



**POLITECHNIKA
RZESZOWSKA**
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ
BUDOWY MASZYN
I LOTNICTWA**
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Praca doktorska

**Optymalizacja kształtu aktuatora
piezoelektrycznego w aktywnej redukcji drgań
struktur dwuwymiarowych**

mgr inż. Romuald Kuras

Promotor pracy: prof. Adam BRAŃSKI

Promotor pomocniczy: dr inż. Mariusz BORKOWSKI, prof. PRz

Rzeszów 2024

Pragnę serdecznie podziękować Mojemu Promotorowi Profesorowi Adamowi Brańskiemu za wszelkie uwagi dotyczące pracy, za kierowanie moją pracą naukową, dzielenie się bezcennym doświadczeniem i wszelką życzliwość w realizacji mojej pracy doktorskiej.

Dziękuję także Moim Kolegom i Koleżankom z zespołu za wszelkie uwagi i pomoc.

Podziękowania składam także na ręce Mojej Żony Igi — za wsparcie i cierpliwość. Dziękuję.

Streszczenie

Praca obejmuje rozważania teoretyczne, numeryczne oraz badania eksperymentalne dotyczące optymalizacji kształtu aktuatora piezoelektrycznego (PZT) w aktywnej redukcji drgań struktur dwuwymiarowych. Celem pracy było znalezienie kształtu asymetrycznego PZT (a-PZT), który najefektywniej zredukuje drgania płyty trójkątnej. Zanim jednak rozważono przypadek zagadnienia dwuwymiarowego, rozwiązano ten problem dla zagadnienia jednowymiarowego tj. dla belek. Tym samym jasno przedstawiono ideę a-PZT i równocześnie rozwiązano nowy problem dla belki. Zarówno dla belki jak i dla płyty trójkątnej znaleziono też optymalne położenie a-PZT na strukturze. Kryterium optymalizacyjnym było uzyskanie największej efektywności redukcji drgań przy tej samej energii dołożonej do układu struktura-PZT. Zdefiniowane funkcje celu, zarówno dla belki, jak i płyty, wynikały z analitycznych rozważań, zweryfikowanych obliczeniami numerycznymi. W przypadku płyty trójkątnej wykonano też badania eksperymentalne, które ostatecznie zweryfikowały zastosowane podejście. We wszystkich badaniach dla płyty trójkątnej, efektywność redukcji drgań płyty trójkątnej przez a-PZT odniesiono do efektywności standardowych PZT, a mianowicie kołowego PZT (c-PZT) i kwadratowego PZT (s-PZT).

Abstract

The work includes theoretical, numerical considerations and experimental studies on the optimisation of the piezoelectric actuator (PZT) shape in the active vibration reduction of two-dimensional structures. The aim of the work was to find an asymmetric PZT shape (a-PZT) that would most effectively reduce vibration of a triangular plate. However, before considering a case of two-dimensional problem, this problem was solved for a one-dimensional problem, i.e. for beams. In this way the idea of a-PZT was clarified and at the same time a new problem was solved for beam. For both the beam and the triangular plate, optimal position of the a-PZT on the structure was also found. The optimisation criterion was to obtain the highest vibration reduction efficiency for the same energy input to the structure-PZT system. Defined objective functions, both for the beam and the plate, resulted from analytical considerations verified by numerical calculations. In the case of the triangular plate, experimental studies were also carried out to verify the approach used. In all studies for the triangular plate, the vibration reduction efficiency of the triangular plate by a-PZT was compared with that of standard PZTs, namely circular PZT (c-PZT) and square PZT (s-PZT).

Spis treści

Spis rysunków	xi
Spis tabel	xv
Wykaz ważniejszych oznaczeńxvii
1. Wstęp	1
1.1. Wprowadzenie	1
1.2. Przegląd literatury	6
1.3. Cel, teza oraz hipoteza pracy	12
1.4. Obiekt badań, zakres pracy	13
2. Redukcja drgań belki	17
2.1. Drgania wymuszone z punktową masą i PZT	17
2.1.1 Problem drgań własnych	18
2.1.2 Drgania wymuszone	21
2.2. Modele jednowymiarowych aktuatorów PZT	21
2.2.1 Model symetrycznego PZT (s-PZT)	23
2.2.2 Model asymetrycznego PZT (a-PZT)	26
2.3. Redukcja drgań w stanie ustalonym	29
2.3.1 Redukcja drgań przy zastosowaniu s-PZT	30
2.3.2 Redukcja drgań przy zastosowaniu a-PZT	31
2.4. Redukcja drgań z regulatorem LQR	33
2.4.1 Redukcja drgań przy zastosowaniu s-PZT	36
2.4.2 Redukcja drgań przy zastosowaniu a-PZT	38
2.5. Porównanie s-PZT i a-PZT	39
2.5.1 Redukcja drgań w stanie ustalonym	39
2.5.2 Redukcja drgań z regulatorem LQR	40
2.6. Podsumowanie	43

3. Redukcja drgań płyty trójkątnej	47
3.1. Drgania wymuszone z aktuatorem PZT	47
3.1.1 Problem drgań własnych	49
3.1.2 Rozwiązanie równania drgań wymuszonych	55
3.2. Modele PZT i oddziaływanie PZT-płyta	56
3.2.1 Model a-PZT	57
3.2.2 Model s-PZT i c-PZT	63
3.3. Redukcja drgań stanu ustalonego	64
3.3.1 Redukcja drgań po zastosowaniu s-PZT i c-PZT	65
3.3.2 Redukcja drgań po zastosowaniu a-PZT	67
3.4. Porównanie wyników redukcji	69
4. Eksperymentalna weryfikacja otrzymanych kształtów a-PZT dla płyty trójkątnej	73
4.1. Opis stanowiska badawczego	76
4.1.1 Układ aktywnej redukcji drgań	80
4.2. Wyniki eksperymentów	81
5. Zakończenie, wnioski, kierunki dalszych badań	89
Bibliografia	93
Dodatek A. Postacie drgań własnych dla belki	101
Dodatek B. Częstości drgań własnych dla płyty	105
Dodatek C. Postacie drgań własnych dla płyty	109

Spis rysunków

1.1. Schemat inteligentnej struktury [65].	5
1.2. Schemat układu ze sprzężeniem w przód (po lewej) oraz schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym (po prawej) [28].	5
1.3. Liczba publikacji naukowych związanych z frazą „active vibration control” oraz „active noise control” na przestrzeni lat (z wykorzystaniem aplikacji <i>Dimensions</i>).	7
1.4. Liczba cytowań związanych z frazą „active vibration control” oraz „active noise control” na przestrzeni lat (z wykorzystaniem aplikacji <i>Dimensions</i>).	7
2.1. Geometria zagadnienia.	18
2.2. Geometria belki we współrzędnych lokalnych.	19
2.3. Zastępcze momenty gnące zamienione na dwie pary sił w s-PZT.	24
2.4. Zastępcze momenty gnące zamienione na dwie pary sił w a-PZT.	26
2.5. Postacie drgań własnych: 1 – X_1 , 2 – X_2 , 3 – X_3	30
2.6. Momenty gnące $M_v(x)$ dla trzech pierwszych postaci drgań własnych: $\{M_v\} = \{M_1, 0.5M_2, 0.5M_3\}$	31
2.7. Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla pierwszej postaci drgań własnych.	32
2.8. Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla drugiej postaci drgań własnych.	32
2.9. Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla trzeciej postaci drgań własnych.	32
2.10. Rozkład amplitudy odpowiedzi układu przy sterowaniu w otwartej pętli dla pierwszych trzech modów: 1 – $y_{out;1}$, 2 – $y_{out;2}$, 3 – $y_{out;3}$	37
2.11. Rozkład amplitudy drgań przy sterowaniu w pętli zamkniętej dla pierwszych trzech modów: 1, 2, 3 - odpowiednio: pierwszy, drugi i trzeci mod.	37
2.12. Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla pierwszego modu.	38

2.13. Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla drugiego modu.	38
2.14. Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla trzeciego modu.	38
2.15. Odpowiedź częstotliwościowa dla pierwszego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).	39
2.16. Odpowiedź częstotliwościowa dla drugiego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).	40
2.17. Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).	40
2.18. Schemat odpowiedzi sterowania w pętli zamkniętej z regulatorem LQR.	41
2.19. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora dla pierwszego modu; s-PZT (czerwony), a-PZT (niebieski).	41
2.20. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora (po lewej) dla pierwszego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony).	41
2.21. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR (po lewej) dla pierwszego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony), bez redukcji (czarny).	42
2.22. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora (po lewej) dla drugiego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony).	42
2.23. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR (po lewej) dla drugiego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony), bez redukcji (czarny).	42
2.24. Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora i z regulatorem dla trzeciego modu; a-PZT = s-PZT (niebieski), bez redukcji (czarny).	43
2.25. Umiejscowienie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla pierwszego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (a-PZT*).	44

2.26. Umieszczenie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla drugiego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (a-PZT*).	44
2.27. Umieszczenie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla trzeciego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (s-PZT*).	45
3.1. Płyta trójkątna swobodnie podparta na wszystkich krawędziach.	48
3.2. Bloki użyte do rozwiązania.	50
3.3. Superpozycja bloków B1 i B2.	52
3.4. Znalezione wartości własne λ_* .	53
3.5. Wykresy pierwszych sześciu postaci drgań własnych.	54
3.6. Idea modelu a-PZT.	58
3.7. Węzły użyte we wzorach na ilorazy różnicowe.	60
3.8. Konstrukcja s-PZT (po lewej) i c-PZT (po prawej).	64
3.9. Lokalizacja s-PZT dla pierwszych sześciu modów.	66
3.10. Lokalizacja c-PZT dla pierwszych sześciu modów.	66
3.11. Idea modelowania s-PZT (po lewej) i c-PZT (po prawej).	67
3.12. Lokalizacja ścisłego a-PZT dla pierwszych sześciu modów.	68
3.13. Aktuator a-PZT otrzymany przy podejściu ścisłym (po lewej) i przy podejściu uproszczonym (po prawej).	69
3.14. Wyniki redukcji drgań przy użyciu aktuatorów PZT dla pierwszych trzech modów: s-PZT (po lewej), c-PZT (środek), a-PZT (po prawej).	70
3.15. Odpowiedź częstotliwościowa dla pierwszego modu (po lewej) i drugiego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).	71
3.16. Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu (po lewej) i czwartego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).	71
3.17. Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu (po lewej) i czwartego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).	72
4.1. Badane aktulatory piezoelektryczne: s-PZT (po lewej), c-PZT (na środku), a-PZT (po prawej).	74
4.2. Idea zamontowania płyty w ramie (po lewej), wyfrezowany w ramie rowek w kształcie litery V (po prawej).	75
4.3. Płyty trójkątne z przyklejonymi PZT: s-PZT (po lewej), c-PZT (na środku), a-PZT (po prawej).	75

4.4.	Stanowisko badawcze (po lewej), zamontowana płyta z a-PZT (po prawej).	77
4.5.	Obwód wzmacniający sygnał zaprojektowany w programie PSIM. . . .	78
4.6.	Przebiegi sygnałów w obwodzie wzmacniającym na różnych poziomach przetwarzania sygnału.	79
4.7.	Schemat zrealizowanego eksperymentu aktywnej redukcji drgań. . . .	80
4.8.	Układ ze sprzężeniem zwrotnym wykorzystany w eksperymencie. . . .	81
4.9.	Odpowiedź częstotliwościowa na zakłócenie z głośnika dla trzech płyt z trzema różnymi PZT: s-PZT, c-PZT i a-PZT.	82
4.10.	Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla s-PZT (kolor czerwony) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$	83
4.11.	Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla c-PZT (kolor niebieski) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$	83
4.12.	Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla a-PZT (kolor zielony) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$	84
4.13.	Nałożone wykresy zamkniętej pętli sterowania dla trzech aktuatorów przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$: s-PZT, c-PZT i a-PZT.	84
4.14.	Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.	85
4.15.	Przebieg czasowy c-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.	85
4.16.	Przebieg czasowy a-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.	85
4.17.	Odpowiedź częstotliwościowa sygnałów zamkniętej pętli sterowania dla trzech aktuatorów przy wzmacnieniu krytycznym: $K_{P;s-PZT}^{kr} = 1.80$, $K_{P;c-PZT}^{kr} = 3.20$, $K_{P;a-PZT}^{kr} = 1.22$	86
4.18.	Odpowiedź częstotliwościowa sygnałów zamkniętej pętli sterowania dla badanych aktuatorów na tle sygnałów otwartej pętli sterowania. . . .	87
4.19.	Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P;s-PZT}^{kr} = 1.80$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s. . . .	87
4.20.	Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P;c-PZT}^{kr} = 3.20$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s. . . .	88
4.21.	Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P;a-PZT}^{kr} = 1.22$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s. . . .	88

Spis tabel

2.1. Dane obliczeniowe.	29
2.2. Wyniki wskaźnika efektywności redukcji drgań R_v	39
2.3. Wyniki optymalizacji amplitudy drgań przy sterowaniu w pętli otwartej oraz zamkniętej z regulatorem LQR.	40
2.4. Wyniki wskaźnika I_{Hz}	43
3.1. Wartości własne dla pierwszych pięciu modów płyty trójkątnej.	53
3.2. Dane obliczeniowe.	65
3.3. Wyniki wskaźnika efektywności redukcji drgań R_v	69
4.1. Częstotliwości drgań własnych dla pierwszych sześciu modów obliczone analitycznie oraz przy zastosowaniu środowiska ANSYS.	75
4.2. Błędy względne wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych płyty trójkątnej.	82

Wykaz ważniejszych oznaczeń

E	moduł Younga	[Pa]
J	geometryczny moment bezwładności	[m ⁴]
ρ	gęstość materiału	[kg/m ³]
N_w	szttywność płytowa; $N_w = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$	[Pa · m ⁴]
ω	częstość drgań	[rad/s]
ω_f	częstość drgań wymuszających	[rad/s]
V	napięcie elektryczne	[V]
L	transformata Laplace'a	
L^{-1}	odwrotna transformata Laplace'a	
$\langle \cdot \rangle^0 = H(\cdot)$	funkcja Heaviside'a	
$\langle \cdot \rangle^{-1} = \delta(\cdot)$	funkcja (dystrybucja) Diraca	
$\langle \cdot \rangle^{-2} = \delta'(\cdot)$	pochodna funkcji (dystrybucji) Diraca	
ν	współczynnik Poissona	
Δ	operator Laplace'a; $\Delta = D_x^2 + D_y^2, D_x^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x^2}, D_y^2(\cdot) = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y^2}$	
PVDF	polifluorek winylidenu, $(C_2H_2F_2)_n$	
PZT	cyrkonian-tytanian ołowiu, $Pb[Zr_xTi_{1-x}]O_3$ ($0 \leq x \leq 1$)	

Rozdział 1

Wstęp

1.1. Wprowadzenie

Niepożądane drgania mechaniczne są częstym zjawiskiem w konstrukcjach, budow-
lach i pojazdach. Niejednokrotnie stanowią zagrożenie dla ich integralności, funkcjo-
nalności, a w konsekwencji dla bezpieczeństwa człowieka. Potencjalne źródła drgań
w obiektach mogą mieć także wpływ na wyniki precyzyjnych mechanizmów lub proces
zbierania danych. Do źródeł wibracji pochodzenia naturalnego należą m. in. trzęsienia
ziemi. Zjawiska sejsmiczne wywołują zarówno impulsowe, jak i cykliczne zaburzenia
o relatywnie niebezpiecznej mocy. Kolejnym rodzajem źródeł wibracji w przyrodzie
są pływy morskie, które mogą wywołać niepożądane skutki w zależności od wielkości
fal. Powszechnym problemem jest także ruch pojazdów w pobliżu budynków. Każdy
pojazd, włączając statki powietrzne, jest generatorem częstotliwości, które mogą wy-
wołać rezonanse w konstrukcjach bądź urządzeniach, prowadząc do niepożądanych
wibracji lub hałasu. Wiatr również pełni rolę źródła drgań wywołując np. kołysanie
budynku i może mieć wpływ nie tylko na konstrukcję, ale także np. na wyniki badań
laboratoryjnych prowadzonych w takim obiekcie [68], [69], [74].

W celu ograniczenia negatywnych skutków wibracji stosuje się redukcję drgań.
Rozróżnia się trzy główne grupy metod redukcji drgań: pasywne, semi-aktywne oraz
aktywne. Te pierwsze dotyczą systemów, w których nie stosuje się elementów wy-
konawczych wymagających zewnętrznego źródła zasilania. Do kategorii urządzeń
pasywnych można zaliczyć np. eliminatory drgań (dynamiczny eliminator drgań, elimi-
nator Frahma) i tłumiki. W tego typu urządzeniach wykrywanie drgań jest niejawne,
a sterowanie odbywa się za pomocą siły generowanej przez urządzenie w wyniku jego
reakcji na pojawienie się wibracji. Dynamiczny eliminator drgań jest mechanizmem
typu masa-sprężyna, cechuje się bardzo małym tłumieniem. Jego działanie polega

na tym, że taki mechanizm może pochłaniać drgania poprzez absorbowanie energii z układu pierwotnego. Energia przekazana do eliminatora będzie magazynowana (w postaci energii kinetycznej masy i energii potencjalnej sprężyny) i powoli rozpraszana na skutek jego własnego tłumienia. Odbywa się to poprzez dostrojenie eliminatora do częstotliwości drgań układu pierwotnego. Jeżeli układ pierwotny zaczyna drgać z daną częstotliwością, w eliminatorze również powstaje siła oscylacyjna o tej samej, dobranej częstotliwości. Siła w eliminatorze przeciwdziała sile harmonicznego układu pierwotnego. Teoretycznie można całkowicie wyeliminować drgania układu. Głównym ograniczeniem nietłumionego dynamicznego eliminatora drgań jest to, że może działać efektywnie jedynie w bardzo wąskim paśmie częstotliwości obejmującym jedną częstotliwość rezonansową – dla najlepszego efektu częstotliwość eliminatora musi być dostrojona do częstotliwości układu pierwotnego. Dodatkowo, energia drgań układu pierwotnego jest rozpraszana pośrednio, a nie bezpośrednio – najpierw jest pozyskiwana i magazynowana w postaci energii kinetycznej i/lub potencjalnej, natomiast w dalszym etapie jest rozpraszana. Oprócz nietłumionego dynamicznego eliminatora drgań, występuje również wersja z tłumieniem – tłumik jest dodany pomiędzy masą eliminatora, a masą układu pierwotnego w celu ograniczenia amplitudy drgań dla częstotliwości rezonansowej [19], [61], [68].

Inną grupą urządzeń stosowanych w pasywnej redukcji drgań są tłumiki – stosowane głównie wtedy, gdy wymagane jest ograniczenie skutków wibracji w szerokim paśmie częstotliwości. Tłumik to urządzenie czysto rozpraszające, które bezpośrednio rozprasza energię przekazaną z układu pierwotnego. Tłumiki drgań cechują się szerszym zakresem częstotliwości, w których działają, natomiast wadą jest mniejsza trwałość w porównaniu do dynamicznych eliminatorów. Mniejsza trwałość wynika z faktu, iż bezpośrednio rozpraszanie energii drgań skutkuje wytwarzaniem ciepła, a zatem wiąże się to z problemami termicznymi i zużyciem podzespołów tłumika. Prewencyjnie stosuje się zatem różne metody chłodzenia tłumików np. chłodzenie wentylatorem, zastosowanie chłodziwa lub materiałów przewodzących ciepło. Zastosowanie tłumika w nietłumionym eliminatorze drgań jest powszechną praktyką w celu ograniczenia szczytu rezonansowego, jednakże sam fakt użycia tłumika sprawia, że całkowita redukcja drgań układu pierwotnego jest niemożliwa. W zamian zaś otrzymuje się szersze pasmo częstotliwości, w których działa układ [19], [61], [69].

Pasywna redukcja drgań należy do metod niezawodnych, ekonomicznych i stabilnych, ale posiada także liczne ograniczenia. Głównym ograniczeniem jest to, że siła sterująca generowana przez układ pasywny zależy wprost od dynamiki układu pierwotnego. Urządzenie pasywne (posiadające konkretną masę, współczynnik tłumienia,

sztywność itp.) jest skuteczne w redukcji tylko takich częstotliwości, do których zostało zaprojektowane. Nie ma możliwości regulacji sił, które działają na układ pierwotny. Siły te w sposób naturalny są generowane w czasie rzeczywistym poprzez wibracje układu pierwotnego. Układy pasywne są pozbawione zewnętrznego źródła zasilania zatem wielkość sił sterujących także nie podlega jakiegokolwiek regulacji. Charakterystyka układu pasywnego jest stała, niezmienna, więc niemożliwa jest ingerencja w pasmo częstotliwości działania. Dodatkowo, należy wspomnieć, że istnieją obszary, w których zastosowanie metod pasywnych jest całkowicie niemożliwe. Jednym z takich obszarów jest przestrzeń kosmiczna, w której sztandarowymi przypadkami dla tematu redukcji drgań są satelity, konstrukcje statków kosmicznych lub Międzynarodowa Stacja Kosmiczna [17], [83]. Tego typu konstrukcje posiadają słabe tłumienie wewnętrzne. Aby pasywnie zniwelować drgania, należałoby zastosować urządzenia o ogromnej masie. Dodatkowo, nie występują inne formy tłumienia z uwagi na brak powietrza. Skutkuje to bardzo długim czasem zanikania drgań tłumionych, co może prowadzić do zniszczenia zmęczeniowego, niestabilności lub innych, wtórnych problemów z konstrukcją. Niemniej jednak, metody pasywne nadal posiadają potencjał rozwojowy i z powodzeniem mogą być stosowane do redukcji drgań np. płyt [90]. Wady metod pasywnych można zniwelować stosując aktywne lub semi-aktywne metody redukcji drgań [5], [19], [34], [85].

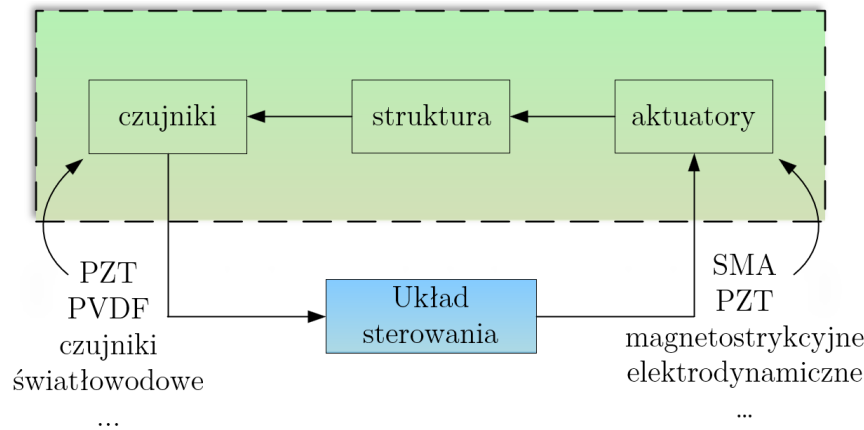
W ostatnich latach nasila się trend stosowania semi-aktywnych metod redukcji drgań i hałasu [70], [88], [89]. Urządzenie semi-aktywne z definicji jest elementem pasywnym, którego właściwości (np. tłumienie, sztywność) można regulować w czasie rzeczywistym przy niewielkim poborze mocy [54]. Tego typu urządzenia zastosowane w układach redukcji drgań zapewniają stabilność procesu ograniczenia wibracji oraz z reguły są mniej podatne na awarie zasilania. Do grupy układów semi-aktywnych można zaliczyć adaptacyjny rezonator Helmholtza i piezoelektryczne tłumienie bocznikowe. Adaptacyjny rezonator Helmholtza jest w zasadzie urządzeniem pasywnym, którego parametry, takie jak częstotliwość własna i współczynnik tłumienia, można dopasować w czasie rzeczywistym. Sposobami umożliwiającymi dostrajanie częstotliwości rezonatora Helmholtza jest np. regulacja objętości wnęki, regulacja długości lub otworu szyjki rezonatora, regulacja impedancji rezonatora przy użyciu głośnika i mikrofonu. Częstotliwość drgań własnych rezonatora można zmieniać niezależnie od współczynnika tłumienia. Z kolei układ z bocznikowym tłumieniem piezoelektrycznym polega na dodaniu równolegle do aktuatora piezoelektrycznego obwodu szeregowo połączonego rezystora i cewki. Taki układ jest w stanie znacznie zmniejszyć amplitudę jednej postaci drgań własnych. Ta technika nie wymaga czujnika zewnętrznego, dzięki czemu

do układu nie jest dodawana żadna energia z zewnątrz. Parametry rezystora i cewki muszą być ściśle określone – podobnie jak w przypadku mechanicznego eliminatora drgań. Układem semi-aktywnym jest każdy układ pasywny, którego parametry są konfigurowalne, a w konsekwencji pośrednio wpłynąć na zmianę np. pasma częstotliwości oddziaływania układu. Nowe urządzenie semi-aktywne o regulowanym momencie bezwładności zostało zaproponowane w pracach [88], [89]. Element semi-aktywny zawiera silnik, który porusza masą na gwintowanym pręcie, cały mechanizm jest przytworowany do struktury drgającej przy pomocy magnesu. Dodatkowa masa wpływa na zmianę właściwości mechanicznych struktury, a jej położenie pozwala na dostosowanie charakterystyki częstotliwościowej tak, aby zredukować drgania lub ograniczyć hałas [54].

