_X zadaną wzorem

$$\beta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\| : x \in B_X, (x_n) \subset B_X, \operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon\right\}$$

nazywamy modułem własności (β) przestrzeni Banacha X.

Warto zauważyć, że jednostajna wypukłość implikuje własność (β), a ta z kolei implikuje niemal jednostajną wypukłość, zatem przestrzenie Banacha z własnością (β) również mają strukturę normalną. Ponadto, jak zostało udowodnione w pracy [36], własność (β) implikuje również strukturę normalną w przestrzeni sprzężonej X^*. Jest to ważne, ponieważ struktura normalna przestrzeni Banacha X nie musi zachowywać się przy przechodzeniu do przestrzeni dualnej.

W odróżnieniu od modułów związanych z wariantami jednostajnej wypukłości, dziedziną modułów niemal jednostajnej wypukłości, własności Kadeca-Klee'ego i własności (β) jest przedział postaci $[0, c]$, gdzie c zależy od rozważanej przestrzeni. Moduły własności geometrycznych przestrzeni Banacha, takie jak na przykład moduł wypukłości lub moduł niemal jednostajnej wypukłości, nie muszą być funkcjami wypukłymi (zobacz na przykład [27]). Na koniec tego podrozdziału zaprezentujemy jednak fakt, który umożliwi nam traktowanie modułów różnych własności geometrycznych jako funkcji wypukłych, co pozwoli nam między innymi na stosowanie nierówności Jensena.

Uwaga 1.1.
Niech $f : [0, a] \to [0, \infty)$ będzie funkcją niemalejącą taką, że $f(0) = 0$ oraz $f(t) > 0$ dla każdego $t > 0$. Wtedy istnieje funkcja wypukła $g : [0, a] \to [0, \infty)$, która również jest niemalejąca i spełnia warunki: $g(0) = 0$, $g(t) > 0$ dla każdego $t > 0$ oraz $g(t) \leqslant f(t)$ dla każdego $t \in [0, a]$.

Wystarczy przyjąć

$$g(t) = \int_0^{\frac{t}{a}} f(as)ds.$$

Wtedy g jest funkcją wypukłą oraz

$$g(t) \leqslant \int_0^{\frac{t}{a}} f(t)ds = \frac{t}{a}f(t) \leqslant f(t)$$

dla każdego $t \in [0, a]$. Ponadto

$$g(t) \geqslant \int_{\frac{t}{2a}}^{\frac{t}{a}} f(as)ds \geqslant \int_{\frac{t}{2a}}^{\frac{t}{a}} f\left(\frac{t}{2}\right) ds = \frac{t}{2a} f\left(\frac{t}{2}\right) > 0$$

dla $t > 0$.

1.2 Geometryczne własności krat Banacha

Większość znanych przestrzeni Banacha posiada dodatkową strukturę – można wprowadzić w nich relację częściowego porządku. Kratą Banacha nazywamy rzeczywistą przestrzeń Banacha X, w której zadany jest częściowy porządek $\leqslant$ spełniający następujące warunki:

1. $x \leqslant y \;\Rightarrow\; x + z \leqslant y + z$ dla dowolnych $x, y, z \in X$,
2. $0 \leqslant x \;\Rightarrow\; 0 \leqslant tx$ jeśli $t \geqslant 0$,
3. dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $x \vee y = \sup\{x, y\}$,
4. $|x| \leqslant |y| \;\Rightarrow\; \|x\| \leqslant \|y\|$ dla dowolnych $x, y \in X$, gdzie $|z| = z \vee (-z)$.

Z warunku 3 wynika, że dla dowolnych $x, y \in X$, istnieje także $x \wedge y = -((-x) \vee (-y)) = \inf\{x, y\}$.

Dla kraty Banacha X, przez X_+ oznaczamy dodatni stożek kraty X, tj. $X_+ = \{x \in X : x \geqslant 0\}$. Ponadto przez $S(X_+)$ oznaczamy część dodatnią sfery jednostkowej, czyli $S(X_+) = S_X \cap X_+$, a przez $B(X_+)$ – część dodatnią kuli jednostkowej, czyli $B(X_+) = B_X \cap X_+$.

Przestrzeń sprzężona X^* do kraty Banacha X jest także kratą Banacha ze standardowym porządkiem, zgodnie z którym nierówność $f \leqslant g$ dla $f, g \in X^*$ oznacza, że $f(x) \leqslant g(x)$ dla wszystkich $x \in X_+$. Dla tego porządku supremum pary funkcjonałów $f, g \in X^*$ wyraża się wzorem

$$(f \vee g)(x) = \sup\{f(y) + g(x - y) : y \in X,\ 0 \leqslant y \leqslant x\} \tag{1.3}$$

dla $x \in X_+$. Ponieważ kanoniczne włożenie X w X^{**} jest izometrią porządkową (patrz np. [39, Proposition 1.a.2]), więc prawdziwy jest także wzór otrzymany z (1.3) przez zamianę rolami krat X i X^*, czyli

$$f(x \vee y) = \sup\{g(x) + (f - g)(y) : g \in X^*,\ 0 \leqslant g \leqslant f\} \tag{1.4}$$

dla dowolnych $x, y \in X$ i dowolnego funkcjonału $f \in X^*_+$.

Porządkowym odpowiednikiem jednostajnej wypukłości dla krat Banacha jest jednostajna monotoniczność. Została ona zdefiniowany przez Garretta Birkhoffa w książce [7]. Definicje poniższych własności podajemy zgodnie z [24].

Definicja 1.10.
Mówimy, że krata Banacha X jest

1. *ściśle monotoniczna, jeżeli dla dowolnych dwóch wektorów $x, y \in X$, $x \neq y$ takich, że $0 \leqslant y \leqslant x$ mamy $\|y\| < \|x\|$,*

2. *dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, jeżeli dla każdego $x \in S(X_+)$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $y \in B(X_+)$ spełnia warunki: $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|y\| \geqslant \varepsilon$, to*
$$\|x - y\| \leqslant 1 - \delta,$$

3. *górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, jeżeli dla każdego $x \in S(X_+)$ i dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli $y \in B(X_+)$ spełnia warunek $\|y\| \geqslant \varepsilon$, to*
$$\|x + y\| \geqslant 1 + \delta,$$

4. *jednostajnie monotoniczna, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnych $x, y \in X$ spełniających warunki: $0 \leqslant y \leqslant x$, $\|x\| = 1$, $\|y\| \geqslant \varepsilon$ zachodzi nierówność*
$$\|x - y\| \leqslant 1 - \delta.$$

Jednostajna monotoniczność jest najsilniejszą spośród własności z definicji 1.10 i zarówno dolna jak i górna lokalna jednostajna monotoniczność implikują ścisłą monotoniczność (zobacz [24]). Przestrzenie jednostajnie monotoniczne nie muszą jednak być refleksywne – typowym przykładem jest klasyczna przestrzeń l_1.

Warunki monotoniczności można scharakteryzować przy pomocy ciągów. Rzeczywiście, krata X jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in S(X_+)$ i każdego ciągu (x_n) w X takiego, że $0 \leqslant x_n \leqslant x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$.

Podobnie, X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in S_+(X)$ i każdego ciągu (x_n) w X takiego, że $x \leqslant x_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ (patrz [24]).

Uwaga 1.2.
Korzystając z powyższych warunków i ciągowej charakteryzacji lokalnej jednostajnej wypukłości można stwierdzić, że własność ta implikuje zarówno dolną, jak również górą lokalną jednostajną monotoniczność.

Rzeczywiście, załóżmy, że krata X jest lokalnie jednostajnie wypukła. Jeżeli $x \in S(X_+)$ i ciąg (x_n) w X jest taki, że $0 \leqslant x_n \leqslant x$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, to z nierówności $2x_n \leqslant x + x_n \leqslant 2x$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$ i wobec naszego założenia zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$. Zatem X jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Podobnie jeśli $x \in S_+(X)$ i ciąg (x_n) w X jest taki, że $x \leqslant x_n$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, to z nierówności $2x \leqslant x + x_n \leqslant 2x_n$ wynika, że $\lim_{n\to\infty} \|x + x_n\| = 2$ i wobec lokalnej jednostajnej wypukłości X zachodzi równość $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$. Zatem X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

W dalszej części rozprawy, w dowodach niektórych twierdzeń, będziemy potrzebowali funkcji nazywanej modułem monotoniczności kraty Banacha.

Definicja 1.11.
Funkcję $\delta_{m,X} : [0, 1] \to [0, 1]$ *daną wzorem*

$$\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x - y\| : 0 \leqslant y \leqslant x,\ \|x\| \leqslant 1,\ \|y\| \geqslant \varepsilon\}$$

nazywamy modułem monotoniczności kraty Banacha X.

W definicji jednostajnej monotoniczności warunek $\|x\| = 1$ można zastąpić przez $\|x\| \leqslant 1$, więc krata Banacha X jest jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$. Jeśli X jest jednostajnie wypukła, to X jest jednostajnie monotoniczna. Wynika to z następującej nierówności między modułami wypukłości i monotoniczności

$$\delta_X(\varepsilon) \leqslant \delta_{m,X}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \tag{1.5}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0,1]$ (patrz [24]).

Własności dualne do ścisłej i jednostajnej monotoniczności zostały scharakteryzowane przez Wiesława Kurca w pracy [33].

Definicja 1.12 ([33]).
Mówimy, że krata Banacha X jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$, jeżeli nie istnieje żaden nietrywialny przedział porządkowy $[g, f] \subset S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = g(x) = 1$. Kratę Banacha X nazywamy porządkowo gładką, jeżeli jest ona porządkowo gładka w każdym punkcie $x \in S(X_+)$.

W pracy [33] Wiesław Kurc pokazał, że jeżeli krata Banacha X^* jest porządkowo gładka, to krata Banacha X jest ściśle monotoniczna, oraz że jeżeli krata Banacha X^* jest ściśle monotoniczna, to krata Banacha X jest porządkowo gładka.

Własnością silniejszą od porządkowej gładkości jest jednostajna porządkowa gładkość, która również została zdefiniowana w pracy [33]. Można ją wprowadzić przy pomocy funkcji zwanej modułem porządkowej gładkości, określonej wzorem

$$\rho_X(\tau) = \sup\{\|x \vee \tau y\| - 1 : x, y \in S(X_+)\}$$

dla $\tau \geqslant 0$. Zauważmy, że $\rho_X : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest funkcją wypukłą i $\rho_X(0) = 0$, więc iloraz różnicowy $\frac{\rho_X(\tau)}{\tau}$ jest funkcją niemalejącą.

Definicja 1.13 ([33]).
Mówimy, że krata Banacha X jest jednostajnie porządkowo gładka, jeżeli

$$\lim_{\tau \to 0+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Dla przestrzeni jednostajnie porządkowo gładkich Kurc wykazał w pracy [33] pełną dualność: krata Banacha X jest jednostajnie monotoniczna (jednostajnie porządkowo gładka) wtedy i tylko wtedy, gdy krata Banacha X^* jest jednostajnie porządkowo gładka (jednostajnie monotoniczna).

Przejdziemy teraz do zaprezentowania nowych wyników dotyczących własności geometrycznych krat Banacha. Część z nich została zawarta w pracy [4]. Podamy charakteryzację porządkowej gładkości, która z kolei będzie prowadziła do definicji własności dualnych do dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Podamy również przykłady, które pokażą, że te dwie ostatnie własności są nieporównywalne. Zaczniemy od przypomnienia charakteryzacji porządkowej gładkości podanej w twierdzeniu 2 z pracy [33]. Zgodnie z nim krata Banacha X jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{t \to 0+} \frac{\|x \vee ty\| - 1}{t} = 0$$

dla każdego $y \in S(X_+)$.

1.3 Nowe wyniki

Podamy teraz następującą, nową charakteryzację porządkowej gładkości w punkcie, analogiczną do charakteryzacji Szmuliana gładkości normy w dowolnej przestrzeni Banacha (zobacz na przykład twierdzenie 1.4 w monografii [17]).

Twierdzenie 1.2 ([4]).
Krata Banacha X jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch ciągów funkcjonałów (f_n), (g_n) w $B(X_+^*)$ takich, że $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$, ciąg $(f_n - g_n)$ dąży do 0 w topologi słabej z gwiazdką w X^*.

Dowód.

Załóżmy, że krata Banacha X jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ i ustalmy dowolny $y \in S(X_+)$. Wtedy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeśli $0 < t \leqslant \delta$, to

$$\|x \vee ty\| - 1 \leqslant t\varepsilon.$$

Weźmy funkcjonały f_n, g_n takie, jak w treści twierdzenia. Ponieważ $x \leqslant x \vee ty$ oraz $ty \leqslant x \vee ty$, zaś funkcjonały g_n i $f_n - g_n$ są nieujemne, więc

$$f_n(x \vee ty) \geqslant g_n(x) + t(f_n - g_n)(y),$$

zatem

$$g_n(x) + t(f_n - g_n)(y) - 1 \leqslant f_n(x \vee ty) - 1 \leqslant \|x \vee ty\| - 1 \leqslant t\varepsilon,$$

czyli

$$g_n(x) - 1 + t(f_n - g_n)(y) \leqslant t\varepsilon$$

dla $0 < t < \delta$. Przechodząc w powyższej nierówności do granicy górnej z $n \to \infty$, otrzymujmy

$$t \limsup_{n\to\infty} (f_n - g_n)(y) \leqslant t\varepsilon.$$

Stąd

$$0 \leqslant \liminf_{n\to\infty} (f_n - g_n)(y) \leqslant \limsup_{n\to\infty} (f_n - g_n)(y) \leqslant \varepsilon,$$

przy czym $\varepsilon > 0$ było wybrane dowolnie, a więc $\lim_{n\to\infty}(f_n - g_n)(y) = 0$, co wobec dowolności $y \in S(X_+)$ daje nam pierwszą z implikacji w twierdzeniu.

Aby wykazać implikację w drugą stronę, załóżmy, że krata Banacha X nie jest porządkowo gładka w $x \in S(X_+)$. Wtedy istnieje malejący ciąg liczb dodatnich (t_n) zbieżny do 0 oraz $\varepsilon > 0$ i $y \in S(X_+)$ takie, że mamy

$$\|x \vee t_n y\| - 1 \geqslant t_n \varepsilon$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wybierzmy funkcjonały $f_n \in S(X_+^*)$ w ten sposób, że

$$f_n(x \vee t_n y) \geqslant \|x \vee t_n y\| - \frac{t_n}{n}.$$

Korzystając ze wzoru (1.4), możemy wybrać funkcjonały $g_n \in B(X_+^*)$ tak, że $g_n \leqslant f_n$ oraz

$$g_n(x) + t_n(f_n - g_n)(y) \geqslant f_n(x \vee t_n y) - \frac{t_n}{n}.$$

Wtedy również

$$g_n(x) + t_n(f_n - g_n)(y) \geqslant \|x \vee t_n y\| - \frac{2t_n}{n}.$$

Przechodząc w powyższej nierówności do granicy z $n \to \infty$, widzimy, że $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$. Ponadto mamy

$$g_n(x) + t_n(f_n - g_n)(y) - 1 \geqslant \|x \vee t_n y\| - 1 - \frac{2t_n}{n} \geqslant t_n\varepsilon - \frac{2t_n}{n},$$

czyli

$$t_n(f_n - g_n)(y) \geqslant t_n\varepsilon - \frac{2t_n}{n} + 1 - g_n(x) \geqslant t_n\varepsilon - \frac{2t_n}{n}.$$

Daje nam to następującą nierówność

$$(f_n - g_n)(y) \geqslant \varepsilon - \frac{2}{n},$$

która pokazuje, że

$$\liminf_{n\to\infty} (f_n - g_n)(y) \geqslant \varepsilon,$$

a więc ciąg $(f_n - g_n)$ nie dąży do 0 w topologi słabej z gwiazdką w X^*. Kończy to dowód twierdzenia.

□

Podamy teraz definicję jednostajnej porządkowej gładkości w punkcie oraz jej charakteryzację (analogiczną do charakteryzacji Szmuliana gładkości normy zawartej na przykład w twierdzeniu 1.4 w monografii [17]).

Definicja 1.14.
Mówimy, że krata Banacha X jest jednostajnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$, jeżeli

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|x \vee y\| - 1}{\|y\|} = 0.$$

Krata X jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka, jeśli X jest jednostajnie porządkowo gładka w każdym punkcie $x \in S(X_+)$.

Zauważmy, że warunek z definicji 1.14 jest równoważny temu, że

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\left(\sup_{y\in S(X_+)} \|x \vee ty\| - 1\right) = 0. \tag{1.6}$$

Twierdzenie 1.3 ([4])**.**
Krata Banacha X jest jednostajnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch ciągów funkcjonałów (f_n), (g_n) w $B(X_+^*)$ takich, że $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\| = 0$.

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy, ponieważ jest on analogiczny jak dowód twierdzenia 1.2. Korzystając z twierdzenia 1.3, można uzyskać następujące twierdzenie (jest to analogon wniosku 1.5 z monografii [17]).

Twierdzenie 1.4.
Krata Banacha X jest jednostajnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że jeżeli funkcjonały $f, g \in B(X_+^*)$ spełniają warunki: $0 \leqslant g \leqslant f$ oraz $g(x) > 1 - \delta$, to $\|f - g\| \leqslant \varepsilon$.

Dowód.

Załóżmy, że krata Banacha X nie jest jednostajnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$. Wtedy z twierdzenia 1.3 otrzymujemy ciągi (f_n), (g_n) w $B(X_+^*)$ takie, że $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ oraz $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|f_n - g_n\| = \varepsilon > 0$. Dla każdego $\delta > 0$ możemy wybrać n_0 takie, że $g_{n_0}(x) > 1 - \delta$. Pokazuje to, że warunek w powyższej charakteryzacji nie jest spełniony.

Aby dowieść implikacji w przeciwną stronę, załóżmy że powyższy warunek nie jest spełniony. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ można znaleźć funkcjonały $f_n, g_n \in B(X_+^*)$ spełniające warunki: $0 \leqslant g_n \leqslant f_n$, $g_n(x) > 1 - \frac{1}{n}$ i $\|f_n - g_n\| \geqslant \varepsilon$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Zatem $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ i normy $\|f_n - g_n\|$ nie dążą do 0, co pokazuje na mocy twierdzenia 1.3, że kata Banacha X nie jest jednostajnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$.

$\square$

Wykażemy teraz zależność między jednostajną porządkową gładkością, a górną lokalną jednostajną monotonicznością analogiczną do twierdzenia Kurca o dualności między porządkową gładkością a ścisłą monotonicznością.

Twierdzenie 1.5 ([4]).
Niech X będzie kratą Banacha. Jeżeli krata X^* jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka, to X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Dowód.

Załóżmy, że krata X nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Wtedy istnieją: $\varepsilon > 0$, punkt $x \in S(X_+)$ oraz ciąg (x_n) w X_+ taki, że $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, $0 \leqslant x \leqslant x_n$ i $\|x_n - x\| > \varepsilon$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Wybierzmy funkcjonały $f, g_n \in S(X_+^*)$, dla których $f(x) = 1$ i $g_n(x_n - x) > \varepsilon$. Korzystając ze wzoru (1.3), otrzymujemy

$$\|x_n\| \sup_{g \in S(X_+^*)} \|f \vee tg\| \geqslant \|x_n\| \|f \vee tg_n\| \geqslant (f \vee tg_n)(x_n)$$
$$\geqslant f(x) + tg_n(x_n - x) > 1 + \varepsilon t$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ oraz $t > 0$. Przechodząc do granicy przy $n \to \infty$, dostajemy nierówność

$$\sup_{g \in S(X_+^*)} \|f \vee tg\| \geqslant 1 + \varepsilon t,$$

czyli

$$\frac{1}{t} \left(\sup_{g \in S(X_+^*)} \|f \vee tg\| - 1 \right) \geqslant \varepsilon,$$

która pokazuje, że X^* nie jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka.

□

Zajmiemy się teraz zdefiniowaniem własności dualnych do dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności w punkcie. Wiemy, że krata Banacha X jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje żaden nietrywialny przedział porządkowy $[g, f] \subset S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = g(x) = 1$. Ponieważ $\mathrm{diam}[g, f] = \|f - g\|$, więc sugeruje to następującą definicję.

Definicja 1.15.
Mówimy, że krata Banacha X jest:

1. *dolnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $f \in S(X_+^*)$ takiego, że $f(x) = 1$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego funkcjonału $g \in X^*$ spełniającego warunki: $f \geqslant g \geqslant 0$ oraz $g(x) > 1 - \delta$ mamy* $\mathrm{diam}[g, f] = \|f - g\| < \varepsilon$.

2. *górnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $f \in S(X_+^*)$ takiego, że $f(x) = 1$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego funkcjonału $g \in X^*$ spełniającego warunki: $f \leqslant g$ oraz $\|g\| < 1 + \delta$ mamy* $\mathrm{diam}[f, g] = \|g - f\| < \varepsilon$.

Zauważmy, że obie powyższe własności implikują porządkową gładkość w punkcie $x \in S(X_+)$. Istotnie, jeżeli krata Banacha X nie jest porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$, to istnieje nietrywialny przedział porządkowy $[g, f] \subset S(X_+^*)$ taki, że $g(x) = f(x) = 1$. Wtedy $g(x) > 1 - \delta$ dla każdego $\delta \in (0, 1)$ oraz $\|f - g\| = \varepsilon > 0$. Zatem krata X nie jest dolnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie x. Podobnie, jeżeli istnieje taki przedział porządkowy, jak powyżej, to również $\|f\| \leqslant 1 + \delta$ dla każdego $\delta > 0$ i analogicznie widzimy, że krata X nie jest górnie lokalnie porządkowo gładka.

Podobnie jak dla warunków związanych z monotonicznością, również warunki związane z porządkową gładkością można scharakteryzować przy pomocy ciągów.

Twierdzenie 1.6.
Krata Banacha X jest

1. *dolnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:*

   Dla dowolnego $f \in S(X_+^*)$ takiego, że $f(x) = 1$ i dla dowolnego ciągu $(g_n) \subset X_+^*$ takiego, że $0 \leqslant g_n \leqslant f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0$.

2. *górnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest następujący warunek:*

   Dla dowolnego $f \in S(X_+^*)$ takiego, że $f(x) = 1$ i dla dowolnego ciągu $(g_n) \subset X_+^*$ takiego, że $0 \leqslant f \leqslant g_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$ mamy $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0$.

Dowód.

1. Załóżmy, że krata Banacha X nie jest dolnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ i funkcjonał $f \in S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = 1$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ można znaleźć funkcjonał $g_n \in X^*$ spełniający warunki: $f \geqslant g_n \geqslant 0$, $g_n(x) > 1 - \frac{1}{n}$ oraz $\|f - g_n\| \geqslant \varepsilon > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$, więc otrzymujemy sprzeczność z warunkiem sformułowanym w punkcie 1.

Na odwrót, załóżmy, że istnieją funkcjonały $f \in S(X_+^*)$ oraz $g_n \in X_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f(x) = 1$, $0 \leqslant g_n \leqslant f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ i ciąg norm $\|f - g_n\|$ nie dąży do zera. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|f - g_n\| = \varepsilon > 0$. Ponieważ dla dowolnego $\delta > 0$ możemy wybrać $n \in \mathbb{N}$ tak, że $g_n(x) > 1 - \delta$, więc krata X nie jest dolnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie x.

2. Załóżmy, że krata Banacha X nie jest górnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie $x \in S(X_+)$. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ i $f \in S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = 1$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ można znaleźć funkcjonał $g_n \in X^*$ spełniający warunki: $f \leqslant g_n$, $\|g_n\| < 1 + \frac{1}{n}$ oraz $\|g_n - f\| \geqslant \varepsilon$. Ponieważ $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$, więc otrzymujemy sprzeczność z warunkiem sformułowanym w punkcie 2.

Na odwrót, załóżmy, że istnieją fumkcjonały $f \in S(X_+^*)$ oraz $g_n \in X_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ takie, że $f(x) = 1$, $0 \leqslant f \leqslant g_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$ oraz normy $\|g_n - f\|$ nie dążą do 0. Przechodząc do podciągu możemy założyć, że $\inf_{n\in\mathbb{N}} \|g_n - f\| = \varepsilon > 0$. Ponieważ dla dowolnego $\delta > 0$ możemy wybrać $n \in \mathbb{N}$ tak, że $\|g_n\| < 1 + \delta$, więc krata Banacha X nie jest górnie lokalnie porządkowo gładka w punkcie x.

□

Korzystając z powyższych charakteryzacji i twierdzenia 1.3 możemy dowieść, że jednostajna porządkowa gładkość w punkcie $x \in S(X_+)$ implikuje zarówno dolną jak i górną lokalną porządkową gładkość w punkcie $x \in S(X_+)$. Istotnie, jeżeli f, g_n są takie, jak w twierdzeniu 1.6, punkt 1, to kładąc $f_n = f$ i korzystając z twierdzenia 1.3 widzimy, że $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0$, co pokazuje, że jednostajna porządkowa gładkość implikuje dolną lokalną porządkową gładkość w punkcie x. Analogicznie, jeżeli f, g_n są takie, jak w twierdzeniu 1.6, punkt 2, to na mocy twierdzenia 1.3 mamy $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0$, co pokazuje, że jednostajna porządkowa gładkość implikuje górną lokalną porządkową gładkość w punkcie x.

Definicja 1.16.

Mówimy, że krata Banacha X jest:

1. *dolnie lokalnie porządkowo gładka, jeżeli jest ona dolnie lokalnie porządkowo gładka w każdym punkcie $x \in S(X_+)$,*

2. *górnie lokalnie porządkowo gładka, jeżeli jest ona górnie lokalnie porządkowo*

gładka w każdym punkcie $x \in S(X_+)$.

Wykażemy teraz rezultat, który jest odpowiednikiem twierdzenia Kurca z pracy [33] o dualności między ścisłą monotonicznością i porządkową gładkością.

Twierdzenie 1.7.
Niech X będzie kratą Banacha.