W przypadku metod aktywnych drgania są redukowane za pomocą aktuatorów, które wymagają zewnętrznego źródła zasilania. Reakcje układu podlegającego redukcji drgań są bezpośrednio wykrywane przy pomocy czujników. Na tej podstawie, system aktywnej redukcji zapewnia takie akcje sterujące, w pożądanym lokalizacjach układu pierwotnego, które skutecznie zmniejszą wibracje. Strukturę, która zawiera w sobie zintegrowane czujniki oraz aktulatory, można nazwać strukturą inteligentną, Rys. 1.1. Aktywna redukcja drgań zawiera w sobie systemy wibroizolacji, które w sposób dynamiczny reagują na nadchodzące drgania. Oznacza to, że odczytują parametry drgań i reagują na nie, w odróżnieniu od pasywnych metod, których pasmo działania jest naturalnie narzucone przez dynamikę i nie ma możliwości dostosowania sił oddziałujących w czasie rzeczywistym. Istnieją dwa główne typy systemów sterowania w aktywnej redukcji drgań: układ ze sprzężeniem w przód (ang. *feedforward*) oraz układ sprzężenia zwrotnego (ang. *feedback*). Ten pierwszy jest głównie stosowany do kompensacji regularnych, okresowych wibracji, natomiast układ sprzężenia zwrotnego w sposób ciągły wykrywa i reaguje na nadchodzące drgania. Typowy układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym zawiera w sobie mechanizm czujnikowy, który na bieżąco odczytuje wibracje oraz aktuator, który reaguje na te wibracje poprzez dostrajanie parametrów redukcji drgań w celu zmniejszenia nadchodzących wibracji lub tworząc sygnał, który je całkowicie znosi [65], Rys. 1.2.

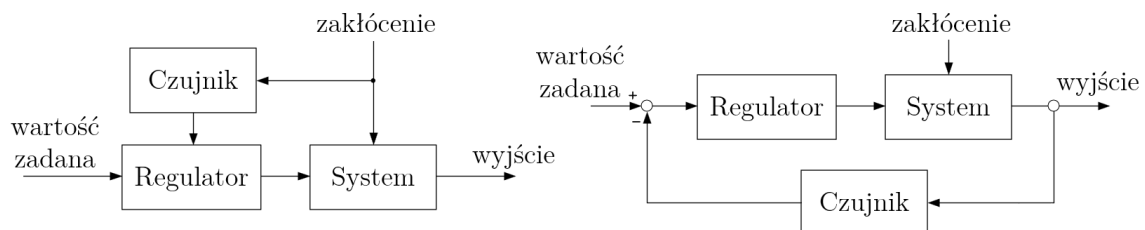
Oprócz czujników i aktuatorów, w takim systemie znajduje się układ elektroniki sterującej. W skład układu elektronicznego wchodzi m.in. sprzęt do kondycjonowania i modyfikacji sygnału (np. wzmacniacze, filtry, przetworniki analogowo-cyfrowe i cyfrowo-analogowe). Jako czujniki drgań powszechnie stosowane są akcelerometry piezoelektryczne (w postaci PZT lub piezoelektrycznej folii polimerowej PVDF), które

przetwarzają energię drgań kinetycznych na sygnały elektryczne przekazywane do elektroniki sterującej.



Rys. 1.1 Schemat inteligentnej struktury [65].

Czujniki mogą także znajdować się poza inteligentną strukturą, mogą to być np. czujniki optoelektroniczne. Następnie układ elektroniczny przetwarza sygnały z czujników i wysyła sygnał sterujący na elementy wykonawcze. Rolę aktuatorów mogą pełnić np. akтуatory magnetostrykcyjne, elektrodynamiczne, stopy z pamięcią kształtu (SMA, ang. *shape-memory alloy*). Przetworniki piezoelektryczne także mogą pełnić rolę elementów wykonawczych. Celem układu aktywnej redukcji drgań jest podanie takiego sygnału sterującego, który wygeneruje drgania odwrotne do drgań układu pierwotnego. Skutkiem tego jest częściowa, a w najlepszym przypadku całkowita redukcja drgań [19], [34], [65], [28].



Rys. 1.2 Schemat układu ze sprzężeniem w przód (po lewej) oraz schemat układu ze sprzężeniem zwrotnym (po prawej) [28].

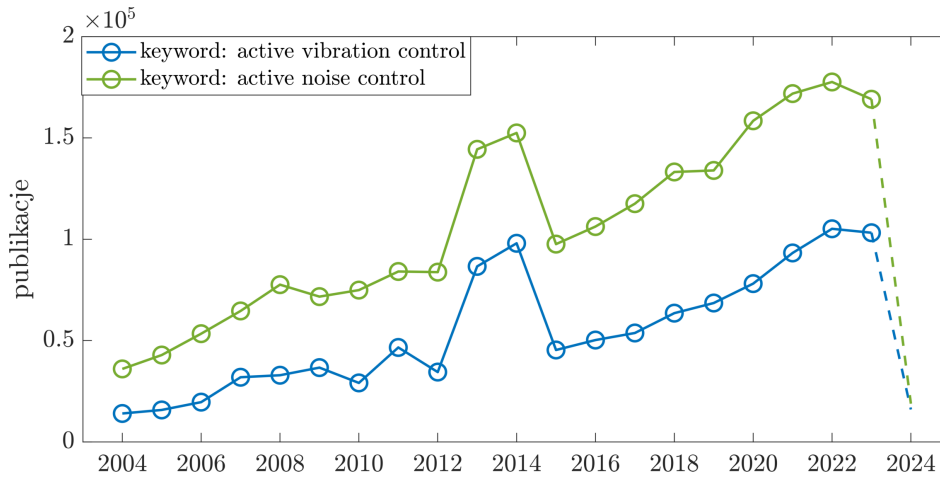
Metody aktywne znajdują szerokie zastosowanie w redukcji drgań i hałasu o niskiej częstotliwości. Wynika to z faktu, iż systemy aktywne zastosowane do wyższych

częstotliwości generują szereg problemów technicznych związanych z elektroniką (potrzeba wyższej częstotliwości próbkowania), ale również wykazują mniejszą skuteczność. Także pod względem ekonomicznym metody pasywne okazują się bardziej opłacalne dla wyższych częstotliwości. Spośród zastosowań aktywnych metod, prócz wspomnianych wcześniej konstrukcji statków kosmicznych oraz satelitów, należy wymienić np. ograniczenie kołysania wieżowców poprzez zastosowanie regulowanej masy na dachu niwelującej siły pochodzące od wiatru, redukcję drgań wewnątrz pojazdów samochodowych poprzez realizację aktywnego lub semi-aktywnego układu zawieszenia. Innym obszarem zastosowania metod aktywnych są: aktywne słuchawki, redukcja hałasu wentylatorów w komputerach, redukcja drgań ramienia głowicy zapisująco-odczytującej w dyskach twardych [7], aktywna wibroizolacja wirnika w śmigłowcu. Wiele innych zastosowań znajduje się w literaturze [19], [28], [34].

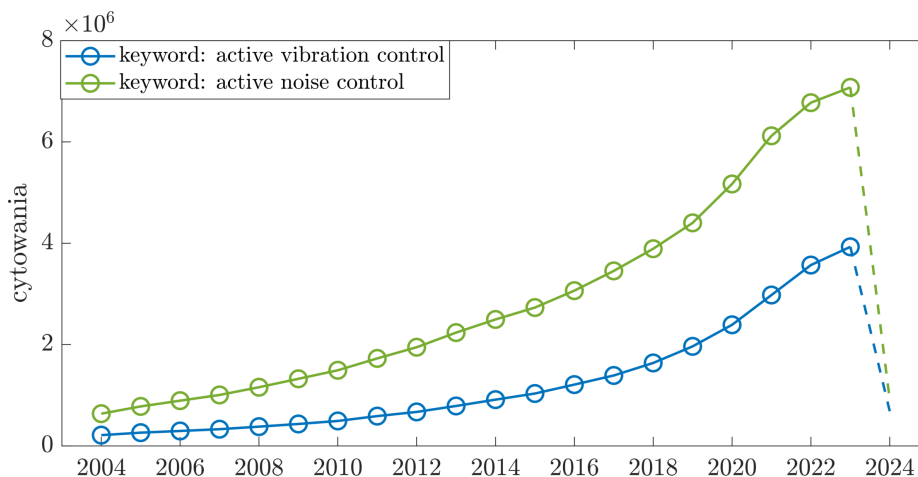
Każda z grup metod: pasywne, semi-aktywne i aktywne posiadają cechy, które jednoznacznie wskazują zastosowanie danej grupy przy konkretnych właściwościach systemu pierwotnego. Metody pasywne pod wieloma aspektami są lepszym wyborem dla wyższych częstotliwości, zaś metody aktywne sprawdzają się dla niższych częstotliwości. Aby zaprojektować skuteczny system wibroizolacji, należałoby połączyć zalety metod aktywnych i pasywnych w obrębie jednego systemu. Zatem kompletny system redukcji drgań i hałasu powinien składać się z układu aktywnego dla redukcji niskich częstotliwości i układu pasywnego dla kontroli wyższych częstotliwości.

1.2. Przegląd literatury

Aktywna redukcja drgań i hałasu jest tematem wielu prac naukowych. W ostatnich 20 latach widać wyraźny trend wzrostowy, zarówno w liczbie opublikowanych prac, jak i w liczbie cytowań, Rys. 1.3-1.4. Podobieństwo wykresów liczby opublikowanych prac dla frazy „active vibration control” i „active noise control” świadczy o tym, że te dwa zagadnienia są sobie bardzo bliskie. Redukcja hałasu jest często ściśle związana z koniecznością redukcji drgań danej struktury. I odwrotnie – hałas może powodować drgania ustroju mechanicznego, który jest przedmiotem aktywnej redukcji drgań. Naturalnym jest zatem to, że te dwa obszary nauki wykazują podobne cechy w kontekście czysto statystycznym.



Rys. 1.3 Liczba publikacji naukowych związanych z frazą „active vibration control” oraz „active noise control” na przestrzeni lat (z wykorzystaniem aplikacji *Dimensions*).



Rys. 1.4 Liczba cytowań związanych z frazą „active vibration control” oraz „active noise control” na przestrzeni lat (z wykorzystaniem aplikacji *Dimensions*).

Colin Hansen i współautorzy w swojej książce „Active Control of Noise and Vibration” zwracają uwagę na ważną cechę skutecznego systemu aktywnej redukcji drgań. Skuteczność takiego systemu *zależy od projektu i harmonii działania pomiędzy dwoma głównymi podsystemami: systemem „fizycznym” i elektronicznym systemem sterowania*. Do systemu fizycznego Autorzy zaliczają wszystkie niezbędne przetworniki, a więc: czujniki drgań, czujniki błędu, aktuatory itp. System ten stanowi interfejs dla systemu elektronicznego, w którego skład można zaliczyć algorytm sterowania, przetwarzanie sygnału, wzmacniacze i inne podzespoły w torze kontrolnym. W skutecznym systemie aktywnej redukcji drgań powinna być harmonia pomiędzy tymi dwoma podsystemami.

Przy nieodpowiednio umiejscowionych czujnikach i/lub aktuatorach nawet najlepszy algorytm sterowania nie zapewni efektywnej redukcji drgań lub hałasu. Podobnie przy zadbaniu o warstwę fizyczną układu (optymalne rozmieszczenie aktuatorów, czujników) – jeśli zabraknie skutecznie działającego układu sterowania, cały proces redukcji drgań będzie nieefektywny. Zatem zasadnym jest dążenie do tego, żeby każdy z podsystemów (fizyczny i elektroniczny) działał z jak największą efektywnością [34].

Wpływ na całkowitą efektywność procesu aktywnej redukcji drgań mają obydwa podsystemy: fizyczny i elektroniczny. Idąc szczebel niżej – podsystem fizyczny zawiera w sobie ogniwa, których efektywność składa się na efektywność całego podsystemu. Zatem maksymalizując efektywność poszczególnych elementów podsystemu fizycznego, można uzyskać maksymalną efektywność całej gałęzi fizycznej. Jednym z elementów podsystemu fizycznego jest aktuator. **Jako jedno z ogniw układu aktywnej redukcji drgań wpływa na całkowity przebieg procesu redukcji poprzez swoje parametry fizyczne i geometryczne, a także umiejscowienie w obszarze układu będącego przedmiotem redukcji drgań.** W metodach aktywnych powszechnie stosuje się ceramiczne elementy piezoelektryczne (PZT), zarówno jako czujniki oraz aktulatory [57]. Przetworniki tego typu da się w prosty sposób zamontować na strukturze poprzez trwałe zamocowanie np. przy pomocy kleju epoksydowego dwuskładnikowego. Podejście do optymalizacji parametrów geometryczno-fizycznych aktuatora piezoelektrycznego różni się w zależności od struktury, do której ma być przyklejony. W publikacjach naukowych traktujących o optymalizacji rozmieszczenia i parametrów PZT można wyszczególnić dwa podejścia do tego tematu: podejście przybliżone i ściśle (analityczne). Wśród podejść przybliżonych dużą liczbę stanowią rozwiązania wykorzystujące algorytmy genetyczne lub sztuczną inteligencję. Metody analityczne zostały wykorzystane m.in. w pracy [4] do znalezienia optymalnego miejsca przyklejenia aktuatora PZT na belce z uwzględnieniem różnych warunków brzegowych; badacze znaleźli także długość PZT zapewniającą największą efektywność redukcji drgań. Przegląd modelowania matematycznego aktywnie sterowanych inteligentnych struktur piezoelektrycznych został zaprezentowany w [33]. Publikacją przeglądową biorącą pod uwagę algorytmy sterowania i ich wpływ na przebieg aktywnej redukcji drgań jest [2]. Przedstawiono tam przegląd aktywnego tłumienia drgań i hałasu konstrukcji płytowych za pomocą PZT. Zaprezentowano metody numeryczne i narzędzia eksperymentalne umożliwiające badanie różnych aspektów architektury sterownika, tj. różnorodności układów sterowania w aktywnym sterowaniu drganiami i ich wpływu na konfigurację aktuatora. Problem znalezienia optymalnego rozmieszczenia PZT został także rozwiązany w pracach [8], [10], [14]. Wykazano, że lokalizacja zapewnia-

jąca największą efektywność występuje w podobszarach o największych krzywiznach i lokalizację tę nazwano optymalną. Z cytowanych prac wynikało, że środek PZT powinien pokrywać się z punktem, w którym krzywizna belki osiąga absolutne ekstremum. Kryterium to nazwano kryterium maksymalnej krzywizny. Optymalne rozmieszczenie PZT zostało opracowane na bazie przesłanek heurystycznych i potwierdzone teoretycznie. Istnieją także prace, które numerycznie potwierdzają związek pomiędzy maksymalną krzywizną lub maksymalnym momentem gnącym belki, a optymalną lokalizacją PZT. W pracy [3] wykazano, że aktuatory PZT przyklejone parami na belce w podobszarach o maksymalnym momencie skręcającym, skutecznie redukują drgania skrętne belki. W [25] rozpatrywano położenie PZT w trzech różnych miejscach na długości belki wspornikowej. Najlepszy wynik aktywnej redukcji drgań osiągnięto, gdy aktuator znajdował się najbliżej utwierdzonego brzegu, czyli w miejscu, w którym krzywizna belki osiąga maksymalną wartość dla zadanych warunków brzegowych. Optymalizacja położenia PZT w świetle parametrów sterowania LQR została zaprezentowana w [1], w tej pracy także badano belkę wspornikową. Otrzymane położenie aktuatora potwierdza kryterium maksymalnej krzywizny, ponieważ wykazano, że aktywna redukcja drgań jest najefektywniejsza dla PZT przyklejonego przy utwierdzonym brzegu. Jako wskaźniki redukcji drgań przyjęto wskaźniki dynamiczne (np. czas regulacji). Optymalizacja położenia PZT została także przebadana dla bardziej złożonych struktur, w pracy [18] wyznaczono położenie aktuatorów stosując algorytm genetyczny o hybrydowym kryterium optymalizacji. Przedmiotem badań był w tym przypadku asymetryczny układ statku kosmicznego z wbudowanym PZT. Problem optymalizacji położenia PZT w świetle idei LQ został rozwiązany w [96], [97]. W pracach wykazano równoważność podejścia analitycznego i podejścia opartego na idei LQ. Aktywna redukcja drgań belki była tematem pracy [44]. Aktuator PZT zlokalizowano w obszarze o maksymalnym momencie gnącym konstrukcji, parametrem algorytmu sterującego był rzeczywisty moment gnący w poprzednim kroku czasowym. Optymalizacja położenia i rozmieszczenie materiału piezoelektrycznego została przeprowadzona w [21]. Badacze wyznaczyli optymalne pokrycie belki materiałem piezoelektrycznym. Oprócz jego grubości (dokładano kolejne warstwy o stałym wymiarze), profil warstwy PZT na szerokości belki także podlegał optymalizacji.

Optymalizacja parametrów geometryczno-fizycznych PZT dla ustrojów mechanicznych jednowymiarowych różni się od optymalizacji dla przypadków dwu- i trójwymiarowych. Dla problemu 2D dochodzi kryterium orientacji symetrycznego, regularnego aktuatora na strukturze lub wyznaczenie nowego, nieregularnego kształtu PZT. Badania potwierdzające kryterium maksymalnego momentu gnącego zostały zaprezentowane

dla prostokątnej płyty w [37]. Płyta była utwierdzona na jednym brzegu, pozostałe brzegi były swobodne. Prostokątny aktuator PZT przyklejony najbliżej utwierdzonego brzegu wykazywał najlepszy efekt aktywnej redukcji drgań. Orientacja prostokątnych PZT oraz ich lokalizacja na płycie prostokątnej była rozpatrywana w [91]. W pracy posłużono się hybrydowym podejściem optymalizacyjnym opartym na algorytmie genetycznym, sekwencyjnym programowaniu kwadratowym i optymalizacją za pomocą roju cząstek w połączeniu z metodą projekcji gradientu. Optymalizacja położenia, rozmiaru oraz orientacji wzmacnianych kompozytów PFRC (ang. *piezo-fiber reinforced composite*) została przeprowadzona w [95]. Proces optymalizacji był przeprowadzany w oparciu o macierz sterowalności Grama przy użyciu samodostrajającego się regulatora rozmytego zoptymalizowanego algorytmem roju cząstek. Spośród publikacji traktujących o optymalizacji kształtu PZT dla struktur dwuwymiarowych można wyszczególnić grupę, w której jako metodę znajdowania optymalnego kształtu, zastosowano optymalizację topologiczną. W pracy [94] zastosowano tę metodę w celu wyznaczenia optymalnego pokrycia materiałem elektrody dla prostokątnej płyty laminowanej (warstwa PZT była na całej powierzchni płyty). Optymalizacja dotyczyła minimalizacji konsumpcji energii, co przekłada się także na maksymalizację efektu działania aktuatora optymalnego. W [82] także przedstawiono procedurę optymalizacji kształtu elektrody w akuatorze piezoelektrycznym. W badaniach tych zastosowano regularne PZT (płyta laminowana), natomiast kształt elektrody był nieregularny. Optymalizacja rozkładu materiału piezoelektrycznego została przeprowadzona w [29]. W tym przypadku funkcją celu była maksymalizacja sterowalności dla danej postaci drgań własnych. Badacze rozważali aktywną redukcję drgań przy pomocy wbudowanych PZT, podobnie jak w pracy [95], zastosowano metodę optymalizacji topologicznej. Kształt warstwy PZT określono przy pomocy algorytmu sekwencyjnego. Badania analityczne, numeryczne i eksperymentalne dla płyty prostokątnej swobodnie podpartej na wszystkich krawędziach zostały przeprowadzone w [73]. Metoda optymalizacji napięć sterujących PZT opierała się na algorytmie genetycznym. W ramach podejścia numerycznego Hu i Li [36] wykorzystali algorytm genetyczny do poprawy wydajności aktywnej redukcji drgań w powłokach cylindrycznych, jako parametry optymalizacyjne wybrano położenie, rozmiar i kąt obrotu aktuatora. Kolejnym trendem w zastosowaniu PZT do aktywnej redukcji drgań są siłowniki MFC (ang. *Micro-Fiber Composite*) [49]. Aktuatory MFC – podobnie jak powszechnie stosowane PZT – mogą być wykonane w dowolnym kształcie. Zatem procedura optymalizacji kształtu dla tego typu elementów wykonawczych byłaby również uzasadniona. Aktuatory o kształcie gwiazdy zostały zastosowane w [50] do redukcji drgań płyty kolistej. MFC badano także w [70] w układzie semi-aktywnym

w celu redukcji drgań płyty prostokątnej. Różne kształty aktuatorów PZT zostały także przebadane w pracach [78], [79], [80], [84], których autorzy skupili się na wpływie wielkości aktuatora w hybrydzie sensor-aktuator. Zastosowane aktulatory były kształtu kwadratu lub dysku z wyciętym otworem na część czujnikową. Pracą obejmującą zarówno teorię, jak i eksperyment jest [58], w której zbadano swobodnie podpartą płytę prostokątną i określono optymalne rozmieszczenie aktuatorów przy zastosowaniu prostokątnych PZT. Warunek swobodnego podparcia był zrealizowany poprzez umieszczenie płyty w zaprojektowanej ramie. Problem optymalizacji położenia PZT jest szczególnie ważny z perspektywy skuteczności układu aktywnej redukcji drgań dla konkretnych modów. W pracy [62] badano cienką prostokątną płytkę w zastosowaniu do aktywnej redukcji drgań za pomocą aktuatora w kształcie dysku, uzyskano zerowy efekt redukcji dla drugiego modu. Optymalizacja położenia aktuatora może być przeprowadzona pod różnymi kryteriami optymalizacyjnymi. Funkcją celu może być np. minimalizacja energii wymaganej do osiągnięcia danego stanu [86] lub może wynikać z innych przesłanek np. akustycznych [87].

Jak wspomniano wyżej, aktuator piezoelektryczny jest elementem podsystemu fizycznego aktywnej redukcji drgań. Zadbanie o maksymalizację efektywności każdego z ogniw układu aktywnego zapewnia maksymalizację efektywności całego procesu redukcji. Wśród cytowanych publikacji istnieje zauważalna luka w projektowaniu optymalnego aktuatora PZT dla struktur dwuwymiarowych. Aby sformułować problem i przeprowadzić jego rozwiązanie dla struktur o dwóch wymiarach (płyta), należy rozpatrzyć to zagadnienie dla ustrojów jednowymiarowych (belka). Cytowane prace bazują na powszechnie znanym modelu oddziaływania PZT-belka lub PZT-płyta [34], [28]. Model ten polega na pojawieniu się momentów gnących na brzegach aktuatora podczas przyłożenia napięcia do elektrod PZT. Momenty gnące można zamienić na dwie pary sił. Wyznaczanie optymalnych cech geometryczno-fizycznych PZT dla belki wiąże się ze znalezieniem położenia aktuatora zapewniającego maksymalną efektywność, a także ze znalezieniem optymalnych proporcji w ramionach PZT. **To drugie zagadnienie staje się możliwe do rozpatrzenia jeśli przyjmiemy nowy model działania PZT, zakładający równość momentów gnących (tak jak w przypadku symetrycznych PZT), natomiast pozostawiający możliwość dostosowania długości ramion par sił oraz wartości tych sił tak, aby momenty gnące pozostawały równe.** Szczegóły matematyczne tego modelu zostały przedstawione w rozdziale drugim. Zatem rozwiązanie tego problemu dla belki powinno skutkować zarówno znalezieniem optymalnego miejsca przyklejenia PZT, a także optymalnych długości ramion par sił. Bazując na przypadku jednowymiarowym, można rozwiązać problem

dla płyty pod pewnymi założeniami. Uogólniony kształt na strukturze dwuwymiarowej wymaga rozpatrzenia PZT jako elementu składającego się ze skończonej liczby włókien (lub przekrojów aktywnych). Optymalizacja związana z włóknem jest tożsama z optymalizacją jednowymiarową, z tym, że każde włókno jest inaczej zorientowane na powierzchni płyty. Procedura optymalizacji zrealizowana dla wszystkich włókien prowadzi do otrzymania konturu asymetrycznego PZT (a-PZT), którego kształt czyni proces redukcji drgań najbardziej efektywnym.

W niniejszej pracy przedstawiono rozwiązanie problemu optymalizacji kształtu PZT dla płyty trójkątnej. Praca uwzględnia dotychczas opublikowane wyniki badań autora oraz stanowi ich uzupełnienie.

1.3. Cel, teza oraz hipoteza pracy

Z przeglądu literatury wynika, że w aktywnej redukcji drgań płyt trójkątnych nie istnieje bazująca na matematycznych przesłankach procedura optymalizująca kształt PZT. W związku z tym powstaje nowy problem naukowy, którego rozwiązanie jest **celem pracy**:

znalezienie kształtu PZT i jego położenia na trójkątnej płycie, które zapewnią maksymalną efektywność redukcji drgań.