1. *Jeżeli krata X^* jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, to krata X jest dolnie lokalnie porządkowo gładka.*

2. *Jeżeli krata X^* jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, to krata X jest górnie lokalnie porządkowo gładka.*

3. *Jeżeli krata X^* jest górnie lokalnie porządkowo gładka, to krata X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.*

Dowód.

1. Załóżmy, że krata X^* jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Jeżeli $x \in S(X_+)$ i funkcjonały $f, g_n \in X^*$ spełniają warunki: $\|f\| = f(x) = 1$, $0 \leqslant g_n \leqslant f$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$, to $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$. Zatem z dolnej lokalnej jednostajnej monotoniczności kraty X^* wynika, że $\lim_{n\to\infty} \|f - g_n\| = 0$, co wobec twierdzenia 1.6 dowodzi, że krata X jest dolnie lokalnie porządkowo gładka.

2. Załóżmy, że krata X^* jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Jeżeli $x \in S(X_+)$ i funkcjonały $f, g_n \in X^*$ spełniają warunki: $\|f\| = f(x) = 1$, $0 \leqslant f \leqslant g_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|g_n\| = 1$, to z górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności kraty X^* wynika, że $\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\| = 0$, co wobec twierdzenia 1.6 dowodzi, że krata X jest górnie lokalnie porządkowo gładka.

3. Załóżmy, że krata Banacha X^* jest górnie lokalnie porządkowo gładka. Niech $x \in S(X_+)$ i (x_n) będzie ciągiem w X takim, że $x \leqslant x_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. Istnieje funkcjonał $f \in S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = 1$. Traktując powyższe wektory x, x_n jako funkcjonały na X^* i stosując twierdzenie 1.6 dla kraty X^*, stwierdzamy, że $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$, co dowodzi, że krata X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

□

Nie wiadomo, czy ogólnie dolna lokalna porządkowa gładkość X^* implikuje dolną lokalną jednostajną monotoniczność kraty X. Oczywiście dolna lokalna porządkowa gładkość X^* implikuje porządkową gładkość X^*, więc z twierdzenia Kurca [33], krata X jest wtedy ściśle monotoniczna. Istnieje rodzina krat Banacha, dla których dolna lokalna jednostajną monotoniczność jest równoważna ścisłej monotoniczności. Jest tak w przypadku, gdy dla każdego $x \in S(X_+)$ przedział porządkowy $[0, x]$ jest zbiorem zwartym. Rzeczywiście, wtedy dla danego $x \in S(X_+)$ oraz ciągu (x_n) w X takiego, że $0 \leqslant x_n \leqslant x$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$, przechodząc do podciągu, możemy założyć, że istnieje granica $y = \lim_{n\to\infty} x_n \in [0, x]$. Mamy $\|y\| = 1 = \|x\|$, co, wobec ścisłej monotoniczności kraty X jest niemożliwe, jeśli $x \neq y$. Stąd $y = x$, co pokazuje to, że krata X jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Zatem przy naszym założeniu ścisła monotoniczność implikuje dolną lokalną jednostajną monotoniczność, a implikacja przeciwna jest ogólnie prawdziwa.

Rodziną krat Banacha, dla których przedziały porządkowe $[0, x]$ są zbiorami zwartymi są przestrzenie Banacha z bazami bezwarunkowymi ze stałą bezwarunkową równą jeden. Przestrzeń taka z porządkiem po współrzędnych jest kratą Banacha (patrz np. [39, str. 2]). W każdej przestrzeni Banacha X z bazą bezwarunkową (e_n), dla danego zbioru niepustego $A \subset \mathbb{N}$ można zdefiniować rzut

$$S_A(x) = \sum_{i\in A} \alpha_i e_i, \tag{1.7}$$

gdzie $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$. W szczególności biorąc $A_k = \{1, 2, \dots, k\}$ otrzymujemy skończenie wymiarowy operator $P_k = S_{A_k}$, zaś przyjmując $B_k = \{i \in \mathbb{N} : i > k\}$ otrzymujemy rzut $R_k = S_{B_k}$. Jeśli (e_n) jest bazą bezwarunkową ze stałą bezwarunkową równą jeden, to rzuty S_A mają normy równe jeden.

Załóżmy, że X jest kratą Banacha z bazą bezwarunkową (e_n) ze stałą bezwarunkową równą jeden. Niech $x \in X_+$ i $x_n \in [0, x]$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Istnieje podciąg (x_{n_k}) zbieżny po współrzędnych, przy czym granica β_i ciągu i-tych współrzędnych wektorów x_{n_k} nie przekracza i-tej współrzędnej wektora x. Stąd istnieje $y = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i e_i$ i $y \leqslant x$. Wektor y jest granicą ciągu (x_{n_k}). Istotnie, dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $m \in \mathbb{N}$ takie, że $\|R_m(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ponadto ponieważ (x_{n_k}) jest zbieżny po współrzędnych do y, więc istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że $\|P_m(x_{n_k} - y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dla wszystkich $k \geqslant l$. Stąd

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - y\| &\leqslant \|P_m(x_{n_k} - y)\| + \|R_m(x_{n_k} - y)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \|R_m(x_{n_k})\| + \|R_m(y)\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\|R_m(x)\| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

jeśli $k \geqslant l$.

Twierdzenie 1.8 ([4]).
Niech X będzie refleksywną przestrzenią Banacha z bazą bezwarunkową (e_n), której stała bezwarunkowa jest równa jeden. Wówczas X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna wtedy i tylko wtedy, gdy krata X^* jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka.

Dowód.

Wobec twierdzenia 1.5 wystarczy wykazać, że jeśli X jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, to X^* jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka. Załóżmy więc, że X^* nie jest lokalnie jednostajnie porządkowo gładka w pewnym punkcie $f \in S(X^*_+)$. Wtedy istnieje $\varepsilon \in (0, 1)$ takie, że

$$\sup_{g \in S(X^*_+)} \left\| f \vee \frac{1}{n} g \right\| - 1 > \frac{\varepsilon}{n}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i możemy wybrać funkcjonał $g_n \in S(X^*_+)$ taki, że $\|f \vee \frac{1}{n} g_n\| > 1 + \frac{\varepsilon}{n}$. Następnie znajdujemy $x_n \in S(X_+)$, dla którego $(f \vee \frac{1}{n} g_n)(x_n) > 1 + \frac{\varepsilon}{n}$. Ze wzoru (1.3) wynika, że istnieje $y_n \in X$ taki, że $0 \leqslant y_n \leqslant x_n$ i

$$f(y_n) + \frac{1}{n} g_n(x_n - y_n) > 1 + \frac{\varepsilon}{n}.$$

Stąd

$$\|x_n - y_n\| \geqslant g_n(x_n - y_n) > \varepsilon, \tag{1.8}$$

$$f(y_n) > s_n := 1 - \frac{1 - \varepsilon}{n} \tag{1.9}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Przestrzeń X jest refleksywna, więc każdy ciąg ograniczony w X ma podciąg słabo zbieżny. Przechodząc do podciągów możemy zatem założyć, że ciąg (x_n) jest słabo zbieżny do pewnego $x \in X$ i ciąg (y_n) jest słabo zbieżny do pewnego $y \in X$. Słaba zbieżność w X implikuje zbieżność po współrzędnych, więc $0 \leqslant y \leqslant x$.

Mamy $\|x\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = 1$. Podobnie

$$\|y\| \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|y_n\| \leqslant 1,$$

a ponadto z (1.9) wynika, że

$$\|y\| \geqslant f(y) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Stąd $\|y\| = \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 1 = \|x\|$. Jeżeli $x \neq y$, to X nie jest ściśle monotoniczna, a zatem nie jest też górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, co kończy dowód.

Rozważmy zatem przypadek, gdy $x = y$. Korzystając z (1.8) dostajemy

$$\varepsilon < \|x_n - y_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|y_n - x\| \leqslant 2\max\{\|x_n - x\|, \|y_n - x\|\}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Istnieje więc ciąg (z_n), który jest podciągiem (x_n) albo podciągiem (y_n), dla którego zachodzi nierówność

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|z_n - x\| \tag{1.10}$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Mamy $\lim_{n\to\infty} \|z_n\| = 1 = \|x\|$ i ciąg (z_n) jest słabo zbieżny do x. Zatem $(z_n - x)$ jest słabo zbieżny do 0 i możemy wybrać rosnący ciąg liczb naturalnych (n_k) i ciąg (A_k) podzbiorów zbioru liczb naturalnych taki, że $\|S_{A_k} x\| \leqslant \frac{1}{k}$ oraz $\|z_{n_k} - x - S_{A_k}(z_{n_k} - x)\| \leqslant \frac{1}{k}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, gdzie rzuty S_{A_k} są określone wzorem (1.7).

Przyjmujemy $B_k = \{i \in A_k : z_{n_k}(i) < x(i)\}$, $A'_k = A_k \setminus B_k$ i $v_k = x + S_{A'_k}(z_{n_k} - x)$. Wtedy $x \leqslant v_k$ oraz

$$\begin{aligned}
\|z_{n_k} - v_k\| &\leqslant \|S_{A_k}(z_{n_k} - x) - S_{A'_k}(z_{n_k} - x)\| + \frac{1}{k} \\
&\leqslant \|S_{A_k} z_{n_k} - S_{A'_k} z_{n_k}\| + \|S_{A_k} x - S_{A'_k} x\| + \frac{1}{k} \\
&= \|S_{B_k} z_{n_k}\| + \|S_{B_k} x\| + \frac{1}{k} \\
&\leqslant 2\|S_{B_k} x\| + \frac{1}{k} \leqslant \frac{3}{k}.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Stąd

$$|\|z_{n_k}\| - \|v_k\|| \leqslant \|z_{n_k} - v_k\| \leqslant \frac{3}{k},$$

co prowadzi do równości $\lim_{k\to\infty} \|v_k\| = \lim_{k\to\infty} \|z_{n_k}\| = 1 = \|x\|$. Ponadto, korzystając z (1.10) i (1.11) otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon}{2} < \|z_{n_k} - x\| \leqslant \|v_k - x\| + \frac{3}{k},$$

więc $\liminf_{k\to\infty} \|v_k - x\| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Pokazuje to, że krata X nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

□

Na koniec tego podrozdziału zajmiemy się problemem niezależności dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. W pracy [30] wykazano twierdzenie, z którego wynika, że dolna lokalna jednostajna monotoniczność nie implikuje górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Poniżej prezentujemy prostą konstrukcję pozwalającą uzyskać kraty Banacha, które są dolnie, ale nie górnie lokalnie jednostajnie monotoniczne.

Konstrukcja nasza ma zastosowanie do ciągowych przestrzeni Köthego, więc przypominamy definicję takiej przestrzeni. Niech l^0 oznacza przestrzeń liniową wszystkich ciągów liczb rzeczywistych $x = (x(n))$. Ciągową przestrzenią Köthego nazywamy przestrzeń Banacha $(E, \|\cdot\|_E)$ taką, że E jest podprzestrzenią liniową przestrzeni l^0 i spełnione są następujące warunki:

1. jeżeli $x \in E$, $y \in l^0$ i $|y(n)| \leqslant |x(n)|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to $y \in E$ i $\|y\|_E \leqslant \|x\|_E$,

2. istnieje ciąg $x = (x(n)) \in E$ taki, że $x(n) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Z warunku 1 wynika w szczególności, że jeżeli $x \in E$, to $|x| \in E$, a więc jeśli $x, y \in E$, to $|x| + |y| \in E$ i z nierówności $|x(n) \vee y(n)| \leqslant |x(n)| + |y(n)|$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wynika, że $x \vee y \in E$. Zatem E rozważana ze standardowym porządkiem jest kratą Banacha.

Ciągowa przestrzeń Köthego E jest porządkowo ciągła, gdy dla dowolnego ciągu (x_n) w E_+ takiego, że (x_n) dąży do 0 po współrzędnych oraz $0 \leqslant x_n \leqslant |x|$ dla pewnego $x \in E$ i wszystkich $n \in \mathbb{N}$, ciąg (x_n) dąży do 0 w normie. W pracy [25] wykazano, że ciągowa przestrzeń Köthego E jest dolnie lokalnie jednostajnie monotonicznais wtedy i tylko wtedy, gdy E jest ściśle monotoniczna i porządkowo ciągła.

Twierdzenie 1.9 ([4]).
Dla każdej ciągowej przestrzeni Köthego E istnieje norma równoważna $\|\cdot\|_1$ taka, że krata $(E, \|\cdot\|_1)$ nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Dowód.

Niech e_n oznacza funkcję charakterystyczną zbioru $\{n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Z definicji ciągowej przestrzeni Köthego wynika, że $e_n \in E$. Ustalmy $\alpha > 1$. Dla $x = (x(n)) \in E$ przyjmujemy

$$\|x\|_0 = \alpha |x(1)| \|e_1\|_E + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)| \|e_k\|_E$$

i

$$\|x\|_1 = \max \{\|x\|_E, \|x\|_0\}. \tag{1.12}$$

Mamy

$$\|x\|_E \leqslant \|x\|_1 \leqslant \left(\alpha + \frac{1}{2}\right) \|x\|_E,$$

więc norma $\|\cdot\|_1$ jest równoważna wyjściowej normie $\|\cdot\|_E$. Aby wykazać, że $(E, \|\cdot\|_1)$ nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, rozważmy wektory

$$x = \frac{1}{\alpha \|e_1\|_E} e_1, \; y_n = \frac{\alpha - 1}{\alpha \|e_n\|_E} e_n, \quad n \geqslant 2.$$

Mamy $\|x\|_1 = 1$ i $\|y_n\|_1 \geqslant \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Ponadto,

$$\|x + y_n\|_E \leqslant \|x\|_E + \|y_n\|_E = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 1$$

oraz

$$\|x + y_n\|_0 = 1 + \frac{\alpha - 1}{2^n \alpha}.$$

Stąd

$$\|x + y_n\|_1 = 1 + \frac{\alpha - 1}{2^n \alpha},$$

więc $\lim_{n\to\infty} \|x + y_n\|_1 = 1$. Pokazuje to, że krata $(E, \|\cdot\|_1)$ nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

$\square$

Jeżeli $(E, \|\cdot\|_E)$ jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna, to $(E, \|\cdot\|_E)$ jest ściśle monotoniczna i porządkowo ciągła. Własności te przenoszą się na kratę

$(E, \|\cdot\|_1)$, więc w tym przypadku jest ona dolnie, ale nie górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Konstrukcja ta ma zastosowanie na przykład dla krat l_p przy $1 < p < \infty$.

Pytanie o to, czy górna lokalna jednostajna monotoniczność implikuje dolną lokalną jednostajną monotoniczność, było problemem otwartym postawionym w pracy [24]. Nasz następny przykład pokazuje, że dolna i górna lokalna jednostajna monotoniczność są własnościami nieporównywalnymi.

Przykład 1.1 ([4]).
Rozpatrzmy klasyczną przestrzeń c wszystkich ciągów zbieżnych i niech $\|\cdot\|_\infty$ będzie jej standardową normą. Dla ciągu $x = (x(n)) \in c$ i rosnącego ciągu $\bar{n} = (n_k)$ liczb naturalnych przyjmujemy

$$s(x, \bar{n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(n_k)|.$$

Następnie kładziemy $s(x) = \sup s(x, \bar{n})$, gdzie supremum jest wzięte po wszystkich rosnących ciągach $\bar{n} = (n_k)$ i oznaczamy

$$s_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} |x(k)|.$$

Wzór

$$\|x\| = s_1(x) + s(x),$$

gdzie $x \in c$ definiuje normę w c. Dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$, biorąc ciąg $\bar{n} = (k, k+1, k+2, \dots)$ widzimy, że $s(x) \geqslant \frac{1}{2}|x(k)|$. Stąd $\|x\| \geqslant \frac{1}{2}\|x\|_\infty$. Ponadto $s(x) \leqslant \|x\|_\infty$ i $s_1(x) \leqslant \|x\|_\infty$, więc

$$\frac{1}{2}\|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant 2\|x\|_\infty$$

dla wszystkich $x \in c$. Norma $\|\cdot\|$ jest więc równoważna standardowej normie $\|\cdot\|_\infty$, przy czym $(c, \|\cdot\|)$ jest kratą Banacha.

Krata $(c, \|\cdot\|)$ nie jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Aby to wykazać wystarczy rozważyć wektory $u = \frac{1}{2}(1, 1, \dots)$, gdzie wszystkie wyrazy ciągu są równe 1 i $v_n = \frac{1}{2}(0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$, gdzie n początkowych wyrazów jest równych 0, a pozostałe wyrazy są równe 1. Mamy $u \geqslant v_n \geqslant 0$, $\|u\| = 1$, $\|v_n\| \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}$ i

$$\|u - v_n\| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

dąży do 1 przy $n \to \infty$. To pokazuje, że $(c, \|\cdot\|)$ nie jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Wykażemy teraz, że krata $(c, \|\cdot\|)$ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Rozważmy w tym celu dowolne nieujemne wektory $x = (x(n))$, $y = (y(n))$ w c, dla których $\|x\| = 1$ i $\|y\| > \varepsilon > 0$. Niech $\xi = \lim_{n\to\infty} x(n)$. Dla dostatecznie dużych $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności:

$$x(n) \geqslant \xi - \frac{\varepsilon}{16} \geqslant x(n) - \frac{\varepsilon}{8} \tag{1.13}$$

i wybieramy najmniejszą liczbę $l \in \mathbb{N}$ taką, że nierówności (1.13) są spełnione dla każdego $n \geqslant l$. Istnieje ciąg rosnący $\bar{n} = (n_k)$ taki, że

$$s(x, \bar{n}) \geqslant s(x) - \frac{\varepsilon}{2^{l+4}}. \tag{1.14}$$

Ponieważ $\|y\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\|y\| > \frac{\varepsilon}{2}$, więc istnieje $j \in \mathbb{N}$, dla którego $y(j) > \frac{\varepsilon}{2}$. Rozważmy dwa przypadki.

I. $j \leqslant l$. W tym przypadku korzystając z (1.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\geqslant s_1(x + y) + s(x, \bar{n}) \geqslant s_1(x) + \frac{1}{2^j} y(j) + s(x) - \frac{\varepsilon}{2^{l+4}} \\ &= \|x\| + \frac{1}{2^l} y(j) - \frac{\varepsilon}{2^{l+4}} > 1 + \frac{\varepsilon}{2^{l+4}}. \end{aligned}$$

II. $j > l$. W tym przypadku zastępujemy ciąg $\bar{n}$ przez ciąg $\bar{m} = (m_k)$ zawierający j. W tym celu oznaczamy $A = \{k : n_k < l\}$, $B = \{k : n_k \geqslant l\}$ i kładziemy $p = \min B$. Jeśli $A = \emptyset$, to $p = 1$ i przyjmujemy $m_1 = j$, $m_i = j + i - 1$ dla $i \geqslant 2$. Jeśli $A \neq \emptyset$, to $n_k < l < j$ dla każdego $k \in A$ i ciąg (m_k) definiujemy następująco: $m_k = n_k$, gdy $k \in A$, $m_p = j$ i $m_{p+i} = j + i$, gdy $i \geqslant 1$. Korzystając z nierówności (1.13), otrzymujemy

$$\begin{aligned} s(x + y, \bar{m}) &\geqslant \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} x(n_k) + \frac{1}{2^p}(x(m_p) + y(m_p)) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x(m_k) \\ &\geqslant \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} x(n_k) + \frac{1}{2^p}\left(\xi + y(j) - \frac{\varepsilon}{16}\right) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(\xi - \frac{\varepsilon}{16}\right) \\ &\geqslant \sum_{k \in A} \frac{1}{2^k} x(n_k) + \frac{1}{2^p}\left(x(n_p) + y(j) - \frac{\varepsilon}{8}\right) + \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\left(x(n_k) - \frac{\varepsilon}{8}\right) \\ &> s(x, \bar{n}) + \frac{\varepsilon}{2^{p+2}}, \end{aligned}$$

gdzie w przypadku, gdy $A = \emptyset$, suma po zbiorze A jest równa 0.

Jeśli $p > 1$, to $p - 1 \leqslant n_{p-1} < l$, czyli $p < l + 1$. Nierówność ta zachodzi także w przypadku, gdy $p = 1$. Korzystając z tej nierówności otrzymujemy

$$s(x + y, \bar{m}) > s(x, \bar{n}) + \frac{\varepsilon}{2^{l+3}},$$

co w połączeniu z (1.14) daje oszacowanie

$$\begin{aligned} \|x + y\| &\geqslant s_1(x + y) + s(x + y, \bar{m}) > s_1(x) + s(x, \bar{n}) + \frac{\varepsilon}{2^{l+3}} \\ &\geqslant s_1(x) + s(x) - \frac{\varepsilon}{2^{l+4}} + \frac{\varepsilon}{2^{l+3}} = 1 + \frac{\varepsilon}{2^{l+4}}. \end{aligned}$$

Zatem w obu przypadkach: I i II mamy $\|x + y\| \geqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2^{l+4}}$, gdzie l zależy jedynie od x i ε. To pokazuje, że krata $(c, \|\cdot\|)$ jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna.

Rozdział 2

Sumy proste przestrzeni Banacha i ogólna dyskretna metoda interpolacji

2.1 Podstawowe definicje i znane własności

W rozdziale tym skupimy się na podaniu ogólnych pojęć związanych z teorią interpolacji i definicji ogólnej dyskretnej metody interpolacji. Zanim jednak to zrobimy, podamy najpierw definicję sumy prostej przestrzeni Banacha. Definicja ta będzie dla nas istotna, ponieważ jedną z metod dowodzenia stabilności własności geometrycznych przy rzeczywistej oraz ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji jest udowodnienie najpierw analogicznego twierdzenia dla sum prostych, a potem – zastosowanie go do uzyskania wyniku dotyczącego przestrzeni interpolacyjnych.

Definicję sumy prostej przestrzeni Banacha można znaleźć na przykład w monografii [15]. Niech I będzie pewnym zbiorem, który będziemy nazywali zbiorem indeksów. Przez $\mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ oznaczamy przestrzeń wektorową wszystkich funkcji $f : I \to \mathbb{R}$. Przestrzenią bazową nazywamy przestrzeń Banacha $(E, \|\cdot\|_E)$ taką, że E jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ spełniającą następujące warunki:

1. dla dowolnych $f, g \in \mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$, jeżeli $f \in E$ oraz $|g(i)| \leqslant |f(i)|$ dla każdego $i \in I$, to $g \in E$ i $\|g\|_E \leqslant \|f\|_E$,

2. przestrzeń E zawiera wszystkie funkcje o skończonych nośnikach,

3. funkcje charakterystyczne zbiorów jednoelementowych mają normy równe jeden.

W szczególnym przypadku, gdy $I = \mathbb{N}$ przestrzeń bazowa jest ciągową przestrzenią Köthego. Rzeczywiście, niech e_n będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e_n$ jest elementem przestrzeni E takim, że $f(n) > 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, czyli spełniony jest warunek 2 z definicji ciągowej przestrzeni Köthego. Analogicznie jak dla ciągowych przestrzeni Köthego, dowolna przestrzeń bazowa rozpatrywana ze standardowym porządkiem jest kratą Banacha.

Jeżeli przestrzeń bazowa E nie zawiera podprzestrzeni izomorficznej z c_0, to jej elementy mają co najwyżej przeliczalne nośniki i mogą być przybliżane elementami o skończonych nośnikach. Rzeczywiście, aby wykazać, że dowolna niezerowa funkcja $f \in E$ ma co najwyżej przeliczalny nośnik, wystarczy wiedzieć, że dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zbiór $A = \{i \in I : |f(i)| \geqslant \frac{1}{k}\}$ jest co najwyżej skończony. Gdyby tak nie było, to dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ istniałby ciąg nieskończony indeksów (i_n) taki, że $|f(i_n)| \geqslant \frac{1}{k}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech e_n będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$ i $g_n = |f(i_n)| e_{i_n}$. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ mamy

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n \right\|_E = \left\| \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| g_n \right\|_E \geqslant \left\| \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n| \frac{1}{k} e_{i_n} \right\|_E \geqslant \frac{1}{k} |\alpha_j|$$

dla $j = 1, \ldots, m$. Stąd

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n \right\|_E \geqslant \frac{1}{k} \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|\}.$$

Ponadto,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n \right\|_E \leqslant \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|\} \left\| \sum_{n=1}^{m} g_n \right\|_E \leqslant \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|\} \|f\|_E,$$

co pokazuje, że wektory g_n rozpinają w E podprzestrzeń izomorficzną z c_0. Zatem przy założeniu, że E nie zawiera podprzestrzeni izomorficznej z c_0, każda funkcja $f \in E$ ma co najwyżej przeliczalny nośnik $\operatorname{supp} f$.

Ponadto przy takim założeniu funkcję $f \in E$ o nieskończonym nośniku można przybliżyć funkcjami o skończonych nośnikach. Rzeczywiście, ustawmy elementy $\operatorname{supp} f$ w ciąg (i_n). Wtedy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(i_n) e_{i_n}$ jest zbieżny w E. Gdyby bowiem tak nie było, to istniałoby $\varepsilon > 0$ i ciąg sum częściowych postaci

$$g_k = \sum_{n \in A_k} f(i_n) e_{i_n},$$

gdzie $A_1, A_2, \ldots$ są parami rozłącznymi, skończonymi podzbiorami $\mathbb{N}$ taki, że $\|g_k\|_E \geqslant \varepsilon$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Podobnie, jak powyżej stwierdzamy, że

$$\varepsilon \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|\} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{m} \alpha_k g_k \right\|_E \leqslant \max\{|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_m|\} \|f\|_E$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, co przeczy naszemu założeniu, że E nie zawiera podprzestrzeni izomorficznej z c_0. Przykładami przestrzeni bazowych spełniających nasze założenie są przestrzenie postaci $l_p(I)$, gdzie $1 \leqslant p < \infty$.

Dla danej przestrzeni bazowej E i rodziny przestrzeni Banacha $\{X_i : i \in I\}$, sumę prostą $\left(\sum_{i \in I} X_i\right)_E$ tych przestrzeni definiujemy jako zbiór tych wszystkich elementów $x = \{x(i)\} \in \prod_{i \in I} X_i$ iloczynu kartezjańskiego tych przestrzeni takich, że $\lfloor x \rceil \in E$, gdzie $\lfloor x \rceil \in \mathrm{Map}(I, \mathbb{R})$ jest funkcją daną wzorem $\lfloor x \rceil(i) = \|x(i)\|_{X_i}$. Norma w sumie prostej $Y = \left(\sum_{i \in I} X_i\right)_E$ jest zadana za pomocą wzoru

$$\|x\|_Y = \| \lfloor x \rceil \|_E$$

i Y z tą normą jest przestrzenią Banacha.

Przypomnimy teraz podstawowe pojęcia związane z teorią przestrzeni interpolacyjnych. Fakty dotyczące przestrzeni interpolacyjnych, które przytoczymy poniżej, można znaleźć na przykład w monografii [6], gdzie rozpatrywany jest przypadek dwóch przestrzeni Banacha.

Dla $n \in \mathbb{N}$ oznaczamy $\mathcal{I}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Mówimy, że przestrzenie Banacha $X_0, X_1, \ldots, X_n$ są porównywalne, jeżeli każdą z nich można włożyć w sposób liniowy i ciągły w tę samą przestrzeń liniowo-topologiczną V. Dla prostoty oznaczeń piszemy po prostu $X_i \subset V$. Wtedy możemy rozpatrywać sumę tych przestrzeni $\sum_{i=0}^{n} X_i$ oraz ich część wspólną $\bigcap_{i=0}^{n} X_i$. Przestrzenie te wyposażone w normy

$$\|x\|_{\sum_{i=0}^{n} X_i} = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{n} \|x_i\|_{X_i} : x = \sum_{i=0}^{n} x_i,\ x_i \in X_i,\ i \in \mathcal{I}_n \right\}, \tag{2.1}$$

$$\|x\|_{\bigcap_{i=0}^{n} X_i} = \max \left\{ \|x\|_{X_i} : i \in \mathcal{I}_n \right\}$$

są przestrzeniami Banacha. Oczywiście dla dowolnego $j \in \mathcal{I}_n$ i $x \in X_j$ zachodzi nierówność

$$\|x\|_{X_j} \geqslant \|x\|_{\sum_{i=0}^{n} X_i}, \tag{2.2}$$

co oznacza, że przestrzeń X_j jest w sposób liniowy i ciągły włożona w $\sum_{i=0}^n X_i$ i wyjściową przestrzeń V możemy zastąpić przez sumę $\sum_{i=0}^n X_i$. Ponadto

$$\|x\|_{\bigcap_{i=0}^n X_i} \geqslant \|x\|_{X_j}$$

dla wszystkich $x \in \bigcap_{i=0}^n X_i$, czyli $\bigcap_{i=0}^n X_i$ jest w sposób liniowy i ciągły włożona w X_j. Przy naszych oznaczeniach

$$\bigcap_{i=0}^n X_i \subset X_j \subset \sum_{i=0}^n X_i.$$

Podamy teraz definicję przestrzeni pośredniej oraz przestrzeni interpolacyjnej (zobacz [6], gdzie rozważany jest przypadek dwóch przestrzeni).

Definicja 2.1.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha. Przestrzeń Banacha X nazywamy przestrzenią pośrednią między przestrzeniami X_0, $X_1, \ldots$, X_n, jeżeli

$$\bigcap_{i=0}^n X_i \subset X \subset \sum_{i=0}^n X_i.$$

Załóżmy, że dany jest operator liniowy $T : \sum_{i=0}^n X_i \to \sum_{i=0}^n X_i$. Mówimy, że operator ten działa w sposób ciągły na porównywalnych przestrzeniach Banacha $X_0, X_1, \ldots, X_n$, jeżeli $T(X_i) \subset X_i$ dla każdego $i \in \mathcal{I}_n$ oraz operator T zawężony do każdej z przestrzeni X_i jest na niej ograniczony. W tym przypadku piszemy $T : (X_0, X_1, \ldots, X_n) \to (X_0, X_1, \ldots, X_n)$.

Definicja 2.2.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeniach Banacha. Mówimy, że przestrzeń pośrednia X między przestrzeniami $X_0, X_1, \ldots, X_n$ jest przestrzenią interpolacyjną, jeżeli każdy operator liniowy $T : (X_0, X_1, \ldots, X_n) \to (X_0, X_1, \ldots, X_n)$ działający w sposób ciągły na przestrzeniach $X_0, X_1, \ldots, X_n$, po zawężeniu do X jest operatorem ciągłym $T : X \to X$.

Istnieje wiele metod konstruowania przestrzeni interpolacyjnych. Jedną z nich jest ogólna dyskretna metoda interpolacji, która ma zastosowanie do dwóch przestrzeni. Definicję tej metody interpolacji można znaleźć na przykład w monografii [39]. Wykorzystuje się w niej przestrzenie Banacha z bazami bezwarunkowymi. W dalszym ciągu tego rozdziału będziemy zakładać, że E jest przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ taką, że jej stała bezwarunkowa jest równa jeden oraz istnieje stała $M>0$ taka, że

$$\left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e_{i+k}\right\|_E \leqslant M \left\|\sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i e_i\right\|_E, \tag{2.3}$$

dla każdego $k\in\mathbb{Z}$ i każdego ciągu skalarów (a_i), dla którego szereg po prawej stronie nierówności jest zbieżny.

Niech (X_0,X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha, $p\in[1,\infty)$, $\theta\in(0,1)$ oraz $i\in\mathbb{Z}$. Dla $x\in X_0+X_1$. oznaczmy

$$\begin{aligned} k_{p,\theta}(x,i) = \inf\Big\{ \left(2^{\theta ip}\|x_0\|^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &: x = x_0+x_1, \\ & x_0\in X_0,\ x_1\in X_1\Big\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wtedy $k_{p,\theta}(\cdot,i)$ jest normą w sumie przestrzeni X_0+X_1 równoważną standardowej normie (2.1).

Definicja 2.3.

Przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(X,E)$ otrzymana za pomocą ogólnej dyskretnej metody interpolacji jest przestrzenią tych $x\in X_0+X_1$, dla których szereg $\sum_{i\in\mathbb{Z}} k_{p,\theta}(x,i)\, e_i$ jest zbieżny w E. Norma w tej przestrzeni jest zadana za pomocą wzoru

$$\|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} = \left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} k_{p,\theta}(x,i)\, e_i\right\|_E .$$

Uwaga 2.1.

Definicja podana powyżej jest szczególnym przypadkiem definicji w monografii [39]. Podaliśmy ją jednak w tej formie, ponieważ w tym szczególnym przypadku możliwe jest udowodnienie lematu 2.1, który będzie kluczowy w naszych rozważaniach. Jest to niewielka modyfikacja stwierdzenia 2.4 z pracy [43].

Lemat 2.1.

Niech E będzie przestrzenią Banacha ze znormalizowaną bazą bezwarunkową $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, której stała bezwarunkowa wynosi jeden i dla której spełniony jest warunek (2.3) ze stałą $M>0$. Załóżmy, że (X_0,X_1) jest parą porównywalnych przestrzeni Banacha,

$p \in [1,\infty)$, $\theta \in (0,1)$. Jeżeli wektor $x \in K_{p,\theta}(X,E)$ ma rozkład $x = x_0(i) + x_1(i)$, gdzie $x_k(i) \in X_k$, $k = 0,1$, $i \in \mathbb{Z}$, to

$$\|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{(\theta-1)i} \|x_1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E^{\theta}, \tag{2.5}$$

gdzie $C = (1 + 2^{1-\theta})M$.

Wniosek 2.2.
W szczególności dla danych dwóch wektorów $x, y \in K_{p,\theta}(X,E)$ i ich rozkładów $x = x_0(i) + x_1(i)$, $y = y_0(i) + y_1(i)$, gdzie $x_k(i), y_k(i) \in X_k$, $k = 0,1$, $i \in \mathbb{Z}$ mamy

$$\|x-y\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{(\theta-1)i} \|x_1(i) - y_1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E^{\theta}$$
$$\leqslant C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \left(\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E + \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{(\theta-1)i} \|y_1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E \right)^{\theta}$$

2.2 Nowe wyniki

W tym podrozdziale przedstawimy nowe wyniki otrzymane dla ogólnej dyskretnej metody interpolacji. Dowody twierdzeń z tego podrozdziału, które dotyczą stabilności własności geometrycznych przy ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji, są wzorowane na dowodzie twierdzenia dotyczącego stabilności jednostajnej wypukłości przy tej metodzie, zawartego w pracy [44].

Zaczniemy od ogólnych rozważań, które wykorzystamy w dowodach twierdzeń. Dla dowolnego $\gamma > 0$ i $x \in X_0 + X_1$ oraz $i \in \mathbb{Z}$ istnieje rozkład $x = x_0(i) + x_1(i)$, gdzie $x_k(i) \in X_k$, $k = 0,1$ taki, że

$$k_{p,\theta}(x,i) \leqslant \left(2^{\theta i p} \|x_0(i)\|^p + 2^{(\theta-1)ip} \|x_1(i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k_{p,\theta}(x,i) + \frac{\gamma}{2^{|i|}}.$$

Jeśli $x \in K_{p,\theta}(X,E)$, to wobec monotoniczności normy w E otrzymujemy stąd

$$\|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|x_0(i)\|^p + 2^{(\theta-1)ip} \|x_1(i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E$$
$$\leqslant \|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} + \gamma \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2^{|i|}} = \|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} + 3\gamma.$$

Załóżmy teraz, że obie przestrzenie z pary (X_0, X_1) porównywalnych przestrzeni Banacha są refleksywne. Pokażemy, że w tym przypadku infimum w definicji normy $k_{p,\theta}(x,i)$ jest osiągnięte. Rozumowanie, które zaprezentujemy jest analogiczne do tego zawartego w dowodzie stwierdzenia 3.2 w pracy [19]. Niech zatem $x \in X_0 + X_1$ oraz $i \in \mathbb{Z}$. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ wybieramy rozkład

$$x = x_0(n) + x_1(n), \tag{2.6}$$

gdzie $x_j(n) \in X_j$, $j = 0, 1$, w ten sposób, że

$$\left(2^{\theta i p}\|x_0(n)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1(n)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k_{p,\theta}(x,i) + \frac{1}{n}.$$

Ponieważ obie przestrzenie są refleksywne, zatem przechodząc do podciągów możemy założyć, że ciąg $(x_0(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest słabo zbieżny do x_0 w X_0 oraz $(x_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ jest słabo zbieżny do x_1 w X_1. Z nierówności (2.2) wynika, że przestrzenie X_0, X_1 wkładają się w sposób liniowy i ciągły w $X_0 + X_1$. Stąd ciągi $(x_0(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_1(n))_{n\in\mathbb{N}}$ są słabo zbieżne odpowiednio do x_0 i x_1 w $X_0 + X_1$, a więc możemy w równości (2.6) przejść do słabej granicy przy $n \to \infty$ otrzymując rozkład $x = x_0 + x_1$. Korzystając z definicji normy $k_{p,\theta}(\cdot, i)$ dostajemy

$$\begin{aligned}
k_{p,\theta}(x,i) &\leqslant \left(2^{\theta i p}\|x_0\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(2^{\theta i p}\liminf_{n\to\infty}\|x_0(n)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\liminf_{n\to\infty}\|x_1(n)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(2^{\theta i p}\|x_0(n)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1(n)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(k_{p,\theta}(x,i) + \frac{1}{n}\right) = k_{p,\theta}(x,i),
\end{aligned}$$

co pokazuje, że istotnie, w tym przypadku infimum w definicji normy (2.4) jest osiągnięte.

Udowodnimy teraz twierdzenia dotyczące stabilności ścisłej wypukłości i lokalnej jednostajnej wypukłości.

Twierdzenie 2.3.
Niech $p \in (1, \infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz niech (X_0, X_1) będzie taką parą przestrzeni porównywalnych, że obie są refleksywne i co najmniej jedna z nich jest ściśle wypukła. Załóżmy ponadto, że przestrzeń E jest ściśle wypukła. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(X,E)$ również jest ściśle wypukła.

Dowód.

Bez straty na ogólności rozważań możemy przyjąć, że przestrzeń X_0 jest ściśle wypukła. Oznaczmy

$$Z = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (X_0 \oplus \mathbb{R})_{l_p} \right)_E,$$

gdzie $(X_0 \oplus \mathbb{R})_{l_p}$ jest sumą prostą, dla której przestrzenią bazową jest płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z dwuwymiarową l_p-normą. Przy naszych założeniach przestrzeń Z jest ściśle wypukła (patrz na przykład [20]).

Niech teraz $x, y \in S_{K_{p,\theta}(X,E)}$ będą dowolnymi elementami przestrzeni interpolacyjnej takimi, że $x \neq y$. Istnieją rozkłady $x = x_0(i) + x_1(i)$, $y = y_0(i) + y_1(i)$ takie, że $x_k(i), y_k(i) \in X_k$ dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1$ oraz

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|x_0(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip} \|x_1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E = 1,$$

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|y_0(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip} \|y_1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E = 1.$$

Korzystając z nierówności (2.5), otrzymujemy

$$0 < \|x-y\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant C \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta} \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{(\theta-1)i} \|x_1(i) - y_1(i)\|_{X_1} e_i \right\|_E^{\theta},$$

a więc

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E > 0.$$

Rozważmy teraz następujące elementy sumy prostej Z:

$$\overline{x} = \{(2^{\theta i} x_0(i), 2^{(\theta-1)i} \|x_1(i)\|_{X_1})\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \overline{y} = \{(2^{\theta i} y_0(i), 2^{(\theta-1)i} \|y_1(i)\|_{X_1})\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Wtedy $\|\overline{x}\|_Z = \|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} = 1$, $\|\overline{y}\|_Z = \|y\|_{K_{p,\theta}(X,E)} = 1$ i

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|_Z \geqslant \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E > 0.$$

Ostatecznie daje nam to nierówności

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant \left\| \frac{\overline{x} + \overline{y}}{2} \right\|_Z < 1,$$

gdzie ostatnia nierówność wynika z faktu, że suma prosta Z jest ściśle wypukła.

$\square$

Twierdzenie 2.4.
Niech $p \in (1, \infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz niech (X_0, X_1) będzie taką parą przestrzeni porównywalnych, że obie są refleksywne i co najmniej jedna z nich jest lokalnie jednostajnie wypukła. Załóżmy ponadto, że przestrzeń E jest lokalnie jednostajnie wypukła. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(X,E)$ również jest lokalnie jednostajnie wypukła.

Dowód.

Podobnie jak w poprzednim dowodzie załóżmy, że przestrzeń X_0 jest lokalnie jednostajnie wypukła i rozważmy sumę prostą

$$Z = \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} (X_0 \oplus \mathbb{R})_{l_p} \right)_E .$$

Wtedy ta suma prosta również jest lokalnie jednostajnie wypukła (na mocy twierdzenia 1.2 w pracy [40]).

Ustalmy $x \in S_{K_{p,\theta}(X,E)}$ i weźmy dowolny $y \in B_{K_{p,\theta}(X,E)}$ taki, że $\|x-y\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \geqslant \varepsilon > 0$. Istnieją rozkłady $x = x_0(i) + x_1(i)$, $y = y_0(i) + y_1(i)$ takie, że $x_k(i), y_k(i) \in X_k$ dla każdego $i \in \mathbb{Z}$, $k = 0, 1$ oraz

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|x_0(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip} \|x_1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E = 1,$$

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|y_0(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip} \|y_1(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E \leqslant 1.$$

Korzystając z wniosku 2.2 i monotoniczności normy w E, otrzymujemy

$$\varepsilon \leqslant \|x-y\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant 2^\theta C \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta},$$

a więc

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{2^\theta C} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} .$$

Rozważamy teraz następujące elementy sumy prostej Z:

$$\overline{x} = \{(2^{\theta i} x_0(i), 2^{(\theta-1)i} \|x_1(i)\|_{X_1})\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad \overline{y} = \{(2^{\theta i} y_0(i), 2^{(\theta-1)i} \|y_1(i)\|_{X_1})\}_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Mamy $\|\overline{x}\|_Z = 1$, $\|\overline{y}\|_Z \leqslant 1$. Ponadto

$$\|\overline{x} - \overline{y}\|_Z \geqslant \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0(i) - y_0(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \varepsilon_1,$$

więc korzystając z definicji modułu lokalnej jednostajnej wypukłości sumy prostej Z, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant \left\| \frac{\overline{x}+\overline{y}}{2} \right\|_Z \leqslant 1 - \delta_{Z,l}\left(\varepsilon_1, \overline{x}\right).$$

Stąd

$$\delta_{Z,l}\left(\varepsilon_1, \overline{x}\right) \leqslant 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\|_{K_{p,\theta}(X,E)}$$

i biorąc infimum po wszystkich elementach $y \in B_{K_{p,\theta}(X,E)}$ otrzymujemy

$$\delta_{Z,l}\left(\varepsilon_1, \overline{x}\right) \leqslant \delta_{K_{p,\theta}(X,E),l}\left(\varepsilon, x\right),$$

co kończy dowód.

□

Przejdziemy teraz do dowodów twierdzeń dotyczących nieskończenie wymiarowych odpowiedników jednostajnej wypukłości. Zaczniemy od twierdzenia dotyczącego niemal jednostajnej wypukłości. Jest to uogólnienie wniosku 4.2 z pracy [37] dla przypadku, gdy $n = 1$.

Twierdzenie 2.5.
Niech $p \in (1, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$, oraz niech (X_0, X_1) będzie taką parą przestrzeni porównywalnych, że co najmniej jedna z nich jest niemal jednostajnie wypukła. Załóżmy ponadto, że przestrzeń E jest niemal jednostajnie wypukła i jednostajnie monotoniczna. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(X, E)$ również jest niemal jednostajnie wypukła.

Dowód.

Załóżmy, że przestrzeń X_0 jest niemal jednostajnie wypukła. Wtedy tę samą własność (zobacz twierdzenie 1 w pracy [34]) ma również suma prosta

$$Z = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(X_0 \oplus \mathbb{R}\right)_{l_p} \right)_E.$$

Niech $x_n \in B_{K_{p,\theta}(X,E)}$, $n \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\|x_n - x_m\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \geqslant \varepsilon > 0$ dla wszystkich $n \neq m$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$ istnieje rozkład $x_n = x_0^n(i) + x_1^n(i)$, gdzie $x_k^n(i) \in X_k$, $k = 0, 1$, $i \in \mathbb{Z}$ taki, że

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p} \|x_0^n(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip} \|x_1^n(i)\|_{X_1}^p \right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E \leqslant 1 + \gamma.$$

Korzystając z wniosku 2.2, stwierdzamy, że jeśli $n \neq m$, to

$$\varepsilon \leqslant \|x_n - x_m\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant 4^\theta C \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0^n(i) - x_0^m(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta},$$

a więc

$$\left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{\theta i} \|x_0^n(i) - x_0^m(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{4^\theta C} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Rozważmy teraz następujące elementy sumy prostej Z:

$$\overline{x}_n = \{(2^{\theta i} x_0^n(i), 2^{(\theta-1)i} \|x_1^n(i)\|_{X_1})\}_{i \in \mathbb{Z}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $\|\overline{x}_n\|_Z \leqslant 1 + \gamma$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\|\overline{x}_n - \overline{x}_m\|_Z \geqslant \varepsilon_1$ dla $n \neq m$. Istnieje zatem kombinacja wypukła $\overline{x} = \sum_{j=1}^k \lambda_j \overline{x}_j$, gdzie $\lambda_j \geqslant 0$, $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ taka, że

$$\left\| \sum_{j=1}^k \lambda_i \overline{x}_j \right\|_Z \leqslant (1+\gamma) \left(1 - \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{1+\gamma} \right) \right) \leqslant (1+\gamma) \left(1 - \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right).$$

Mamy zatem nierówności

$$\left\| \sum_{j=1}^k \lambda_i x_j \right\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant \left\| \sum_{j=1}^k \lambda_i \overline{x}_j \right\|_Z \leqslant (1+\gamma) \left(1 - \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right),$$

z których wynika, że

$$1 - \inf\{\|x\|_{K_{p,\theta}(X,E)} : x \in \mathrm{co}(x_n)\} \geqslant 1 - (1+\gamma) \left(1 - \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right).$$

Biorąc teraz infimum po wszystkich ciągach $(x_n) \subset B_{K_{p,\theta}(X,E)}$ takich, że $\mathrm{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon$ widzimy, że

$$\Delta_{K_{p,\theta}(X,E)}(\varepsilon) \geqslant 1 - (1+\gamma) \left(1 - \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right),$$

skąd po przejściu do granicy przy $\gamma \to 0$ dostajemy

$$\Delta_{K_{p,\theta}(X,E)}(\varepsilon) \geqslant \Delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right),$$

co kończy dowód twierdzenia.

□

Analogicznie jak powyższe twierdzenie, można również udowodnić twierdzenie dotyczące stabilności własności (β) przy ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji. Aby to zrobić, należy jednak najpierw udowodnić twierdzenie dotyczące własności (β) dla sum prostych. Wypowiemy je i udowodnimy poniżej. Twierdzenie to i jego dowód zostało zawarte w pracy [3]. Należy jeszcze podkreślić, że twierdzenie o własności (β) dla sum prostych zostało zapowiedziane w pracy [37], jednak praca, w której miało się ono ukazać, nigdy nie została opublikowana. Jedynie rezultaty dotyczące własności (β) dla skończonych sum prostych zostały przedstawione w pracy [35]. W tej rozprawie będziemy jednak rozpatrywać bardziej ogólny przypadek, w którym przestrzeń bazowa może być przestrzenią nieskończenie wymiarową. Zaczniemy od podania wersji lematu 2.5 z pracy [37], którego dowód analogiczny do tego z pracy [37] zamieścimy dla zupełności rozprawy. W lemacie tym używamy pewnego rodzaju granic podwójnych. Istnienie takich granic gwarantuje twierdzenie 10.1.1 z monografii [1]. Zgodnie z nim dla dowolnego ciągu ograniczonego (x_n) w przestrzeni Banacha X można znaleźć podciąg (x_{n_k}), dla którego istnieje granica podwójna $\lim_{k>l\to\infty}\|x_{n_k}-x_{n_l}\|$.

Lemat 2.6.

Niech X będzie przestrzenią Banacha. Jeżeli $x\in X$ i ciąg (x_n) w X jest taki, że istnieje granica $\lim_{n>m\to\infty}\|x_n-x_m\|$, to zachodzi następująca nierówność

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\|x+x_n\| \leqslant \|x\| + \liminf_{n\to\infty}\|x_n\| \\ - 2\min\{\|x\|, \liminf_{n\to\infty}\|x_n\|\}\beta_X\left(\frac{\lim_{n>m\to\infty}\|x_n-x_m\|}{\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|}\right).\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dowód.

Załóżmy, że $x\in X$ i ciąg (x_n) w X spełniają założenia lematu. Ustalmy dowolne $\gamma>0$ i oznaczmy

$$u=\frac{x}{\|x\|},\quad u_n=\frac{x_n}{\liminf_{n\to\infty}\|x_n\|+\gamma}.$$

Wtedy istnieje podciąg (x_{n_k}) taki, że $\|u_{n_k}\|\leqslant 1$ dla każdego $k\in\mathbb{N}$. Ponadto, odrzucając co najwyżej skończoną liczbę elementów ciągu u_{n_k} możemy założyć, że

$$\operatorname{sep}(u_{n_k}) \geqslant \frac{\lim_{n>m\to\infty} \|x_n - x_m\| - \gamma}{\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma}.$$

Rozważmy teraz dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że $\|x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Mamy

$$x + x_{n_k} = (u + u_{n_k})\|x\| + u_{n_k}(\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma - \|x\|)$$

i korzystając z definicji modułu własności (β), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|x + x_{n_k}\| \leqslant \liminf_{k\to\infty} \|u + u_{n_k}\| + \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma - \|x\| \\
&\leqslant 2\left(1 - \beta_X\left(\frac{\lim_{n>m\to\infty} \|x_n - x_m\| - \gamma}{\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma}\right)\right)\|x\| + \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma - \|x\|.
\end{aligned}$$

Po przejściu do granicy przy $\gamma \to 0$ i skorzystaniu z faktu, że moduł własności (β) można uważać za funkcję ciągłą (patrz uwaga 1.1), otrzymujemy żądaną nierówność.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $\|x\| \geqslant \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Skorzystamy w tym przypadku z tożsamości

$$x + x_{n_k} = (u + u_{n_k})(\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma) + u(\|x\| - \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| - \gamma).$$

Daje nam ona nierówność

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\| &\leqslant 2\left(1 - \beta_X\left(\frac{\lim_{n>m\to\infty} \|x_n - x_m\| - \gamma}{\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma}\right)\right)(\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| + \gamma) \\
&\quad + |\|x\| - \liminf_{n\to\infty} \|x_n\| - \gamma|.
\end{aligned}$$

Analogicznie jak wyżej, wystarczy teraz przejść z $\gamma \to 0$, aby otrzymać żądaną nierówność.

$\square$

W dowodzie twierdzenia dotyczącego własności (β) dla sum prostych będziemy jeszcze potrzebowali następującego lematu (jest to lemat 3 z pracy [34]).

Lemat 2.7.

Załóżmy, że E jest przestrzeń bazową nad zbiorem indeksów I. Niech $h : [0, 2] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją niemalejącą, ograniczoną i znikającą tylko w zerze. Jeżeli $f \in B_E$ oraz $g : I \to [0, 2]$ są takie, że $\|gf\| \geqslant \varepsilon$, to $h(g(\cdot))f(\cdot) \in E$ oraz $\|h(g)f\| \geqslant \frac{\varepsilon}{4} h\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Jesteśmy teraz gotowi do sformułowania zapowiedzianego twierdzenia dotyczącego własności (β) dla sum prostych. Niech $\{X_i : i \in I\}$ będzie rodziną przestrzeni Banacha. Przez β_{X_i} oznaczamy moduł własności (β) przestrzeni X_i. Niech ponadto $\beta(\varepsilon) = \inf_{i\in I} \beta_{X_i}(\varepsilon)$.