W związku z tym można sformułować **tezę pracy**:

jeżeli znajdzie się odpowiedni kształt PZT i jego położenie na trójkątnej płycie, to (teza) zapewni się maksymalną efektywność redukcji drgań.

Stąd wynika **hipoteza pracy**:

można uzyskać maksymalną efektywność redukcji drgań płyty trójkątnej poprzez odpowiedni kształt PZT i jego rozmieszczenie.

Istotą rozwiązania problemu jest stworzenie algorytmu optymalizującego kształt PZT w aktywnej redukcji drgań płyt trójkątnych. Algorytm bazuje na przypadku jednowymiarowym, jego aplikacja do struktur dwuwymiarowych wymaga wprowadzenia dodatkowego kroku w procedurze optymalizacyjnej. Wynikiem działania algorytmu jest uzyskanie rozmieszczenia PZT na powierzchni struktury oraz kształtu PZT. Obie te cechy, w połączeniu, charakteryzują PZT, który najefektywniej zredukuje drgania płyty trójkątnej. Przez a-PZT rozumie się aktuator piezoelektryczny, którego kształt

został zoptymalizowany pod kątem efektywności redukcji drgań. Należy zaznaczyć, że nadrzędnym celem aktywnej redukcji drgań jest redukcja drgań sama w sobie. Stąd funkcja celu dla wszystkich procedur optymalizacyjnych jest tej samej postaci. Można ją wyrazić w postaci różnicy amplitudy struktury w danym punkcie bez działania aktywnej redukcji i załączonym systemem redukcji drgań:

$$\mathcal{J} = u_0 - u_f \quad (1.1)$$

bądź zdefiniować tę funkcję w odniesieniu do amplitudy struktury bez redukcji i wyrazić ją w procentach:

$$\mathcal{J} = \frac{u_0 - u_f}{u_0} \cdot 100\% \quad (1.2)$$

gdzie: u_0 – amplituda drgań bez działania PZT, drgania są wzbudzane jedynie przez siły zakłócające; u_f – amplituda drgań przy działaniu PZT, drgania są wzbudzane przez siły zakłócające i zredukowane przez PZT.

Tak sformułowane funkcje celu można określić globalnymi funkcjami celu. Ponieważ amplituda drgań jest związana z rodzajem struktury i postaciami drgań własnych, w dalszej części pracy zdefiniowano także szczególne postacie funkcji celu.

Celem weryfikacji rezultatów działania algorytmu przeprowadzono obliczenia analityczne, numeryczne oraz eksperymentalne. **Sformułowany problem jest nowy z punktu widzenia inżynierskiego, jak również z punktu widzenia naukowego.**

1.4. Obiekt badań, zakres pracy

Obiektem badań jest płyta w kształcie trójkąta prostokątnego o wszystkich krawędziach swobodnie podpartych. Cel pracy został osiągnięty poprzez zrealizowanie następujących kroków badawczych:

1. Opracowano nowy model jednowymiarowego asymetrycznego aktuatora piezoelektrycznego (a-PZT) do redukcji drgań belki, który stanowi uogólnienie symetrycznego PZT (s-PZT).
2. Rozszerzono model na strukturę dwuwymiarową i przeprowadzono procedurę optymalizacji kształtu a-PZT dla płyty trójkątnej.
3. Zweryfikowano efektywność redukcji drgań a-PZT dla przypadku jedno- i dwuwymiarowego na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych.

4. Zweryfikowano eksperymentalnie efektywność redukcji drgań a-PZT dla płyty trójkątnej.

W modelach aktuatorów piezoelektrycznych zawartych w przeglądzie literatury nie uwzględniono asymetrii ramion PZT i jej wpływu na proces redukcji drgań. Był to asumpt do uogólnienia powszechnie stosowanego modelu i otrzymania asymetrycznego PZT. Ponadto, sformułowano nowe kryterium wskazujące optymalne, pod kątem efektywności, położenie PZT na drgającej strukturze. Kryterium to zostało wyprowadzone na bazie teorii drgań mechanicznych oraz sposobie oddziaływania PZT-struktura i jest określone jako kryterium maksymalnego momentu gnącego. Dla problemów jednowymiarowych, w których drgania są symetryczne, optymalnym PZT jest symetryczny PZT. Stąd, aby rozpatryć problem bardziej ogólny, należało uwzględnić drgania asymetryczne belki np. poprzez wprowadzenie masy punktowej na określonej długości struktury [8], [9]. Jako wymuszenie przyjęto siłę harmoniczną przyłożoną w punkcie, rozpatrywano trzy pierwsze postacie drgań własnych. W badaniach skorzystano z dowodu dotyczącego ilości PZT. Mianowicie, że bardziej efektywne jest zastosowanie jednego aktuatora, aniżeli kilku [10]. Przy tych założeniach wyprowadzono wzór, który stanowi funkcję celu dla zagadnienia optymalizacyjnego [12]. Zależność ta została wyprowadzona z teorii drgań mechanicznych na podstawie sposobu oddziaływania PZT-belka, jednakże posłużono się też wzorami z metod numerycznych. Z wyprowadzonej zależności wynika asymetria a-PZT i jego położenie na belce. Asymetria a-PZT oznacza, że siły na przeciwległych krawędziach aktuatora mają różne wartości, a punkt przyłożenia sumy sił modelujących PZT nie leży w geometrycznym środku aktuatora. Wartości odpowiednich par sił wyznaczono przy założeniu, że momenty gnące obu par sił są równe. Warto odnotowania jest fakt, że zarówno model symetrycznego PZT, jak i a-PZT nie uwzględnia masy aktuatora. Efekt działania a-PZT mierzono przy pomocy wskaźnika redukcji drgań, który określono jako różnicę między maksymalnym poprzecznym przemieszczeniem belki przy wymuszeniu bez działania aktuatora i tą samą wielkością przy udziale aktuatora. Wskaźnik ten odniesiono do amplitudy bez działania PZT i wyrażono w wartościach względnych. W ten sam sposób zbadano działanie symetrycznego PZT (s-PZT) i porównano obydwa podejścia. Założono, że wymiary a-PZT i s-PZT są takie same i w obu przypadkach ilość energii doprowadzonej do układu jest taka sama [12]. Procedurę optymalizacji przeprowadzono także pod kątem dynamiki redukcji drgań [45]. Parametrami optymalizacyjnymi były: amplituda otwartej pętli sterowania bez regulatora oraz współczynnik modelu obwiedni sygnału z regulatorem LQR. Te dwa parametry były funkcjami celu w odrębnych podejściach optymalizacyjnych. Pierwszy z nich podlegał maksymalizacji, ponieważ największa

odpowieź aktuatora gwarantuje największy efekt aktywnej redukcji drgań. Drugi parametr minimalizowano, ponieważ minimalna wartość współczynnika modelu obwiedni sygnału oznacza największą stromość charakterystyki, a więc najkrótszy czas regulacji [45].

Model jednowymiarowy a-PZT został uogólniony na przypadki dwuwymiarowe poprzez optymalizację długości ramion każdego włókna a-PZT [13]. W tym przypadku optymalizacja była dwukrokowa. Pierwszym krokiem było znalezienie punktu łączącego wszystkie włókna na powierzchni płyty, następnie przeprowadzono procedurę optymalizacji dla danego włókna. Każde kolejne włókno było obrócone o stały kąt w stosunku do poprzedniego. W rezultacie otrzymano kontur dwuwymiarowego a-PZT. Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, asymetria włókna oznacza, że siły na przeciwległych krawędziach a-PZT mają różne wartości, a punkt przyłożenia dwóch sił nie znajduje się w środku włókna. Minimalizacja amplitudy drgań płyty w stanie ustalonym prowadzi do znalezienia takich proporcji ramion pojedynczego włókna, aby redukcja drgań była najbardziej efektywna. Superpozycja działania skończonej ilości włókien składających się na a-PZT prowadziła do otrzymania efektu działania całego aktuatora [13]. Zakładając stałą sumaryczną długość włókien wyznaczono regularne kształty PZT, które posłużyły do badań porównawczych. W ten sposób porównano wyniki symetrycznych aktuatorów (s-PZT i c-PZT) z optymalnym a-PZT. We wszystkich przypadkach energia dodana do układu była taka sama.

Mając przygotowane modele analityczne i numeryczne przeprowadzono obliczenia sprawdzające zasadność stosowania a-PZT. Zarówno problem drgań wymuszonych belki, jak i płyty, został rozwiązany analitycznie. W przypadku belki posłużono się rozwiązaniem wykorzystującym funkcje Kryłowa, zastosowano podział struktury na dwie części, które rozpatrywano w lokalnych współrzędnych. Następnie rozwiązanie było składane w całość [12]. Problem drgań wymuszonych płyty trójkątnej rozstał rozwiązany metodą superpozycji, która dla płyt o różnych kształtach została opisana przez D. J. Gormana [32]. Zagadnienie właściwe dla rozpatrywanego w pracy problemu (płyta trójkątna swobodnie podparta) zostało zaprezentowane w [72]. Metoda superpozycji zastosowana do tego typu problemów sprowadza się do zastosowania prostokątnych bloków, które wymuszają określony warunek brzegowy na danej krawędzi. Warunek brzegowy na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego został wymuszony poprzez obrócenie bloku. Zarówno w problemie jednowymiarowym, jak i w dwuwymiarowym, posłużono się bezwymiarowym wskaźnikiem redukcji drgań [12].

Celem ostatecznej weryfikacji działania a-PZT i porównania efektywności aktywnej redukcji drgań przy zastosowaniu różnych kształtów aktuatorów, przeprowadzono

eksperyment. Wykonano trzy identyczne płyty, do każdej z nich przyklejono inny aktuator (s-PZT, c-PZT i a-PZT). Płyta była zamontowana w ramie, w której od strony wewnętrznej wyfrezowano rowek zapewniający swobodne podparcie krawędzi. Struktura była wzbudzana do drgań poprzez falę akustyczną z głośnika. System aktywnej redukcji drgań w czasie rzeczywistym został stworzony na bazie płytki rozwojowej ESP-32, na której zaimplementowano regulator PI. Czujnik drgań nie był zintegrowany ze strukturą, był to czujnik optoelektroniczny zamontowany nad płytą [46].

Rozdział 2

Redukcja drgań belki

2.1. Drgania wymuszone z punktową masą i PZT

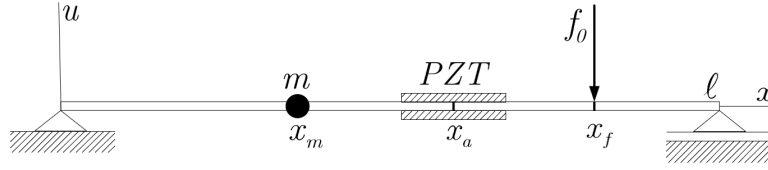
Struktura belki składa się z cienkiej belki z dołączoną masą punktową. Całość, po dodaniu PZT, można określić jako układ belka-masa-aktuator. Skoncentrowana masa jest dodawana w celu zapewnienia asymetrycznych drgań struktury. Rozpatrzono belkę swobodnie podpartą na obu końcach [68], Rys. 2.1. Równanie drgań wymuszonych belki z dodaną masą punktową jest modelem Eulera-Bernoulliego. Model ten został wyprowadzony przy ograniczeniach: pomija obrót przekroju poprzecznego belki, a oś neutralna nie ulega wydłużeniu. Obowiązujące równanie jest dane przez [38], [39], [51], [52]:

$$EJD^4u + (\varrho S + \alpha_m) D_t^2u = -f \quad (2.1)$$

przy uwzględnieniu:

$$EJ = E_b J_b + E_a J_a \langle H \rangle^0, \quad \varrho S = \varrho_b S_b + \varrho_a S_a \langle H \rangle^0, \quad \alpha_m = m \delta(x - x_m) \quad (2.2)$$

gdzie: $u = u(x, t)$ – poprzeczne przemieszczenie belki, [m]; $S = h_1 h_2$ – pole powierzchni przekroju poprzecznego belki, [m²]; h_1 – szerokość belki, [m]; h_2 – grubość belki, [m]; ℓ – długość belki, [m]; $f = f(x, t)$ – siły wymuszające, [N]; $\langle H \rangle^0 = H(x_1 - x_2) = H(x - x_1) - H(x - x_2)$, $H(x - x_1)$ – funkcja skokowa Heaviside’a w punkcie x_1 . Ponadto, niektóre symbole są uzupełnione następującym indeksem: (b)elka, (m)asa, (a)ktuator.



Rys. 2.1 Geometria zagadnienia.

Warunki brzegowe opisane są następującymi zależnościami:

$$u(x, t) = 0, \quad x = 0 \quad D_x^2 u(x, t) = 0 \quad x = 0 \quad (2.3)$$

$$u(x, t) = 0, \quad x = \ell \quad D_x^2 u(x, t) = 0 \quad x = \ell \quad (2.4)$$

Założono zerowe warunki początkowe. Założono, że siła wymuszająca drgania jest postaci:

$$f(x, t) = f_0 e^{i\omega_f t} \delta(x - x_f) \quad (2.5)$$

gdzie: $i = (-1)^{1/2}$, f_0 – amplituda siły wymuszającej, [N].

2.1.1. Problem drgań własnych

Rozwiązano zagadnienie drgań własnych [8]; pominięto wpływ aktuatora, zakładając, że jego masa i sztywność są małe w porównaniu do belki i skoncentrowanej masy. Według równania (2.2) otrzymuje się $EJ = E_b J_b$ i $\rho S = \rho_b S_b$. Po rozdzieleniu zmiennych, równanie (2.1) można zapisać w postaci dwóch równań: jedno jest związane z warunkami brzegowymi i dotyczy stanu ustalonego, drugie zawiera w sobie zmienną niezależną t i uwzględnia wpływ warunków początkowych [42]. Dla stanu ustalonego można otrzymać zależność:

$$D^4 X_j - \lambda_j^4 X_j = 0 \quad (2.6)$$

gdzie $j = 1, 2$ określa numery elementów, z których składa się belka; $\lambda_j^4 = \omega^2 \frac{\rho_j S_j}{E_j J_j}$; biorąc pod uwagę przyjęte założenia otrzymuje się $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$; wprowadza się także skrótowy zapis różniczkowania: $DX_j \equiv D_x X_j$, $D^4 X_j \equiv D_x^4 X_j$. Rozwiązanie równania (2.6) można przedstawić we współrzędnych lokalnych, tzn. $x \in [0, e_j]$, Rys. 2.2. Rozwiązanie

dla j -tego elementu ma postać [8]:

$$X_j(x) = a_j K_1(\lambda_j x) + b_j K_2(\lambda_j x) + c_j K_3(\lambda_j x) + d_j K_4(\lambda_j x) \quad (2.7)$$

gdzie funkcje Kryłowa oznaczone są przez $K_k(\cdot)$, $k = \{1, 2, 3, 4\}$ [38].



Rys. 2.2 Geometria belki we współrzędnych lokalnych.

Warunki brzegowe dla tak postawionego problemu są następujące:

- na lewym brzegu pierwszego elementu

$$\begin{aligned} X_1(0) &= 0 \\ D^2 X_1(0) &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

- pomiędzy pierwszym, a drugim elementem

$$\begin{aligned} X_1(\lambda_1 e_1) &= X_2(\lambda_2 0) \\ DX_1(\lambda_1 e_1) &= DX_2(\lambda_2 0) \\ E_1 J_1 D^2 X_1(\lambda_1 e_1) &= E_2 J_2 D^2 X_2(\lambda_2 0) \\ E_1 J_1 D^3 X_1(\lambda_1 e_1) + m\omega^2 X_1(\lambda_1 e_1) &= E_2 J_2 D^3 X_2(\lambda_2 0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

lub

$$E_1 J_1 D^3 X_1(\lambda_1 e_1) = m\omega^2 X_2(\lambda_2 0) + E_2 J_2 D^3 X_2(\lambda_2 0)$$

- na prawym brzegu drugiego elementu

$$\begin{aligned} X_2(e_2) &= 0 \\ D^2 X_2(e_2) &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podstawiając równanie (2.7) do warunków brzegowych z zależności (2.8) okazuje się, że $a_1 = 0$, $c_1 = 0$. W ten sam sposób podstawiono równanie (2.7) do pozostałych warunków brzegowych danych zależnościami (9) i (10). Prowadzi to do otrzymania

układu równań, który może być zapisany w formie macierzy [8]:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} K_2(\lambda e_1) & K_4(\lambda e_1) & -K_1 & -K_2 & -K_3 & -K_4 \\ K_3(\lambda e_1) & K_1(\lambda e_1) & -K_2 & -K_3 & -K_4 & -K_1 \\ K_4(\lambda e_1) & K_2(\lambda e_1) & -K_3 & -K_4 & -K_1 & -K_2 \\ K'(\lambda e_1) & K''(\lambda e_1) & -K_4 & -K_1 & -K_2 & -K_3 \\ 0 & 0 & K_1(\lambda e_2) & K_2(\lambda e_2) & K_3(\lambda e_2) & K_4(\lambda e_2) \\ 0 & 0 & K_3(\lambda e_2) & K_4(\lambda e_2) & K_1(\lambda e_2) & K_2(\lambda e_2) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

i $K_k = K_k(0)$, $K'(\lambda e_1) = K_1(\lambda e_1) + \frac{m\omega}{EJ\lambda^3} K_2(\lambda e_1)$, $K''(\lambda e_1) = K_3(\lambda e_1) + \frac{m\omega}{EJ\lambda^3} K_4(\lambda e_1)$.
Niewiadome układu zawarte są w wektorze:

$$\mathbf{c} = [b_1, d_1, a_2, c_2, d_2]^T \quad (2.13)$$

Aby rozwiązać równanie (2.11), zakłada się, że $\det \mathbf{A}(\lambda_v) = 0$ i otrzymuje się zbiór wartości $\{\lambda_v\}$, $v = 1, 2, 3, \dots, n$. Bazując na zależności dyspersyjnej można wyznaczyć zbiór częstości drgań własnych belki ω_v^2 .

Niewiadomymi w wektorze \mathbf{c} , równanie (2.13), są:

$$b_1 : d_1 : a_2 : \dots = (-1)^{\alpha+1} M_{\alpha 1} : (-1)^{\alpha+2} M_{\alpha 2} : (-1)^{\alpha+3} M_{\alpha 3} : \dots \quad (2.14)$$

gdzie $M_{\alpha\beta}$ są minorami elementu $A_{\alpha\beta}$ macierzy głównej \mathbf{A} , α i β są, odpowiednio, indeksami wierszy i kolumn.

Ostatecznie, rozwiązanie równania (2.1) ma postać:

$$X_v(x) = \begin{cases} b_1 K_2(\lambda_v x) + d_1 K_4(\lambda_v x) & x \in [0, x_m] \\ a_2 K_1(\psi_{vm}) + b_2 K_2(\psi_{vm}) + c_2 K_3(\psi_{vm}) + d_2 K_4(\psi_{vm}) & x \in (x_m, \ell] \end{cases} \quad (2.15)$$

gdzie $\psi_{vm} = \lambda_v(x - x_m)$

2.1.2. Drgania wymuszone

Niech siła wymuszająca w równaniu (2.1) będzie dana zależnością (2.5). Rozwiązanie równania (2.1) zakłada się jako:

$$u(x, t) = X_f(x)e^{i\omega_f t} \quad (2.16)$$

Podstawiając równania (2.5) i (2.16) do równania (2.1) otrzymuje się:

$$EJD^4 X_f(x) - \omega_f^2(\rho S + \alpha_m)X_f(x) = -f(x) \quad (2.17)$$

Rozwiązanie równania drgań wymuszonych (2.17) jest dane przez:

$$X_f(x) = \sum_v C_v X_v(x), \quad v = 1, 2, \dots, n \quad (2.18)$$

gdzie: C_v – stałe pomocnicze, $X_v(x)$ – postać drgań własnych dana równaniem (2.15).

Po kilku przekształceniach, stałe C_v mogą być wyrażone zależnościami [9]:

$$C_v = \frac{1}{\omega_v^2 - \omega_f^2} = \frac{1}{\alpha_v^2}, \quad A_v = \frac{1}{\rho S} \frac{1}{\alpha_v^2} \frac{1}{\beta_v^2} I_{v;0} = C_v^* I_{v;0} \quad (2.19)$$

$$C_v^* = \frac{1}{\rho S} \frac{1}{\alpha_v^2} \frac{1}{\beta_v^2}, \quad I_{v;f} = - \int_0^\ell f(x) X_v(x) dx, \quad \omega_v^2 = \frac{EJ}{\rho S} \lambda_v^4, \quad \beta_v^2 = \int_0^\ell X_v^2(x) dx \quad (2.20)$$

Równanie (2.18) jest rozwiązaniem zagadnienia drgań wymuszonych belki z dołożoną punktowo masą. Jeśli siła wymuszająca jest postaci danej zależnością (2.5), w stanie ustalonym równa się $f(x) = f_0 \delta(x - x_f)$, wyrażenie $I_{v;f} = I_{v;0}$ i zamiast równania (2.18) otrzymuje się:

$$X_f(x) = \sum_v C_v^* I_{v;0} X_v(x) = \sum_v A_{v;0} X_v(x) \quad (2.21)$$

2.2. Modele jednowymiarowych aktuatorów PZT

Aktuatory piezoelektryczne są stosowane w wielu obszarach techniki [23], [34], [81]. W aktywnej redukcji drgań stosowane są aktuatory piezoelektryczne ułożone w stos i płaskie piezoelektryczne aktuatory (w postaci płytki) przyklejane na strukturę. Przymocowanie PZT do struktury i podanie napięcia na jego elektrody skutkuje pojawieniem się oddziaływania PZT-struktura. Oddziaływanie to różni się w zależności od typów aktuatorów piezoelektrycznych. W przypadku stosu, mamy do czynienia

z wieloma warstwami PZT ułożonymi jedna na drugiej. Stos piezoelektryczny generuje liniową siłę. Jednym z zastosowań tego typu aktuatorów są liniowe elektromechaniczne sterowniki w wtryskiwaczach silników dieslowskich typu Common Rail [81]. Stos piezoelektryczny przy dodatkowym elemencie, może wytwarzać moment gnący. Takie zastosowanie zostało opisane w [34], stos został połączony z ramą w kształcie litery gamma, rama także została przymocowana do struktury. Efektem tego zabiegu było pojawienie się momentu gnącego po zasileniu aktuatora.

Standardowy płaski aktuator piezoelektryczny wykonany jest w postaci cienkiej warstwy materiału piezoelektrycznego z dodanymi na powierzchniach płaskimi elektrodami. W grupie cienkich aktuatorów PZT można wyszczególnić piezoelektryczne folie polimerowe (PVDF). Polaryzacja PZT ma wpływ na jego działanie na strukturze. W przypadku zastosowania PZT do aktywnej redukcji drgań, pożądanym ruchem jest ruch zginający w płaszczyźnie prostopadłej do struktury. Dla cienkich aktuatorów wydłużenie w wyniku przyłożonego napięcia elektrycznego następuje w kierunku prostopadłym do kierunku polaryzacji. Dla struktur jednowymiarowych polaryzacja na kierunku prostopadłym do płaszczyzny aktuatora, będzie skutkować pojawieniem się odkształcenia na kierunku osi x [28]:

$$\varepsilon = \frac{d_{31}V}{h_a} \quad (2.22)$$

gdzie: h_a – grubość aktuatora, [m]; d_{31} – stała piezoelektryczna związana z odkształceniem wytworzonym przez pole elektryczne, [m/V]; V - napięcie przyłożone do elektrod PZT, [V].

Jeżeli aktuator jest trwale przymocowany do struktury (np. przy pomocy kleju epoksydowego dwuskładnikowego) to jego wydłużenie będzie mniejsze niż w stanie swobodnym. W obliczeniach założono, że PZT jest idealnie przyklejony do struktury. Wynikające z tego zjawiska siły będą oddziaływać na belkę, co spowoduje powstanie momentów gnących w strukturze. Rozkład momentów wygenerowanych w belce dany jest zależnością [34], [28]:

$$m_x = C_a \varepsilon \left[\langle x - x_{1s} \rangle^0 - \langle x - x_{2s} \rangle^0 \right] \quad (2.23)$$

gdzie: C_a – stała geometryczno-materiałowa związana z PZT, x_{1s}, x_{2s} – współrzędne, odpowiednio, lewego i prawego brzegu PZT.

Oddziaływanie momentów gnących PZT w równaniu (2.17) wymaga dwukrotnego różniczkowania równania (2.23) po zmiennej niezależnej x , równanie to przyjmuje

postać:

$$EJD^4 X_f(x) - \omega_f^2(\rho S + \alpha_m)X_f(x) = -C_0\varepsilon \left[\langle x - x_{1s} \rangle^{-2} - \langle x - x_{2s} \rangle^{-2} \right] \quad (2.24)$$

gdzie: $\langle \cdot \rangle^{-1} = \delta(\cdot)$, $\langle \cdot \rangle^{-2} = D\delta(\cdot)$ – pochodna funkcji Diraca.