Twierdzenie 2.8 ([3]).
Jeśli przestrzeń bazowa E jest jednostajnie wypukła oraz jeżeli $\{X_i : i \in I\}$ jest taką rodziną przestrzeni Banacha, że $\beta(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$, to suma prosta $\left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$ ma własność (β).

Dowód.

Niech δ_E oznacza moduł wypukłości przestrzeni E oraz $Z = \left(\sum_{i\in I} X_i\right)_E$. Załóżmy, że $x \in Z$ i ciąg (x_n) w Z są takie, że $\|x\|_Z \leqslant 1$, $\|x_n\|_Z \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon > 0$.

Przyjmujemy

$$\gamma = \frac{1}{3}\delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right),$$

gdzie $\delta_{m,E}$ oznacza moduł monotoniczności przestrzeni bazowej E. Ponieważ przestrzeń E jest jednostajnie wypukła, więc jest ona także jednostajnie monotoniczna i stąd $\gamma > 0$. Korzystając z tego, że $\delta_{m,E}(t) \leqslant t$ i $\beta(t) \leqslant 1$ dla każdego $t \in [0,1]$, dostajemy

$$\gamma \leqslant \frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{16}. \tag{2.8}$$

Jeśli dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$ zachodzi nierówność $\|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E \geqslant \gamma$, to

$$\liminf_{n\to\infty} \|x + x_n\|_Z \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|\lfloor x\rceil + \lfloor x_n\rceil\|_E \leqslant 2(1 - \delta_E(\gamma)),$$

zatem spełniony jest warunek z definicji własności (β). Załóżmy więc, że nierówność $\|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E \geqslant \gamma$ zachodzi jedynie dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$. Możemy wtedy przyjąć, że $\|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E < \gamma$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Dla niepustego zbioru $D \subset I$ przez $\mathbf{1}_D$ oznaczamy funkcję charakterystyczną zbioru D. Ponieważ przestrzeń E jest jednostajnie wypukła, więc jest ona refleksywna i każdy jej element można dowolnie dobrze przybliżać elementami o skończonych nośnikach.

Wynika stąd, że istnieje zbiór skończony $A \subset I$ taki, że $\|x\mathbf{1}_{A'}\|_Z \leqslant \gamma$, gdzie $A' = I \setminus A$. Wtedy również $\|x_n\mathbf{1}_{A'}\|_Z \leqslant 2\gamma$, ponieważ w przeciwnym wypadku mielibyśmy

$$\|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E \geqslant \|(\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil)\mathbf{1}_{A'}\|_E \geqslant \|\lfloor x_n\rceil\mathbf{1}_{A'}\|_E - \|\lfloor x\rceil\mathbf{1}_{A'}\|_E > 2\gamma - \gamma = \gamma,$$

co prowadzi do sprzeczności z naszym założeniem, że $\|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E < \gamma$.

Ponieważ ciąg (x_n) jest ograniczony, możemy zakładać, że wszystkie poniżej rozpatrywane granice istnieją dla każdego $i \in A$:

$$d(i) = \lim_{n\to\infty} \|x(i) + x_n(i)\|_{X_i},\ \alpha(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i)\|_{X_i},\ c(i) = \lim_{n>m\to\infty} \|x_n(i) - x_m(i)\|_{X_i}.$$

Lemat 2.6 daje nam następującą nierówność

$$d(i) \leqslant \|x(i)\|_{X_i} + \alpha(i) - 2\min\{\|x(i)\|_{X_i}, \alpha(i)\}\beta\left(\frac{c(i)}{\alpha(i)}\right). \tag{2.9}$$

dla $i \in A$.

Zauważmy, że ponieważ A jest zbiorem skończonym, więc

$$\|\alpha\mathbf{1}_A\|_E = \lim_{n\to\infty} \|\lfloor x_n\rceil\mathbf{1}_A\|_E \leqslant \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|_Z \leqslant 1.$$

Stąd

$$\left\|\frac{1}{2}\left(\lfloor x\rceil + \alpha\right)\mathbf{1}_A\right\|_E \leqslant 1. \tag{2.10}$$

Znajdziemy teraz oszacowanie dolne dla $\left\|\min\{\lfloor x\rceil, \alpha\}\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E$. Mamy

$$\|(x_n - x_m)\mathbf{1}_A\|_Z \geqslant \|x_n - x_m\|_Z - \|(x_n - x_m)\mathbf{1}_{A^C}\|_Z \geqslant \varepsilon - 4\gamma \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

dla dowolnych $n \neq m$. Ponieważ

$$\|c\mathbf{1}_A\|_E = \lim_{n>m\to\infty} \|(x_n - x_m)\mathbf{1}_A\|_Z \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

więc stosując lemat 2.7 otrzymujemy oszacowanie

$$\left\|\alpha\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E \geqslant \frac{\varepsilon}{8}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Stąd

$$\begin{aligned}\left\|\min\{\lfloor x\rceil, \alpha\}\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E &= \left\|\alpha\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right) + \left(\min\{\lfloor x\rceil, \alpha\} - \alpha\right)\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E \\ &\geqslant \left\|\alpha\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E - \left\|\min\{\lfloor x\rceil - \alpha, 0\}\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E \\ &\geqslant \frac{\varepsilon}{8}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) - \|\min\{\lfloor x\rceil - \alpha, 0\}\mathbf{1}_A\|_E.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Zgodnie z naszym założeniem $\|(\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil)\mathbf{1}_A\|_E \leqslant \|\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil\|_E < \gamma$, a zatem również

$$\|(\lfloor x\rceil - \alpha)\mathbf{1}_A\|_E = \lim_{n\to\infty} \|(\lfloor x\rceil - \lfloor x_n\rceil)\mathbf{1}_A\|_E \leqslant \gamma.$$

Ponieważ $|\min\{\lfloor x\rceil - \alpha, 0\}| \leqslant |\lfloor x\rceil - \alpha|$, więc

$$\|\min\{\lfloor x\rceil - \alpha, 0\}\mathbf{1}_A\|_E \leqslant \|(\lfloor x\rceil - \alpha)\mathbf{1}_A\|_E \leqslant \gamma,$$

co w połączeniu z (2.11) prowadzi do oszacowania

$$\left\|\min\{\lfloor x\rceil, \alpha\}\beta\left(\frac{c}{\alpha}\right)\mathbf{1}_A\right\|_E \geqslant \frac{\varepsilon}{8}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) - \gamma \geqslant \frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right).$$

Korzystając z modułu monotoniczności przestrzeni bazowej E i z nierówności (2.9), otrzymujemy

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x+x_n}{2}\mathbf{1}_A\right\|_Z = \left\|\frac{d}{2}\mathbf{1}_A\right\|_E \leqslant 1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right).$$

Ostatecznie dostajemy nierówność

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_Z &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(\left\|\frac{x+x_n}{2}\mathbf{1}_A\right\|_Z + \left\|\frac{x+x_n}{2}\mathbf{1}_{A'}\right\|_Z\right) \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\left(\left\|\frac{x+x_n}{2}\mathbf{1}_A\right\|_Z + \frac{1}{2}(\|x\mathbf{1}_{A'}\|_Z + \|x_n\mathbf{1}_{A'}\|_Z)\right) \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x+x_n}{2}\mathbf{1}_A\right\|_Z + \frac{3}{2}\gamma \leqslant 1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right) + \frac{3}{2}\gamma \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{2}\delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right),
\end{aligned}$$

co kończy dowód.

□

Analiza powyższego dowodu daje następujące oszacowanie modułu własności (β) sumy prostej

$$\beta_Z(\varepsilon) \geqslant \delta_E\left(\frac{1}{3}\delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\right). \tag{2.12}$$

Rozważając moduły β_{X_i} zakładamy, że przestrzenie X_i są nieskończenie wymiarowe. W dalszej części będziemy też rozważać sumy proste postaci $(X_0 \oplus X_1)_E$, gdzie X_1 jest przestrzenią skończenie wymiarową.

Twierdzenie 2.9.

Niech E będzie przestrzenią bazową nad zbiorem $I = \{0,1\}$ i $Z = (X_0 \oplus X_1)_E$, gdzie X_0 jest przestrzenią nieskończenie wymiarową, zaś $\dim X_1 < \infty$. Wtedy

$$\beta_Z(\varepsilon) \geqslant \delta_E\left(\frac{\varepsilon}{4}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \tag{2.13}$$

dla każdego $\varepsilon \geqslant 0$. W szczególności jeżeli przestrzeń E jest jednostajnie wypukła i X_0 ma własność (β), to Z ma własność (β).

Dowód.

Elementy $x \in Z$ będziemy zapisywać jako pary $x = (x(0), x(1))$, gdzie $x(0) \in X_0$, $x(1) \in X_1$. Załóżmy, że $x \in Z$ i ciąg (x_n) w Z są takie, że $\|x\|_Z \leqslant 1$, $\|x_n\|_Z \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Ponieważ przestrzeń X_1 jest skończenie wymiarowa, więc przechodząc do podciągu możemy założyć, że ciąg $(x_n(1))$ jest zbieżny w X_1. Wtedy $\lim_{n>m\to\infty} \|x_n(1) - x_m(1)\|_{X_1} = 0$. Możemy także zakładać, że istnieją wszystkie poniżej rozpatrywane granice. W szczególności istnieje $\alpha(i) = \lim_{n\to\infty} \|x_n(i)\|_{X_i}$, $i = 0, 1$. Mamy

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leqslant \lim_{n>m\to\infty} \|x_n - x_m\|_Z \\
&= \left\| \left(\lim_{n>m\to\infty} \|x_n(0) - x_m(0)\|_{X_0}, \lim_{n>m\to\infty} \|x_n(1) - x_m(1)\|_{X_1} \right) \right\|_E \\
&= \lim_{n>m\to\infty} \|x_n(0) - x_m(0)\|_{X_0} \leqslant 2\alpha(0).
\end{aligned}$$

Jeśli $\|x(0)\|_{X_0} < \frac{\varepsilon}{4}$, to

$$\lim_{n\to\infty} \|\lfloor x \rceil - \lfloor x_n \rceil\|_E \geqslant \alpha(0) - \|x(0)\|_{X_0} > \frac{\varepsilon}{4},$$

a zatem

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x + x_n}{2} \right\|_Z \leqslant \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\lfloor x \rceil + \lfloor x_n \rceil}{2} \right\|_E \leqslant 1 - \delta_E\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \leqslant 1 - \delta_E\left(\frac{\varepsilon}{4}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right).$$

Załóżmy teraz, że $\|x(0)\|_{X_0} \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$. W tym przypadku, korzystając z lematu 2.6 dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \|x(0) + x_n(0)\|_{X_0} \leqslant \|x(0)\|_{X_0} + \alpha(0) - \frac{\varepsilon}{2}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right). \tag{2.14}$$

Oznaczając $u = \frac{1}{2}(\|x(0)\|_{X_0} + \alpha(0), \|x(1)\|_{X_1} + \alpha(1))$ stwierdzamy, że

$$\|u\|_E \leqslant \frac{1}{2}(\|x\|_Z + \|(\alpha(0), \alpha(1))\|_Z) \leqslant \frac{1}{2}\left(\|x\|_Z + \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_Z\right) \leqslant 1.$$

Stąd i z nierówności (2.14) oraz (1.5) otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_Z &\leqslant \left\|\left(\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{x(0)+x_n(0)}{2}\right\|_{X_0}, \frac{\|x(1)\|_{X_1}+\alpha(1)}{2}\right)\right\|_E \\
&\leqslant \left\|u - \left(\frac{\varepsilon}{4}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), 0\right)\right\|_E \\
&\leqslant 1 - \delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{4}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \\
&\leqslant 1 - \delta_E\left(\frac{\varepsilon}{4}\beta_{X_0}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right),
\end{aligned}$$

które w oczywisty sposób prowadzi do tezy twierdzenia.

□

Jesteśmy teraz gotowi, aby udowodnić twierdzenie o stabilności własności (β) przy ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji.

Twierdzenie 2.10 ([3]).
Niech $p \in (1, \infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz niech (X_0, X_1) będzie taką parą przestrzeni porównywalnych, że co najmniej jedna z nich ma własność (β). Załóżmy ponadto, że przestrzeń E jest jednostajnie wypukła. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(X, E)$ również ma własność (β).

Dowód.

Załóżmy, że przestrzeń X_0 ma własność (β). Wtedy, na mocy twierdzenia 2.8, tą samą własność ma również suma prosta

$$Z = \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} (X_0 \oplus \mathbb{R})_{l_p}\right)_E.$$

Niech $x \in B_{K_{p,\theta}(X,E)}$, $x_n \in B_{K_{p,\theta}(X,E)}, n \in \mathbb{N}$ będą takie, że $\|x_n - x_m\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \geqslant \varepsilon > 0$ dla $n \neq m$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ istnieją rozkłady $x = x_0(i) + x_1(i)$, $x_k(i) \in X_k$, $k = 0,1$, $i \in \mathbb{Z}$ oraz $x_n = x_0^n(i) + x_1^n(i)$, $x_k^n(i) \in X_k$, $k = 0,1$, $i \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left\|\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(2^{\theta i p}\|x_0(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1(i)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} e_i\right\|_E \leqslant 1 + \gamma,$$

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(2^{\theta ip}\|x_0^n(i)\|_{X_0}^p + 2^{(\theta-1)ip}\|x_1^n(i)\|_{X_1}^p\right)^{\frac{1}{p}} e_i \right\|_E \leqslant 1+\gamma, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Korzystając z wniosku 2.2, stwierdzamy, że jeśli $n \neq m$, to

$$\varepsilon \leqslant \|x_n - x_m\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant 4^\theta C \left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i}\|x_0^n(i) - x_0^m(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E^{1-\theta},$$

a więc

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} 2^{\theta i}\|x_0^n(i) - x_0^m(i)\|_{X_0} e_i \right\|_E \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{4^\theta C}\right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Podobnie jak w twierdzeniu o stabilności niemal jednostajnej wypukłości, zdefiniujmy elementy sumy prostej Z:

$$\overline{x} = \{(2^{\theta i}x_0(i), 2^{(\theta-1)i}\|x_1(i)\|_{X_1})\}_{i\in\mathbb{Z}},$$

$$\overline{x}_n = \{(2^{\theta i}x_0^n(i), 2^{(\theta-1)i}\|x_1^n(i)\|_{X_1})\}_{i\in\mathbb{Z}}, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Wtedy $\|\overline{x}\|_Z \leqslant 1+\gamma$, $\|\overline{x}_n\|_Z \leqslant 1+\gamma$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ oraz $\|\overline{x}_n - \overline{x}_m\|_Z \geqslant \varepsilon_1$ dla $n \neq m$. Korzystając teraz z modułu własności (β) sumy prostej Z, otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant \liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{\overline{x}+\overline{x}_n}{2}\right\|_Z \leqslant (1+\gamma)\left(1-\beta_Z\left(\frac{\varepsilon}{4C(1+\gamma)}\right)\right).$$

Zatem

$$\liminf_{n\to\infty} \left\|\frac{x+x_n}{2}\right\|_{K_{p,\theta}(X,E)} \leqslant (1+\gamma)\left(1-\beta_Z\left(\frac{\varepsilon}{8C}\right)\right),$$

co po przejściu do granicy przy $\gamma\to 0$ kończy dowód twierdzenia.

□

Rozdział 3

Rzeczywista metoda interpolacji

3.1 Podstawowe pojęcia i definicje

W tym podrozdziale przypomnimy podstawowe pojęcia i definicje dotyczących rzeczywistej metody interpolacji. W tzw. ciągłej wersji tej metody używa się przestrzeni Lebesgue'a-Bochnera $L_p(X)$, gdzie X jest daną przestrzenią Banacha. Przypomnijmy, że dla ustalonej miary μ na σ-ciele podzbiorów zbioru Ω jest to przestrzeń wszystkich (klas abstrakcji względem relacji równości prawie wszędzie) funkcji silnie mierzalnych $f : \Omega \to X$, dla których norma

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int_\Omega \|f(\omega)\|_X^p d\mu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}}$$

jest skończona (patrz na przykład [57]). Przestrzenie Lebesgue'a-Bochnera będą często pojawiały się w rozważaniach dotyczących stabilności własności geometrycznych przy ciągłej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra oraz zespolonej metodzie interpolacji.

Możemy teraz przejść do definicji związanych z metodą interpolacji Yoshikawy-Sparra. Klasyczna metoda Lionsa-Peetrego została przedstawiona w pracy [38] oraz uogólniona na więcej niż dwie przestrzenie przez Gunnara Sparra i Atsushi'ego Yoshikawę (zobacz [55], [58]). Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha i oznaczmy $\mathcal{I}_n = \{0, 1, \ldots, n\}$. Aby opisać rzeczywistą metodę interpolacji Yoshikawy-Sparra zaczniemy od wprowadzenia normy równoważnej w sumie przestrzeni $\sum_{i=0}^{n} X_i$. Dla $q \in [1, \infty)$ i $x \in \sum_{i=0}^{n} X_i$ oznaczamy

$$K_q(\boldsymbol{t}, x) = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} (t_i \|x_i\|_{X_i})^q \right)^{\frac{1}{q}} : x = \sum_{i=0}^{n} x_i,\ x_i \in X_i,\ i \in \mathcal{I}_n \right\},$$

gdzie $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n$ oraz $t_0 = 1$. Przez $\mathbb{R}_+$ rozumiemy zbiór liczb dodatnich. Dodatkowo przyjmujemy

$$K_\infty(\boldsymbol{t}, x) = \inf \left\{ \max \left\{ t_i \|x_i\|_{X_i} : i \in \mathcal{I}_n \right\},\ x = \sum_{i=0}^{n} x_i,\ x_i \in X_i,\ i \in \mathcal{I}_n \right\}.$$

Dla elementów $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$, $\boldsymbol{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ z $\mathbb{R}_+^n$ piszemy $\boldsymbol{t} \leqslant \boldsymbol{s}$, gdy $t_i \leqslant s_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$. Jeżeli $\boldsymbol{t} \leqslant \boldsymbol{s}$, to oczywiście $K_q(\boldsymbol{t}, x) \leqslant K_q(\boldsymbol{s}, x)$. Ponadto, $1 \leqslant \frac{s_i}{t_i}$, więc

$$K_q(\boldsymbol{s}, x) \leqslant \max \left\{ \frac{s_1}{t_1}, \ldots, \frac{s_n}{t_n} \right\} K_q(\boldsymbol{t}, x),$$

co ostatecznie daje nam nierówności

$$K_q(\boldsymbol{t}, x) \leqslant K_q(\boldsymbol{s}, x) \leqslant \max \left\{ \frac{s_1}{t_1}, \ldots, \frac{s_n}{t_n} \right\} K_q(\boldsymbol{t}, x). \tag{3.1}$$

Definicja 3.1.

Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha, $q \in [1, \infty]$, $p \in [1, \infty)$ i ciąg $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ spełnia warunki: $\theta_i > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$ oraz $\theta_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_i > 0$. Przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta}, p, q}$ otrzymana za pomocą metody Yoshikawy-Sparra to przestrzeń wszystkich wektorów $x \in \sum_{i=0}^{n} X_i$, dla których

$$\|x\|_{\boldsymbol{\theta}, p, q} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \left(\left(\prod_{i=1}^{n} t_i^{-\theta_i} \right) K_q(\boldsymbol{t}, x) \right)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \ldots \frac{dt_n}{t_n} \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.2}$$

ma skończoną wartość. Wzór (3.2) definiuje normę w przestrzeni $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta}, p, q}$.

Zauważmy, że zmieniając parametr $q \in [1, \infty]$ w powyższej definicji, otrzymujemy całą rodzinę norm równoważnych w tej samej przestrzeni interpolacyjnej. Możliwe jest zdefiniowanie również innych norm równoważnych. Metoda interpolacji, którą opisaliśmy powyżej – z normą zadaną wzorem (3.2) – jest znana jako ciągła wersja metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Definicję 3.1 można zmodyfikować zastępując całki szeregiem, co daje nam następującą normę równoważną:

$$\|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} = \left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n} \left(a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}} K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.3}$$

Powyżej $a > 1$, $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$, $\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu} = \sum_{i=1}^n \theta_i \nu_i$ oraz $a^{\boldsymbol{\nu}} = (a^{\nu_1}, a^{\nu_2}, \dots, a^{\nu_n})$.

Jeżeli rozpatrujemy normę zadaną wzorem (3.3), to mówimy o dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. W literaturze rozważa się zwykle konkretne wartości parametru a. Najczęściej są to: $a = 2$ lub $a = e$. W tym przypadku stałe równoważności powyższych norm są znane (zobacz na przykład [6] dla dwóch przestrzeni). Dla nas jednak ważne są stałe równoważności dla dowolnego $a > 1$, wobec tego wyprowadzimy nierówności między normami (3.3) i (3.2).

Z nierówności (3.1) wynika, że jeśli $a^{\boldsymbol{\nu}} \leqslant \boldsymbol{t} \leqslant a^{\boldsymbol{\nu}+\mathbf{1}}$, to

$$K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x) \leqslant K_q(\boldsymbol{t}, x) \leqslant \max\left\{\frac{t_1}{a^{\nu_1}}, \dots, \frac{t_n}{a^{\nu_n}}\right\} K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x) \leqslant aK_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x),$$

więc

$$\begin{aligned} &\left(a^{\theta_0 - 1} a^{-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\nu}} K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x)\right)^p (\ln a)^n \\ &\leqslant \int_{a^{\nu_n}}^{a^{\nu_n+1}} \dots \int_{a^{\nu_1}}^{a^{\nu_1+1}} \left(t_1^{-\theta_1} \dots t_n^{-\theta_n} K_q(\boldsymbol{t}, x)\right)^p \frac{dt_1}{t_1} \dots \frac{dt_n}{t_n} \\ &\leqslant a^p \left(a^{-\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\nu}} K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x)\right)^p (\ln a)^n. \end{aligned}$$

Po zsumowaniu tych nierówności po $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{Z}$ i podniesieniu wyników do potęgi $1/p$ dostajemy

$$a^{\theta_0 - 1} (\ln a)^{\frac{n}{p}} \|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant \|x\|_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant a (\ln a)^{\frac{n}{p}} \|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}. \tag{3.4}$$

Inne normy równoważne były rozpatrywane na przykład w pracy Minga Fana [22]. Załóżmy, że mamy daną przestrzeń Banacha X, liczbę $p \in [1, \infty)$, oraz wektor $\boldsymbol{\theta}$ taki, jak w Definicji 3.1. Przez $L^i_{p,\boldsymbol{\theta}}(X)$, $i \in \mathcal{I}_n$ oznaczamy przestrzeń Lebesgue'a-Bochnera wszystkich funkcji silnie mierzalnych $x : \mathbb{R}^n_+ \to X$, dla których następująca norma jest skończona

$$\|x\|_{L^i_{p,\boldsymbol{\theta}}(X)} = \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \left(\left(t_i \prod_{k=1}^n t_k^{-\theta_k}\right) \|x(t_1, t_2, \dots, t_n)\|_X\right)^p \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \dots \frac{dt_n}{t_n}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Rozważamy tutaj $\mathbb{R}^n_+$ z miarą, która daje całkę po $\frac{dt_1}{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\ldots\frac{dt_n}{t_n}$ i w przypadku, gdy $i=0$ przyjmujemy $t_0=1$.

Podobnie przez $l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X)$, $i\in\mathcal{I}_n$ oznaczamy przestrzeń tych ciągów $x:\mathbb{Z}^n\to X$, dla których następujący szereg jest zbieżny

$$\|x\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X)}=\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n}\left(a^{-\boldsymbol{\theta\nu}+\nu_i}\|x(\boldsymbol{\nu})\|_X\right)^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

przy czym $\nu_0=0$, gdy $i=0$.

Następujące wzory definiują inne normy równoważne w przestrzeni interpolacyjnej $(X_0,X_1,\ldots,X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$:

$$\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}=\inf\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\|x_i\|^q_{L^i_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},\tag{3.5}$$

$$\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,\infty}=\inf\left\{\max_{i\in\mathcal{I}_n}\left\{\|x_i\|_{L^i_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}\right\}\right\},\tag{3.6}$$

gdzie kresy dolne bierzemy po wszystkich rozkładach $x=\sum_{i=0}^n x_i(\boldsymbol{t})$ takich, że $x_i(\boldsymbol{t})\in X_i$ dla dowolnego $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n_+$ oraz $i\in\mathcal{I}_n$. Podobnie w przypadku dyskretnym definiujemy normy

$$\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}=\inf\left\{\left(\sum_{i=0}^{n}\|x_i\|^q_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}\right)^{\frac{1}{q}}\right\},\tag{3.7}$$

$$\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,\infty}=\inf\left\{\max_{i\in\mathcal{I}_n}\left\{\|x_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}\right\}\right\},\tag{3.8}$$

gdzie kresy dolne bierzemy po wszystkich rozkładach $x=\sum_{i=0}^n x_i(\boldsymbol{\nu})$ takich, że $x_i(\boldsymbol{\nu})\in X_i$ dla dowolnego $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n$ oraz $i\in\mathcal{I}_n$.

Korzystając z nierówności między l_p-normami i nierówności Höldera otrzymujemy następujące nierówności:

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}&\leqslant\|x\|_{\boldsymbol{\theta},p,1}\leqslant\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,1}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q'}}\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}\\
\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}&\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q}}\|\!|x|\!\|_{\boldsymbol{\theta},p,\infty}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q}}\|x\|_{\boldsymbol{\theta},p,q},\\
\|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}&\leqslant\|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,1}\leqslant\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,1}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q'}}\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q},\\
\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}&\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q}}\|\!|x|\!\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,\infty}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{q}}\|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q},
\end{aligned}$$

gdzie q' oznacza wykładnik sprzężony do q, czyli taką liczbę q', dla której $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, przy czym w tych nierównościach, gdzie występuje q' zakładamy, że $q\in(1,\infty)$.

Zauważmy jeszcze, że studiowane w tej rozprawie własności geometryczne nie zachowują się przy przejściu do przestrzeni izomorficznej z daną przestrzenią Banacha, zatem każde z twierdzeń dotyczące stabilności rozważanych własności musi być udowodnione oddzielnie dla każdej z rozważanych norm.

3.2 Nowe wyniki

W tej sekcji przedstawimy nowe wyniki uzyskane dla rzeczywistej metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Część z nich zawarta jest w pracy [3].

Przejdziemy teraz do stabilności jednostajnej wypukłości przy dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Będziemy rozważali normy zadane za pomocą wzorów (3.3), (3.7). Do udowodnienia twierdzeń będziemy potrzebowali jeszcze wyniku analogicznego do lematu 2.1 dla więcej niż dwóch przestrzeni. Ponieważ w dalszej części istotna będzie wartość współczynnika występującego w nierówności w tezie lematu, więc zamieszczamy jego pełny dowód.

Lemat 3.1 ([3]).
Niech $p \in [1,\infty)$, $q \in [1,\infty]$ *i* $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ *będzie ciągiem przestrzeni porównywalnych. Załóżmy, że* $x \in (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p}$ *ma rozkład* $x = \sum_{i=0}^{n} x_i(\boldsymbol{\nu})$ *taki, że* $x_i(\boldsymbol{\nu}) \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_n$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$. *Jeżeli* $\|\cdot\|$ *oznacza jedną z norm zadanych za pomocą wzorów* (3.3), (3.7), *to zachodzi następująca nierówność*

$$\|x\| \leqslant (1+na)\prod_{i=0}^{n} A_i^{\theta_i}, \tag{3.9}$$

gdzie $A_i = \|x_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}$, $i \in \mathcal{I}_n$.

Dowód.

Niech $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{Z}^n$. Wtedy mamy również rozkład $x = \sum_{i=0}^{n} x_i(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu})$ dla każdego $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$. Z definicji norm określonych za pomocą wzorów (3.3), (3.7) otrzymujemy następującą nierówność

$$\|x\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|x_i(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu})\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)},$$

przy czym dokonując zamiany zmiennych $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\mu}$ dostajemy

$$\begin{aligned}\|x_i(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu})\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)} &= \left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n}\left(a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}+\nu_i}\|x_i(\boldsymbol{\nu}+\boldsymbol{\mu})\|_{X_i}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= \left(\sum_{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{Z}^n}\left(a^{-\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\mu})+\eta_i-\mu_i}\|x_i(\boldsymbol{\eta})\|_{X_i}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}-\mu_i}\left(\sum_{\boldsymbol{\eta}\in\mathbb{Z}^n}a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\eta}+\eta_i}\left(\|x_i(\boldsymbol{\eta})\|_{X_i}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}-\mu_i}A_i,\end{aligned}$$

gdzie w przypadku, gdy $i = 0$ przyjmujemy $\nu_0 = \mu_0 = 0$, a więc także $\eta_0 = 0$. Ostatecznie otrzymujemy nierówność

$$\|x\| \leqslant a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}}A_0 + \sum_{i=1}^{n} a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}-\mu_i}A_i. \tag{3.10}$$

Jeżeli $A_0 = 0$ to kładąc $\boldsymbol{\mu} = (\mu,\mu,\ldots,\mu)$ i przechodząc z $\mu\to\infty$ widzimy, że żądana nierówność jest spełniona. Podobnie, jeżeli $A_i = 0$ dla pewnego $i\in\{1,2,\ldots,n\}$, to wystarczy położyć $\mu_k = 0$ dla $k\neq i$ i przejść z $\mu_i\to-\infty$.

Załóżmy teraz, że każda z liczb A_i jest dodatnia. Przyjmijmy za μ_i taką liczbę całkowitą, że $a^{\mu_i} \leqslant \frac{A_i}{A_0} < a^{\mu_i+1}$, czyli $a^{\mu_i}A_0 \leqslant A_i < a^{\mu_i+1}A_0$. Wtedy $a^{\theta_i\mu_i}A_0^{\theta_i} \leqslant A_i^{\theta_i}$, więc

$$a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}}A_0 = \prod_{i=1}^{n} a^{\theta_i\mu_i}A_0 \leqslant \prod_{i=1}^{n} A_0^{1-\theta_i}A_i^{\theta_i} = A_0^{\theta_0}\prod_{i=1}^{n}A_i^{\theta_i}$$

i stąd

$$a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}-\mu_i}A_i = a^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}}\frac{A_i}{a^{\mu_i}} < aa^{\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\mu}}A_0 \leqslant aA_0^{\theta_0}\prod_{i=1}^{n}A_i^{\theta_i}.$$

W połączeniu z (3.10) daje nam to żądaną nierówność.

□

Dla normy $|||\cdot|||_{\boldsymbol{\theta},p,\infty}$ mamy wynik znacznie mocniejszy niż lemat 3.1. Ze stwierdzenia 2.3 w pracy [58] wiemy, że

$$|||x|||_{\boldsymbol{\theta},p,\infty} = \inf\prod_{i=0}^{n}\|x^i(\boldsymbol{t})\|^{\theta_i}_{L^i_{p,\theta}(X_i)}, \tag{3.11}$$

gdzie kres dolny jest wzięty po wszystkich rozkładach $x = \sum_{i=0}^{n} x_i(\boldsymbol{t})$, $\boldsymbol{t}\in\mathbb{R}^n_+$ takich, że $x_i \in L^i_{p,\theta}(X_i)$, $i\in\mathcal{I}_n$. Korzystając ze wzoru (3.11), w pracy [5] Beauzamy wykazał, że jeżeli (X_0, X_1) jest parą przestrzeni porównywalnych taką, że X_0 lub X_1 jest jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1)_{\theta,p,\infty}$ jest jednostajnie wypukła. Rozważane przez nas normy w przestrzeni interpolacyjnej są równoważne, ale jednostajna wypukłość nie zachowuje się przy przejściu od danej normy do normy równoważnej. Wobec tego z twierdzenia Beauzamy'ego nie można wnioskować o jednostajnej wypukłości przestrzeni interpolacyjnej rozważanej z innymi normami.

W pracy tej wykażemy twierdzenia dotyczące stabilności jednostajnej wypukłości przy dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra z normą zadaną za pomocą wzoru (3.3). W dowodzie tego twierdzenia wykorzystamy technikę dowodową zastosowaną w pracy [44] do udowodnienia twierdzenia o stabilności jednostajnej wypukłości przy ogólnej dyskretnej metodzie interpolacji. Podobną technikę stosowaliśmy w dowodach z poprzedniego rozdziału. Tam korzystaliśmy ze stabilności danej własności przy przechodzeniu do sum prostych. Teraz będziemy korzystać ze stabilności przy przechodzeniu do przestrzeni postaci $l_p(X)$. Przypomnijmy więc, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X i przestrzeni L_p nad dowolną miarą, jeśli $p \in (1, 2]$, to

$$\delta_{L_p(X)}(\epsilon) \geqslant a\delta_X(b\epsilon)$$

dla pewnych stałych $a, b > 0$, a jeśli $p \in (2, \infty)$, to

$$\delta_{L_p(X)}(\epsilon) \geqslant c\epsilon^p\delta_X(d\epsilon)$$

dla pewnych stałych $c, d > 0$ (patrz [23] lub [39, str. 229]). W szczególności wynika stąd, że jeżeli X jest przestrzenią jednostajnie wypukłą i $p \in (1, \infty)$, to przestrzeń $l_p(X)$ jest jednostajnie wypukła.

Twierdzenie 3.2.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich jest jednostajnie wypukła oraz załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\theta,p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.3) *również jest jednostajnie wypukła.*

Dowód.

Załóżmy, że przestrzeń X_0 jest jednostajnie wypukła. Niech $\varepsilon \in (0,2]$ i $x, y \in (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ będą takie, że $\|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant 1$, $\|y\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant 1$ i $\|x-y\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant \varepsilon$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ wybieramy ciąg $\{c(\boldsymbol{\nu})\}_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n}$ taki, że $\|c\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R})} \leqslant \gamma$ i $c(\boldsymbol{\nu}) > 0$ dla każdego $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$. Znajdujemy rozkłady $x = \sum_{i=0}^n x_i(\boldsymbol{\nu})$, $y = \sum_{i=0}^n y_i(\boldsymbol{\nu})$, $x_i(\boldsymbol{\nu}), y_i(\boldsymbol{\nu}) \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_n$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$ takie, że

$$\left(\sum_{i=0}^n (a^{\nu_i}\|x_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i})^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, x) + c(\boldsymbol{\nu}),$$

$$\left(\sum_{i=0}^n (a^{\nu_i}\|y_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i})^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant K_q(a^{\boldsymbol{\nu}}, y) + c(\boldsymbol{\nu}).$$

Wtedy

$$\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n}\left(a^{-\boldsymbol{\theta\nu}}\left(\sum_{i=0}^n (a^{\nu_i}\|x_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i})^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \|x\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} + \|c\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(\mathbb{R})} \leqslant 1+\gamma$$

i podobnie

$$\left(\sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^n}\left(a^{-\boldsymbol{\theta\nu}}\left(\sum_{i=0}^n (a^{\nu_i}\|y_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i})^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 1+\gamma.$$

Korzystając z lematu 3.1, otrzymujemy

$$\varepsilon \leqslant \|x-y\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant (1+na)\prod_{i=0}^n A_i^{\theta_i},$$

gdzie $A_i = \|x_i - y_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}$, $i \in \mathcal{I}_n$. Ponieważ $A_i \leqslant 2(1+\gamma) < 4$, więc

$$\prod_{i=1}^n A_i^{\theta_i} < 4^{\sum_{i=1}^n \theta_i} = 4^{1-\theta_0}.$$

Stąd

$$\|x_0 - y_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{4^{1-\theta_0}(1+na)}\right)^{\frac{1}{\theta_0}}.$$

Rozważmy teraz sumę prostą $Y = (X_0 \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R})_{l_q}$, w której jest n kopii przestrzeni $\mathbb{R}$ i połóżmy $Z = l_p(Y)$. Ponieważ przestrzeń X_0 jest jednostajnie wypukła, to również przestrzeń Y i w konsekwencji także Z ma tę własność. Dla $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$ kładziemy

$$f(\boldsymbol{\nu}) = (a^{-\boldsymbol{\theta\nu}}x_0(\boldsymbol{\nu}), a^{-\boldsymbol{\theta\nu}+\nu_1}\|x_1(\boldsymbol{\nu})\|_{X_1}, a^{-\boldsymbol{\theta\nu}+\nu_2}\|x_2(\boldsymbol{\nu})\|_{X_2}, \ldots, a^{-\boldsymbol{\theta\nu}+\nu_n}\|x_n(\boldsymbol{\nu})\|_{X_n}),$$

$$g(\boldsymbol{\nu}) = (a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}} y_0(\boldsymbol{\nu}), a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}+\nu_1} \|y_1(\boldsymbol{\nu})\|_{X_1}, a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}+\nu_2} \|y_2(\boldsymbol{\nu})\|_{X_2}, \ldots, a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}+\nu_n} \|y_n(\boldsymbol{\nu})\|_{X_n}).$$

Wtedy $f, g \in Z$ i $\|f\|_Z \leqslant 1+\gamma$, $\|g\|_Z \leqslant 1+\gamma$ oraz

$$\|f-g\|_Z \geqslant \|x_0 - y_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \geqslant \varepsilon_1.$$

Zatem

$$\|x+y\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n} \left(a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}} \left(\sum_{i=0}^n (a^{\nu_i} \|x_i(\boldsymbol{\nu}) + y_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i})^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n} \left(\left(\left(a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}} \|x_0(\boldsymbol{\nu}) + y_0(\boldsymbol{\nu})\|_{X_0} \right)^q + \sum_{i=1}^n \left(a^{-\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\nu}+\nu_i} \|x_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i} + \|y_i(\boldsymbol{\nu})\|_{X_i} \right)^q \right)^{\frac{1}{q}} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \|f+g\|_Z \leqslant 2(1+\gamma) \left(1 - \delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{1+\gamma} \right) \right) \leqslant 2(1+\gamma) \left(1 - \delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right),$$

co po podzieleniu przez 2 i przejściu z $\gamma \to 0$ daje nierówność

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant 1 - \delta_Z \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right)$$

implikującą tezę twierdzenia.

□

Przejdziemy teraz do twierdzenia o stabilności jednostajnej wypukłości dla normy zadanej za pomocą wzoru (3.7).

Twierdzenie 3.3 ([3]).
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich jest jednostajnie wypukła oraz załóżmy, że $p \in (1,\infty)$ i $q \in [1,\infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.7) również jest jednostajnie wypukła.

Dowód.

Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że przestrzeń X_0 jest jednostajnie wypukła. Wtedy tę samą własność ma również przestrzeń $l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)$. Niech $\varepsilon \in (0,2]$ i $x, y \in (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ będą takie, że $|||x|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} = |||y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} = 1$ oraz $|||x-y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant \varepsilon$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ istnieją rozkłady $x = \sum_{i=0}^n x_i(\boldsymbol{\nu})$, $y = \sum_{i=0}^n y_i(\boldsymbol{\nu})$, $x_i(\boldsymbol{\nu}), y_i(\boldsymbol{\nu}) \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_n$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$ takie, że

$$\left(\sum_{i=0}^n \|x_i\|^q_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1+\gamma, \quad \left(\sum_{i=0}^n \|y_i\|^q_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1+\gamma,$$

Oznaczmy $u = \frac{x}{1+\gamma}$, $v = \frac{y}{1+\gamma}$. Wtedy $u = \sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{\nu})$, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i(\boldsymbol{\nu})$, gdzie $u_i(\boldsymbol{\nu}) = \frac{x_i(\boldsymbol{\nu})}{1+\gamma}$, $v_i(\boldsymbol{\nu}) = \frac{y_i(\boldsymbol{\nu})}{1+\gamma}$ należą do X_i.

Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że $\|x_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \leqslant \|y_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}$. Wtedy $\lambda = \|x_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}/\|y_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \leqslant 1$. Zauważmy, że $|||x - \lambda y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Istotnie, jeśli $1 - \lambda \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, to

$$|||x - \lambda y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant |||x|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} - \lambda |||y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} = 1 - \lambda \geqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

a jeśli $1 - \lambda \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, to

$$|||x - \lambda y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant |||x - y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} - (1-\lambda)|||y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ostatecznie dostajemy nierówność

$$|||u - \lambda v|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} = \frac{1}{1+\gamma}|||x - \lambda y|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \geqslant \frac{\varepsilon}{2(1+\gamma)} \geqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Korzystając z tej nierówności i lematu 3.1 otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon}{4} \leqslant |||u - \lambda v|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant (1 + na) \prod_{i=0}^{n} A_i^{\theta_i}, \tag{3.12}$$

gdzie $A_i = \|u_i - \lambda v_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}$, $i \in \mathcal{I}_n$. Ponieważ $A_i \leqslant \|u_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)} + \lambda \|v_i\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)} \leqslant 2$, więc

$$\prod_{i=1}^{n} A_i^{\theta_i} \leqslant 2^{\sum_{i=1}^{n} \theta_i} = 2^{1-\theta_0}$$

i nierówność (3.12) daje nam następujące oszacowanie

$$\|u_0 - \lambda v_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^{1-\theta_0}(1+na)}\right)^{\frac{1}{\theta_0}}.$$

Korzystając z nierówności (1.2), dostajemy zatem oszacowanie

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u_0 + v_0}{2}\right\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} &\leqslant \frac{\|u_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} + \|v_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}}{2} - \delta_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}\left(\|u_0 - \lambda v_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}\right) \\
&\leqslant \frac{\|u_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} + \|v_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}}{2} - \delta_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}(\varepsilon_1),
\end{aligned}$$

więc

$$\left\|\frac{u_0 + v_0}{2}\right\|^q_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \leqslant \left(\frac{\|u_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} + \|v_0\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}}{2}\right)^q - \delta_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)}(\varepsilon_1)^q.$$

Prowadzi to do następujących nierówności

$$
\begin{aligned}
\left(\left\|\left|\frac{u+v}{2}\right|\right\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)}\right)^q &\leqslant \sum_{i=0}^{n}\left\|\frac{u_i+v_i}{2}\right\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\|u_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}+\|v_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}}{2}\right)^q - \delta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)^q \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n}\frac{\|u_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q+\|v_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q}{2} - \delta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)^q \\
&\leqslant 1-\delta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)^q.
\end{aligned}
$$

Stąd

$$
\left\|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \leqslant (1+\gamma)\left(1-\delta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)^q\right)^{\frac{1}{q}}
$$

i wystarczy teraz przejść do granicy z $\gamma \to 0$, aby otrzymać tezę twierdzenia.

□

Twierdzenie 3.3 obejmuje przypadek, gdy $q=1$. Wystarczy więc, że co najmniej jedna z przestrzeni $X_0, X_1, \ldots, X_n$ jest jednostajnie wypukła, aby przestrzeń interpolacyjna $Y=(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,1}$ z normą (3.7) była jednostajnie wypukła. Warto zwrócić uwagę na to, że przestrzeń Y można utożsamiać z przestrzenią ilorazową Z/Z_0 sumy prostej $Z=\left(\sum_{k=0}^{n} l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)\right)_{l_1}$ przez podprzestrzeń Z_0 złożoną z tych ciągów elementów $x_i \in l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)$, $i \in \mathcal{I}_n$, dla których $\sum_{i=0}^{n} x_i = 0$, ale nawet jeśli wszystkie przestrzenie $X_0, X_1, \ldots, X_n$ są jednostajnie wypukłe, to suma prosta Z nie jest jednostajnie wypukła.

Udowodnimy teraz analogiczne twierdzenia dotyczące niemal jednostajnej wypukłości i własności (β) przestrzeni interpolacyjnej Yoshikawy-Sparra wyposażonej w normę zadaną za pomocą wzoru (3.7). Dowody tych twierdzeń są podobne do dowodów odpowiadających im twierdzeń zawartych w pracy [37] (zobacz dowód twierdzenia 4.1 w pracy [37]).

Twierdzenie 3.4.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich jest niemal jednostajnie wypukła oraz załóżmy, że $p \in (1,\infty)$ i $q \in [1,\infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $Y=(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.7) *również jest niemal jednostajnie wypukła.*

Dowód.

Załóżmy że przestrzeń X_0 jest niemal jednostajnie wypukła. Wtedy również przestrzeń $l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)$ ma tę własność (zobacz [46]). Niech $\varepsilon > 0$ i (x_k) będzie ciągiem w $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ takim, że $|||x_k|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{sep}(x_k) \geqslant \varepsilon$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ istnieją rozkłady $x_k = \sum_{i=0}^n x_i^k(\boldsymbol{\nu})$, $x_i^k(\boldsymbol{\nu}) \in X_i$, $i \in \mathcal{I}_n$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$, $k \in \mathbb{N}$ takie, że

$$\left(\sum_{i=0}^n \|x_i^k\|^q_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1+\gamma.$$

Położmy $u_k = \frac{x_k}{1+\gamma}$. Wtedy również $u_k = \sum_{i=0}^n u_i^k(\boldsymbol{\nu})$ gdzie $u_i^k(\boldsymbol{\nu}) = \frac{x_i^k(\boldsymbol{\nu})}{1+\gamma} \in X_i$.

Korzystając z lematu 3.1 otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\gamma} \leqslant |||u_k - u_l|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant (1+na)\prod_{i=0}^n A_i^{\theta_i},$$

gdzie $A_i = \|u_i^k - u_i^l\|_{l^{a,i}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_i)}$, $i \in \mathcal{I}_n$ oraz $k \neq l$. Ponieważ $A_i \leqslant 2$, więc nierówność ta daje nam następujące oszacowanie

$$\|u_0^k - u_0^l\|_{l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0)} \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{2^{2-\theta_0}(1+na)}\right)^{\frac{1}{\theta_0}}$$

dla $k \neq l$.

Rozważmy teraz sumę prostą $Z = (l^{a,0}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_0) \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R})_{l_q}$, w której jest n kopii przestrzeni $\mathbb{R}$. Ponieważ X_0 jest niemal jednostajnie wypukła, więc przestrzeń Z również jest niemal jednostajnie wypukła (zobacz stwierdzenie 3.3 z pracy [37]). Zdefiniujmy następujące elementy przestrzeni Z:

$$z_k = \left(u_0^k, \|u_1^k\|_{l^{a,1}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_1)}, \ldots, \|u_n^k\|_{l^{a,n}_{p,\boldsymbol{\theta}}(X_n)}\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wtedy $\|z_k\|_Z \leqslant 1$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\operatorname{sep}(z_n) \geqslant \varepsilon_1$. Istnieje zatem element $z \in \operatorname{co}(z_k)$ taki, że $\|z\|_Z \leqslant 1 - \Delta_Z(\varepsilon_1)$. Mamy $z = \sum_{j=1}^s \lambda_j z_{k_j}$ dla pewnych indeksów $k_1, \ldots, k_s$ oraz współczynników $\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0$ takich, że $\sum_{j=1}^s \lambda_j = 1$. Przyjmując $u = \sum_{j=1}^s \lambda_j u_{k_j}$ otrzymujemy nierówności

$$|||u|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant \|z\|_Z \leqslant 1 - \Delta_Z(\varepsilon_1),$$

czyli

$$|||x|||^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q} \leqslant (1+\gamma)(1 - \Delta_Z(\varepsilon_1)),$$

gdzie $x = (1+\gamma)u = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j x_{k_j} \in \mathrm{co}(x_k)$. Pokazuje to, że

$$1 - \inf\left\{ |||x|||_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} : x \in \mathrm{co}(x_k) \right\} \geqslant 1 - (1+\gamma)\left(1 - \Delta_Z\left(\varepsilon_1\right)\right).$$

Wystarczy teraz wziąć infimum po wszystkich ciągach $(x_k) \subset B_Y$ takich że $\mathrm{sep}(x_k) \geqslant \varepsilon$ i przejść z $\gamma \to 0$, aby zauważyć, że

$$\Delta_Y(\varepsilon) \geqslant \Delta_Z(\varepsilon_1) > 0,$$

co kończy dowód twierdzenia.

□

Twierdzenie 3.5.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich ma własność (β) oraz załóżmy, że $p \in (1,\infty)$ i $q \in [1,\infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $Y = (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.7) również ma własność (β).

Dowód.
Załóżmy że przestrzeń X_0 ma własność (β). Wtedy również przestrzeń $l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)$ ma tę własność (na mocy twierdzenia 2.8). Niech $\varepsilon > 0$ będzie dowolne, ale ustalone. Niech $x \in B_Y$ i (x_k) będzie ciągiem w Y takim, że $x_k \in B_Y$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\mathrm{sep}(x_k) \geqslant \varepsilon > 0$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ istnieją rozkłady $x = \sum_{i=0}^{n} x_i(\boldsymbol{\nu})$ oraz $x_k = \sum_{i=0}^{n} x_i^k(\boldsymbol{\nu})$ takie, że $x_i(\boldsymbol{\nu}), x_i^k(\boldsymbol{\nu}) \in X_i$ dla dowolnego $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^n$, $i \in \mathcal{I}_n$, $k \in \mathbb{N}$ oraz

$$\left(\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1+\gamma, \quad \left(\sum_{i=0}^{n} \|x_i^k\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1+\gamma.$$

Kładziemy $u = \frac{x}{1+\gamma}$, $u_k = \frac{x_k}{1+\gamma}$. Wtedy $u = \sum_{i=1}^{n} u_i(\boldsymbol{\nu})$, $u_k = \sum_{i=1}^{n} u_i^k(\boldsymbol{\nu})$, gdzie $u_i(\boldsymbol{\nu}) = \frac{x_i(\boldsymbol{\nu})}{1+\gamma}$, $u_i^k(\boldsymbol{\nu}) = \frac{x_i^k(\boldsymbol{\nu})}{1+\gamma}$.

Korzystając z lematu 3.1 otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{\varepsilon}{1+\gamma} \leqslant |||u_k - u_l|||_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \leqslant (1+na)\prod_{i=0}^{n} A_i^{\theta_i},$$

dla $k \neq l$, gdzie $A_i = \|u_i^k - u_i^l\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}$, $i \in \mathcal{I}_n$, skąd podobnie jak w poprzednim dowodzie dostajemy nierówność

$$\|u_0^k - u_0^l\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)} \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{2^{2-\theta_0}(1+na)}\right)^{\frac{1}{\theta_0}}$$

dla $k \neq l$.

Dla uproszczenie w dalszej części dowodu będziemy operować granicami ciągów norm. Ich istnienie możemy zagwarantować przechodząc do odpowiednich podciągów. Ponadto, bez straty ogólności rozważań, możemy założyć również, że $|||x|||_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \geqslant \frac{1}{2}$ oraz $\lim_{k\to\infty} |||x_k|||_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \geqslant \frac{1}{2}$. Istotnie, jeżeli zamiast jednej z powyższych nierówności mamy nierówność przeciwną, to

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left|\left| \frac{x+x_k}{2} \right|\right|\right|_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \leqslant \frac{3}{4}.$$

Przy powyższych założeniach, ponownie korzystając z lematu 3.1 i przeprowadzając analogiczne obliczenia jak powyżej, widzimy, że

$$\|u_0\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)} \geqslant c := \left(\frac{1}{2(1+na)}\right)^{\frac{1}{\theta_0}}$$

i podobnie

$$\lim_{k\to\infty} \|u_0^k\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)} \geqslant c.$$

Korzystając z lematu 2.6 i powyższych nierówności otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\left(|||u+u_k|||_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)}\right)^q \leqslant \sum_{i=0}^{n} \lim_{k\to\infty} \left\|u_i+u_i^k\right\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}^q \\
&\leqslant \left(\|u_0\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)} + \lim_{k\to\infty}\left\|u_0^k\right\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)} - 2\min\left\{\|u_0\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}, \lim_{k\to\infty}\|u_0^k\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}\right\} \beta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)\right)^q \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left(\|u_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)} + \lim_{k\to\infty}\left\|u_i^k\right\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}\right)^q \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n}\left(\|u_i\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)} + \lim_{k\to\infty}\left\|u_i^k\right\|_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,i}(X_i)}\right)^q - \left(2c\beta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)\right)^q \\
&\leqslant 2^q\left(1-\left(c\beta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)\right)^q\right).
\end{aligned}$$

Stąd

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left|\left| \frac{x+x_k}{2} \right|\right|\right|_{\boldsymbol{\theta},p,q}^{(a)} \leqslant (1+\gamma)\left(1-\left(c\beta_{l_{p,\boldsymbol{\theta}}^{a,0}(X_0)}(\varepsilon_1)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

i dla zakończenia dowodu wystarczy jeszcze przejść do granicy przy $\gamma \to 0$.