Prawą stronę równania (2.24) można zapisać jako:

$$M_x = M_0 \left[\langle x - x_{1s} \rangle^{-2} - \langle x - x_{2s} \rangle^{-2} \right] \quad (2.25)$$

gdzie M_0 oznacza amplitudę momentu liniowego, która jest proporcjonalna do odkształcenia PZT [28]:

$$M_0 = C_a \frac{d_{31}}{h_a} V = C_a \varepsilon \quad (2.26)$$

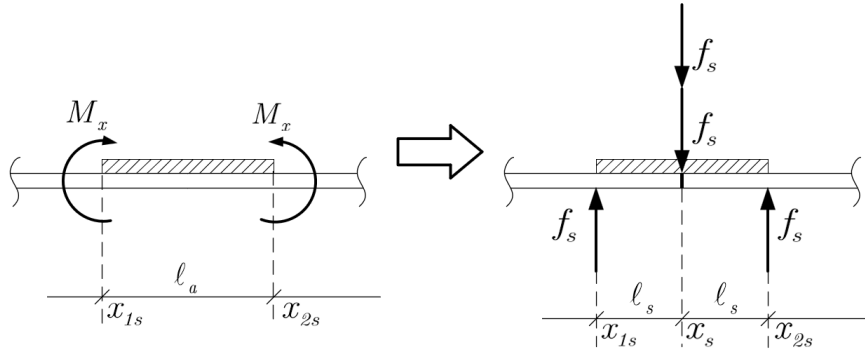
Równania (2.24) i (2.25) wyrażają klasyczne podejście do modelowania oddziaływania PZT-belka poprzez dwa momenty zastępcze o rozkładzie ciągłym. Fizyczne zjawisko odginania się aktuatora zostało przedstawione jako obciążenie belki zewnętrzną parą momentów liniowych o przeciwnym znaku, znajdujących się na brzegach aktuatora. Zgodnie z równaniem (2.26), amplituda tych momentów jest proporcjonalna do przyłożonego napięcia.

2.2.1. Model symetrycznego PZT (s-PZT)

Momenty gnące w równaniu (2.25) można zastąpić dwiema parami sił o rozkładzie ciągłym i rozpatrzyć zjawisko oddziaływania aktuatora na belkę jako wymuszenie zewnętrznymi siłami przyłożonymi punktowo, Rys. 2.3:

$$f_x = f_s [\delta(x - x_{1s}) - 2\delta(x - x_s) + \delta(x + x_{2s})] \quad (2.27)$$

gdzie: x_s – położenie środka s-PZT; $x_{1s} = x_s - \ell_a/2$, $x_{2s} = x_s + \ell_a/2$; ℓ_a – długość aktuatora, [m]; f_s – amplituda siły zastępczej, [N].



Rys. 2.3 Zastępcze momenty gnące zamienione na dwie pary sił w s-PZT.

Obydwa momenty generowane przez s-PZT są równe co do wartości i powstają na skutek oddziaływania sił. Można zatem zapisać:

$$M = M_0 + M_0 = f_s \frac{\ell_a}{2} + f_s \frac{\ell_a}{2} \quad (2.28)$$

Rozwiązanie drgań wymuszonych zewnętrzną siłą daną zależnością (2.5) oraz siłami pochodzącymi od s-PZT, równanie (2.27), wymaga zastąpienia we wzorze (2.21) członu $A_{v;0}$ wyrażeniem $A_{v;f}$, które zawiera w sobie wszystkie siły oddziałujące na belkę:

$$X_f(x) = \sum_v A_{v;f} X_v(x) \quad (2.29)$$

Wyrażenie $A_{v;f}$ jest zależnością uwzględniającą współrzędne oddziaływania sił na belkę:

$$A_{v;f} = C_v^* I_{v;f} = C_v^* (I_{v;0} + I_{v;a}) \quad (2.30)$$

Całka $I_{v;0}$ jest związana z siłą wymuszającą f_0 przyłożoną w punkcie x_f :

$$I_{v;0} = -f_0 \int_0^\ell \delta(x - x_f) X_v(x) dx = -f_0 X_v(x_f) \quad (2.31)$$

Całka $I_{v;a}$ jest związana z zastępczymi siłami modelującymi działanie aktuatora:

$$\begin{aligned} I_{v;a} &= f_s \int_0^\ell [\delta(x - x_{1s}) - 2\delta(x - x_s) + \delta(x - x_{2s})] X_v(x) dx = \\ &= f_s [X_v(x_{1s}) - 2X_v(x_s) + X_v(x_{2s})] \end{aligned} \quad (2.32)$$

Wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest ilorazem różnicowym centralnym drugiej pochodnej. Jako, że odstęp pomiędzy węzłami jest stały i wynosi $\ell_s = \ell_a/2$, wyrażenie

przyjmuje postać [9]:

$$\frac{1}{\ell_s^2} [X_v(x_{1s}) - 2X_v(x_s) + X_v(x_{2s})] = D^2 X_v(x_s) \quad (2.33)$$

Linie ugięcia belki można potraktować jako krzywą płaską. Zatem krzywiznę takiej linii można zapisać jako [26]:

$$\kappa = \frac{D^2 X_v}{(1 + (DX_v)^2)^{3/2}} \quad (2.34)$$

Dla małych poprzecznych przemieszczeń belki oraz zakładając drgania symetryczne, kąt ugięcia jest niewielki, zatem $DX_v \ll 1$ i równanie (2.34) można zapisać jako [8]:

$$\kappa = \pm D^2 X_v \quad (2.35)$$

Znak krzywizny jest umowny, mianowicie, jeśli znak momentu gnącego jest dodatni, krzywizna także ma wartość dodatnią. W związku z tym, wracając do problemu drgań wymuszonych, wyrażenie w nawiasie kwadratowym w zależności (2.33) przyjmuje postać:

$$[X_v(x_{1s}) - 2X_v(x_s) + X_v(x_{2s})] = \ell_s^2 \kappa(x_s) \quad (2.36)$$

Podstawiając równanie (2.36) do (2.32) i następnie do (2.30) można otrzymać:

$$A_{v,f} = C_v^* \left(-f_0 X_v(x_f) + f_s \ell_s^2 \kappa(x_s) \right) = A_{v;0} + A_{v;a} \quad (2.37)$$

Minimalizacja wyrażenia $A_{v,f}$ prowadzi do redukcji drgań belki. Wartość zerowa $A_{v,f}$ oznacza całkowitą redukcję. Warunkiem koniecznym dla minimalizacji $A_{v,f}$ jest:

$$DA_{v,f}(x) = 0, \quad x = x_s \quad (2.38)$$

Punkt, w którym warunek jest spełniony jest punktem stacjonarnym. Warunkiem wystarczającym do minimalizacji $A_{v,f} = A_{v,f}(x)$ jest:

$$D^2 A_{v,f} > 0 \quad x = x_s \quad (2.39)$$

Z układu równań (2.38) i (2.39) oblicza się x_s , dla którego $A_{v,f}(x_s)$ ma wartość minimalną, zatem redukcja drgań jest wtedy najbardziej efektywna. Należy pamiętać, że w przypadku drgań symetrycznych środek s-PZT musi znajdować się w miejscu

maksymalnej krzywizny struktury. Na bazie równań (2.38-2.39) można sformułować szczególną postać funkcji celu, która dla przypadku jednowymiarowego i przy założeniu symetrycznego aktuatora jest wyrażona zależnością:

$$\mathcal{J} = \min(A_{v;f}) \quad (2.40)$$

2.2.2. Model asymetrycznego PZT (a-PZT)

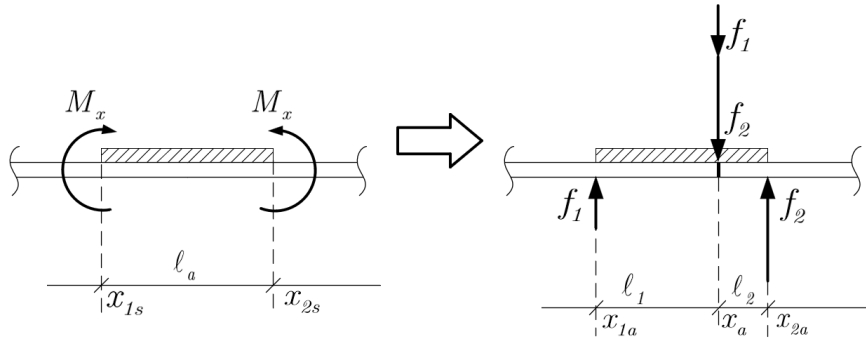
Rozważmy teraz przykład aktuatora asymetrycznego (a-PZT), który jest uogólnieniem s-PZT, Rys. 2.4. W a-PZT wartości momentów generowanych przez siły są sobie równe, ale ramiona par sił mają różne długości [12]:

$$\begin{aligned} M &= M_0 + M_0 = f_1 \ell_1 + f_2 \ell_2 \\ f_1 \ell_1 &= f_2 \ell_2 \end{aligned} \quad (2.41)$$

W tym przypadku, zamiast równania (2.27) otrzymujemy:

$$f(x) = [f_1 \delta(x - x_{1a}) - (f_1 + f_2) \delta(x - x_a) + f_2 \delta(x - x_{2a})] \quad (2.42)$$

gdzie: $x_{1a} = x_a - \ell_1$, $x_{2a} = x_a + \ell_2$.



Rys. 2.4 Zastępcze momenty gnące zamienione na dwie pary sił w a-PZT.

Zamiast całki $I_{v;a}$ w równaniu (2.30) występuje całka $I'_{v;a}$ związana z a-PZT:

$$I'_{v;f} = -f_0 X_v(x_f) + [f_1 X_v(x_{1a}) - (f_1 + f_2) X_v(x_a) + f_2 X_v(x_{2a})] \quad (2.43)$$

Następnie, biorąc pod uwagę zależność (2.41):

$$\begin{aligned} I'_{v;a} &= f_1 X_v(x_{1a}) - f_1 X_v(x_a) - f_1 \frac{\ell_1}{\ell_2} X_v(x_a) + f_2 X_v(x_{2a}) = \\ &= f_1 \left[X_v(x_{1a}) - X_v(x_a) - \frac{\ell_1}{\ell_2} X_v(x_a) + \frac{\ell_1}{\ell_2} X_v(x_{2a}) \right] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dalej, wyłączając przed nawias iloraz długości ramion a-PZT:

$$I'_{v;a} = f_1 \left[(X_v(x_{1a}) - X_v(x_a)) - \frac{\ell_1}{\ell_2} (X_v(x_a) - X_v(x_{2a})) \right] \quad (2.45)$$

Wyrażenia w nawiasach można zapisać korzystając z ilorazów różnicowych progresywnych dla pochodnych pierwszego rzędu [66]:

$$\begin{aligned} \frac{X_v(x_a) - X_v(x_{1a})}{\ell_1} &= DX_v(x_{1a}) \\ \frac{X_v(x_{2a}) - X_v(x_a)}{\ell_2} &= DX_v(x_a) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Podstawiając zależności (2.46) do (2.45) można otrzymać:

$$I'_{v;a} = f_1 [-\ell_1 DX_v(x_{1a}) + \ell_1 X_v(x_a)] \quad (2.47)$$

Stosując kolejny raz iloraz różnicowy progresywny:

$$\frac{DX_v(x_a) - DX_v(x_{1a})}{\ell_1} = D^2 X_v(x_{1a}) \quad (2.48)$$

otrzymuje się:

$$I'_{v;a} = f_1 \ell_1 [DX_v(x_a) - DX_v(x_{1a})] = f_1 \ell_1^2 D^2 X_v(x_{1a}) \quad (2.49)$$

gdzie $D^2 X_v(x_{1a})$ jest drugą pochodną po poprzecznym przemieszczeniu belki w punkcie x_{1a} . Aby nadać interpretacji charakter techniczny, należy przede wszystkim zauważyć, że moment gnący belki jest powiązany z drugą pochodną [12]:

$$EJ D^2 X_v(x_{1a}) = M_v(x_{1a}) \quad (2.50)$$

W ten sposób, bazując na równaniu (2.18), problem redukcji drgań przy zastosowaniu a-PZT został rozwiązany. Podstawiając równanie (2.43) do (2.18) otrzymuje się:

$$X'_f(x) = \sum_v C_v^* I'_{v,f} X_v(x) = \sum_v C_v^* (I_{v,0} + I'_{v,a}) X_v(x) = \sum_v A'_{v,f} X_v(x) \quad (2.51)$$

gdzie ostatecznie:

$$A'_{v,f} = C_v^* (I_{v,0} + I'_{v,a}) = C_v^* \left(-f_0 X_v(x_f) + f_1 \ell_1^2 \frac{M_v(x_{1a})}{EJ} \right) = A_{v,0} + A'_{v,a} \quad (2.52)$$

Minimalizacja $A'_{v,f}$ prowadzi do redukcji drgań belki, wartość $A'_{v,f} = 0$ oznacza całkowitą redukcję. Podobnie jak w przypadku symetrycznego aktuatora, $A'_{v,f}$ posiada minimum, gdy $A'_{v,a}$ kompensuje $A_{v,0}$, ale w ograniczeniu $A'_{v,f} \geq 0$. Ponieważ $\ell_1 = x_a - x_{1a}$, zamiast równania (2.52) można zapisać:

$$A'_{v,f} = C_v^* \left(-f_0 X_v(x_f) + f_1 (x_a - x_{1a})^2 \frac{M_v(x_{1a})}{EJ} \right) = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a) \quad (2.53)$$

Warunkami koniecznymi dla minimalizacji $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ są:

$$DA'_{v,f}(x, x_a) = 0, \quad x = x_{1a} \quad \text{i} \quad DA'_{v,f}(x_{1a}, x) = 0, \quad x = x_a \quad (2.54)$$

Warunkiem wystarczającym do minimalizacji $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ jest:

$$D_1^2 A'_{v,f} D_a^2 A'_{v,f} - (D_1^2 A'_{v,f})^2 > 0 \quad (2.55)$$

gdzie $D_1(\cdot) = D_{x_{1a}}(\cdot)$, $D_a(\cdot) = D_{x_a}(\cdot)$. Z układu równań (2.54) i (2.55) można obliczyć wartości (x_{1a}, x_a) , dla których wartość $A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ osiąga minimum, a zatem redukcja drgań jest najefektywniejsza. Bazując na równaniach (2.53-2.55) można sformułować szczegółową funkcję celu, która dla a-PZT przyjmuje postać:

$$\mathcal{J} = \min(A'_{v,f}) \quad (2.56)$$

W związku z tym, znaleziono asymetrię a-PZT. Przez a-PZT rozumie się aktuator piezoelektryczny, którego kształt został zoptymalizowany. W ten sposób teoretycznie wyznaczono umiejscowienie oraz asymetrię aktuatora zapewniając maksymalną redukcję drgań struktury.

2.3. Redukcja drgań w stanie ustalonym

Efektywność redukcji drgań może być mierzona różnymi wielkościami fizycznymi, które zmieniają się wraz ze zmianą poprzecznego przemieszczenia. Tą wielkością może być amplituda drgań w wybranym punkcie. Jednakże efektywność redukcji może być także zmierzona przy użyciu wartości momentu gnącego lub siły tnącej w punkcie. Miarą redukcji mogłaby być także całka oznaczona z tych wielkości liczona po długości belki. W niniejszej pracy jako miarę redukcji drgań przyjęto następujący iloraz:

$$R_v = \frac{u_{v;0} - u_{v;f}}{u_{v;0}} \cdot 100\% \quad (2.57)$$

gdzie: $u_{v;0}$ – amplituda drgań bez działania PZT, drgania są wzbudzone jedynie przez siłę $f_0(x_f)$; $u_{v;f}$ – amplituda drgań przy działaniu PZT, drgania są wzbudzone przez $f_0(x_f)$ i zredukowane przez PZT.

R_v jest tej samej postaci co globalna funkcja celu zatem w sposób bezpośredni odnosi się do optymalizacji. Aby zweryfikować efektywność s-PZT i a-PZT na bazie wskaźnika redukcji drgań R_v , przeprowadzono następujące obliczenia:

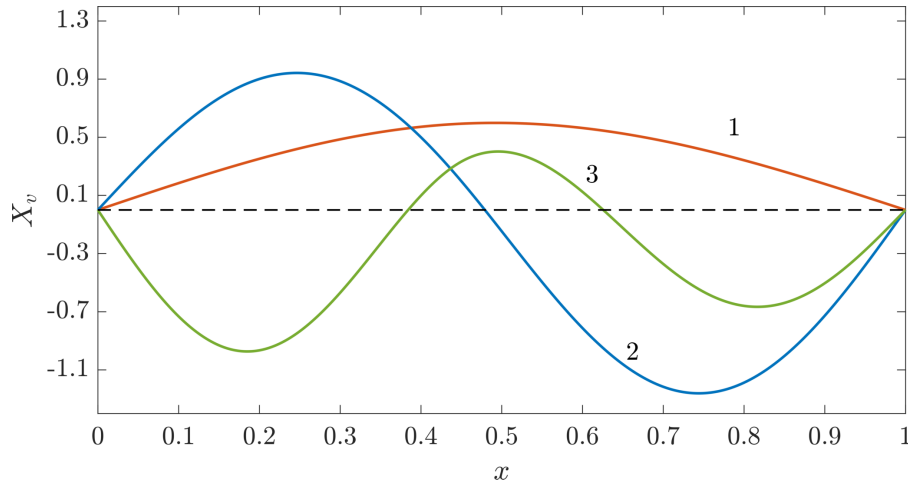
- 1- dla s-PZT optymalizacja dotyczyła jednego parametru: zmieniano środek s-PZT – funkcja celu zależy jedynie od x_s ,
- 2- dla a-PZT optymalizacja była dwuparametrowa: zmieniano asymetrię ramion par sił oraz współrzędne punktu x_a – funkcja celu zależy od x_a i x_{1a} .

Wszystkie obliczenia były przeprowadzone oddzielnie dla pierwszych trzech postaci drgań własnych $\{X_v\} = \{X_1, X_2, X_3\}$. W obliczeniach założono następujące dane:

wielkość	symbol	jednostka	wartość
gęstość	ρ	kg/m ³	2700
moduł Younga	E	Pa	6.9·10 ¹⁰
długość belki	ℓ	m	1
szerokość belki	h_1	m	0.050
grubość belki	h_2	m	0.005
waga masy punktowej	m	kg	0.3
długość PZT	ℓ_a	m	0.2

Tab. 2.1 Dane obliczeniowe.

Współrzędna masy punktowej została tak dobrana, aby dla każdej postaci drgań własnych uzyskać asymetrię drgań $\{x_{m;v}\} = \{x_{m;1}, x_{m;2}, x_{m;3}\} = \{0.39, 0.85, 0.45\} \times \ell$. Na podstawie danych dla pierwszej postaci drgań własnych obliczono $\frac{EJ}{\rho S} = 53.2407 \text{ m}^4\text{s}^{-2}$. Następnie, bazując na równaniu $\det \mathbf{A}(\lambda_v) = 0$ wyznaczono zbiór wartości własnych $\{\lambda_v\} = \{2.7121, 5.9945, 9.1517, 11.6305, 15.6784, \dots\}$ i obliczono częstości drgań własnych belki $\{\omega_v\} = \{53.6686, 262.1975, 611.1207, 987.0076, 1793.6011, \dots\}$. Na podstawie równania (2.15) wyznaczono trzy pierwsze postaci drgań własnych, Rys. 2.5. Wykresy wyraźnie pokazują asymetrię drgań poprzecznego przemieszczenia belki. Długości wszystkich aktuatorów są równe i wynoszą $\ell_a = 0.2\ell$. Amplituda siły wymuszającej z równania (2.5) została dobrana eksperymentalnie tak, aby uzyskać wymierne ugięcie belki dla poszczególnych postaci drgań własnych: $\{f_{0;v}\} = \{f_{0;1}, f_{0;2}, f_{0;3}\} \text{ N}$.



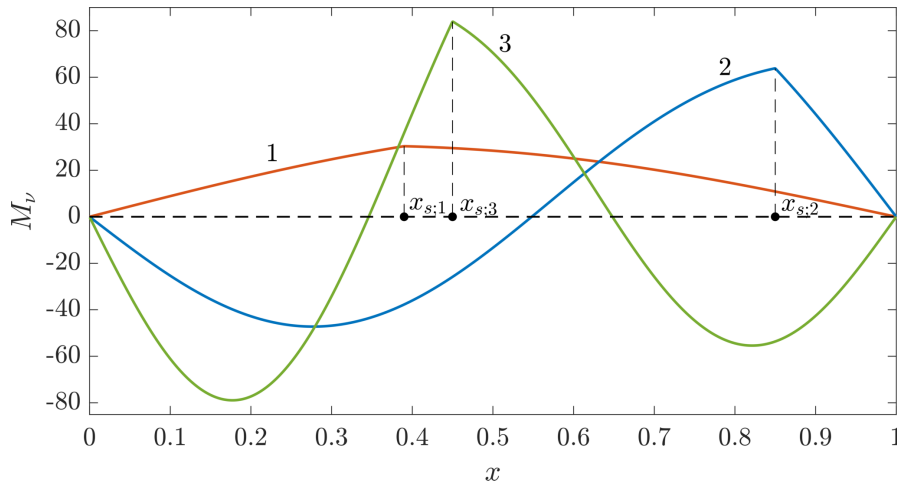
Rys. 2.5 Postacie drgań własnych: 1 – X_1 , 2 – X_2 , 3 – X_3 .

2.3.1. Redukcja drgań przy zastosowaniu s-PZT

Przy stałej długości ℓ_s i stałej energii dodanej przez s-PZT do struktury belka-masa-aktuator, optymalizacja dotyczy tylko środka s-PZT. Dla każdej postaci drgań własnych X_v szczególną postacią funkcji celu jest $A_{v;f}(x_s)$, równanie (2.37). Minimalizując $A_{v;f}(x_s)$ można otrzymać optymalne rozmieszczenie s-PZT w postaci współrzędnej środka aktuatora $x_{s;v}$. Konieczny warunek dla minimalizacji $A_{v;f}(x_s)$ dany jest przez równanie (2.38), zatem:

$$DA_{v;f}(x) = \ell_s^2 \frac{f_s}{EJ} DM_v(x), = 0 \quad x = x_s \quad (2.58)$$

gdzie wzięto pod uwagę równanie (2.48) uzależniające ugięcie spowodowane aktuatorem od wartości momentu gnącego w punkcie. Warunek wystarczający do minimalizacji $A_{v,f}(x_s)$ dany jest przez równanie (2.39), zatem $D^2M_v(x) > 0$, $x = x_s$. W pierwszej kolejności obliczono momenty gnące belki dla pierwszych trzech postaci drgań własnych, Rys. 2.6. Człon w funkcji celu odpowiadający za działanie aktuatora jest proporcjonalny do momentu gnącego belki w punkcie. Zatem umiejscowienie s-PZT tak, aby jego środek przypadał w punkcie, w którym moment gnący belki osiąga absolutne ekstremum, prowadzi do maksymalizacji efektu redukcji drgań. W oparciu o warunek konieczny i wystarczający, współrzędne punktów $x_{s,v}$ zostały znalezione $\{x_{s,v}\} = \{x_{s;1}, x_{s;2}, x_{s;3}\} = \{0.39, 0.85, 0.45\} \times \ell$.

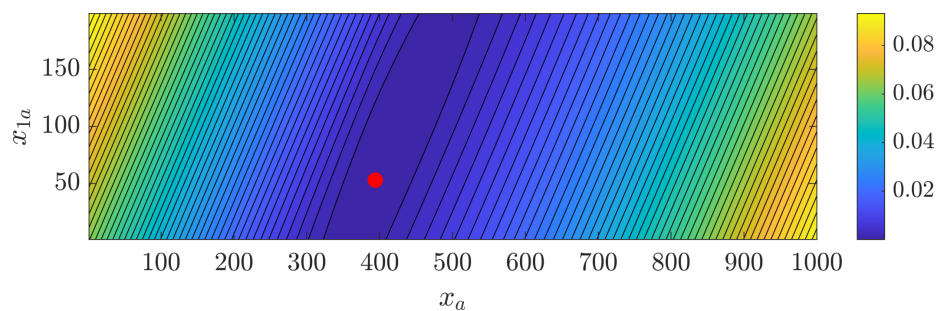


Rys. 2.6 Momenty gnące $M_v(x)$ dla trzech pierwszych postaci drgań własnych: $\{M_v\} = \{M_1, 0.5M_2, 0.5M_3\}$.

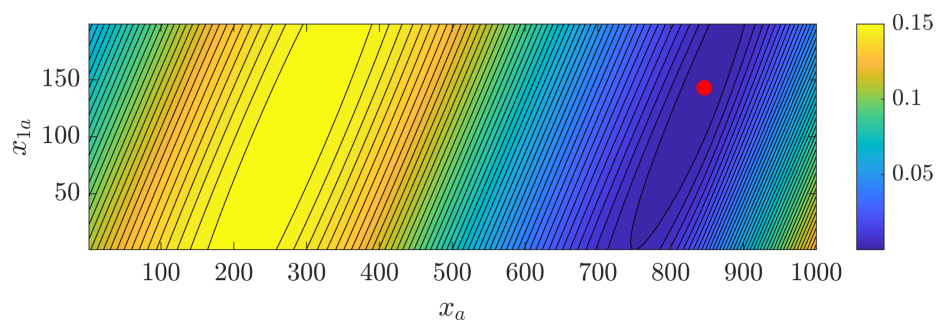
2.3.2. Redukcja drgań przy zastosowaniu a-PZT

W przypadku a-PZT zakładamy, że długość aktuatora i energia dodana do układu belka-masa-aktuator jest taka sama jak dla s-PZT. Zatem, zostały obliczone dwa parametry dotyczące a-PZT: jeden związany z umiejscowieniem na strukturze (x_a) oraz drugi związany z asymetrią (x_{1a} lub x_{2a}). Dokładne wartości x_a i x_{1a} mogą być znalezione z układu równań (2.54) i (2.55). Problem optymalizacji został w tym przypadku rozwiązany numerycznie, gdzie szczególną postacią funkcji celu było wyrażenie $A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$, równanie (2.53). Minimalizacja $A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ prowadzi do znalezienia umiejscowienia i asymetrii a-PZT. Wykresy szczególnych postaci funkcji celu są przedstawione na rysunkach (Rys. 2.7-2.9), gdzie czerwony punkt oznacza optymalne wartości x_a i x_{1a} . Obliczenia zostały wykonane z dokładnością do 0.001 m, oś pozioma

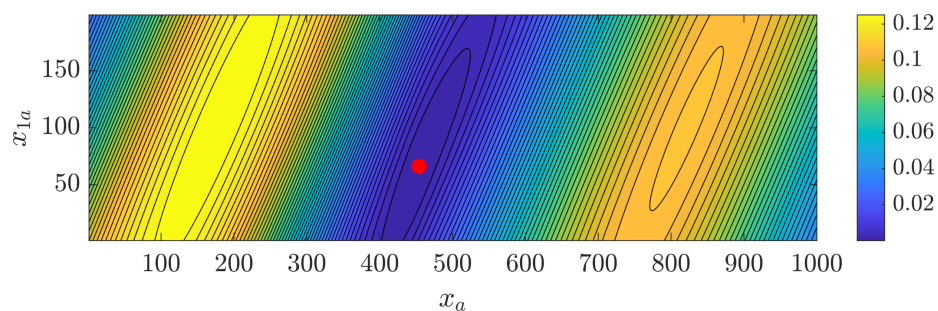
ilustruje zmieniającą się współrzędną punktu x_a na długości belki, zaś na osi pionowej zmieniano asymetrię a-PZT poprzez zmianę proporcji ramion wyrażoną współrzędną x_{1a} [12].



Rys. 2.7 Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla pierwszej postaci drgań własnych.



Rys. 2.8 Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla drugiej postaci drgań własnych.



Rys. 2.9 Funkcja $A'_{v,f} = A'_{v,f}(x_{1a}, x_a)$ dla trzeciej postaci drgań własnych.

2.4. Redukcja drgań z regulatorem LQR

Optymalizacja rozmieszczenia s-PZT może także przebiegać w świetle dynamiki procesu aktywnej redukcji drgań [45]. Aby rozpatrzyć stan przejściowy tego procesu, należy uwzględnić rozwiązanie w dziedzinie czasu. Korzystając z analizy modalnej, można wyrazić rozwiązanie równania (2.1) jako liniową kombinację postaci drgań własnych:

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} X_v \eta_v(t) \quad (2.59)$$

gdzie, po rozdzieleniu zmiennych, $\eta_v(t)$ jest zależnym od czasu rozwiązaniem równania (2.1). Podstawiając równanie (2.59) do równania (2.1) otrzymuje się:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[EJD^4 X_v(x) \eta_v(t) + (\rho S + \alpha_m) X_v \ddot{\eta}_v(t) \right] = f(x, t) \quad (2.60)$$

Następnie, mnożąc równanie (2.60) przez $X_v(x)$ i całkując od 0 do ℓ można otrzymać:

$$\begin{aligned} \eta_v(t) \left(EJ \int_0^{\ell} X_v(x) D^4 X_v(x) dx \right) + \ddot{\eta}_v(t) \int_0^{\ell} (\rho S + \alpha_m) X_v^2(x) dx = \\ = \int_0^{\ell} X_v(x) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.61)$$

gdzie, na podstawie równania (2.6), $D^4 X_v(x) = \lambda_v^4 X_v(x)$:

$$\begin{aligned} \eta_v(t) \lambda_v^4 EJ \int_0^{\ell} X_v^2(x) dx + \ddot{\eta}_v(t) \rho S \int_0^{\ell} X_v^2(x) dx + \ddot{\eta}_v(t) \alpha_m \int_0^{\ell} X_v^2(x) dx = \\ = \int_0^{\ell} X_v(x) f(x, t) dx \end{aligned} \quad (2.62)$$

Następnie, stosując warunek ortogonalności $\rho S \int_0^{\ell} X_v^2(x) dx = 1$:

$$\frac{EJ}{\rho S} \lambda_v^4 \eta_v(t) + \left(1 + \frac{m X_v^2(x_m)}{\rho S} \right) \ddot{\eta}_v(t) = \int_0^{\ell} X_v(x) f(x, t) dx \quad (2.63)$$

Co można zapisać jako równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$\ddot{\eta}_v(t) + \frac{EJ \lambda_v^4}{\rho S + m X_v^2(x_m)} \eta_v(t) = \frac{\rho S}{\rho S + m X_v^2(x_m)} \int_0^{\ell} X_v(x) f(x, t) dx \quad (2.64)$$

Prawa strona równania (2.64) reprezentuje wymuszenie. W analizie dynamiki aktywnej redukcji drgań założono wymuszenie jedynie od aktuatorów przy sterowaniu w otwartej pętli. Przyjęto, że konfiguracja PZT zapewniająca największą odpowiedź struktury, jednocześnie w sposób najbardziej efektywny będzie redukować drgania w przypadku dodatkowego wymuszenia zewnętrznego, zakłócającego. Przy sterowaniu w zamkniętej pętli z regulatorem LQR, wymuszenie w postaci skoku jednostkowego było tłumione aktuatorem. Jako wskaźniki efektywności drgań i jednocześnie składowe funkcji celu przyjęto dwa parametry:

- 1– amplituda drgań w otwartej pętli sterowania bez regulatora,
- 2– amplituda drgań przy sterowaniu w zamkniętej pętli z regulatorem LQR.

W przypadku pierwszego parametru szczególna postać funkcji celu jest związana z obliczeniem amplitudy drgań belki w arbitralnie obranym punkcie interpretowanym jako czujnik punktowy, tutaj x_{sensor} . W obliczeniach przyjęto, że współrzędna czujnika punktowego jest współrzędną masy punktowej $x_{sensor} = x_m$. Na podstawie [65] można zapisać wzór na funkcję przejścia przy założeniu, że wymuszeniem jest uogólniony model aktuatora, czyli a-PZT:

$$G(s) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{k_a \frac{\ell_a}{2\ell_1\ell_2} [\ell_2 X_v(x_{1a}) - (\ell_1 + \ell_2) X_v(x_a) + \ell_1 X_v(x_{2a})] X_v(x_m)}{\mu_v (s^2 + \omega_v^2)} \quad (2.65)$$

gdzie: $k_a = \frac{\rho S}{\rho S + m X_v^2(x_m)}$ i μ_v jest uogólnioną masą daną zależnością $\rho S \int_0^{\ell} X_v(x) X_j(x) = \mu_v \delta_{vj}$.

Amplituda drgań otwartej pętli sterowania została obliczona z przebiegu odpowiedzi skokowej układu (2.65). Skok jednostkowy dany jest wzorem [43]:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0 \\ 1 & \text{dla } t \geq 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

Transformata Laplace'a takiej funkcji jest równa $\frac{1}{s}$, zatem odpowiedzią układu jest $Y(s) = \frac{G(s)}{s}$. Następnie, stosując odwrotną transformację Laplace'a, można przejść na dziedzinę czasową [43]:

$$y_{out}(t) = L^{-1} \{Y(s)\} \quad (2.67)$$

Przebieg czasowy $y_{out}(t)$ jest punktem wyjściowym do optymalizacji. W funkcji przejścia $G(s)$, równanie (2.65), zawarte są parametry geometryczne ogólnego modelu PZT

wpływające na efekt redukcji drgań. Zarówno położenie a-PZT dane współrzędną x_a , jak i asymetria ramion aktuatora, wyrażona przez x_{1a} lub x_{2a} , wpływają na amplitudę drgań układu po wymuszeniu skokiem jednostkowym. Maksymalna amplituda drgań odpowiedzi skokowej zapewni maksymalną efektywność procesu redukcji drgań, zatem szczególną postać funkcji celu można zapisać jako:

$$\mathcal{J} = \max(|y_{out}(t)|) \quad (2.68)$$

Drugim z parametrów, których optymalizacja może wskazać konfigurację PZT maksymalizującą efektywność aktuatora, jest amplituda drgań przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR. W tym celu zapisano równania modelu w przestrzeni stanów:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.69)$$

gdzie: $\mathbf{x}(t)$ – wektor stanu, $\mathbf{y}(t)$ – wektor wyjścia, $\mathbf{u}(t)$ – wektor wejścia, \mathbf{A} – macierz stanu, \mathbf{B} – macierz wejścia, \mathbf{C} – macierz wyjścia.

Układ sterowania jest układem ze sprzężeniem zwrotnym. W celu symulacji procesu aktywnej redukcji drgań posłużono się regulatorem LQR, który określa rozwiązanie dla problemu LQ [93]. Problem ten dotyczy układu dynamiki, który opisany jest układem liniowych równań różniczkowych, zaś jego koszt określony jest przez funkcjonal kwadratowy dany równaniem:

$$J_{LQR} = \int_0^{\infty} (\mathbf{y}^T \mathbf{Q} \mathbf{y} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (2.70)$$

gdzie \mathbf{Q} i \mathbf{R} są macierzami wagowymi. Minimalizacja funkcji kosztu (2.70) prowadzi do otrzymania optymalnego wzmocnienia regulatora. Wektor wejścia, który minimalizuje koszt określony jest przez równanie:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (2.71)$$

gdzie optymalne wzmocnienie \mathbf{K} dane jest wzorem:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (2.72)$$

gdzie \mathbf{P} jest rozwiązaniem równania Riccatiego [65]:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (2.73)$$

Regulator LQR został zaprojektowany dla przypadku ogólnego (a-PZT):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_v \\ -\omega_v & 0 \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_v^{-1} \frac{\ell_a}{2\ell_1\ell_2} [\ell_2 X_v(x_{1a}) - (\ell_1 + \ell_2) X_v(x_a) + \ell_1 X_v(x_{2a})] \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

$$\mathbf{C} = [0 \quad X_v(x_m)] \quad (2.76)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (2.77)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Gamma_{wym} \end{bmatrix} \quad (2.78)$$

gdzie $\mathbf{\Gamma}$ reprezentuje wymuszenie, Γ_{wym} - stała.

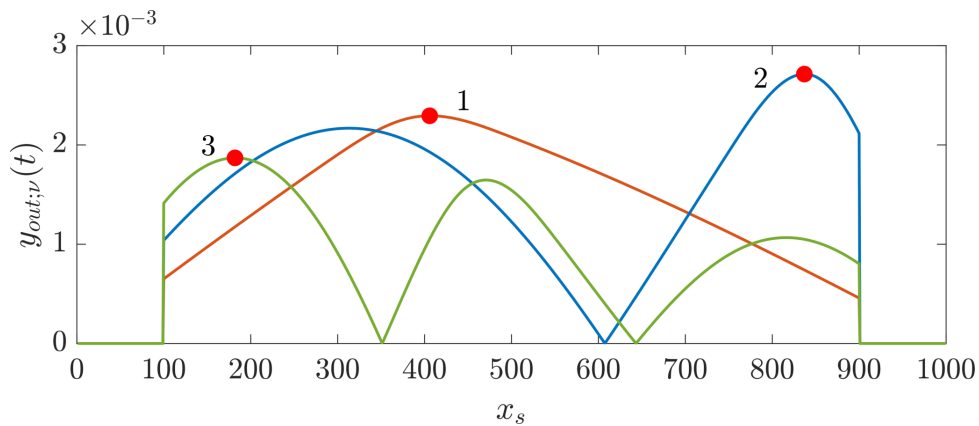
Do punkowego pomiaru został wybrany czujnik prędkości w arbitralnie obranym punkcie x_m . Symulację aktywnej redukcji drgań z regulatorem LQR wykonano w środowisku MATLAB korzystając z funkcji *lqr* [76]. Efektem wywołania funkcji jest otrzymanie optymalnej macierzy wzmocnień \mathbf{K} , która posłużyła do wygenerowania przebiegów czasowych zamkniętej pętli sterowania.

W tym przypadku szczególną postacią funkcji celu jest amplituda drgań w punkcie x_m przy sterowaniu w pętli zamkniętej:

$$\mathcal{J} = \min(|X_{LQR}(x_m, t)|) \quad (2.79)$$

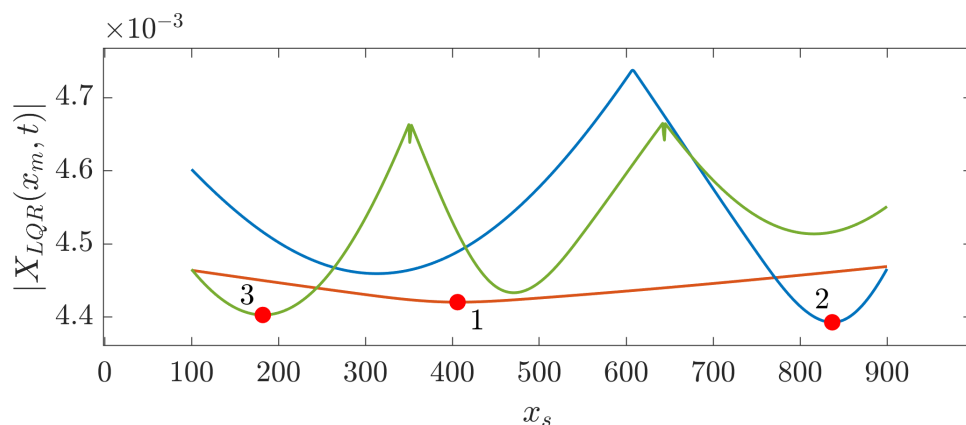
2.4.1. Redukcja drgań przy zastosowaniu s-PZT

Funkcja przejścia dla s-PZT została zdefiniowana na podstawie równania (2.65), z tym, że przyjęto równe długości ramion par sił $\ell_1 = \ell_2 = \ell_s$. Zatem optymalizacja w tym przypadku jest jednoparametrowa i dotyczy tylko punktu x_s . Rys. 2.10 prezentuje wyniki optymalizacji dla trzech pierwszych postaci drgań własnych. W celu poprawy czytelności wykresu przeskalowano przebiegi dla pierwszej (mnożnik równy 5) i trzeciej postaci drgań własnych (mnożnik równy 10).



Rys. 2.10 Rozkład amplitudy odpowiedzi układu przy sterowaniu w otwartej pętli dla pierwszych trzech modów: 1 – $y_{out;1}$, 2 – $y_{out;2}$, 3 – $y_{out;3}$.

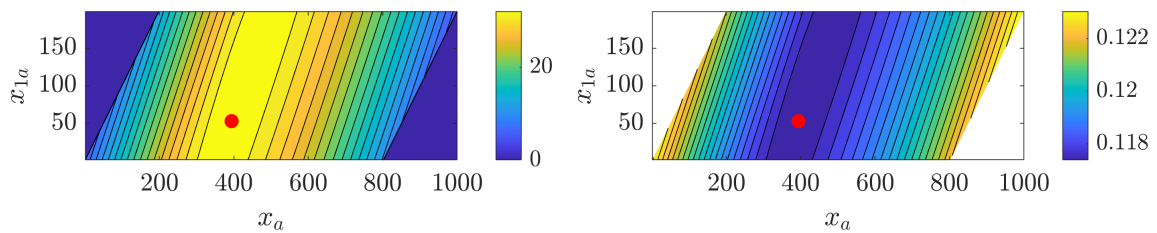
Optymalizacja jednoparametrowa dla s-PZT wskazuje następujące punkty jako umiejscowienie aktuatora zapewniające największą amplitudę drgań w otwartej pętli sterowania: $\{x_{s;v}\} = \{x_{s;1}, x_{s;2}, x_{s;3}\} = \{0.406, 0.837, 0.182\} \times \ell$. Zarówno dla pierwszej, jak i drugiej postaci drgań własnych, procedura optymalizacyjna wskazała punkty leżące w pobliżu maksymalnego momentu gnącego belki, natomiast dla trzeciej postaci drgań własnych optymalnym rozmieszczeniem s-PZT okazał się punkt leżący w pobliżu maksimum lokalnego. Te same wyniki co do współrzędnych $x_{s;v}$ dała optymalizacja w oparciu o amplitudę sygnału przy sterowaniu w pętli zamkniętej, Rys. 2.11. W tym przypadku funkcja jest minimalizowana. Przeskalowano przebiegi dla drugiej (mnożnik równy 1.3) oraz trzeciej postaci drgań własnych (mnożnik równy 12) w celu poprawy czytelności wykresu.



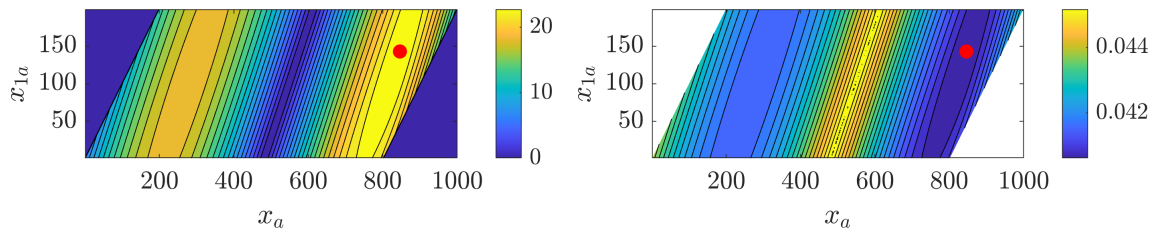
Rys. 2.11 Rozkład amplitudy drgań przy sterowaniu w pętli zamkniętej dla pierwszych trzech modów: 1, 2, 3 - odpowiednio: pierwszy, drugi i trzeci mod.

2.4.2. Redukcja drgań przy zastosowaniu a-PZT

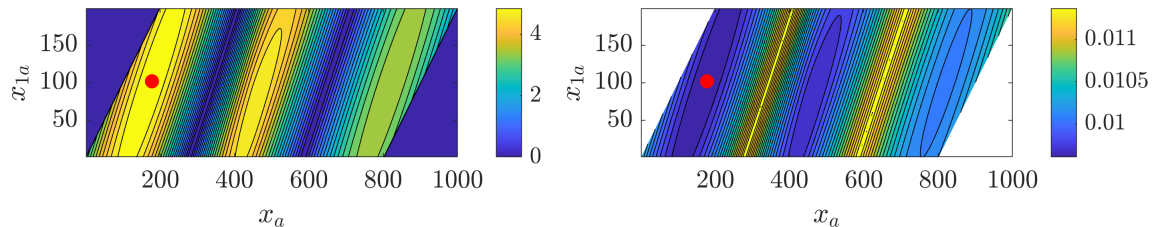
Aktuator asymetryczny, jako przypadek ogólny, wymaga optymalizacji dwuparametrowej [12]. Podobnie jak w przypadku optymalizacji dla drgań w stanie ustalonym, celem optymalizacji jest znalezienie położenia a-PZT (wyrażonego przez x_a) i asymetrii a-PZT (wyrażonej przez x_{1a} lub x_{2a}), które zapewnią: maksymalną odpowiedź układu na skok jednostkowy oraz minimalną wartość amplitudy drgań przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR. Rysunki 2.12-2.14 prezentują sformułowane funkcje celu, równania (2.68) i (2.79), dla pierwszych trzech modów.



Rys. 2.12 Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla pierwszego modu.



Rys. 2.13 Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla drugiego modu.



Rys. 2.14 Rozkład amplitudy odpowiedzi układu $\times 10^{-6}$ w punkcie x_m przy sterowaniu w otwartej pętli (po lewej) oraz z regulatorem LQR (po prawej) dla trzeciego modu.

Czerwone punkty na Rys. 2.12-2.14 wskazują punkt optymalny, którego współrzędna na osi poziomej dotyczy położenia a-PZT, zaś na osi pionowej asymetrię aktuatora.

Zarówno pierwsze jak i drugie podejście do optymalizacji a-PZT wskazało ten sam punkt.

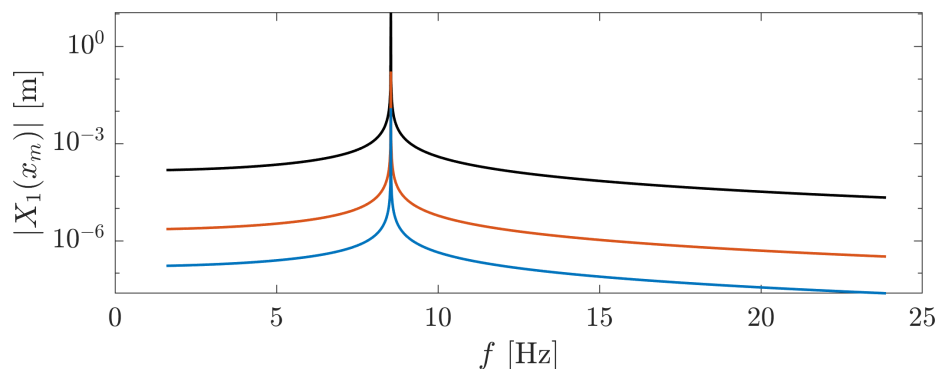
2.5. Porównanie s-PZT i a-PZT

2.5.1. Redukcja drgań w stanie ustalonym

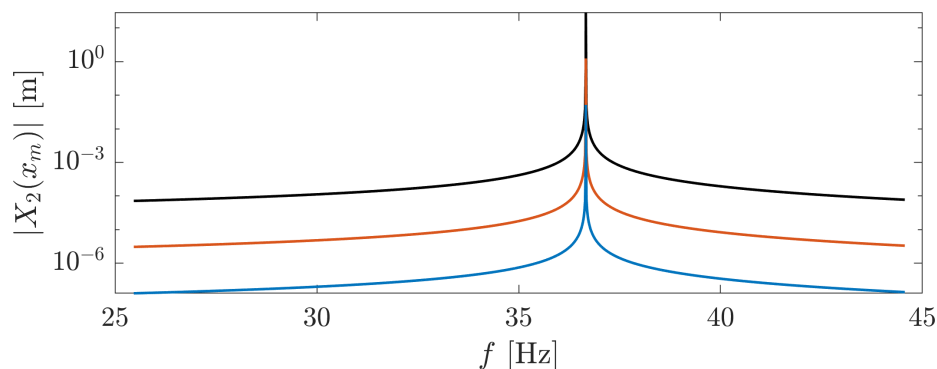
Amplituda drgań belki została wyznaczona dla zakresu częstotliwości w postaci widma amplitudowego. Rysunki 2.15-2.17 przedstawiają efekt działania s-PZT i a-PZT. Dla każdej postaci drgań własnych widać wyraźną przewagę asymetrycznego aktuatora. Redukcja drgań z wykorzystaniem a-PZT wykazuje większą efektywność w całym rozpatrywanym zakresie częstotliwości dla każdego modu. Tabela 2.2 przedstawia dane liczbowe tj. punkty określające położenie s-PZT i a-PZT na strukturze, asymetrię ramion aktuatora w przypadku a-PZT oraz procentowe wartości wskaźnika efektywności redukcji drgań dla trzech pierwszych modów. Wyniki w tabeli dotyczą obliczeń wykonanych dla częstotliwości bliskiej częstotliwości rezonansowej i dla każdego modu była to wartość $\{\omega_{f;v}\} = \{\omega_v\} - 0.05$ rad/s.

	s-PZT			a-PZT			
	f_s [N]	x_s [m]	R_v [%]	$\{f_1, f_2\}$ [N]	$\{\ell_1, \ell_2\}$ [m]	x_a [m]	R_v [%]
X_1	1.3830	0.39	98.50	{2.9551, 0.9027}	{0.0468, 0.1532}	0.39	99.89
X_2	1.3800	0.85	95.74	{0.9256, 2.7112}	{0.1491, 0.0509}	0.85	99.82
X_3	1.0900	0.45	94.93	{1.8167, 0.7786}	{0.0600, 0.1400}	0.45	99.71

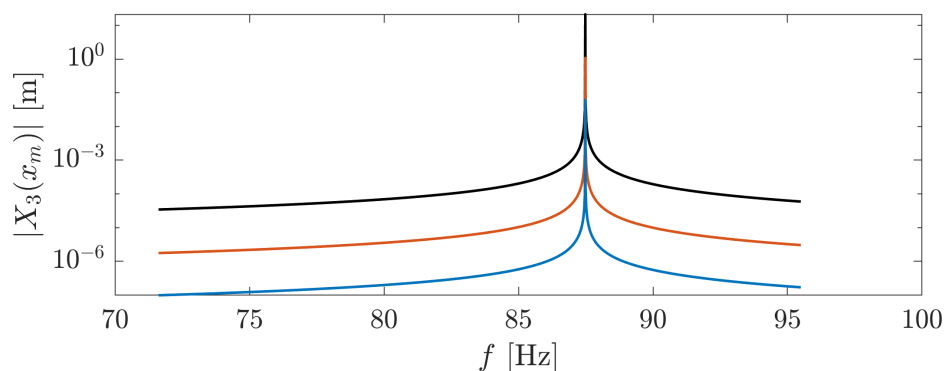
Tab. 2.2 Wyniki wskaźnika efektywności redukcji drgań R_v .