□

W powyższych dowodach korzystaliśmy z twierdzeń o zachowaniu danej własności geometrycznej przy przejściu do przestrzeni $l_p(X)$. Przy ciągłej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra mamy do czynienia z przestrzeniami $L_p(X)$ i problem w dowodzeniu twierdzeń o stabilności nieskończenie wymiarowych odpowiedników jednostajnej wypukłości takich jak niemal jednostajna wypukłość, czy własność (β) przy ciągłej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra polega na tym, że własności te nie przenoszą się z danej przestrzeni Banacha X na przestrzeń $L_p(X)$. W pracy [46] wykazano, że jeśli miara nie jest czysto atomowa, to przestrzeń Lebesgue'a-Bochnera $L_p(X)$ dla $p \in (1, \infty)$ jest niemal jednostajnie wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy X jest jednostajnie wypukła. Analogiczny wynik jest także prawdziwy dla własności (β).

W pracy [2] wykazano w sposób bezpośredni, że niemal jednostajna wypukłość zachowuje się przy ciągłej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra. Tutaj przedstawimy ogólną metodę, która umożliwi nam udowodnienie twierdzeń dotyczących stabilności własności geometrycznych o jednostajnym charakterze dla ciągłej wersji interpolacji Yoshikawy-Sparra, korzystając z odpowiednich wyników dla dyskretnej wersji. Opis tej metody znajduje się w pracy [3].

Zanim jednak to zrobimy, podamy najpierw przykład, który pokazuje, że przestrzenie otrzymane za pomocą ciągłej i dyskretnej wersji interpolacji mogą nie być izometryczne, mimo że zawsze są izomorficzne. Nie można zatem przejść od jednej wersji do drugiej z geometryczną własnością, która zachowuje się jedynie przy izometriach.

Przykład 3.1 ([3]).
Dla $\alpha > 0$, $\beta > 1$ i $x \in \mathbb{R}^2$ oznaczamy

$$|x|_{\alpha,\beta} = |(x_1, x_2)|_{\alpha,\beta} = \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \beta^2 x_2^2}.$$

Wzór ten definiuje rodzinę norm pochodzących od iloczynów skalarnych w przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha taką, że $X_0 = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_{1,1})$, czyli X_0 jest przestrzenią euklidesową, zaś $X_1 = (\mathbb{R}^2, |\cdot|_{1,\beta})$. W przestrzeni $X_0 + X_1$ rozpatrzmy normę zadaną za pomocą wzoru

$$K_1(t, x) = \inf\{|u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta} : x = u + v,\ u, v \in \mathbb{R}^2\}.$$

Załóżmy najpierw, że $0 < t \leqslant \frac{1}{\beta}$. Niech $x = u + v$ będzie dowolnym rozkładem. Wtedy

$$t|x|_{1,\beta} \leqslant t|u|_{1,\beta} + t|v|_{1,\beta} \leqslant |u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta}.$$

Biorąc teraz infimum po wszystkich takich rozkładach, widzimy, że $t|x|_{1,\beta} \leqslant K_1(t,x)$. Nierówność przeciwną otrzymujemy rozpatrując rozkład $x = 0 + x$, więc w rozpatrywanym przypadku $K_1(t,x) = t|x|_{1,\beta}$.

Załóżmy teraz, że $t \geqslant 1$ i niech $x = u + v$ będzie dowolnym rozkładem. Wtedy

$$|x|_{1,1} \leqslant |u|_{1,1} + |v|_{1,1} \leqslant |u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta},$$

co daje nam nierówność $|x|_{1,1} \leqslant K_1(t,x)$. Nierówność przeciwną otrzymujemy rozpatrując rozkład $x = x + 0$, więc $K_1(t,x) = |x|_{1,1}$. Widzimy zatem, że jeżeli $t \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right] \cup [1,\infty)$, to norma $K_1(t,x)$ pochodzi od iloczynu skalarnego i spełniona jest dla niej tożsamość równoległoboku.

Rozważmy teraz przypadek, gdy $\frac{1}{\beta} < t < 1$. Pokażemy, że w tym przypadku tożsamość równoległoboku nie jest spełniona. Niech $x = u + v$ będzie dowolnym rozkładem. Wtedy

$$|x|_{t,1} \leqslant |u|_{t,1} + |v|_{t,1} \leqslant |u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta},$$

co daje nam nierówność

$$|x|_{t,1} \leqslant K_1(t,x). \tag{3.13}$$

Załóżmy, że w nierówności tej zachodzi równość, czyli $|x|_{t,1} = K_1(t,x)$. Z uwagi na to, że rozpatrujemy tutaj przestrzeń $\mathbb{R}^2$, infimum w definicji $K_1(t,x)$ jest osiągnięte (por. uwagi przed twierdzeniem 2.3), więc $K_1(t,x) = |u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta}$ dla pewnych wektorów $u, v \in \mathbb{R}^2$ takich, że $x = u + v$. Mamy

$$|x|_{t,1} = |u+v|_{t,1} \leqslant |u|_{t,1} + |v|_{t,1} \leqslant |u|_{1,1} + t|v|_{1,\beta} = K_1(t,x) = |x|_{t,1},$$

Zatem $|u+v|_{t,1} = |u|_{t,1} + |v|_{t,1}$ i $|u|_{t,1} = |u|_{1,1}$ oraz $|v|_{t,1} = t|v|_{1,\beta}$. Z pierwszej równości wynika, że $v = 0$ lub $u = \lambda v$ dla pewnego $\lambda \in \mathbb{R}$, czyli $x = u$ lub x jest współliniowe z v. W pierwszym przypadku z równości $|u|_{t,1} = |u|_{1,1}$ wynika, że $|x|_{t,1} = |x|_{1,1}$ i wtedy $x_1 = 0$, zaś w drugim równość $|v|_{t,1} = t|v|_{1,\beta}$ implikuje, że $|x|_{t,1} = t|x|_{1,\beta}$ i wtedy $x_2 = 0$. Widzimy zatem, że jeżeli $x_1 \neq 0$ oraz $x_2 \neq 0$, to nierówność (3.13) jest ostra.

Niech teraz $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$. Wtedy $t = |e_1|_{t,1} \leqslant K_1(t,e_1) \leqslant t|e_1|_{1,\beta} = t$, zatem $K_1(t,e_1) = t$. Podobnie $1 = |e_2|_{t,1} \leqslant K_1(t,e_2) \leqslant |e_2|_{1,1} = 1$, zatem $K_1(t,e_2) = 1$. Ponadto dla $x = e_1 \pm e_2$ nierówność (3.13) jest ostra, czyli

$$K_1(t, e_1 + e_2) > |e_1 + e_2|_{t,1} = \sqrt{t^2+1}, \quad K_1(t, e_1 - e_2) > |e_1 - e_2|_{t,1} = \sqrt{t^2+1}.$$

Z powyższych nierówności wynika, że

$$K_1(t, e_1 + e_2)^2 + K_1(t, e_1 - e_2)^2 - 2\left(K_1(t, e_1)^2 + K_1(t, e_2)^2\right) > 0, \tag{3.14}$$

co pokazuje, że tożsamość równoległoboku nie jest spełniona dla normy $K_1(t, \cdot)$.

Załóżmy teraz, że $a > 1$ oraz $\theta \in (0, 1)$ i rozpatrzmy przestrzeń interpolacyjną $(X_0, X_1)_{\theta,2,1}$ z normą zadaną za pomocą wzoru

$$\|x\|^{(a)}_{\theta,2,1} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a^{-n\theta} K_1(a^n, x)\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Jeżeli $a \geqslant \beta$, to $a^n \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right] \cup [1, \infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}$ i tożsamość równoległoboku zachodzi dla normy $K_1(a^n, \cdot)$, zatem zachodzi ona również dla normy $\| \cdot \|^{(a)}_{\theta,2,1}$.

Jeżeli $a < \beta$, to zbiór $I = \{n \in \mathbb{Z} : \frac{1}{\beta} < a^n < 1\}$ jest niepusty i zgodnie z (3.14) dla $n \in I$ mamy

$$K_1(a^n, e_1 + e_2)^2 + K_1(a^n, e_1 - e_2)^2 - 2\left(K_1(a^n, e_1)^2 + K_1(a^n, e_2)^2\right) > 0.$$

Pokazuje to, że również

$$\left(\|e_1 + e_2\|^{(a)}_{\theta,2,1}\right)^2 + \left(\|e_1 - e_2\|^{(a)}_{\theta,2,1}\right)^2 - 2\left(\left(\|e_1\|^{(a)}_{\theta,2,1}\right)^2 + \left(\|e_2\|^{(a)}_{\theta,2,1}\right)^2\right) > 0,$$

więc tożsamość równoległoboku nie zachodzi dla normy $\| \cdot \|^{(a)}_{\theta,2,1}$.

Rozważmy teraz normę w przestrzeni $(X_0, X_1)_{\theta,2,1}$ zadaną za pomocą całki

$$\|x\|_{\theta,2,1} = \left(\int_0^{\infty} \left(t^{-\theta} K_1(t, x)\right)^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nierówność (3.14) pokazuje, że

$$\|e_1 + e_2\|^2_{\theta,2,1} + \|e_1 - e_2\|^2_{\theta,2,1} - 2(\|e_1\|^2_{\theta,2,1} + \|e_2\|^2_{\theta,2,1}) > 0,$$

a zatem tożsamość równoległoboku nie jest spełniona dla tej normy.

Ponieważ tożsamość równoległoboku jest niezmiennikiem izometrii, to nasze rozważania pokazują, że przestrzenie interpolacyjne otrzymane za pomocą ciągłej i dyskretnej wersji metody interpolacji Yoshikawy-Sparra mogą nie być izometryczne. Ponadto, to samo dotyczy również przestrzeni otrzymanych za pomocą dyskretnej wersji tej metody z różnymi parametrami $a > 1$.

Przejdziemy teraz do zaprezentowania wyżej zapowiedzianej metody. Załóżmy najpierw, że dana jest przestrzeń Banacha X oraz dwie określone w niej normy równoważne $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Istnieją więc stałe $M_1, M_2 > 0$ takie, że

$$M_1\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M_2\|x\|_1 \tag{3.15}$$

dla każdego $x \in X$. Niech $\delta_{X,1}$ oznacza moduł wypukłości przestrzeni $(X, \|\cdot\|_1)$ i $\delta_{X,2}$ oznacza moduł wypukłości przestrzeni $(X, \|\cdot\|_2)$. W monografii [27] została udowodniona następująca nierówność dla tych modułów

$$\delta_{X,2}(\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right) \tag{3.16}$$

dla każdego $\varepsilon \in [0, 2]$.

Wykażemy teraz również analogiczne nierówności dla modułów niemal jednostajnej wypukłości i własności (β). Niech $\Delta_{X,1}$ i $\Delta_{X,2}$ oznaczają moduły niemal jednostajnej wypukłości odpowiednio przestrzeni $(X, \|\cdot\|_1)$ i $(X, \|\cdot\|_2)$. Załóżmy, że ciąg (x_n) w X spełnia warunki: $\|x_n\|_2 \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\inf\{\|x_n - x_m\|_2 : n \neq m\} \geqslant \varepsilon$. Wtedy $\|M_1 x_n\|_1 \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\inf\{\|M_1(x_n - x_m)\|_1 : n \neq m\} \geqslant \frac{M_1}{M_2}\varepsilon$. Zatem

$$\inf\{\|M_1 u\|_1 : u \in \mathrm{co}(x_n)\} = \inf\{\|x\|_1 : x \in \mathrm{co}(M_1 x_n)\} \leqslant 1 - \Delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right),$$

czyli

$$\inf\{\|u\|_1 : u \in \mathrm{co}(x_n)\} \leqslant \frac{1}{M_1}\left(1 - \Delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right),$$

co dalej implikuje, że

$$\inf\{\|u\|_2 : u \in \mathrm{co}(x_n)\} \leqslant \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \Delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right),$$

czyli

$$1 - \inf\{\|u\|_2 : u \in \mathrm{co}(x_n)\} \geqslant 1 - \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \Delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right).$$

Biorąc teraz infimum po wszystkich takich ciągach, otrzymujemy

$$\Delta_{X,2}(\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \Delta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right) \tag{3.17}$$

dla każdego $\varepsilon \geqslant 0$.

Podobnie niech $\beta_{X,1}$ i $\beta_{X,2}$ będą modułami własności (β) odpowiednio przestrzeni $(X,\|\cdot\|_1)$ i $(X,\|\cdot\|_2)$. Załóżmy, że $x \in X$ spełnia warunek $\|x\|_2 \leqslant 1$ i (x_n) jest ciągiem w X takim, że $\|x_n\|_2 \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\inf\{\|x_n - x_m\|_2 : n \neq m\} \geqslant \varepsilon$. Wtedy $\|M_1 x\|_1 \leqslant 1$, $\|M_1 x_n\|_1 \leqslant 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ oraz $\inf\{\|M_1(x_n - x_m)\|_1 : n \neq m\} \geqslant \frac{M_1}{M_2}\varepsilon$. Daje nam to nierówność

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{x + x_n}{2} \right\|_1 \leqslant \frac{1}{M_1}\left(1 - \beta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right),$$

co implikuje, że

$$\liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{x + x_n}{2} \right\|_2 \leqslant \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \beta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right).$$

Biorąc teraz infimum po wszystkich takich ciągach (x_n) i elementach x, otrzymujemy

$$\beta_{X,2}(\varepsilon) \geqslant 1 - \frac{M_2}{M_1}\left(1 - \beta_{X,1}\left(\frac{M_1}{M_2}\varepsilon\right)\right) \tag{3.18}$$

dla każdego $\varepsilon \geqslant 0$.

Nierówności (3.4) pokazują, jakie są stałe równoważności norm w przestrzeni interpolacyjnej Yoshikawy-Sparra określonymi za pomocą całki i szeregu. Przyjmując za X przestrzeń $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$, za $\|\cdot\|_1$ normę $\|\cdot\|^{(a)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}$, zaś za $\|\cdot\|_2$ normę $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\theta},p,q}$, widzimy, że spełnione są nierówności (3.15) ze stałymi $M_1 = a^{\theta_0 - 1}(\ln a)^{\frac{n}{p}}$, $M_2 = a(\ln a)^{\frac{n}{p}}$. Zatem nierówność (3.16) pokazuje, że

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant 1 - a^{2-\theta_0}\left(1 - \delta_{W_a}\left(a^{\theta_0 - 2}\varepsilon\right)\right), \tag{3.19}$$

gdzie X oznacza przestrzeń $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ rozważaną z normą (3.2), zaś $W_a = (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą (3.3). Analizując dowód twierdzenia 3.2 widzimy, że dla modułu wypukłości przestrzeni W_a zachodzi nierówność

$$\delta_{W_a}(\varepsilon) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \delta_{Z_i}\left(\frac{\varepsilon_i}{2}\right),$$

gdzie $Z_i = l_p((X_i \oplus \mathbb{R} \oplus \cdots \oplus \mathbb{R})_{l_q})$ oraz $\varepsilon_i = \left(\frac{\varepsilon}{4^{1-\theta_i}(1+na)}\right)^{1/\theta_i}$. Jeżeli $a \in (1,2]$ to $\frac{1}{2}\varepsilon_i \geqslant \alpha_i \varepsilon^{1/\theta_i}$, gdzie $\alpha_i := \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^{1-\theta_i}(1+2n)}\right)^{1/\theta_i}$ i otrzymujemy oszacowanie

$$\delta_{W_a}(\varepsilon) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \delta_{Z_i}\left(\alpha_i \varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right),$$

którego prawa strona nie zależy od a. Łącząc powyższą nierówność z (3.19) dostajemy

$$\begin{aligned}\delta_X(\varepsilon) &\geqslant 1 - a^{2-\theta_0}\left(1 - \max_{0\leqslant i\leqslant n}\delta_{Z_i}\left(\alpha_i a^{\frac{\theta_0-2}{\theta_i}}\varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right)\right)\\ &\geqslant 1 - a^{2-\theta_0}\left(1 - \max_{0\leqslant i\leqslant n}\delta_{Z_i}\left(\alpha_i 2^{\frac{\theta_0-2}{\theta_i}}\varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right)\right),\end{aligned}$$

co po przejściu do granicy z $a \to 1$ daje ostatecznie oszacowanie

$$\delta_X(\varepsilon) \geqslant \max_{0\leqslant i\leqslant n}\delta_{Z_i}\left(\alpha_i 2^{\frac{\theta_0-2}{\theta_i}}\varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right),$$

z którego wynika następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.6.
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich jest jednostajnie wypukła oraz załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.2) *również jest jednostajnie wypukła.*

Powyższą metodę można zastosować także do niemal jednostajnej wypukłości i własności (β). W pracy [37] wykazano twierdzenie 4.1 o niemal jednostajnej wypukłości przestrzeni $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą $\|\cdot\|^{(2)}_{\boldsymbol{\theta},p,q}$, gdzie $p \in (1, \infty)$ i $q \in [1, \infty)$. Analizując dowód tego twierdzenia stwierdzamy, że istnieją stałe $C_1, C_2 > 0$ takie, że dla każdego $a \in (1, 2]$ zachodzi nierówność

$$\Delta_{W_a}(\varepsilon) \geqslant C_1 \max_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\Delta_{X_i}\left(C_2\varepsilon^{\frac{q}{\theta_i}}\right)\right)^p,$$

gdzie W_a oznacza przestrzeń $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą (3.3). Rozumując podobnie, jak powyżej przechodzimy od tej nierówności do oszacowania

$$\Delta_X(\varepsilon) \geqslant C_1 \max_{0\leqslant i\leqslant n}\left(\Delta_{X_i}\left(C_2 2^{\frac{q(\theta_0-2)}{\theta_i}}\varepsilon^{\frac{q}{\theta_i}}\right)\right)^p.$$

gdzie X oznacza przestrzeń $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą (3.2). Daje nam to następujące twierdzenie wykazane wcześniej inną metodą w [2].

Twierdzenie 3.7 ([3])**.**
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich jest niemal jednostajnie wypukła oraz załóżmy, że $p \in (1, \infty)$ i $q \in [1, \infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.2) *również jest niemal jednostajnie wypukła.*

Powyższą metodę możemy również zastosować do własności (β). Analizując dowód w pracy [37] można wywnioskować, że prawdziwe jest następujące oszacowanie

$$\beta_{W_a}(\varepsilon) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \beta_{E_i}\left(C\varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right),$$

gdzie $E_i = l_p((X_i \oplus \mathbb{R})_{l_q})$, przy czym stała $C > 0$ nie zależy od liczby $a \in (1, 2]$. Rozumując podobnie, jak powyżej przechodzimy od tej nierówności do oszacowania

$$\beta_X(\varepsilon) \geqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \beta_{E_i}\left(C2^{\frac{\theta_0 - 2}{\theta_i}}\varepsilon^{\frac{1}{\theta_i}}\right),$$

które w połączeniu z twierdzeniami 2.8 i 2.9 daje następujący wynik.

Twierdzenie 3.8 ([3])**.**
Niech $(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ będzie ciągiem porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że co najmniej jedna z nich ma własność (β) oraz załóżmy, że $p, q \in (1, \infty)$. Wtedy przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta}, p}$ z normą zadaną za pomocą wzoru (3.2) *również ma własność (β).*

Rozdział 4

Zespolona metoda interpolacji

4.1 Podstawowe pojęcia i definicje

Zespolona metoda interpolacji dla dwóch przestrzeni Banacha została opisana przez Alberto Calderóna w pracy [9]. Podczas gdy metoda rzeczywista jest stosowana do przestrzeni Banacha określonych nad ciałem liczb rzeczywistych, metoda zespolona ma zastosowanie do tych przestrzeni, które są zdefiniowane nad ciałem liczb zespolonych. W poprzednich rozdziałach była mowa o porównywalnych parach przestrzeni rzeczywistych, ale definicja ta przenosi się na przestrzenie zespolone.

Niech (X_0, X_1) będzie porównywalną parą zespolonych przestrzeni Banacha. Przez S oznaczamy pas złożony z tych liczb zespolonych, których część rzeczywista należy do przedziału $[0, 1]$, czyli $S = \{z \in \mathbb{C} : z = s + it,\ s \in [0, 1],\ t \in \mathbb{R}\}$. Ponadto przez $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X_0 + X_1)$ oznaczamy przestrzeń Banacha wszystkich funkcji $f : S \to X_0 + X_1$, które są analityczne we wnętrzu pasa S, ciągłe na całym tym pasie (względem normy w $X_0 + X_1$) oraz takie, że dla ustalonego $j = 0, 1$ wzór $f_j(t) = f(j + it)$ definiuje funkcję ciągłą z $\mathbb{R}$ do X_j spełniającą warunek: $f_j(t) \to 0$ przy $|t| \to \infty$. Przestrzeń Banacha $\mathcal{F}$ wyposażamy w normę

$$\|f\|_{\mathcal{F}} = \max\left\{\max_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{X_0}, \max_{t\in\mathbb{R}} \|f(1 + it)\|_{X_1}\right\}.$$

Poniższą definicję przestrzeni interpolacyjnej podajemy za pracą [9].

Definicja 4.1.

Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz *niech $\theta \in (0,1)$. Przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1)_\theta$ otrzymana za pomocą zespolonej metody interpolacji jest przestrzenią tych wszystkich wektorów $x \in X_0{+}X_1$, dla których istnieje funkcja $f \in \mathcal{F}$ taka, że $f(\theta) = x$. Norma w tej przestrzeni interpolacyjnej jest zadana za pomocą wzoru*

$$\|x\|_\theta = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}} : f \in \mathcal{F},\ f(\theta) = x\}.$$

Powyżej opisana wersja zespolonej metody interpolacji jest znana jako dolna metoda Calderóna. W swojej pracy [9] Alberto Calderón opisał również drugą metodę znaną jako górna metoda Calderóna. Aby ją zdefiniować, wprowadzimy najpierw przestrzeń $\mathcal{G} = \mathcal{G}(X_0{+}X_1)$. Jest to przestrzeń wszystkich funkcji $g : S \to X_0{+}X_1$, które są ciągłe na całym pasie S, analityczne w jego wnętrzu oraz takie, że $\|g(z)\|_{X_0+X_1} \leqslant c(1+|z|)$ dla pewnej stałej $c \in \mathbb{R}_+$ zależnej od funkcji g. Ponadto wektor $g(j+it_1) - g(j+it_2)$ należy do przestrzeni X_j dla każdych $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ i $j = 0, 1$. W przestrzeni tej wprowadzamy normę za pomocą wzoru

$$\|g\|_{\mathcal{G}} = \max_{j=0,1} \left(\sup_{\substack{t_1,t_2\in\mathbb{R} \\ t_1\neq t_2}} \left\| \frac{g(j+it_1) - g(j+it_2)}{t_1 - t_2} \right\|_{X_j} \right).$$

Poniższą definicję górnej metody Calderóna podajemy również za pracą [9].

Definicja 4.2.

Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz niech $\theta \in (0,1)$. Przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1)^\theta$ otrzymana za pomocą górnej metody Calderóna jest przestrzenią tych wszystkich wektorów $x \in X_0{+}X_1$, dla których istnieje funkcja $g \in \mathcal{G}$ taka, że $g'(\theta) = x$. Norma w tej przestrzeni interpolacyjnej jest zadana za pomocą wzoru

$$\|x\|^\theta = \inf\{\|g\|_{\mathcal{G}} : g \in \mathcal{G}, g'(\theta) = x\}.$$

Jeżeli będziemy mówili o zespolonej metodzie interpolacji, zawsze będziemy rozumieli przez to dolną metodę interpolacji Calderóna, a w każdym miejscu, w którym będziemy rozpatrywali metodę górną, zaznaczymy to w tekście rozprawy. Górna metoda interpolacji Calderóna jest istotna w tej rozprawie głównie z powodu następujących dwóch twierdzeń, które podajemy za monografią [6].

Twierdzenie 4.1 (Twierdzenie 4.3.1 w monografii [6]).
Dla dowolnej pary (X_0, X_1) *przestrzeni porównywalnych i* $\theta \in (0,1)$ *ma miejsce następująca inkluzja*

$$(X_0, X_1)_\theta \subset (X_0, X_1)^\theta.$$

Ponadto

$$\|x\|^\theta \leqslant \|x\|_\theta, \quad x \in (X_0, X_1)_\theta.$$

Co więcej, jeżeli co najmniej jedna z przestrzeni X_0*,* X_1 *jest refleksywna, to*

$$(X_0, X_1)_\theta = (X_0, X_1)^\theta,$$

a także

$$\|x\|^\theta = \|x\|_\theta, \quad x \in (X_0, X_1)_\theta.$$

W dalszej części tej rozprawy będziemy rozpatrywali również problem stabilności własności geometrycznych krat Banacha przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna. Kraty Banacha zazwyczaj rozpatruje się nad ciałem liczb rzeczywistych, jednak pojęcie kraty można rozszerzyć w ten sposób, aby obejmowało ono również przestrzenie określone nad ciałem liczb zespolonych. W tej rozprawie będziemy rozważali jedynie zespolone kraty funkcyjne, których definicję teraz przytoczymy. Podajemy ją zgodnie z pracą Alberto Calderóna [9] (my jednak będziemy rozważali funkcje o wartościach zespolonych, a nie jedynie rzeczywistych).

Definicja 4.3 (zobacz [9], punkt 13.1).
Niech (Ω, Σ, μ) *będzie przestrzenią z miarą taką, że miara* μ *jest* σ*-skończona. Przez* $\mathcal{M}$ *oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji mierzalnych określonych na zbiorze* Ω *o wartościach zespolonych. Funkcyjną kratą Banacha nazywamy przestrzeń Banacha* $(X, \|\cdot\|)$ *taką, że* X *jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\mathcal{M}$ *spełniającą następujący warunek: jeżeli* $f \in X$*,* $g \in \mathcal{M}$ *i* $|g(\omega)| \leqslant |f(\omega)|$ μ*-prawie wszędzie w* Ω*, to* $g \in X$ *oraz* $\|g\| \leqslant \|f\|$*.*

Rozpatrując kraty funkcyjne, utożsamiamy funkcje równe μ-prawie wszędzie. Ponadto dodatkowo zakładamy, że wszystkie funkcje charakterystyczne zbiorów o mierze skończonej należą do rozpatrywanej kraty. Jeżeli f jest elementem kraty funkcyjnej X, to część rzeczywista $\operatorname{Re} f$ należy do X. Zbiór $\operatorname{Re} X$ wszystkich funkcji z X o wartościach rzeczywistych ze standardowym porządkiem jest rzeczywistą kratą Banacha X. Przez X_+ oznaczamy stożek dodatni rzeczywistej części funkcyjnej kraty Banacha X i zbiory $B(X_+)$ oraz $S(X_+)$ definiujemy odpowiednio jako przecięcie kuli B_X i sfery S_X ze stożkiem X_+.

Rozważając problem stabilności własności geometrycznych krat Banacha przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna, będziemy potrzebowali jeszcze jednej konstrukcji, którą teraz zdefiniujemy. Pochodzi ona również z pracy Calderóna [9]. Mówimy, że (X_0, X_1) jest parą porównywalnych krat funkcyjnych, jeżeli obie te kraty są przestrzeniami funkcji zespolonych na tej samej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) (zobacz [9], punkt 13.5).

Definicja 4.4.
Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych funkcyjnych krat Banacha oraz niech $\theta \in (0,1)$. Przez $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ oznaczamy przestrzeń tych wszystkich elementów $h \in X_0 + X_1$, dla których istnieją: stała $c \geqslant 0$ i elementy $f \in B(X_{0+})$, $g \in B(X_{1+})$ takie, że

$$|h| \leqslant c f^{1-\theta} g^{\theta}.$$

Norma w przestrzeni $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ zdefiniowana jest jako infimum stałych c, które są dopuszczalne w powyższej nierówności.

4.2 Nowe wyniki

Przejdziemy teraz do zaprezentowania otrzymanych wyników dla zespolonej metody interpolacji. Od teraz będziemy zakładali, że wszystkie rozpatrywane przestrzenie Banacha są zdefiniowane nad ciałem liczb zespolonych.

W dowodach twierdzeń dotyczących zespolonej metody interpolacji będziemy potrzebowali znanej nierówności z pracy Alberto Calderóna [9]. Załóżmy, że funkcja f należy do przestrzeni $\mathcal{F}$ rozpatrywanej przy zespolonej metodzie interpolacji. Wtedy zachodzi następująca nierówność

$$\|f(\theta)\|_\theta \leqslant \Big(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \|f(it)\|_{X_0}\mu_0(\theta,t)dt\Big)^{1-\theta}\Big(\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \|f(1+it)\|_{X_1}\mu_1(\theta,t)dt\Big)^{\theta}. \tag{4.1}$$

Powyżej $\mu_j(\cdot,\cdot)$, $j=0,1$ oznaczają jądra Poissona dla pasa S dane wzorami

$$\mu_0(z,\tau)=\frac{e^{-\pi(\tau-t)}\sin\pi s}{\sin^2\pi s+[\cos\pi s-e^{-\pi(\tau-t)}]^2},\ z=s+it,$$

$$\mu_1(z,\tau)=\frac{e^{-\pi(\tau-t)}\sin\pi s}{\sin^2\pi s+[\cos\pi s+e^{-\pi(\tau-t)}]^2},\ z=s+it.$$

W dalszej części rozprawy będziemy korzystali z następujących tożsamości (zobacz [9], punkt 29.4):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mu_0(\theta,t)dt=1-\theta,\quad \int_{-\infty}^{\infty}\mu_1(\theta,t)dt=\theta. \tag{4.2}$$

W dowodach niektórych twierdzeń będziemy potrzebowali także wersji nierówności (4.1) dla funkcji z klasy $\mathcal{G}$, która jest rozpatrywana przy górnej metodzie Calderóna. Załóżmy zatem, że obie przestrzenie X_0 i X_1 z pary porównywalnych przestrzeni Banacha (X_0,X_1) są refleksywne. Z twierdzenia 4.1 wiemy, że w takim przypadku górna i dolna metoda Calderóna dają tę samą przestrzeń z równością norm. Ponadto w dowodzie twierdzenia 4.3.1 w monografii [6] wykazano, że jeżeli $g\in\mathcal{G}$, to przy powyższym założeniu o refleksywności funkcje $g_j:\mathbb{R}\to X_j$ dane wzorami $g_j(t)=g(j+it)$, $j=0,1$ są różniczkowalne prawie wszędzie. Co więcej, lemat 4.3.3 z [6] pokazuje, że wtedy $g'(\theta)\in(X_0,X_1)_\theta$. Dla $g\in\mathcal{G}$ i $n\in\mathbb{N}$ oznaczmy

$$g_n(z)=\frac{g\left(z+\frac{i}{n}\right)-g(z)}{\frac{i}{n}}.$$

Wtedy $e^{\gamma z^2}g_n\in\mathcal{F}$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$ i $\gamma>0$ (zobacz dowód lematu 4.3.3 w [6]). Stosując nierówność (4.1) do powyższych funkcji $e^{\gamma z^2}g_n$ i przechodząc do granicy z $n\to\infty$, a następnie z $\gamma\to 0$, otrzymujemy następującą nierówność

$$\|g'(\theta)\|_\theta\leqslant\left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\|g'(it)\|_{X_0}\mu_0(\theta,t)dt\right)^{1-\theta}\left(\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\|g'(1+it)\|_{X_1}\mu_1(\theta,t)dt\right)^{\theta}. \tag{4.3}$$

Przejdziemy teraz do zaprezentowania nowych wyników dotyczących stabilności własności geometrycznych przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna. Zaczniemy od wyników dotyczących ścisłej wypukłości i lokalnej jednostajnej wypukłości.

Uwaga 4.1.

W dowodach następnych twierdzeń wykorzystamy fakt, że infimum w definicji normy w przestrzeni interpolacyjnej otrzymanej za pomocą górnej metody interpolacji Calderóna jest osiągnięte pod warunkiem, że (X_0, X_1) jest parą sprzężonych przestrzeni Banacha takich, że jeżeli $X_j = Y_j^*$, $j = 0, 1$, to $Y_0 \cap Y_1$ jest zbiorem gęstym zarówno w Y_0 jak i Y_1 (zobacz [12], uwaga 2.29).

Twierdzenie 4.2.

Niech $\theta \in (0,1)$ i (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha taką, że obie te przestrzenie są refleksywne oraz zbiór $X_0^* \cap X_1^*$ jest gęsty zarówno w przestrzeni X_0^* jak i X_1^*. Jeżeli ponadto co najmniej jedna z tych przestrzeni jest ściśle wypukła, to również przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1)_\theta$ otrzymana za pomocą dolnej metody Calderóna jest ściśle wypukła.

Dowód.

Załóżmy, że przestrzeń X_0 jest ściśle wypukła, $x, y \in (X_0, X_1)_\theta$, $\|x\|_\theta = 1 = \|y\|_\theta$ i $x \neq y$. Wybierzmy funkcje $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ w ten sposób, że $g_1'(\theta) = x$, $g_2'(\theta) = y$ oraz $\|g_1\|_{\mathcal{G}} = \|g_2\|_{\mathcal{G}} = 1$. Jest to możliwe na mocy twierdzenia 4.1 oraz uwagi 4.1. Zauważmy, że taki wybór g_1, g_2 gwarantuje, że $\|g_j'(it)\|_{X_0} \leqslant 1$ oraz $\|g_j'(1+it)\|_{X_1} \leqslant 1$ prawie wszędzie, $j = 0, 1$. Korzystając z nierówności (4.3), otrzymujemy

$$0 < \|x - y\|_\theta \leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|g_1'(it) - g_2'(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt \right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|g_1'(1+it) - g_2'(1+it)\|_{X_1} \mu_1(\theta, t) dt \right)^{\theta}.$$

Pokazuje to, że $\|g_1'(it) - g_2'(it)\|_{X_0} > 0$ dla t ze zbioru A, którego miara jest ściśle większa od zera. Zatem $g_1'(it) \neq g_2'(it)$ dla $t \in A$ i $\|g_1'(it)\|_{X_0} \leqslant 1$, $\|g_2'(it)\|_{X_0} \leqslant 1$ prawie wszędzie w A, więc ze ścisłej wypukłości przestrzeni X_0 wynika, że $\left\| \frac{g_1'(it) + g_2'(it)}{2} \right\|_{X_0} < 1$ prawie wszędzie w A. W połączeniu z (4.3) daje nam to nierówność

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|_\theta \leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{g_1'(it) + g_2'(it)}{2} \right\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt \right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{g_1'(1+it) + g_2'(1+it)}{2} \right\|_{X_1} \mu_1(\theta, t) dt \right)^{\theta} < 1,$$

która kończy dowód twierdzenia.

□

Przejdziemy teraz do wyniku dotyczącego lokalnej jednostajnej wypukłości.

Uwaga 4.2.
W dowodzie poniższego twierdzenia wykorzystamy wynik z pracy [53], który pokazuje, że jeżeli $p \in (1, \infty)$, to lokalna jednostajna wypukłość przenosi się z przestrzeni Banacha X na przestrzeń Lebesgue'a-Bochnera $L_p(X)$.

Twierdzenie 4.3.
Niech $\theta \in (0,1)$ i (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha taką, że obie te przestrzenie są refleksywne oraz zbiór $X_0^* \cap X_1^*$ jest gęsty zarówno w przestrzeni X_0^* jak i X_1^*. Jeżeli ponadto co najmniej jedna z tych przestrzeni jest lokalnie jednostajnie wypukła, to również przestrzeń interpolacyjna $(X_0, X_1)_\theta$ otrzymana za pomocą dolnej metody Calderóna jest lokalnie jednostajnie wypukła.

Dowód.

Bez straty ogólności rozważań możemy założyć, że przestrzeń X_0 jest lokalnie jednostajnie wypukła. Ustalmy wektor $x \in (X_0, X_1)_\theta$ taki, że $\|x\|_\theta = 1$ i załóżmy, że wektor $y \in (X_0, X_1)_\theta$ spełnia warunki: $\|y\|_\theta \leqslant 1$ i $\|x - y\|_\theta \geqslant \varepsilon > 0$. Wybierzmy funkcje $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ w ten sposób, że $g_1'(\theta) = x$, $g_2'(\theta) = y$ oraz $\|g_1\|_{\mathcal{G}} = 1$, $\|g_2\|_{\mathcal{G}} \leqslant 1$.

Nierówność (4.3) daje nam następujące oszacowanie

$$\varepsilon \leqslant \|x-y\|_\theta \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g_1'(it) - g_2'(it)\|_{X_0} \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta} dt \right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g_1'(1+it) - g_2'(1+it)\|_{X_1} \frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta} dt \right)^{\theta}.$$

Korzystając z tego, że $\frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt$, $\frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt$ są miarami probabilistycznymi oraz z tego, że $\|g_1'(1+it) - g_2'(1+it)\|_{X_1} \leqslant 2$ prawie wszędzie, otrzymujemy

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|g_1'(it) - g_2'(it)\|_{X_0}^2 \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta} dt \right)^{\frac{1-\theta}{2}}. \tag{4.4}$$

Funkcja $h(t) = g_1'(it)$ należy do $L_2(X_0)$ i przyjmujemy $h_1 = h/\|h\|_{L_2(X_0)}$. Nierówności

(4.3), (4.4) i lemat 1.1 dają nam następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_\theta &\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{g_1'(it)+g_2'(it)}{2}\right\|_{X_0}\frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{1-\theta}\times\\ &\quad\times\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{g_1'(1+it)+g_2'(1+it)}{2}\right\|_{X_1}\frac{\mu_1(\theta,t)}{\theta}dt\right)^{\theta}\\ &\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{g_1'(it)+g_2'(it)}{2}\right\|_{X_0}^2\frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta}dt\right)^{\frac{1-\theta}{2}}\leqslant\left(1-\frac{1}{4}\delta_{L_2(X_0),l}\left(\frac{\varepsilon}{4},h_1\right)\right)^{1-\theta}.\end{aligned}$$

Kończy to dowód twierdzenia.

□

Przedstawimy teraz rezultaty dotyczące stabilności jednostajnej własności Kadeca-Klee'ego i własności (β). Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, dla której istnieje ciąg uogólniony operatorów $(\Pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ indeksowany elementami zbioru skierowanego Λ spełniający następujące warunki:

1. $\Pi_\lambda(X)$ jest podprzestrzenią skończenie wymiarową przestrzeni X,
2. $\lim_{\lambda\in\Lambda}\|\Pi_\lambda x-x\|_X=0$ dla każdego $x\in X$,
3. dla każdego $\varepsilon>0$ istnieje $\delta>0$ taka, że dla dowolnego $\lambda\in\Lambda$, jeżeli $x\in B_X$ i $\|\Pi_\lambda x-x\|_X\geqslant\varepsilon$, to $\|\Pi_\lambda x\|_X\leqslant 1-\delta$.

Zauważmy, że warunek 3 implikuje, że $\|\Pi_\lambda\|\leqslant 1$ dla każdego $\lambda\in\Lambda$.

Uwaga 4.3.
Zdefiniujmy następujący moduł:

$$\delta(\varepsilon)=\inf\{1-\|\Pi_\lambda x\|_X:\lambda\in\Lambda,\ x\in B_X,\ \|\Pi_\lambda x-x\|_X\geqslant\varepsilon\} \tag{4.5}$$

Warunek 3 oznacza, że $\delta(\varepsilon)>0$ dla każdego $\varepsilon>0$. Zgodnie z uwagą 1.1 możemy założyć, że δ jest funkcją wypukłą.

Pokażemy teraz, że takie założenia o operatorach Π_λ implikują, że przestrzeń X ma jednostajną własność Kadeca-Klee'ego. Niech zatem (x_n) będzie ciągiem w B_X, który jest słabo zbieżny do x oraz $\operatorname{sep}(x_n)\geqslant\varepsilon>0$. Dla dowolnego $\gamma\in\left(0,\frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)$, gdzie δ jest funkcją z uwagi 4.3, istnieje λ takie, że $\|\Pi_\lambda x-x\|_X<\gamma$. Korzystając z własności 1, możemy wybrać podciąg (x_{n_k}) w taki sposób, że ciąg $(\Pi_\lambda x_{n_k})$ jest zbieżny w X. Wtedy możemy dodatkowo założyć, że $\|\Pi_\lambda x_{n_k} - \Pi_\lambda x_{n_l}\|_X \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$ dla dowolnych indeksów $k \neq l$. Dla takich indeksów mamy

$$\varepsilon \leqslant \|x_{n_k} - x_{n_l}\|_X \leqslant \|x_{n_k} - \Pi_\lambda x_{n_k}\|_X + \|\Pi_\lambda x_{n_k} - \Pi_\lambda x_{n_l}\|_X + \|\Pi_\lambda x_{n_l} - x_{n_l}\|_X,$$

więc

$$\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \|x_{n_k} - \Pi_\lambda x_{n_k}\|_X + \|\Pi_\lambda x_{n_l} - x_{n_l}\|_X.$$

Bez straty ogólności rozważań możemy zatem założyć, że $\|\Pi_\lambda x_{n_k} - x_{n_k}\|_X \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ podciąg (x_{n_k}) również dąży słabo do x, to z własności 1 stwierdzamy, że ciąg $(\Pi_\lambda x_{n_k})$ dąży do $\Pi_\lambda x$ w normie. Zatem

$$\|x\|_X \leqslant \|\Pi_\lambda x - x\|_X + \|\Pi_\lambda x\|_X \leqslant \gamma + \lim_{k\to\infty} \|\Pi_\lambda x_{n_k}\|_X \leqslant \gamma + 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) \leqslant 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right),$$

co pokazuje, że istotnie przestrzeń X ma jednostajną własność Kadeca-Klee'ego.

Twierdzenie 4.4.

Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że istnieje ciąg uogólniony operatorów $\Pi_\lambda : X_0 + X_1 \to X_0 + X_1$, $\lambda \in \Lambda$ taki, że $\Pi_\lambda(X_j) \subset X_j$, $j = 0, 1$, $\|\Pi_\lambda\| \leqslant 1$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, jako norma operatora Π_λ działającego na przestrzeni X_1 oraz dla przestrzeni $X = X_0$ spełnione są powyższe warunki 1, 2, 3. Wtedy dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ rodzina operatorów Π_λ rozpatrywanych na przestrzeni interpolacyjnej $Y = (X_0, X_1)_\theta$ otrzymanej za pomocą zespolonej metody Calderóna również spełnia warunki 1, 2, 3. W konsekwencji Y ma jednostajną własność Kadeca-Klee'ego.

Dowód.

Dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$, Π_λ działa jako operator liniowy z Y w Y i dla jego normy $\|\Pi_\lambda\|_\theta$ zachodzi nierówność $\|\Pi_\lambda\|_\theta \leqslant \|\Pi_\lambda\|_0^{1-\theta}\|\Pi_\lambda\|_1^\theta \leqslant 1$, gdzie $\|\Pi_\lambda\|_j$ oznacza normę Π_λ działającego jako operator z X_j do X_j, $j = 0, 1$ (zobacz np. twierdzenie 4.2.1 w [6]).

Dla wykazania warunku 1 stosujemy rozumowanie z pracy [56]. Rozważamy Π_λ jako operator z $X_0 + X_1$ do $X_0 + X_1$ i bierzemy dowolny funkcjonał $b^* \in (X_0 + X_1)^*$ zerujący się na podprzestrzeni $\Pi_\lambda(X_0)$. Dla dowolnej funkcji $f \in \mathcal{F}$ wartość $f(it)$

należy do X_0 dla każdego $t \in \mathbb{R}$, więc $b^*(\Pi_\lambda(f(it))) = 0$. Zatem funkcja $b^*(\Pi_\lambda(f))$, która jest analityczna w pasie $S = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, zeruje się na osi rzeczywistej i stąd $b^*(\Pi_\lambda(f))$ jest funkcją zerową. W szczególności $b^*(\Pi_\lambda(f(\theta)) = 0$ dla każdego funkcjonału $b^* \in (X_0 + X_1)^*$ zerującego się na $\Pi_\lambda(X_0)$. Stąd $\Pi_\lambda(f(\theta)) \in \Pi_\lambda(X_0)$, co pokazuje, że $\Pi_\lambda(Y) \subset \Pi_\lambda(X_0)$, a więc $\Pi_\lambda(Y)$ jest przestrzenią skończenie wymiarową.

Zbiór $X_0 \cap X_1$ jest gęsty w Y (zobacz np. twierdzenie 4.22 w [6]), więc dla dowolnego $y \in Y$ i $\gamma > 0$ istnieje $x \in X_0 \cap X_1$ taki, że $\|x - y\|_\theta \leqslant \gamma$. Stąd

$$\begin{aligned}\|\Pi_\lambda(y) - y\|_\theta &\leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_\theta + \|\Pi_\lambda(y) - \Pi_\lambda(x)\|_\theta + \|x - y\|_\theta \\ &\leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_\theta + \|\Pi_\lambda\|_\theta \|x - y\|_\theta + \gamma \\ &\leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_\theta + 2\gamma.\end{aligned}$$

Ponieważ $x \in X_0 \cap X_1$, więc $\Pi_\lambda(x) - x \in X_0 \cap X_1$, a zatem

$$\begin{aligned}\|\Pi_\lambda(y) - y\|_\theta - 2\gamma \leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_\theta &\leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_{X_0}^{1-\theta} \|\Pi_\lambda(x) - x\|_{X_1}^{\theta} \\ &\leqslant \|\Pi_\lambda(x) - x\|_{X_0}^{1-\theta} (2\|x\|_{X_1})^\theta\end{aligned}$$

(zobacz wniosek 2.1.8 w [41]). Korzystając z własności 2 znajdujemy $\lambda_\gamma \in \Lambda$ takie, że $\|\Pi_\lambda(x) - x\|_{X_0} < \left(\gamma (2\|x\|_{X_1})^{-\theta}\right)^{1/(1-\theta)}$ dla wszystkich $\lambda \geqslant \lambda_\gamma$. Dla takich λ mamy $\|\Pi_\lambda(y) - y\|_\theta \leqslant 3\gamma$, co pokazuje, że spełniony jest warunek 2.

Pozostaje jeszcze pokazanie, że warunek 3 przenosi się na przestrzeń Y. W tym celu bierzemy dowolny $x \in B_Y$ i $\lambda \in \Lambda$ takie, że $\|x - \Pi_\lambda x\|_\theta \geqslant \varepsilon > 0$. Dla dowolnego $\gamma > 0$ znajdujemy funkcję $f \in \mathcal{F}$ taką, że $f(\theta) = x$ i $\|f\|_{\mathcal{F}} \leqslant 1 + \gamma$. Korzystając z nierówności (4.1) dostajemy

$$\begin{aligned}\|\Pi_\lambda x\|_\theta = \|\Pi_\lambda f(\theta)\|_\theta &\leqslant \left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt\right)^{1-\theta} \times \\ &\times \left(\frac{1}{\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(1+it)\|_{X_1} \mu_1(\theta, t) dt\right)^{\theta} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty} (1 - \delta(\|\Pi_\lambda f(it) - f(it)\|_{X_0})) \mu_0(\theta, t) dt\right)^{1-\theta} (1+\gamma)^\theta \\ &\leqslant \left(1 - \delta\left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(it) - f(it)\|_{X_0} \frac{\mu_0(\theta, t)}{1-\theta} dt\right)\right)^{1-\theta} (1+\gamma)^\theta,\end{aligned}$$

gdzie zgodnie z uwagą 4.3 przyjmujemy, że moduł δ jest funkcją wypukłą i ostatnia nierówność wynika z tożsamości (4.2) i uogólnionej nierówności Jensena. Ponadto

$$\varepsilon \leqslant \|x - \Pi_\lambda x\|_\theta \leqslant \left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(it) - f(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt\right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(1+it) - f(1+it)\|_{X_1} \mu_1(\theta, t) dt \right)^{\theta}$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(it) - f(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt \right)^{1-\theta} (2+2\gamma)^{\theta}.$$

Daje nam to następujące oszacowanie

$$\left(\frac{\varepsilon}{(2+2\gamma)^{\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant \frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda f(it) - f(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta, t) dt.$$

Łącząc te dwa oszacowania, otrzymujemy

$$\|\Pi_\lambda x\|_{\theta} \leqslant \left(1 - \delta \left(\left(\frac{\varepsilon}{(2+2\gamma)^{\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right) \right)^{1-\theta} (1+\gamma)^{\theta},$$

co po przejściu do granicy z $\gamma \to 0$ daje nam ostatecznie nierówność

$$\|\Pi_\lambda x\|_{\theta} \leqslant \left(1 - \delta \left(\left(\frac{\varepsilon}{2^{\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right) \right)^{1-\theta}.$$

□

Niech X będzie przestrzenią Banacha z bazą $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ze stałą bazową równą jeden. Wtedy ciąg operatorów $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowanych za pomocą wzoru $\Pi_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, gdzie $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e_i$, spełnia warunki 1 i 2. Ponadto jeśli X jest jednostajnie wypukła, to spełniony jest warunek 3. Istotnie, jeżeli $\varepsilon \leqslant \|x - \Pi_n x\|$, to z definicji modułu wypukłości otrzymujemy

$$\|\Pi_n x\| \leqslant \left\| \frac{\Pi_n x + x}{2} \right\| \leqslant 1 - \delta_X(\varepsilon).$$

Podamy teraz przykład przestrzeni Banacha X, która nie jest jednostajnie wypukła, a dla której istnieją operatory spełniające warunki 1, 2, 3.

Przykład 4.1.

Niech $X = (\mathbb{R} \oplus l_2)_{l_1}$. Element $x = (t, y) \in X$, gdzie $t \in \mathbb{R}$ oraz $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2$, będziemy zapisywać jako ciąg $x = (t, y_1, y_2, \ldots)$. Mamy $\|x\| = |t| + \|y\|_2$, gdzie $\|\cdot\|_2$ jest standardową normą w przestrzeni l_2.