Rys. 2.15 Odpowiedź częstotliwościowa dla pierwszego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).



Rys. 2.16 Odpowiedź częstotliwościowa dla drugiego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).



Rys. 2.17 Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu: bez redukcji (kolor czarny), z działaniem s-PZT (kolor czerwony), z działaniem a-PZT (kolor niebieski).

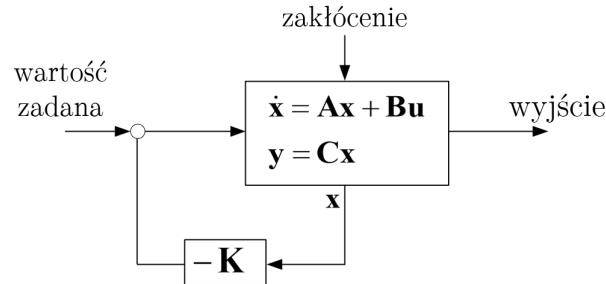
2.5.2. Redukcja drgań z regulatorem LQR

Obliczone położenie s-PZT (x_s), a-PZT (x_a) oraz asymetria a-PZT (x_{1a}) posłużyły do weryfikacji efektywności działania aktuatorów w paśmie częstotliwości, Tab. 2.3.

	s-PZT		a-PZT
	x_s [m]	$\{\ell_1, \ell_2\}$ [m]	x_a [m]
X_1	0.406	{0.053, 0.147}	0.394
X_2	0.837	{0.143, 0.057}	0.846
X_3	0.182	{0.100, 0.100}	0.178

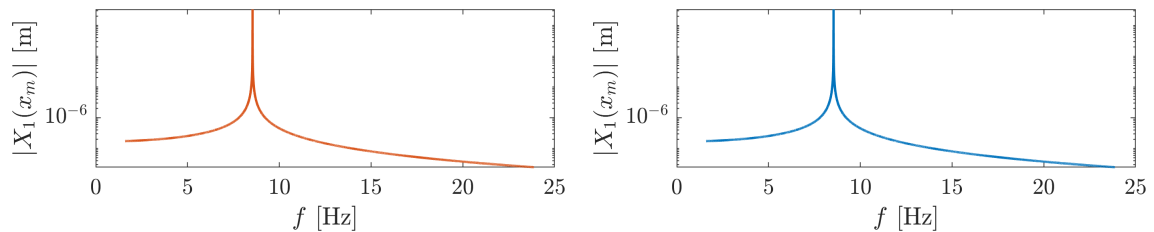
Tab. 2.3 Wyniki optymalizacji amplitudy drgań przy sterowaniu w pętli otwartej oraz zamkniętej z regulatorem LQR.

Zgodnie z przyjętymi kryteriami optymalizacji, wyznaczono odpowiedź częstotliwościową układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora. Był to pierwszy wskaźnik związany z dynamiką aktywnej redukcji drgań, równanie (2.68). Drugim parametrem była amplituda drgań przy sterowaniu z regulatorem LQR, równanie (2.79). Schemat układu sterowania ilustruje Rys. 2.18, [47]. Rysunek 2.19 przedstawia odpowiedź częstotliwościową przy sterowaniu bez regulatora dla s-PZT i a-PZT.

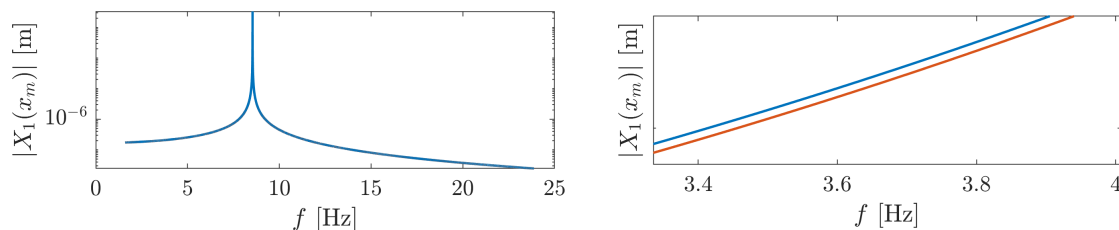


Rys. 2.18 Schemat odpowiedzi sterowania w pętli zamkniętej z regulatorem LQR.

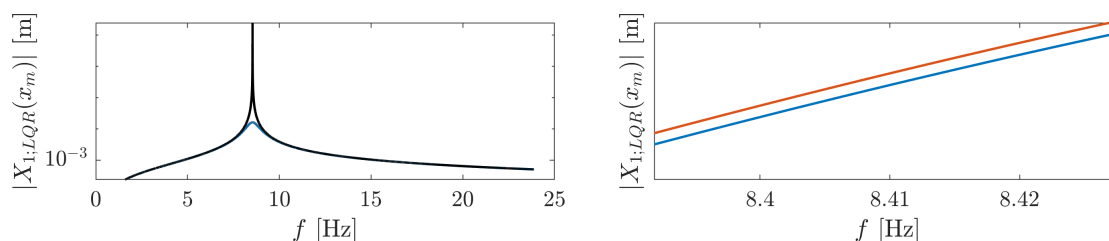
Należy podkreślić, iż w otoczeniu punktu optymalnego odpowiedzi obu układów (z s-PZT i a-PZT) są porównywalne, stąd nałożenie na siebie dwóch charakterystyk z Rys. 2.19 nie daje jednoznacznej odpowiedzi. Dlatego na Rys. 2.20-2.23 pokazano zbliżenie fragmentu wykresu w mniejszej skali.



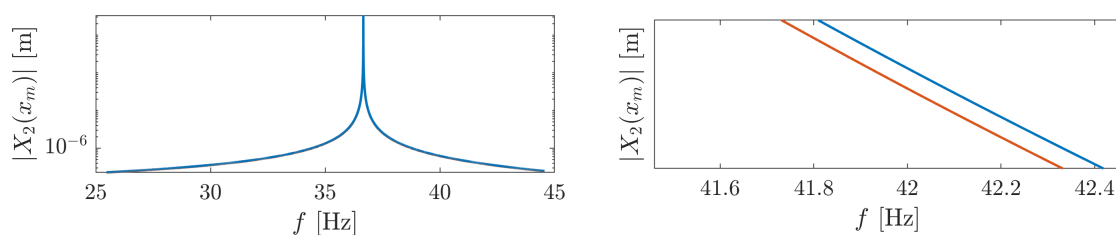
Rys. 2.19 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora dla pierwszego modu; s-PZT (czerwony), a-PZT (niebieski).



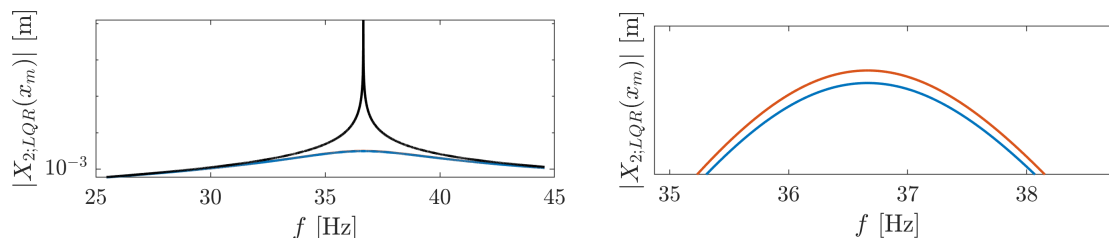
Rys. 2.20 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora (po lewej) dla pierwszego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony).



Rys. 2.21 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR (po lewej) dla pierwszego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony), bez redukcji (czarny).

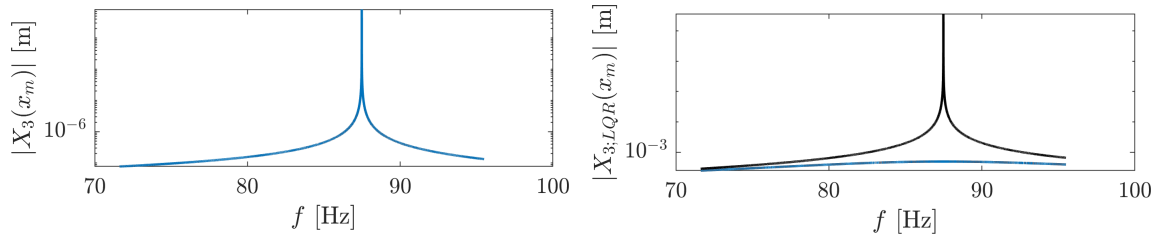


Rys. 2.22 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora (po lewej) dla drugiego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony).



Rys. 2.23 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli zamkniętej z regulatorem LQR (po lewej) dla drugiego modu, przybliżenie wykresu (po prawej); a-PZT (niebieski), s-PZT (czerwony), bez redukcji (czarny).

W przypadku trzeciej postaci drgań własnych, efektem działania dwóch algorytmów opartych o dynamikę aktywnej redukcji drgań, był wynik wskazujący drugie w kolejności ekstremum momentu gnącego (maksimum lokalne), nie zaś ekstremum globalne. Wobec czego uogólniony model aktuatora (a-PZT) wskazał na brak asymetrii ramion, Rys. 2.14, więc optymalnym rozwiązaniem jest s-PZT.



Rys. 2.24 Odpowiedź częstotliwościowa układu przy sterowaniu w pętli otwartej bez regulatora i z regulatorem dla trzeciego modu; a-PZT = s-PZT (niebieski), bez redukcji (czarny).

Z uwagi na fakt, iż różnica w wykresach nie jest wyraźnie widoczna, na potrzeby weryfikacji efektywności działania porównywanych aktuatorów, zdefiniowano nowy wskaźnik, który jest całką z widma amplitudowego:

$$I_{Hz} = \int_{f_\alpha}^{f_\beta} |X_v(x_m, f)| df \quad (2.80)$$

gdzie f_α i f_β są granicami całkowania. Tabela 2.4 przedstawia wyniki całkowania.

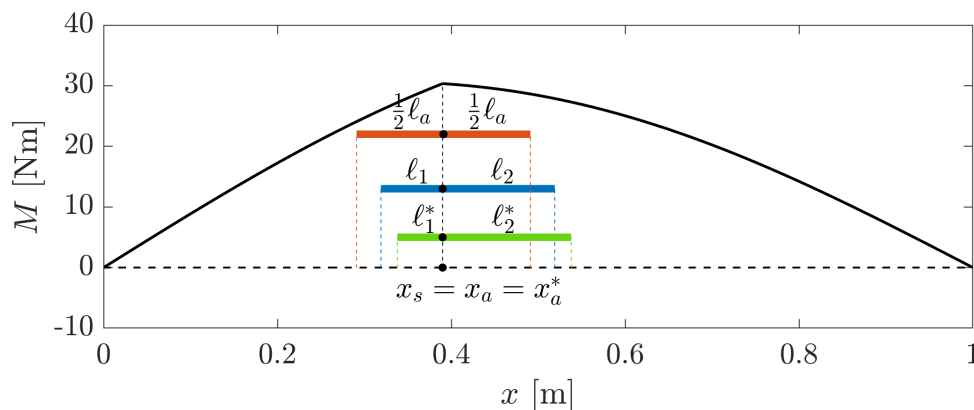
X_v	amplituda układu pętli otwartej		amplituda układu pętli zamkniętej z LQR	
	s-PZT	a-PZT	s-PZT	a-PZT
1	$1.85945 \cdot 10^{-5}$	$1.86830 \cdot 10^{-5}$	$4.48051 \cdot 10^{-2}$	$4.47546 \cdot 10^{-2}$
2	$4.62072 \cdot 10^{-5}$	$4.69690 \cdot 10^{-5}$	$3.27011 \cdot 10^{-2}$	$3.24411 \cdot 10^{-2}$
3	$3.40668 \cdot 10^{-5}$		$9.64965 \cdot 10^{-3}$	

Tab. 2.4 Wyniki wskaźnika I_{Hz} .

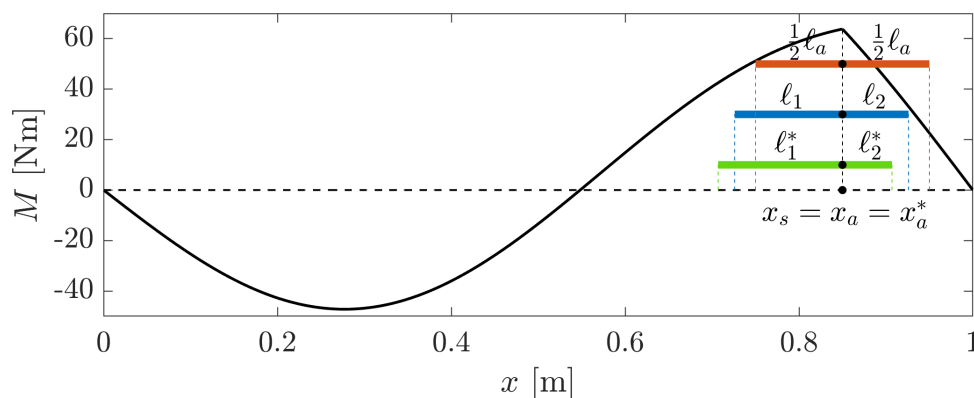
2.6. Podsumowanie

Podejście do optymalizacji a-PZT bazujące na wskaźniku efektywności drgań R_v wskazało na wyraźną asymetrię ramion a-PZT. Procedury optymalizacyjne biorące pod uwagę dynamikę aktywnej redukcji drgań także wykazują asymetrię w konstrukcji a-PZT. Jednakże stopień asymetrii uzyskany w pierwszym podejściu różni się od tego uzyskanego drugą metodą. Rysunki 2.25-2.27 ilustrują umiejscowienie oraz stopień asymetrii aktuatorów na strukturze dla pierwszych trzech modów na tle wykresu momentu gnącego belki. Dalej rozróżniono dwa główne podejścia do optymalizacji: pierwsze bazujące na ścisłych przesłankach i traktujące o problemie w stanie ustalonym oraz drugie, biorące pod uwagę dynamikę aktywnej redukcji drgań. W związku z tym,

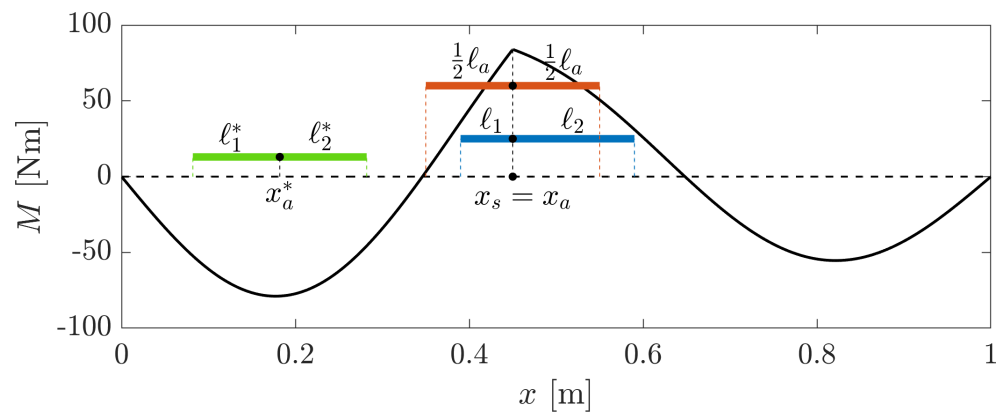
oznaczono poprzez zbiór $\{x_a, \ell_1, \ell_2\}$ rozwiązanie otrzymane w pierwszym podejściu oraz przez $\{x_a^*, \ell_1^*, \ell_2^*\}$ rozwiązanie otrzymane drugim podejściem.



Rys. 2.25 Umieszczenie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla pierwszego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (a-PZT*).



Rys. 2.26 Umieszczenie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla drugiego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (a-PZT*).



Rys. 2.27 Umieszczenie oraz asymetria aktuatorów na strukturze dla trzeciego modu: czerwony (s-PZT), niebieski (a-PZT), zielony (s-PZT*).

Rozdział 3

Redukcja drgań płyty trójkątnej

3.1. Drgania wymuszone z aktuatorem PZT

Jako obiekt badań wybrano płytę w kształcie trójkąta prostokątnego. Obowiązujące równanie opisujące drgania poprzeczne płyty trójkątnej jest równaniem bazującym na teorii Kirchhoffa-Love'a dla płyt cienkich [38], [68], [48]:

$$\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = f(x, y, t) \quad (3.1)$$

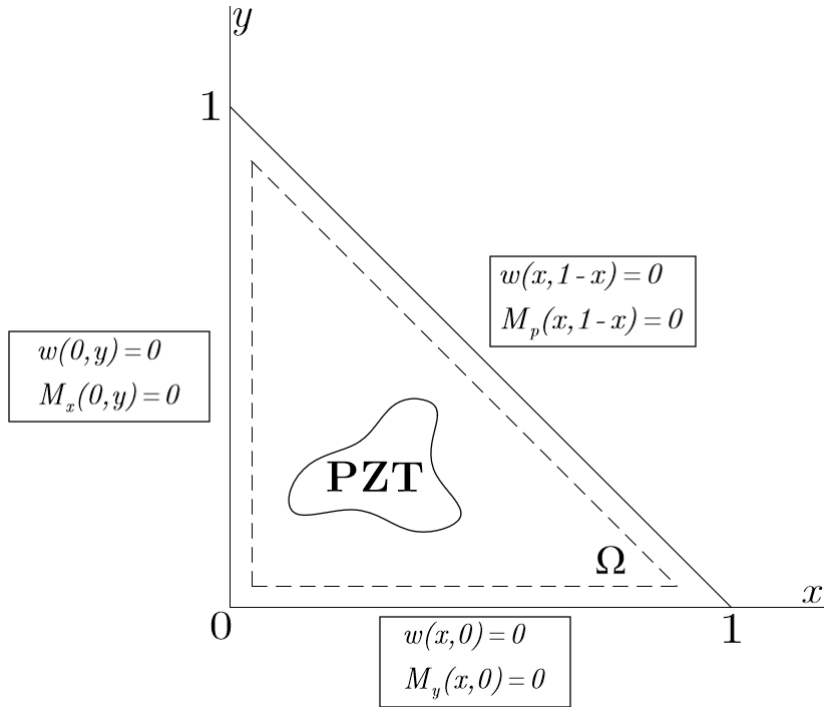
W stanie ustalonym równanie przyjmuje formę:

$$\nabla^4 w(x, y) - \frac{\rho h \omega_f^2}{N_w} w(x, y) = f(x, y) \quad (3.2)$$

gdzie $w = w(x, y)$ – poprzeczne przemieszczenie płyty, [m]; h – grubość płyty, [m]; $f = f(x, y)$ – siły zewnętrzne, [N]; ∇^4 – biharmoniczny operator różniczkowy. Warunek brzegowy swobodnego podparcia jest wymuszony na wszystkich krawędziach płyty, Rys. 3.1:

$$\begin{aligned} w(x, y) = 0 \quad M_x(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad x = 0 \\ w(x, y) = 0 \quad M_y(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad y = 0 \\ w(x, y) = 0 \quad M_p(x, y) = 0 \quad \text{dla} \quad y = 1 - x \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie: $M_x(x, y) = -N_w(D_x^2 w + \nu D_y^2 w)$, $M_y(x, y) = -N_w(D_y^2 w + \nu D_x^2 w)$ i wyrażenie $M_p(x, y)$ określa moment gnący płyty na przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego $M_p(x, y) = -N_w(D_p^2 w + \nu D_n^2 w)$, p – oś na kierunku przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, n – oś na kierunku prostopadłym do przeciwprostokątnej.



Rys. 3.1 Płyta trójkątna swobodnie podparta na wszystkich krawędziach.

Siły zewnętrzne, podobnie jak w przypadku belki, oznaczają zarówno wymuszenie zewnętrzne pobudzające płytę do drgań, jak i siły składające się na model aktuatorów:

$$f(x, y) = f_E(x, y) + f_{PZT}(x, y) \quad (3.4)$$

gdzie wymuszenie zewnętrzne $f_E = f_E(x, y)$, będące zakłóceniem w aktywnej redukcji drgań, przyjmuje formę siły punktowej:

$$f_E(x, y) = f_0 \delta(x - x_0, y - y_0) \quad (3.5)$$

gdzie f_0 – amplituda siły wymuszającej, [N]; (x_0, y_0) – punkt przyłożenia siły wymuszającej.

Siły modelujące działanie PZT $f_{PZT} = f_{PZT}(x, y)$ zależą od jego kształtu i analogicznie do przypadku jednowymiarowego, można je znaleźć wychodząc od podejścia, które implikuje wprowadzenie zastępczych momentów gnących działających na strukturę w miejsce PZT.

3.1.1. Problem drgań własnych

Problem drgań własnych został rozwiązany metodą superpozycji, która dla płyt o kształtach trójkąta, rombu lub trapezu, została wprowadzona przez D. J. Gormana [31], [32], [92] i rozwijana w jego zespole badawczym [71], [72]. Metoda ta, nazywana również metodą Gormana, umożliwia rozwiązanie problemu drgań własnych dla dowolnych kombinacji klasycznych warunków brzegowych. Wcześniej, rozwiązanie analityczne dla płyt cienkich było znane jedynie dla płyt prostokątnych o wszystkich krawędziach swobodnie podpartych (metoda Naviera) lub dla pary krawędzi swobodnie podpartych (metoda Lévy'ego). Metoda Gormana znajduje swoje zastosowanie nie tylko w przypadku płyt prostokątnych, ale także została z powodzeniem zastosowana do rozwiązania bardziej skomplikowanych problemów drgań struktur sprężystych. Rozwiązanie dla omawianego przypadku płyty w kształcie trójkąta prostokątnego zostało zaprezentowane w [71], [72], w niniejszej pracy rozwiązano ten problem w taki sam sposób. Rozwiązywane równanie jest równaniem jednorodnym równania (3.2):

$$\Delta^2 w - \lambda^4 w = 0 \quad (3.6)$$

gdzie $\lambda^4 = \frac{\omega_f^2 \rho h}{N_w}$ jest wartością własną. Warunki brzegowe opisane są równaniami (3.3). Na początku wprowadza się bezwymiarowy układ współrzędnych: $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ i $\psi = b/a$ – współczynnik określający proporcje boków. Wprowadzenie takiego układu współrzędnych umożliwia rozwiązanie problemu dla trójkąta prostokątnego o dowolnych wymiarach, jednakże w pracy, dla uproszczenia, przyjęto wymiary płyty $a = 1$, $b = 1$. Schemat rozwiązania metodą superpozycji polega na zastosowaniu idei Lévy'ego, bazując na dwóch prostokątnych blokach B1 i B2 swobodnie podpartych na trzech krawędziach, Rys. 3.2.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w(\xi, \eta) = \sum_{m=1}^k Y_m(\eta) \sin(m\pi\xi) \quad (3.7)$$

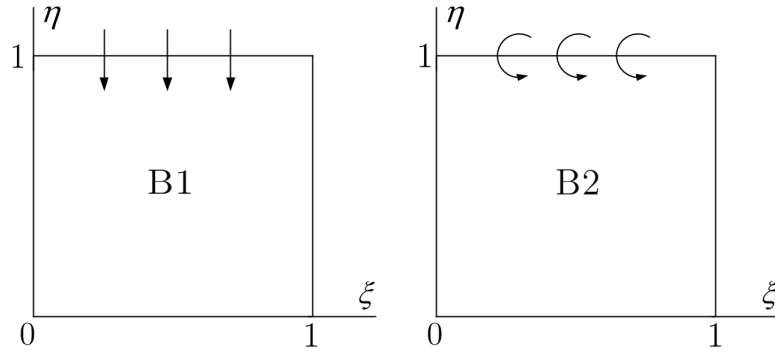
gdzie rozwiązanie $Y_m(\eta)$ dane jest zależnością:

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh(\beta_m \eta) + B_m \sinh(\beta_m \eta) + C_m \sin(\gamma_m \eta) + D_m \cos(\gamma_m \eta) \quad (3.8)$$

lub

$$Y_m(\eta) = A_m \cosh(\beta_m \eta) + B_m \sinh(\beta_m \eta) + C_m \sinh(\gamma_m \eta) + D_m \cosh(\gamma_m \eta) \quad (3.9)$$

w zależności od tego czy wyrażenie $\lambda_*^2 - (m\pi)^2$ ma wartość ujemną czy dodatnią. Jeżeli $\lambda_*^2 > (m\pi)^2$ należy wziąć równanie (3.8), jeżeli $\lambda_*^2 < (m\pi)^2$ należy zastosować (3.9). Oznaczenia pozostałych symboli: $\beta_m = \psi\sqrt{\lambda_*^2 + (m\pi)^2}$, $\gamma_m = \psi\sqrt{\lambda_*^2 - (m\pi)^2}$ lub $\gamma_m = \psi\sqrt{(m\pi)^2 - \lambda_*^2}$, przy czym bierze się tę wartość γ_m , która jest rzeczywista. A_m , B_m , C_m , D_m są stałymi do wyznaczenia z warunków brzegowych. Wyrażenie λ_*^2 jest zdefiniowane zgodnie z [31], [32], [71], [72], $\lambda_*^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/N_w}$ i nie uwzględnia grubości płyty.



Rys. 3.2 Bloki użyte do rozwiązania.

Blok B1 jest związany z wymuszeniem warunku brzegowego poprzecznego przemieszczenia, zaś blok B2 wymusza wartość momentu gnącego. Z równania (3.7) wynika bezpośrednio, że każdy z dwóch bloków spełnia automatycznie warunek brzegowy swobodnego podparcia na brzegach $\xi = 0$ i $\xi = 1$. Wymuszenie zerowego przemieszczenia poprzecznego płyty oraz zerowego momentu gnącego na trzeciej krawędzi $\eta = 0$ skutkuje uproszczeniem dwóch stałych w rozwiązaniu (3.8-3.9), $A_m = D_m = 0$. Poprzeczne przemieszczenie płyty dla czwartego brzegu $\eta = 1$ może być zapisane przez:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} w_{B1}(\xi, 1) = \sum_{m=1}^k G_{1m}(\eta) \sin(m\pi\xi) \quad (3.10)$$

oraz jednorodny warunek brzegowy momentu gnącego. Kompletne rozwiązanie dla pierwszego bloku B1 przyjmuje formę:

$$\begin{aligned} w_{B1}(\xi, \eta) = & \sum_{m=1,2,\dots}^{m^*} G_{1m} \theta_{11m} [\sinh(\beta_m \eta) + \theta_{1m} \sin(\gamma_m \eta)] \sin(m\pi\xi) + \\ & + \sum_{m^*+1}^{\infty} G_{1m} \theta_{22m} [\sinh(\beta_m \eta) + \theta_{2m} \sinh(\gamma_m \eta)] \sin(m\pi\xi) \end{aligned} \quad (3.11)$$

gdzie G_{1m} są współczynnikami w szeregu Fouriera, $m = 1, 2, \dots, m^*$. Pierwsza część szeregu jest związana z warunkiem $\lambda_*^2 > (m\pi)^2$, zaś druga część szeregu powinna być użyta, gdy $\lambda_*^2 < (m\pi)^2$; oznaczenia pozostałych symboli:

$$\theta_{1m} = \frac{[\beta_m^2 - \nu\psi^2(m\pi)^2] \sinh \beta_m}{[\gamma_m^2 + \nu\psi^2(m\pi)^2] \sin \gamma_m} \quad \theta_{2m} = \frac{[\beta_m^2 - \nu\psi^2(m\pi)^2] \sinh \beta_m}{[\gamma_m^2 - \nu\psi^2(m\pi)^2] \sinh \gamma_m} \quad (3.12)$$

$$\theta_{11m} = \frac{1}{\sinh \beta_m + \theta_{1m} \sin \gamma_m} \quad \theta_{22m} = \frac{1}{\sinh \beta_m + \theta_{2m} \sinh \gamma_m} \quad (3.13)$$

Drugi z bloków (B2) jest opisany jednorodnym warunkiem brzegowym poprzecznego przemieszczenia oraz momentem gnącym na krawędzi $\eta = 1$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_n}{N_w} = \sum_{m=1}^k G_{2m} \sin(m\pi\xi) \quad (3.14)$$

W świetle obowiązujących warunków brzegowych, rozwiązanie Lévy'ego dla drugiego bloku może być otrzymane z równania (3.11) przez zamianę współczynników G_{1m} na G_{2m} :

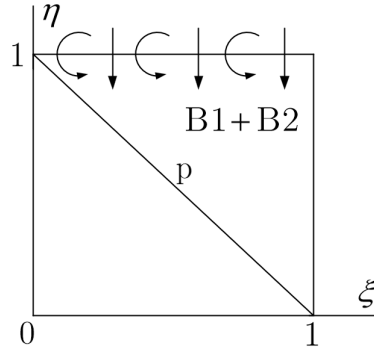
$$w_{B1}(\xi, \eta) = \sum_{m=1,2,\dots}^{m^*} G_{1m} \theta_{11m} [\sinh(\beta_m \eta) + \theta_{1m} \sin(\gamma_m \eta)] \sin(m\pi\xi) + \sum_{m^*+1}^{\infty} G_{1m} \theta_{22m} [\sinh(\beta_m \eta) + \theta_{2m} \sinh(\gamma_m \eta)] \sin(m\pi\xi) \quad (3.15)$$

gdzie symbole θ_{1m} , θ_{2m} , θ_{11m} oraz θ_{22m} dane są zależnościami:

$$\theta_{1m} = -\frac{\sinh \beta_m}{\sin \gamma_m} \quad \theta_{2m} = -\frac{\sinh \beta_m}{\sinh \gamma_m} \quad (3.16)$$

$$\theta_{11m} = -\frac{1}{\beta_m^2 \sinh \beta_m - \theta_{1m} \gamma_m^2 \sin \gamma_m} \quad \theta_{22m} = -\frac{1}{\beta_m^2 \sinh \beta_m + \theta_{2m} \gamma_m^2 \sinh \gamma_m} \quad (3.17)$$

Superpozycję bloków B1 i B2 osiąga się poprzez zsumowanie indywidualnych wkładów w odpowiednie warunki brzegowe. Nałożenie na siebie dwóch bloków skutkuje otrzymaniem obszaru, gdzie dwie sąsiadujące krawędzie (przyprostokątne trójkąta prostokątnego) są swobodnie podparte, Rys. 3.3. Warunek brzegowy swobodnego podparcia dla przeciwprostokątnej p zostanie wymuszony poprzez dostosowanie współczynników w szeregu Fouriera G_{1m} i G_{2m} występujących w rozwiązaniu $w_{B1}(\xi, \eta)$ i $w_{B2}(\xi, \eta)$ metodą Lévy'ego.



Rys. 3.3 Superpozycja bloków B1 i B2.

Oś leżącą na przeciwprostokątnej p można zapisać przy pomocy współrzędnych ξ, η : $\eta = 1 - \xi$. W ten sposób otrzymuje się rozwiązanie na trzeciej krawędzi trójkąta $w_{B1}(\xi, 1 - \xi)$ i $w_{B2}(\xi, 1 - \xi)$:

$$w_{B1}(\xi, 1 - \xi) = \sum_{m=1,2,\dots}^{m^*} G_{1m} \theta_{11m} [\sinh(\beta_m(1 - \xi)) + \theta_{1m} \sin(\gamma_m(1 - \xi))] \sin(m\pi\xi) + \sum_{m^*+1}^{\infty} G_{1m} \theta_{22m} [\sinh(\beta_m(1 - \xi)) + \theta_{2m} \sinh(\gamma_m(1 - \xi))] \sin(m\pi\xi) \quad (3.18)$$

Rozwiązanie dla bloku B2 otrzymuje się poprzez zamianę współczynników G_{1m} na G_{2m} oraz przy użyciu odpowiednich zależności dla parametrów $\theta_{1m}, \theta_{2m}, \theta_{11m}, \theta_{22m}$:

$$w_{B2}(\xi, 1 - \xi) = \sum_{m=1,2,\dots}^{m^*} G_{2m} \theta_{11m} [\sinh(\beta_m(1 - \xi)) + \theta_{1m} \sin(\gamma_m(1 - \xi))] \sin(m\pi\xi) + \sum_{m^*+1}^{\infty} G_{2m} \theta_{22m} [\sinh(\beta_m(1 - \xi)) + \theta_{2m} \sinh(\gamma_m(1 - \xi))] \sin(m\pi\xi) \quad (3.19)$$

Wkład do warunku brzegowego określającego moment gnący na przeciwprostokątnej również musi być określony. Równanie opisujące moment gnący na dowolnej linii na płaszczyźnie płyty zostało wyprowadzone przez Timoszenkę [77] i w formie bezwymiarowej dla płyty trójkątnej o bokach równych jedności, przyjmuje postać:

$$M_n = -N_w \left[\theta_1 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \theta_3 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right] \quad (3.20)$$

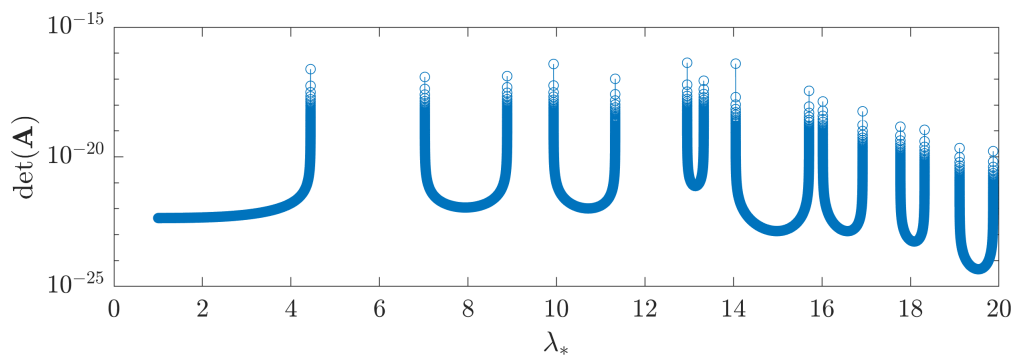
gdzie: $\theta_1 = \cos^2 \alpha + \nu \sin^2 \alpha$, $\theta_2 = \sin^2 \alpha + \nu \cos^2 \alpha$, $\theta_3 = (1 - \nu) \sin 2\alpha$, α – kąt pomiędzy normalną do dowolnej linii (tu – przeciwprostokątna), a osią ξ .

Równanie (3.20) wymaga obliczenia pochodnych cząstkowych zarówno dla bloku B1, jak i dla bloku B2. Po wyznaczeniu pochodnych i podstawieniu ich do równania (3.20) otrzyma się udziały poszczególnych bloków do momentu gnącego na przeciwprostokątnej p . Zatem wkłady B1 i B2 w odpowiednie warunki brzegowe zostały określone dla wszystkich krawędzi trójkąta.

Następnym krokiem jest zgrupowanie wszystkich indywidualnych składowych każdego z warunków brzegowych i dostosowanie wartości współczynników w szeregu Fouriera G_{1m} i G_{2m} tak, aby wszystkie warunki brzegowe były spełnione jednocześnie. Warunek brzegowy swobodnego podparcia oznacza zerowe poprzeczne przemieszczenie oraz zerowy moment gnący na wszystkich krawędziach. Oznacza to, że zsumowane składowe indywidualne bloków B1 i B2 powinny być równe zero. Metoda prowadzi do otrzymania układu jednorodnych równań algebraicznych o rozmiarze $2k \times 2k$, gdzie k jest liczbą współczynników w szeregu Fouriera. W przypadku rozwiązań nietrywialnych, wyznacznik z macierzy głównej powinien być równy zero, a poszukiwanymi wartościami własnymi λ_*^2 są wartości spełniające równanie. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń wyznaczono wartości własne macierzy, Tab. 3.1, Rys. 3.4.

	Postać drgań własnych					
	1	2	3	4	5	6
$\lambda_*^2 = \omega \sqrt{\rho/N_w}$	49.34802	98.69605	128.30484	167.78329	197.39210	246.74010

Tab. 3.1 Wartości własne dla pierwszych pięciu modów płyty trójkątnej.



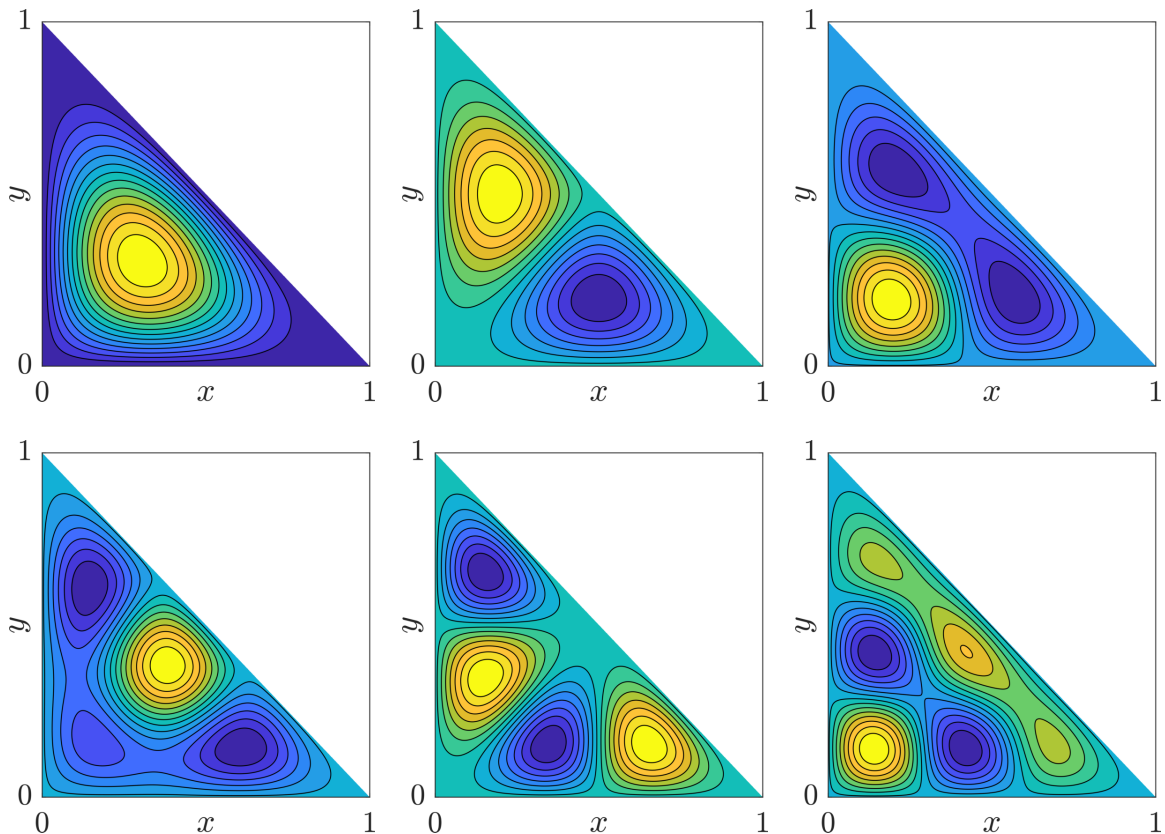
Rys. 3.4 Znalezione wartości własne λ_* .

Obliczone wartości własne zgadzają się z [71] dla płyty trójkątnej o przyprostokątnych równej długości. Przy rozwiązywaniu problemu drgań własnych metodą superpozycji, należy mieć na uwadze występowanie tzw. fałszywych pierwiastków (ang. *false roots*), które w tym przypadku także istnieją i są wielokrotnościami liczby

$\lambda_* = 4.442882$ włącznie z samą liczbą 4.442882. Zgodnie z [31], [32], takie pierwiastki należy pominąć. Superpozycja dwóch bloków B1 i B2 prowadzi do otrzymania rozwiązania problemu drgań własnych dla płyty trójkątnej:

$$w(\xi, \eta) = w_{B1}(\xi, \eta) + w_{B2}(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

Wykresy pierwszych sześciu postaci drgań własnych ilustruje Rys. 3.5.



Rys. 3.5 Wykresy pierwszych sześciu postaci drgań własnych.

Powrót do układu współrzędnych (x, y) odbywa się poprzez przekształcenie $\xi = x/a$, $\eta = y/b$. W niniejszej pracy przyjęto dla uproszczenia $a = b = 1$, zatem:

$$w(\xi, \eta) = w(x, y) \quad (3.22)$$

3.1.2. Rozwiązanie równania drgań wymuszonych

Zakładając, że poprzeczne przemieszczenie płyty oraz wymuszenie są funkcjami harmonicznymi, można wyrazić te funkcje jako:

$$w_f(x, y) = \sum_v A_v w_v(x, y) \quad (3.23)$$

$$f(x, y) = \sum_v B_v w_v(x, y) \quad (3.24)$$

gdzie A_v są stałymi do wyznaczenia oraz

$$\begin{aligned} B_v &= \frac{1}{\zeta_v} \iint_{\Omega} f(x, y) w_v(x, y) dx dy \\ \zeta_v &= \iint_{\Omega} w_v^2(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (3.25)$$

Funkcja $f(x, y)$ reprezentuje zarówno wymuszenie powodujące drgania płyty oraz siły modelujące akuator, równanie (3.4). Zatem pierwsza całka w równaniu (3.25) może być podzielona na dwie całki $I_{v,f} = I_{v,E} + I_{v,P}$, gdzie:

$$\begin{aligned} I_{v,E} &= \iint_{\Omega} f_E(x, y) w_v(x, y) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} f_0 \delta(x - x_0, y - y_0) w_v(x, y) dx dy = f_0 w_v(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

oraz całka związana z PZT:

$$I_{v,P} = \iint_{\Omega} f_{PZT}(x, y) w_v(x, y) dx dy \quad (3.27)$$

Znając całki (3.26-3.27) można obliczyć współczynniki B_v , natomiast A_v można znaleźć podstawiając równania (3.23-3.24) do równania (3.2) z uwzględnieniem postaci drgań własnych, równanie (3.21):

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{B_v}{(\nu^2 \pi^2 - \beta_v^2)^2 - \omega_f^2}, \\ A_v &= \frac{B_v}{(\nu^2 \pi^2 + \gamma_v^2)^2 - \omega_f^2} \quad \text{lub} \quad A_v = \frac{B_v}{(\nu^2 \pi^2 - \gamma_v^2)^2 - \omega_f^2} \end{aligned} \quad (3.28)$$

przy czym bierze się tę wartość A_v , która jest rzeczywista. Podstawiając równanie (3.28) do (3.23) otrzymuje się:

$$w_f(x, y) = \sum_v \frac{1/\zeta_v(I_{v;E} + I_{v;P})}{(\nu^2\pi^2 - \beta_v^2)^2 - \omega_f^2} w_v(x, y) \quad (3.29)$$

Siły $f_{PZT}(x, y)$ z całki (3.27) reprezentują wszystkie siły punktowe składające się na PZT. Współrzędne punktów przyłożenia sił różnią się w zależności od kształtu PZT oraz zależą od oddziaływania PZT-płyta. W kolejnym podrozdziale zostanie omówiony wpływ sił w całce $I_{v;P}$ biorąc pod uwagę różne kształty PZT.

3.2. Modele PZT i oddziaływanie PZT-płyta

Różnica pomiędzy jednowymiarowym, a dwuwymiarowym modelem PZT polega na tym, że dla przypadku dwuwymiarowego dodatkowo uwzględnia się momenty gnące działające na osi y . Zatem procedura wytworzenia aktuatora jest taka sama. Tak jak w przypadku belki PZT składa się z warstwy materiału piezoelektrycznego z dodanymi na powierzchniach płaskimi elektrodami. Przyłożenie napięcia do PZT spolaryzowanego na kierunku osi z będzie skutkowało pojawieniem się odkształceń [34], [28]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{V}{h_a} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

gdzie d_{31} , d_{32} — stałe piezoelektryczne, [m/V].

Zakładając trwałe przymocowanie PZT do płyty, analogicznie do przypadku jednowymiarowego aktuatora przymocowanego do belki, wydłużenie wynikające z odwrotnego efektu piezoelektrycznego będzie ograniczone. Ponadto, wydłużenie to będzie działać na dwóch prostopadłych kierunkach. Zjawisko to będzie skutkowało pojawieniem się momentów gnących w płycie. Zastępcze momenty gnące zastępują działanie PZT i są łatwe do określenia jeżeli PZT jest idealnie przyklejony do struktury oraz rozkład ładunku na powierzchni aktuatora jest stały. Rozkład momentów gnących indukowanych w płycie dany jest zależnością [28]:

$$\begin{bmatrix} m_x \\ m_y \end{bmatrix} = C_a \frac{V}{h_a} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \end{bmatrix} \left[\langle x - x_1 \rangle^0 - \langle x - x_2 \rangle^0 \right] \left[\langle y - y_1 \rangle^0 - \langle y - y_2 \rangle^0 \right] \quad (3.31)$$

gdzie C_a – stała geometryczno-materiałowa związana z PZT, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) – współrzędne określające brzozi aktuatora.

Zatem równanie drgań wymuszonych przy wymuszeniu tylko od PZT można zapisać jako [28]:

$$\begin{aligned} \nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = \\ = C_a \frac{V}{h_a} d_{31} \left[\langle x - x_1 \rangle^{-2} - \langle x - x_2 \rangle^{-2} \right] \left[\langle y - y_1 \rangle^0 - \langle y - y_2 \rangle^0 \right] + \\ + C_a \frac{V}{h_a} d_{32} \left[\langle x - x_1 \rangle^0 - \langle x - x_2 \rangle^0 \right] \left[\langle y - y_1 \rangle^{-2} - \langle y - y_2 \rangle^{-2} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

gdzie amplitudy momentów gnących można zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \end{bmatrix} = C_a \frac{V}{h_a} \begin{bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Jeżeli materiał piezoelektryczny ma jednakowe właściwości w dwóch prostopadłych kierunkach ($d_{31} = d_{32}$) to równanie (3.33) przyjmuje postać:

$$M_x = M_y = C_a \frac{V}{h_a} d_{31} \quad (3.34)$$

Równania (3.31-3.34) stanowią klasyczne podejście do modelowania oddziaływania PZT-płyta poprzez zastąpienie aktuatora momentami gnącymi o rozkładzie ciągłym działającymi na płytę.

3.2.1. Model a-PZT

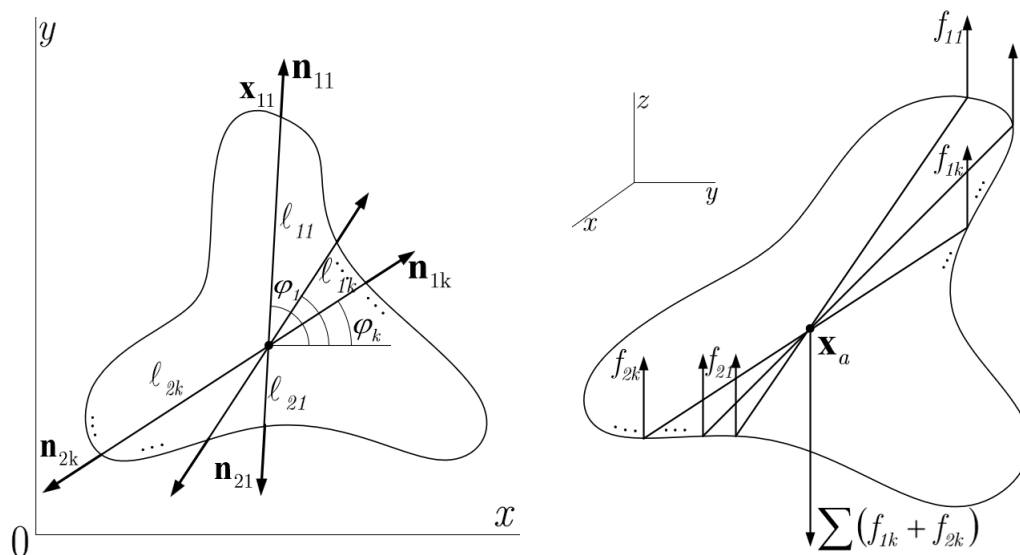
Biorąc pod uwagę zależność (3.34) można stwierdzić, że indukowane w płycie zastępcze momenty gnące są równe co do wartości amplitudy na każdym końcu przekroju poprzecznego aktuatora [28], [35]. Dla aktuatora prostokątnego oznacza to, że momenty gnące na przeciwległych brzegach są sobie równe. Dla PZT w kształcie koła momenty gnące na całym brzegu są takie same. Momenty gnące w każdym przekroju mogą być zastąpione dwoma takimi samymi parami sił [15], [16], [11], Rys. 3.6.

$$\begin{aligned} 2M_k = M_{1k} + M_{2k} = f_{1k}\ell_{1k} + f_{2k}\ell_{2k} \\ f_{1k}\ell_{1k} = f_{2k}\ell_{2k} \end{aligned} \quad (3.35)$$

gdzie: ℓ_{1k} , ℓ_{2k} – długości ramion asymetrycznych włókien, [m].