Definiujemy ciąg operatorów Π_n wzorem $\Pi_n x = (t, y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots)$. Oczywiście dla tego ciągu spełnione są warunki 1 i 2. Pokażemy, że spełniony jest także warunek 3. Załóżmy w tym celu, że $x \in B_X$, $x = (t, y)$ jest taki, że $\|x - \Pi_n x\| \geqslant \varepsilon$, gdzie $\varepsilon \in [0, 1)$. Wtedy $|t| + \|y\|_2 \leqslant 1$, co daje nam nierówność

$$\begin{aligned}\|(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots)\|_2^2 + \varepsilon^2 &\leqslant \|(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots)\|_2^2 + \|(0, \dots, 0, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots)\|_2^2 \\ &\leqslant (1 - |t|)^2,\end{aligned}$$

czyli

$$\|(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots)\|_2 \leqslant \sqrt{(1 - |t|)^2 - \varepsilon^2}.$$

Ostatecznie

$$\|\Pi_n x\| = |t| + \|(y_1, y_2, \dots, y_n, 0, \dots)\|_2 \leqslant |t| + \sqrt{(1 - |t|)^2 - \varepsilon^2}.$$

Zdefiniujmy funkcję $f : [0, 1 - \varepsilon] \to \mathbb{R}$ wzorem $f(s) = s + \sqrt{(1 - s)^2 - \varepsilon^2}$. Wtedy $f'(s) = 1 - \frac{1-s}{\sqrt{(1-s)^2 - \varepsilon^2}}$, zatem $f'(s) \leqslant 0$ dla $s \in [0, 1 - \varepsilon)$. Oznacza to, że $f(s) \leqslant f(0)$, co daje nam nierówność

$$\|\Pi_n x\| \leqslant \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

pokazującą, że ciąg operatorów (Π_n) spełnia warunek 3. Ponadto przestrzeń X nie jest nawet ściśle wypukła. Istotnie, wystarczy położyć $u = (1, 0, 0, \dots)$, $v = (0, 1, 0, 0, \dots)$, aby zauważyć, że $\|u\| = \|v\| = 1$ i $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| = 1$.

Przejdziemy teraz do analogicznych wyników dotyczących własności (β). Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, dla której istnieje ciąg uogólniony operatorów $(\Pi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ indeksowany elementami zbioru skierowanego Λ spełniający następujące warunki:

I $\Pi_\lambda(X)$ jest podprzestrzenią skończenie wymiarową przestrzeni X,

II $\lim_{\lambda \in \Lambda} \|\Pi_\lambda x - x\|_X = 0$ dla każdego $x \in X$,

III dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że dla dowolnego $\lambda \in \Lambda$, jeżeli $x, y \in B_X$ i $\|\Pi_\lambda y - y\|_X \geqslant \varepsilon$, to
$$\left\|\frac{\Pi_\lambda x + y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta.$$

W tym przypadku definiujmy moduł:

$$\delta(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{\Pi_\lambda x + y}{2}\right\|_X : \lambda \in \Lambda,\ x, y \in B_X,\ \|\Pi_\lambda y - y\|_X \geqslant \varepsilon\right\} \tag{4.6}$$

Warunek III oznacza, że $\delta(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon > 0$ i zgodnie z uwagą 1.1 możemy założyć, że δ jest funkcją wypukłą.

Pokażemy, że takie założenie o operatorach $(\Pi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ implikuje własność (β) dla przestrzeni X. Załóżmy w tym celu, że $x \in B_X$ oraz (x_n) jest ciągiem w B_X takim, że $\operatorname{sep}(x_n) \geqslant \varepsilon > 0$. Niech λ będzie takie, że $\|\Pi_\lambda x - x\|_X \leqslant \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$. Dla dowolnych liczb $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$ mamy

$$\varepsilon \leqslant \|x_n - x_m\|_X \leqslant \|x_n - \Pi_\lambda x_n\|_X + \|\Pi_\lambda x_n - \Pi_\lambda x_m\|_X + \|\Pi_\lambda x_m - x_m\|_X.$$

Z własności I powyżej, możemy dobrać $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ tak, że $\|\Pi_\lambda x_{n_0} - \Pi_\lambda x_{m_0}\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$. Wtedy $\|\Pi_\lambda x_{n_0} - x_{n_0}\|_X \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$ lub $\|\Pi_\lambda x_{m_0} - x_{m_0}\|_X \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Załóżmy, że $\|\Pi_\lambda x_{n_0} - x_{n_0}\|_X \geqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Daje nam to nierówności

$$\left\|\frac{x + x_{n_0}}{2}\right\|_X \leqslant \left\|\frac{\Pi_\lambda x + x_{n_0}}{2}\right\|_X + \left\|\frac{x - \Pi_\lambda x}{2}\right\|_X \leqslant 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + \frac{\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)}{2} = 1 - \frac{1}{2}\delta\left(\frac{\varepsilon}{3}\right),$$

co pokazuje, że przestrzeń X ma własność (β).

Twierdzenie 4.5.

Niech (X_0, X_1) będzie parą porównywalnych przestrzeni Banacha takich, że istnieje ciąg uogólniony operatorów $\Pi_\lambda : X_0 + X_1 \to X_0 + X_1$, $\lambda \in \Lambda$ taki, że $\Pi_\lambda(X_j) \subset X_j$, $j = 0, 1$, $\|\Pi_\lambda\| \leqslant 1$ dla każdego $\lambda \in \Lambda$, jako norma operatora Π_λ działającego na przestrzeni X_1 oraz dla przestrzeni $X = X_0$ spełnione są powyższe warunki I, II, III. Wtedy dla dowolnego $\theta \in (0, 1)$ rodzina operatorów Π_λ rozpatrywanych na przestrzeni interpolacyjnej $Y = (X_0, X_1)_\theta$ otrzymanej za pomocą zespolonej metody Calderóna róownież spełnia warunki I, II, III. W konsekwencji Y ma własność (β).

Dowód.

W dowodzie twierdzenia 4.4 pokazaliśmy, że rodzina operatorów Π_λ spełnia warunki I, II. Wystarczy zatem pokazać, że spełniony jest warunek III.

Niech $x, y \in B_Y$ będą takie, że $\|\Pi_\lambda y - y\|_\theta \geqslant \varepsilon > 0$. Dla dowolnego $\gamma > 0$ wybieramy funkcje $f, g \in \mathcal{F}$ takie, że $f(\theta) = x$, $g(\theta) = y$ oraz $\|f\|_\mathcal{F} \leqslant 1 + \gamma$, $\|g\|_\mathcal{F} \leqslant 1 + \gamma$.

Na mocy nierówności (4.1) mamy

$$\left\|\frac{\Pi_\lambda x + y}{2}\right\|_\theta = \left\|\frac{\Pi_\lambda f(\theta) + g(\theta)}{2}\right\|_\theta \leqslant \left(\frac{1}{1-\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\Pi_\lambda f(it) + g(it)}{2}\right\|_{X_0}\mu_0(\theta, t)dt\right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \frac{\Pi_\lambda f(1+it) + g(1+it)}{2} \right\|_{X_1} \mu_1(\theta,t)dt \right)^{\theta}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \delta(\|\Pi_\lambda g(it) - g(it)\|_{X_0}))\mu_0(\theta,t)dt \right)^{1-\theta} (1+\gamma)^{\theta}$$

$$\leqslant \left(1 - \delta \left(\int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda g(it) - g(it)\|_{X_0} \frac{\mu_0(\theta,t)}{1-\theta} dt \right) \right)^{1-\theta} (1+\gamma)^{\theta},$$

gdzie w ostatniej nierówności również skorzystaliśmy z tożsamości (4.2) i uogólnionej nierówności Jensena. Ponadto

$$\varepsilon \leqslant \|y - \Pi_\lambda y\|_\theta \leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda g(it) - g(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta,t)dt \right)^{1-\theta} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda g(1+it) - g(1+it)\|_{X_1} \mu_1(\theta,t)dt \right)^{\theta}$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda g(it) - g(it)\|_{X_0} \mu_0(\theta,t)dt \right)^{1-\theta} (2+2\gamma)^{\theta}.$$

Daje nam to następujące oszacowanie

$$\left(\frac{\varepsilon}{(2+2\gamma)^{\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leqslant \frac{1}{1-\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \|\Pi_\lambda g(it) - g(it)\|_{X_0} \mu_0(s,t)dt.$$

Otrzymujemy zatem ostatecznie

$$\left\| \frac{\Pi_\lambda x + y}{2} \right\|_{\theta} \leqslant \left(1 - \delta \left(\left(\frac{\varepsilon}{(2+2\gamma)^{\theta}} \right)^{\frac{1}{1-\theta}} \right) \right)^{1-\theta} (1+\gamma)^{\theta}.$$

i aby otrzymać warunek III wystarczy przejść do granicy z $\gamma \to 0$.

$\square$

Podobnie jak w przypadku własności Kadeca-Klee'go, załóżmy teraz, że X jest przestrzenią Banacha z bazą $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ze stałą bazową równą jeden oraz zdefiniujmy operatory $\Pi_n : X \to X$, $n \in \mathbb{N}$ wzorami $\Pi_n x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, gdzie $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$. Pokażemy, że jeżeli przestrzeń X jest jednostajnie wypukła, to operatory te spełniają warunek III. Istotnie, jeżeli $x, y \in B_X$, $\|\Pi_n y - y\|_X \geqslant \varepsilon > 0$, to

$$2\|\Pi_n x - y\|_X \geqslant \|I - \Pi_n\|\|\Pi_n x - y\|_X \geqslant \|(I - \Pi_n)(\Pi_n x - y)\|_X = \|\Pi_n y - y\|_X \geqslant \varepsilon,$$

zatem

$$\|\Pi_n x - y\|_X \geqslant \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.7}$$

co z definicji modułu jednostajnej wypukłości daje nierówność

$$\left\|\frac{\Pi_n x + y}{2}\right\|_X \leqslant 1 - \delta_X\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Podamy teraz przykład przestrzeni Banacha X z bazą, która nie jest jednostajnie wypukła, jednak dla której istnieją operatory spełniające warunek III.

Przykład 4.2.
Niech $X = l_2$, oraz niech $R : X \to X$ będzie operatorem danym wzorem

$$R(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_2, x_3, x_4, \ldots).$$

Wprowadźmy w przestrzeni X następującą normę

$$\|x\| = \max\{\|x\|_2, 2\|Rx\|_2\}, \ x \in X,$$

gdzie $\|\cdot\|_2$ oznacza standardową normę w przestrzeni l_2. Przestrzeń ta nie jest nawet ściśle wypukła. Istotnie, jeżeli $x = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$, $y = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ldots)$, to $\|x\| = \|y\| = 1$ oraz $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$.

Niech operatory Π_n, $n \in \mathbb{N}$, będą zdefiniowane wzorami $\Pi_n x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$, gdzie $x = (x_1, x_2, \ldots)$. Oczywiście spełniają one warunki I, II. Pokażemy, że spełniają one także warunek III. Niech $x, y \in B_X$, $\|\Pi_n y - y\| \geqslant \varepsilon > 0$. Wtedy

$$\|\Pi_n y - y\| = 2\|R(\Pi_n y - y)\|_2 = 2\|\Pi_n y - y\|_2 \geqslant \varepsilon \tag{4.8}$$

i nierówność (4.7) pokazuje, że $\|\Pi_n x - y\|_2 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, Możliwe są dwa przypadki. Załóżmy najpierw, że $\left\|\frac{\Pi_n x+y}{2}\right\| = \left\|\frac{\Pi_n x+y}{2}\right\|_2$. Z definicji modułu jednostajnej wypukłości przestrzeni l_2 otrzymujemy

$$\left\|\frac{\Pi_n x + y}{2}\right\| = \left\|\frac{\Pi_n x + y}{2}\right\|_2 \leqslant 1 - \delta_{l_2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Załóżmy teraz, że

$$\left\|\frac{\Pi_n x + y}{2}\right\| = 2\left\|\frac{R(\Pi_n x + y)}{2}\right\|_2 = \left\|\frac{\Pi_n 2Rx + 2Ry}{2}\right\|_2.$$

Z nierówności (4.8) i (4.7) wynika, że $\|\Pi_n 2Rx - 2Ry)\|_2 \geqslant \varepsilon$, więc w tym przypadku

$$\left\|\frac{\Pi_n x + y}{2}\right\| = \left\|\frac{\Pi_n 2Rx + 2Ry}{2}\right\|_2 \leqslant 1 - \delta_{l_2}(\varepsilon).$$

Przejdziemy teraz do wyniku dotyczącego stabilności jednostajnej monotoniczności krat Banacha przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna. W dalszej części tego rozdziału będziemy zakładali, że wszystkie rozpatrywane przestrzenie są funkcyjnymi kratami Banacha. Zaczniemy od przytoczenia dwóch wyników, z których będziemy korzystać w dowodzie naszego twierdzenia.

Lemat 4.6 (Lemat 1 z pracy [48]).
Załóżmy, że (X_0, X_1) *jest parą porównywalnych krat funkcyjnych i niech* $\theta \in (0, 1)$. *Jeżeli dla funkcji* $h \in X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$ *zachodzi nierówność*

$$|h| \leqslant f^{1-\theta} g^{\theta},$$

gdzie $f \in X_{0+}$, $g \in X_{1+}$, *to istnieją funkcje* $0 \leqslant f_1 \leqslant f$, $0 \leqslant g_1 \leqslant g$ *takie, że* $|h| = f_1^{1-\theta} g_1^{\theta}$.

Przytoczymy teraz rezultat, który dla krat funkcyjnych był wykazany w pracy [52], a następnie został udowodniony w pracy [47] dla dowolnych krat Banacha.

Twierdzenie 4.7 ([47], [52]).
Niech (X_0, X_1) *będzie parą porównywalnych funkcyjnych krat Banacha oraz niech* $\theta \in (0, 1)$. *Przestrzeń interpolacyjna* $(X_0, X_1)_\theta$ *otrzymana za pomocą zespolonej metody interpolacji Calderóna jest przestrzenią tych wszystkich funkcji* $f \in X_0 + X_1$, *które należą do domknięcia zbioru* $X_0 \cap X_1$ *w kracie Banacha* $X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}$, *czyli*

$$(X_0, X_1)_\theta = \overline{X_0 \cap X_1}^{X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}}.$$

Ponadto normy w tych przestrzeniach są równe, czyli

$$\|f\|_\theta = \|f\|_{X_0^{1-\theta} X_1^{\theta}}$$

dla każdego $f \in (X_0, X_1)_\theta$.

Na koniec podamy wynik dotyczący stabilności jednostajnej monotoniczności przy zespolonej metodzie interpolacji Calderóna.

Twierdzenie 4.8.
Niech $\theta \in (0, 1)$ *i* (X_0, X_1) *będzie parą porównywalnych funkcyjnych krat Banacha. Jeżeli co najmniej jedna z krat Banacha* X_0, X_1 *jest jednostajnie monotoniczna, to przestrzeń interpolacyjna* $(X_0, X_1)_\theta$ *jest jednostajnie monotoniczna.*

Dowód.

Załóżmy, że krata X_0 jest jednostajnie monotoniczna. Niech x, y będą takimi elementami przestrzeni interpolacyjnej $(X_0, X_1)_\theta$, że $\|x\|_\theta \leqslant 1$, $\|y\|_\theta \geqslant \varepsilon > 0$ oraz $0 \leqslant y \leqslant x$. W świetle twierdzenia 4.7 możemy traktować x, y jako elementy przestrzeni $X_0^{1-\theta} X_1^\theta$. Dla dowolnego $\gamma \in (0,1)$ wybieramy $g \in B(X_{0+})$, $h \in B(X_{1+})$ takie, że $x \leqslant (1+\gamma) g^{1-\theta} h^\theta$. Wtedy, na mocy lematu 4.6, możemy znaleźć funkcje $0 \leqslant g_1 \leqslant (1+\gamma) g$, $0 \leqslant h_1 \leqslant (1+\gamma) h$ takie, że $x = g_1^{1-\theta} h_1^\theta$. Zatem spełnione są nierówności

$$0 \leqslant y \leqslant x = g_1^{1-\theta} h_1^\theta.$$

Zdefiniujmy funkcję λ wzorem $\lambda(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)}$, jeśli $x(\omega) \neq 0$ i $\lambda(\omega) = 0$, jeśli $x(\omega) = 0$ oraz położmy $y_0(\omega) = \lambda(\omega) g_1(\omega)$, $y_1(\omega) = \lambda(\omega) h_1(\omega)$. Ponieważ $|\lambda(\omega)| \leqslant 1$, więc $y_j \in X_{j+}$, $j = 0, 1$ oraz $\|y_0\|_{X_0} \leqslant 1 + \gamma$ i $\|y_1\|_{X_1} \leqslant 1 + \gamma$. Ponadto $y = y_0^{1-\theta} y_1^\theta$. Zatem również

$$y = \|y_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|y_1\|_{X_1}^\theta \left(\frac{y_0}{\|y_0\|_{X_0}} \right)^{1-\theta} \left(\frac{y_1}{\|y_1\|_{X_1}} \right)^\theta,$$

co pokazuje, że

$$\varepsilon \leqslant \|y\|_\theta \leqslant \|y_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|y_1\|_{X_1}^\theta \leqslant \|y_0\|_{X_0}^{1-\theta} 2^\theta,$$

czyli

$$\|y_0\|_{X_0} \geqslant \varepsilon_1 := \left(\frac{\varepsilon}{2^\theta} \right)^{\frac{1}{1-\theta}}.$$

Następnie mamy

$$\begin{aligned} x - y &= (1-\lambda) x = (1-\lambda) g_1^{1-\theta} h_1^\theta = (g_1 - y_0)^{1-\theta} (h_1 - y_1)^\theta \\ &= \|g_1 - y_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|h_1 - y_1\|_{X_1}^\theta \left(\frac{g_1 - y_0}{\|g_1 - y_0\|_{X_0}} \right)^{1-\theta} \left(\frac{h_1 - y_1}{\|h_1 - y_1\|_{X_1}} \right)^\theta, \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} \|x - y\|_\theta &\leqslant \|g_1 - y_0\|_{X_0}^{1-\theta} \|h_1 - y_1\|_{X_1}^\theta \\ &\leqslant (1+\gamma)^{1-\theta} \left(1 - \delta_{m, X_0} \left(\frac{\|y_0\|_{X_0}}{1+\gamma} \right) \right)^{1-\theta} \|h_1\|_{X_1}^\theta \\ &\leqslant (1+\gamma) \left(1 - \delta_{m, X_0} \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \right) \right)^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Wystarczy teraz przejść do granicy z $\gamma \to 0$, aby otrzymać tezę twierdzenia.

$\square$

Bibliografia

[1] Albiac, F.; Kalton, N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Springer, New York, 2006.

[2] Aleksandrowicz K.; Prus S., *Uniform Kadec-Klee property in interpolation spaces*, J. Math. Anal. Appl. 509, Issue 2, (2022), 125947.

[3] Aleksandrowicz, K.; Prus, S.; *Convexity properties of Yoshikawa-Sparr interpolation spaces*, Math. Nachr. 297 (2024), no. 7, 2624—2638.

[4] Aleksandrowicz, K.; Markowicz, J; Prus, S.; *Monotonicity properties and order smoothness in Banach lattices*, preprint.

[5] Beauzamy, B., *Propriétés géométriques des espaces d'interpolation*, Séminaire Maurey-Schwartz 1974–1975, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, Paris, 1975.

[6] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation spaces. An introduction*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[7] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, American Mathematical Society, New York, 1948.

[8] Borwein, J. M.; Sims, B., *Nonexpansive mappings on Banach lattices and related topics*, Houston J. Math. 10 (1984), no. 3, 339–356.

[9] Calderón, A.-P., *Intermediate spaces and interpolation, the complex method*, Studia Math. 24 (1964), 113–190.

[10] Casini, E.; Vignati, M., *The uniform nonsquareness for the complex interpolation spaces*, J. Math. Anal. Appl. 164 (1992), no. 2, 518–523.

[11] Clarkson, J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), no.3, 396–414.

[12] Cwikel, M., *Lecture notes on duality and interpolation spaces*, arXiv:0803.3558 [math.FA], 2014, https://doi.org/10.48550/arXiv.0803.3558.

[13] Cwikel, M.; Reisner, S., *Interpolation of uniformly convex Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 84 (1982), no. 4, 555–559.

[14] Davis, W.; Figiel, T.;. Johnson, W. B; Pełczyński, A., *Factoring weakly compact operators*, J. Funct. Anal. 17 (1974), 311–327.

[15] Day, M. M., *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[16] Day, M. M., *Some more uniformly convex spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 47 (1941), 504–507.

[17] Deville, R.; Godefroy, G.; Zizler, V., *Smoothness and renormings in Banach spaces*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

[18] Dilworth, S. J.; Kutzarova, D.; Randrianarivony, N. L., *The transfer of property (β) of Rolewicz by a uniform quotient map*, Trans. Amer. Math. Soc. 368 (2016), no.9, 6253–6270.

[19] Dodds, P. G.; Dodds, T. K.; Sedaev, A. A.; Sukochev, F. A., *Local uniform convexity and Kadec-Klee type properties in K-interpolation spaces. I. General theory*, J. Funct. Spaces Appl. 2 (2004), no. 2, 125—173.

[20] Dowling, P.N., *On convexity properties of ψ-direct sums of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. 288 (2003), 540–543.

[21] Emmanuele, G.; Villani, A., *Lifting of rotundity properties from E to $L_p(\mu, E)$*, Rocky Mountain J. Math. 17 (1987), no.3, 617–627.

[22] Fan, M., *Some quantitative interpolation theorems under Lions-Peetre's methods*, J. Convex Anal. 16 (2009), no.2, 487—499.

[23] Figiel, T., *On the moduli of convexity and smoothness*, Studia Math. 56 (1976), 121–155.

[24] Foralewski, P.; Hudzik, H.; Kowalewski, W.; Wisła, M., *Monotonicity properties of Banach lattices and their applications—a survey*, Ordered structures and applications, 203–232, Birkhäuser/Springer, Cham, 2016

[25] Foralewski P., Kolwicz P., *Local uniform rotundity in Calderón–Lozanovskiĭ spaces*, J. Convex Anal. 14 (2) (2007), 395–412.

[26] Goebel, K.; Kirk, W. A., *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[27] Goebel K.; Prus S., *Elements of Geometry of Balls in Banach Spaces*, Oxford University Press, Oxford, 2018.

[28] Goebel K.; Sękowski T., *The modulus of noncompact convexity*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A 38 (1984), 41–48.

[29] Hudzik, H.; Kamińska, A.; Mastyło, M.,*Monotonicity and rotundity properties in Banach lattices*, Rocky Mountain J. Math. 30 (2000), no. 3, 933—950.

[30] Hudzik, H.; Kurc, W., *Monotonicity properties of Musielak-Orlicz spaces and dominated best approximation in Banach lattices*, J. Approx. Theory 95 (3) (1998), 353–368.

[31] Huff, R., *Banach spaces which are nearly uniformly convex*, Rocky Mountain J. Math. 10 (1980), no. 4, 743–749.

[32] Istrăţescu, V. I., *Strict convexity and complex strict convexity*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1984.

[33] Kurc, W., *A dual property to uniform monotonicity in Banach lattices*, Collect. Math. 44 (1993), no. 1-3, 155–165.

[34] Kutzarova, D.; Landes, T., *Nearly uniform convexity of infinite direct sums*, Indiana Univ. Math. J. 41 (1992), no. 4, 915-–926.

[35] Kutzarova, D.; Landes, T., *NUC and related properties of finite direct sums*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 8 (1994), no. 1, 45–54.

[36] Kutzarova, D.; Maluta, E.; Prus, S., *Property (β) implies normal structure of the dual space*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 41 (1992), no. 3, 353–368.

[37] Kutzarova, D.; Nikolova, L. I.; Prus, S., *Infinite-dimensional geometric properties of real interpolation spaces*, Math. Nachr. 191 (1998), 215—228.

[38] Lions, J.-L.; Peetre, J., *Sur une classe d'espaces d'interpolation*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1964), no. 19, 5–68.

[39] Lindenstrauss, J.; Tzafriri, L., *Classical Banach spaces. II*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[40] Lovaglia, A. R., *Locally uniformly convex Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 225–238.

[41] A. Lunardi, *Interpolation theory.*, Appunti. Sc. Norm. Super. Pisa (N. S.) 16, Edizioni della Normale, Pisa, 2018.

[42] Maligranda, Lech, *Simple norm inequalities*, Amer. Math. Monthly 113 (2006), no. 3, 256—260.

[43] Markowicz, J.; Prus, S., *Opial properties in interpolation spaces*, Math. Nachr. 294 (2021), no. 10, 1922–1931.

[44] Markowicz, J.; Prus, S., *Uniform convexity of general direct sums and interpolation spaces*, J. Topol. Anal. 14 (2022), no. 4, 1001–1013.

[45] Meyer-Nieberg, P., *Banach lattices*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[46] Partington, J. R., *On nearly uniformly convex Banach spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 93 (1983), no. 1, 127–129.

[47] Raynaud, Y.; Tradacete, P., *Interpolation of Banach lattices and factorization of p-convex and q-concave operators*, Integral Equations Operator Theory 66 (2010), no. 1, 79–112.

[48] Reisner, S., *On two theorems of Lozanovski? concerning intermediate Banach lattices*, *Geometric aspects of functional analysis*, 1986/87, 67—83, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[49] Rolewicz, S., *On drop property*, Studia Math. 85 (1986), no. 1, 27–35.

[50] Rolewicz, S., *On Δ-uniform convexity and drop property*, Studia Math. 87 (1987), no. 2, 181—191.

[51] Salvatori, M.; Vignati, M., *On the stability of multi-dimensional convexity under interpolation*, Math. Nachr. 164 (1993), 299–308.

[52] Šestakov, V. A., *Complex interpolation in Banach spaces of measurable functions*, Vestnik Leningrad. Univ., Mat. Meh. Astronom. Vyp. 4 (1974), no. 19, 64–68, 171.

[53] Smith, M. A.; Turett, B., *Rotundity in Lebesgue-Bochner function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 257 (1980), no. 1, 105—118.

[54] Šmulian, V., *Sur la dérivabilité de la norme dans l'espace de Banach*, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS (N.S.) 27 (1940), 643–648.

[55] Sparr, G., *Interpolation of several Banach spaces*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 99 (1974), 247—316.

[56] Szwedek, R., *On interpolation of the measure of non-compactness by the complex method*, Quart. J. Math. 66 (2015), 323–332.

[57] Yoshida, K, *Functional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1965.

[58] Yoshikawa, A., *Sur la théorie d'espaces d'interpolation—les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I16 (1969), 407—468 (1970).