W problemie modelowania a-PZT wzięto pod uwagę skończoną ilość aktywnych przekrojów, które można określić jako wirtualne włókna piezoelektryczne. Włókna

te zostały ułożone promieniście z pewnego punktu na płycie. Pierwszym krokiem na drodze otrzymania kształtu a-PZT jest znalezienie tego punktu. Jest to punkt, który łączy wszystkie włókna a-PZT. Drugim krokiem jest optymalizacja długości ramion każdego włókna tak, aby wartości momentów gnących na brzegach a-PZT pozostawały stałe co do wartości. Optymalizacja w drugim kroku przebiega w identyczny sposób jak w przypadku belki, z tym, że wykonywana jest dla skończonej liczby włókien, których orientacja na płaszczyźnie płyty zmienia się z pewnym zadaniem, stałym kątem. Każde włókno leży na innym kierunku określonym wektorami \mathbf{n}_{1k} , \mathbf{n}_{2k} , Rys. 3.6. Po znalezieniu punktu (x_a, y_a) łączącego wszystkie włókna oraz po optymalizacji długości ramion każdego włókna, otrzymuje się kontur a-PZT w postaci punktów. Następnie, na skutek połączenia sąsiadujących punktów, uzyskuje się kształt dwuwymiarowego a-PZT.



Rys. 3.6 Idea modelu a-PZT.

W związku z zamianą zastępczych momentów gnących na pary sił, prawą stronę równania (3.32) można zapisać jako:

$$f_{Pk}(x, y) = f_{1k}\delta(x - x_{1k}, y - y_{1k}) - (f_{1k} + f_{2k})\delta(x - x_a, y - y_a) + f_{2k}\delta(x - x_{2k}, y - y_{2k}) \quad (3.36)$$

gdzie: k – numer włókna składającego się na aktuator; $\{f_{1k}, f_{2k}\}$ – siły związane z k -tym włóknem; (x_{1k}, y_{1k}) , (x_a, y_a) , (x_{2k}, y_{2k}) – punkty przyłożenia sił dla k -tego włókna. Włókna obrócone są względem siebie o kąt $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$. Dla uproszczenia,

jeżeli przyjmiemy lokalny układ współrzędnych o początku w punkcie (x_a, y_a) to dowolny punkt na płycie można opisać przy pomocy macierzy obrotu:

$$R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

co skutkuje otrzymaniem współrzędnych w nowym układzie:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Poprzez rotację układu współrzędnych o stały kąt $\Delta\varphi_k$, rozpatrywano asymetrię każdego włókna. Rozpatrzmy przykładowe włókno z Rys. 3.7. Niech oś leżąca na kierunku włókna $\{\ell_{1k}, \ell_{2k}\}$ będzie określona przez a_k , siły zastępcze oddziałujące na płytę można zapisać jako:

$$f_k = [f_{1k}(\delta(a_k - a_{1k}) - \delta(a_k)) + f_{2k}(\delta(a_k + a_{2k}) - \delta(a_k))] \delta(\varphi - \Delta\varphi_k) \quad (3.39)$$

gdzie $\Delta\varphi_k \in [0, \pi]$. Macierz obrotu (3.37) oraz równanie (3.38) umożliwiają rozpatrzenie danego włókna w kontekście optymalizacji długości ramion i powrót do globalnego układu współrzędnych poprzez obrót o kąt $-\Delta\varphi_k$. W ten sposób można otrzymać udziały wszystkich włókien we współrzędnych kartezjańskich. Równanie (3.36) wyraża działanie jednego włókna PZT na płytę. Aby wyznaczyć działanie całego a-PZT należy zsumować oddziaływania wszystkich włókien:

$$f_P = f_P(x, y) = \sum_k f_{Pk}(x, y) \quad (3.40)$$

Wprowadzając zastępcze pary sił w miejsce momentów gnących, można teraz wrócić do całki z zależności (3.27), która odpowiada oddziaływaniu PZT:

$$\begin{aligned} I_{v;P} &= \iint_{\Omega} \sum_k f_{Pk}(x, y) w_v(x, y) dx dy = \\ &= \sum_k [f_{1k} w_v(x_{1k}, y_{1k}) - (f_{1k} + f_{2k}) w_v(x_a, y_a) + f_{2k} w_v(x_{2k}, y_{2k})] \end{aligned} \quad (3.41)$$

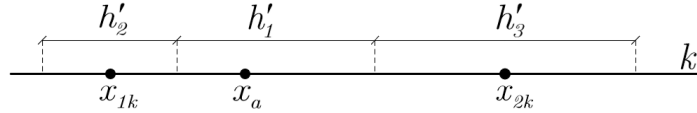
Uwzględniając równania (3.31) można otrzymać:

$$I_{v;P} = \sum_k f_{1k} \frac{1}{\ell_{1k}} [\ell_{2k} w_v(x_{1k}, y_{1k}) - (\ell_{1k} + \ell_{2k}) w_v(x_a, y_a) + \ell_{1k} w_v(x_{2k}, y_{2k})] \quad (3.42)$$

Analogicznie do belki, dla wyrażenia (3.42), można znaleźć iloraz różnicowy drugiego rzędu. Na podstawie trzech węzłów przyłożenia sił a-PZT, można napisać wzory na centralne ilorazy różnicowe dla pierwszej pochodnej, Rys. 3.7. Dla uproszczenia wzięto włókno k , dla którego $y_{1k} = y_a = y_{2k}$ [66]:

$$\begin{aligned} \frac{w_v(x_a) - w_v(x_{1k})}{x_a - x_{1k}} &= Dw_v(x_a - 0.5h'_1) \\ \frac{w_v(x_{2k}) - w_v(x_a)}{x_{2k} - x_a} &= Dw_v(x_{2k} - 0.5h'_3) \end{aligned} \quad (3.43)$$

gdzie: $h'_1 = \frac{1}{2}(h'_2 + h'_3)$, $h'_2 = x_a - x_{1k}$, $h'_3 = x_{2k} - x_a$



Rys. 3.7 Węzły użyte we wzorach na ilorazy różnicowe.

Następnie, na bazie ilorazów różnicowych dla pierwszej pochodnej, można zapisać iloraz różnicowy drugiego rzędu [66]:

$$\frac{Dw_v(x_{2k} - 0.5h'_3) - Dw_v(x_a - 0.5h'_1)}{h'_1} = D^2w_v(x_a) \quad (3.44)$$

Podstawiając zależności (3.39) do (3.40) można otrzymać:

$$\frac{1}{h'_1} \left[\frac{w_v(x_{2k}) - w_v(x_a)}{x_{2k} - x_a} - \frac{w_v(x_a) - w_v(x_{1k})}{x_a - x_{1k}} \right] = D^2w_v(x_a) \quad (3.45)$$

Wracając do symboli związanych z geometrią a-PZT i na podstawie Rys. 3.6 można zapisać, że $h'_1 = 0.5(\ell_{1k} + \ell_{2k})$. Dalsze przekształcenia dotyczą przemnożenia obu stron równania przez h'_1 oraz przez $x_{2k} - x_a = \ell_{2k}$ i $x_a - x_{1k} = \ell_{1k}$:

$$\ell_{1k}(w_v(x_{2k}) - w_v(x_a)) - \ell_{2k}(w_v(x_a) - w_v(x_{1k})) = \frac{1}{2}(\ell_{1k} + \ell_{2k})\ell_{2k}\ell_{1k}D^2w_v(x_a) \quad (3.46)$$

Po wykonaniu działań w nawiasach otrzymuje się:

$$\ell_{1k}w_v(x_{2k}) - (\ell_{1k} + \ell_{2k})w_v(x_a) + \ell_{2k}w_v(x_{1k}) = \frac{1}{2}(\ell_{1k} + \ell_{2k})\ell_{2k}\ell_{1k}D^2w_v(x_a) \quad (3.47)$$

Lewa strona równania (3.47) jest tożsama z nawiasem kwadratowym równania (3.42). Można zatem podstawić prawą stronę równania (3.47) do całki z równania (3.42):

$$I_{v;P} = \sum_k f_{1k} \frac{\ell_{1k}(\ell_{1k} + \ell_{2k})}{2} D^2 w_v(x_a) \quad (3.48)$$

Po rozpatrzeniu problemu jednego włókna, można wrócić do zapisu ogólnego, ponieważ równanie (3.48) jest spełnione dla każdego włókna a-PZT. Zatem pochodna po przemieszczeniu poprzecznym jest pochodną w punkcie (x_a, y_a) :

$$I_{v;P} = \sum_k f_{1k} \frac{\ell_{1k}(\ell_{1k} + \ell_{2k})}{2} D^2 w_v(x_a) = \quad (3.49)$$

$$= \sum_k f_{1k} \frac{\ell_{1k}(\ell_{1k} + \ell_{2k})}{2} \left(\frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_a \\ y=y_a}} \quad (3.50)$$

Aby uzależnić oddziaływanie a-PZT od momentu gnącego należy wziąć pod uwagę zależności wiążące moment gnący płyty z poprzecznym przemieszczeniem [68]:

$$M_x = -N_w \left(\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} \right) \quad (3.51)$$

$$M_x = -N_w \left(\frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} \right) \quad (3.52)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -1(1 - \nu) N_w \frac{\partial^2 w_v}{\partial x \partial y} \quad (3.53)$$

Z zależności (3.51) można wyznaczyć różniczkę $\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2}$, analogicznie z zależności (3.52) różniczkę $\frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2}$:

$$\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} = -\frac{M_x}{N_w} - \nu \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} = -\frac{M_y}{N_w} - \nu \frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} \quad (3.55)$$

Rozwiązując równania (3.54-3.55) ze względu na różniczki $\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2}$ można otrzymać:

$$\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} = \frac{M_x - \nu M_y}{N_w(\nu^2 - 1)} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} = \frac{M_y - \nu M_x}{N_w(\nu^2 - 1)} \quad (3.57)$$

Tym sposobem uzależniono wartość drugiej pochodnej w punkcie od momentów gnących płyty. Zsumowanie lewych stron powyższych równań daje zależność w nawiasie okrągłym wyrażenia (3.49):

$$\left(\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} \right) = \frac{M_x - \nu M_y}{N_w(\nu^2 - 1)} + \frac{M_y - \nu M_x}{N_w(\nu^2 - 1)} = \frac{(M_x + M_y)(1 - \nu)}{N_w(\nu^2 - 1)} \quad (3.58)$$

Rozpisanie wyrażenia w mianowniku daje możliwość uproszczenia zależności (3.58):

$$\left(\frac{\partial^2 w_v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_v}{\partial y^2} \right) = -\frac{(M_x + M_y)(\nu - 1)}{N_w(\nu - 1)(\nu + 1)} = -\frac{M_x + M_y}{N_w(\nu + 1)} \quad (3.59)$$

Zatem całkę (3.49) można zapisać w postaci:

$$I_{v;P} = -\sum_k f_{1k} \frac{\ell_{1k}(\ell_{1k} + \ell_{2k})}{2} \left(\frac{M_x(x, y) + M_y(x, y)}{N_w(\nu + 1)} \right) \Big|_{\substack{x=x_a \\ y=y_a}} \quad (3.60)$$

Krzywizny główne w geometrii różniczkowej są krzywiznami obliczanymi na dwóch prostopadłych do siebie kierunkach. Ich sumę określa się krzywizną średnią, zaś iloczyn krzywizną Gaussa [27]. Przez analogię do krzywizn, można stwierdzić, że ugięcie spowodowane działaniem a-PZT jest proporcjonalne do średniego momentu gnącego płyty w punkcie (x_a, y_a) , który jest punktem wspólnym dla wszystkich włókien a-PZT. Mając wkład a-PZT w redukcję drgań płyty, można przejść do sformułowania szczególnej postaci funkcji celu. W wyrażeniu (3.29) istnieje człon zależny od wymuszenia oraz działania PZT. Analogicznie jak w przypadku belki, minimalizacja tego wyrażenia będzie prowadziła do osiągnięcia maksymalnej redukcji drgań:

$$I_{v;f} = I_{v;E} + I_{v;P} = -f_0 w_v(x_0, y_0) + \frac{1}{N_w(\nu + 1)} \sum_k f_{1k} \frac{\ell_{1k}(\ell_{1k} + \ell_{2k})}{2} (M_x(x, y) + M_y(x, y)) \Big|_{\substack{x=x_a \\ y=y_a}} \quad (3.61)$$

Równanie (3.61) oznacza, że całkowita redukcja drgań jest możliwa, jeśli odpowiedź płyty na siłę pobudzającą do drgań jest równa odpowiedzi płyty na siły ze wszystkich włókien tworzących dwuwymiarowy aktuator, tzn. $I_{v;f} = 0$. Zatem szczególna postać funkcji celu jest wyrażona zależnością:

$$\mathcal{J} = \min(I_{v;f}) \quad (3.62)$$

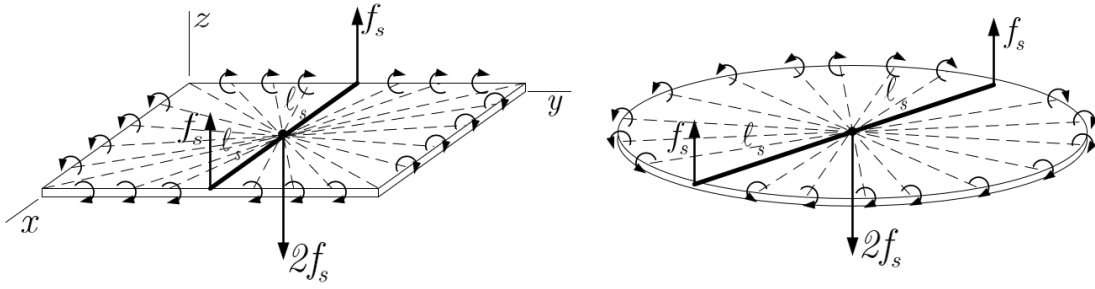
Na tej podstawie została wyznaczona asymetria każdego włókna, a w konsekwencji asymetria całego aktuatora.

3.2.2. Model s-PZT i c-PZT

Zgodnie z przyjętym modelem, rozkład momentów gnących na brzegach PZT jest ciągły. W przypadku symetrycznych PZT można skorzystać z modelu a-PZT, przy założeniu, że amplituda momentu gnącego jest stała na brzegu. Rozpatrywanie symetrycznych aktuatorów o arbitralnie dobranym kształcie wiąże się tylko ze znalezieniem miejsca przyklejenia PZT na strukturze, kształt nie podlega optymalizacji. Ponieważ człon związany z wielkościami fizycznymi płyty w równaniu (3.61) związany jest z sumą momentów gnących w dwóch prostopadłych kierunkach, podejście optymalizujące punkt (x_a, y_a) jest słuszne dla wszystkich typów aktuatorów. Zatem różnica tkwi w narzuceniu warunków dotyczących długości ramion włókien składających się na aktuator, tzn. dla kwadratowego s-PZT będą to ramiona równej długości różniące się dla każdego włókna tak, aby brzegi włókien tworzyły kwadrat. Dla kolistego c-PZT długości wszystkich ramion będą równe. Warunek konieczny do obiektywnego porównania wszystkich typów aktuatorów można zapisać jako:

$$2M_0 = M_0 + M_0 = f_s \ell_s + f_s \ell_s \quad (3.63)$$

gdzie $\ell_s = \frac{\ell_a}{2}$, ℓ_a – długość włókna na danym kierunku, [m]. Rys. 3.8 ilustruje ideę modelu s-PZT i c-PZT na bazie zależności (3.61), na rysunku zaznaczono zastępcze momenty gnące generowane przez PZT. Dla przejrzystości rysunku, momenty gnące na jednym kierunku zastąpiono dwiema parami sił. W obliczeniach zastosowano ten zabieg do wszystkich momentów gnących rozłożonych na brzegach s-PZT i c-PZT.



Rys. 3.8 Konstrukcja s-PZT (po lewej) i c-PZT (po prawej).

Szczególne postacie funkcji celu dla s-PZT i c-PZT przyjmują taką samą formę jak dla a-PZT, równanie (3.61). Różnica tkwi jedynie w długości ramion danego włókna. Jeżeli przez $\{2\ell_{k;s-PZT}\}$ określimy długości włókien s-PZT na kierunku k to funkcję będącą przedmiotem optymalizacji można określić jako:

$$I'_{v,f} = I_{v;E} + I'_{v;P} = f_0 w_v(x_0, y_0) + \frac{1}{4N_w(\nu + 1)} \sum_k f_{sk} (\ell_{k;s-PZT})^2 (M_x(x, y) + M_y(x, y)) \Big|_{\substack{x=x_a \\ y=y_a}} \quad (3.64)$$

Zatem szczególna postać funkcji celu jest dana przez:

$$\mathcal{J} = \min(I'_{v,f}) \quad (3.65)$$

W przypadku c-PZT długość włókna jest stała i wynosi $2\ell_s$, zatem wyrażenie $I''_{v,f}$, które dotyczy okrągłego aktuatora, można zapisać jako:

$$I''_{v,f} = I_{v;E} + I''_{v;P} = f_0 w_v(x_0, y_0) + \frac{1}{N_w(\nu + 1)} \sum_k f_s \ell_s^2 (M_x(x, y) + M_y(x, y)) \Big|_{\substack{x=x_a \\ y=y_a}} \quad (3.66)$$

Szczególna postać funkcji celu przyjmuje taką samą formę jak równanie (3.65):

$$\mathcal{J} = \min(I''_{v,f}) \quad (3.67)$$

3.3. Redukcja drgań stanu ustalonego

Podobnie jak w przypadku belki, efektywność redukcji drgań została obliczona na podstawie amplitudy drgań płyty w punkcie. Wskaźnik redukcji drgań jest zdefiniowany

następująco (tak jak globalna funkcja celu, równanie (1.2)):

$$R_v = \frac{w_{v;0} - w_{v;f}}{w_{v;0}} \cdot 100\% \quad (3.68)$$

gdzie: $w_{v;0}$ – amplituda drgań płyty bez działania PZT, płyta jest pobudzana do drgań jedynie przez siłę $f_E(x_0, y_0)$; $w_{v;f}$ – amplituda drgań płyty przy działaniu PZT, drgania są wzbudzone przez siłę $f_E(x_0, y_0)$ i zredukowane przez PZT. Tabela 3.2 przedstawia dane przyjęte do obliczeń. Jako materiał płyty przyjęto austenityczną stal chromowo-niklową X5CrNi18-10.

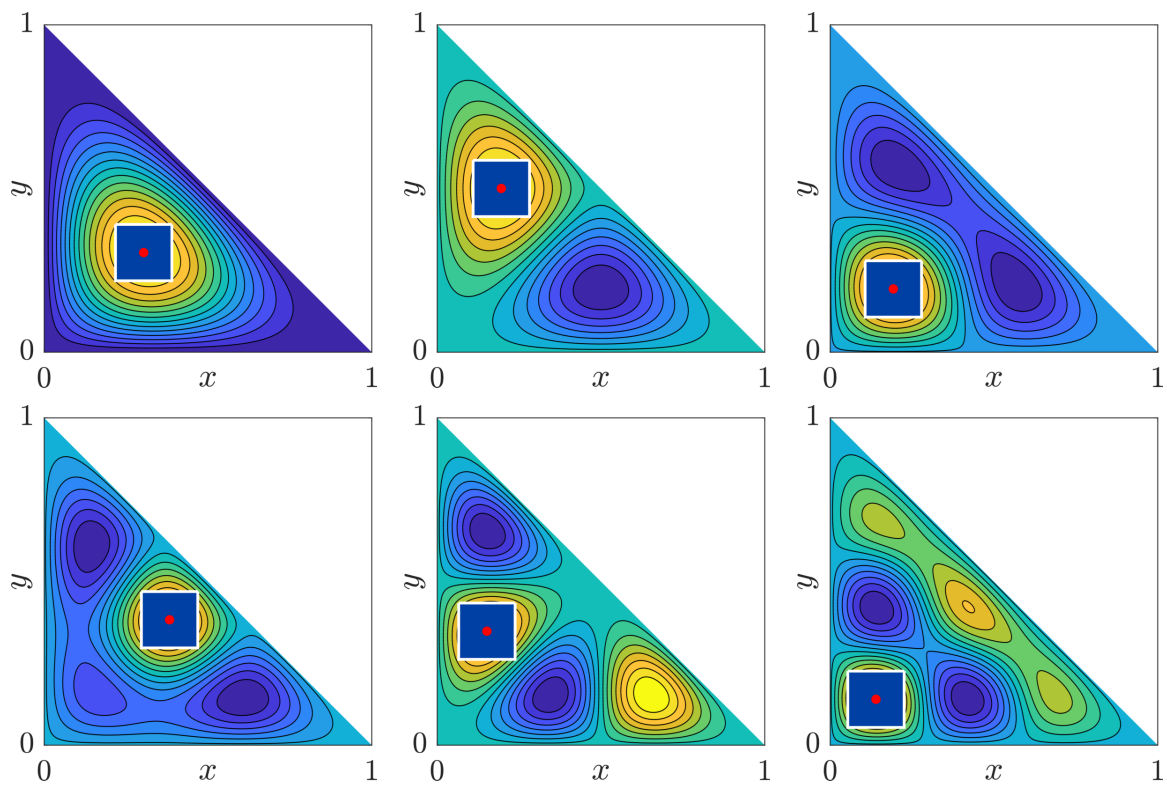
wielkość	symbol	jednostka	wartość
gęstość stali X5CrNi18-10	ρ	kg/m ³	7900
moduł Younga dla stali X5CrNi18-10	E	Pa	193·10 ⁹
współczynnik Poissona dla stali	ν	-	0.33
długość płyty	a	m	1
szerokość płyty	b	m	1
grubość płyty	h	kg	0.001
długość włókna PZT	ℓ_a	m	0.2

Tab. 3.2 Dane obliczeniowe.

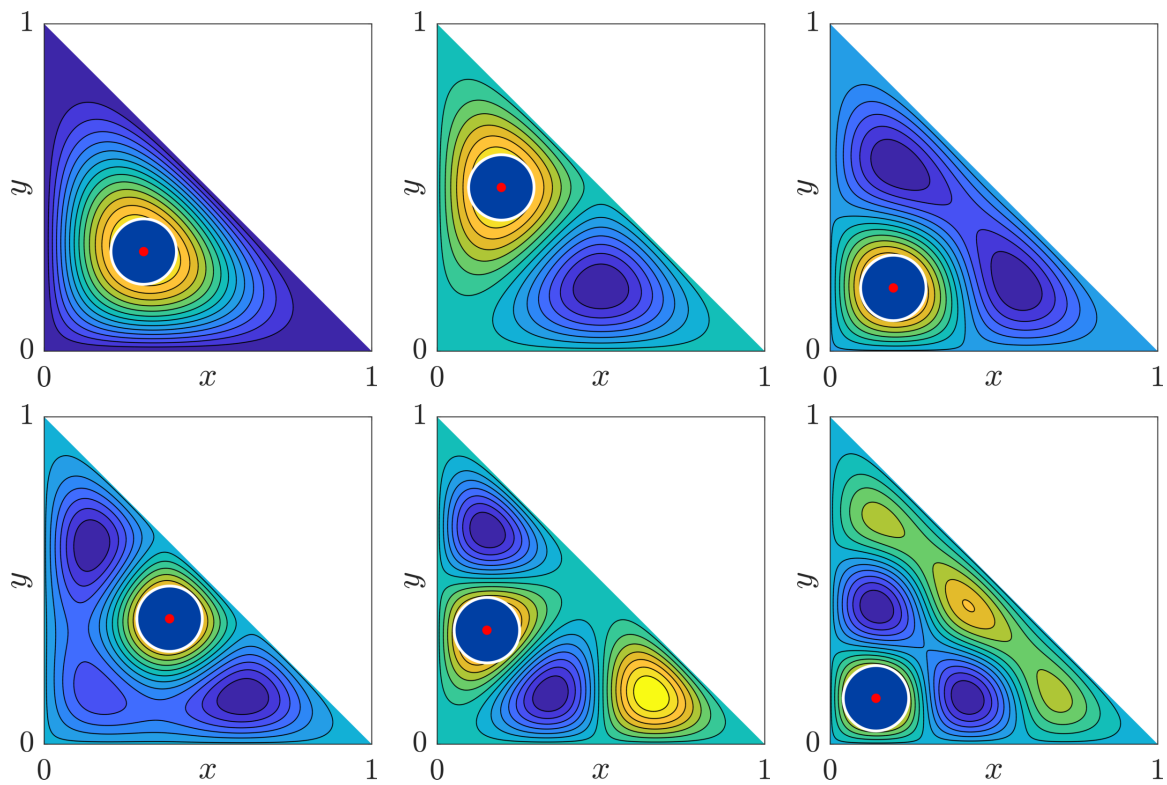
Amplituda siły wymuszającej została dobrana eksperymentalnie, aby uzyskać możliwe do pomierzenia ugięcie płyty dla poszczególnych postaci drgań własnych: $\{f_{0;v}\} = \{f_{0;1}, f_{0;2}, f_{0;3}, f_{0;4}, f_{0;5}, f_{0;6}\} = \{2, 20, 20, 40, 40, 60\}$ [N].

3.3.1. Redukcja drgań po zastosowaniu s-PZT i c-PZT

W związku z odgórnie określonymi kształtami aktuatorów symetrycznych, optymalizacja w tych przypadkach dotyczy jedynie umiejscowienia aktuatorów na strukturze. Bazując na równaniach (3.65) i (3.67) można wyznaczyć punkt (x_a, y_a) , który będzie punktem wspólnym dla wszystkich włókien składających się na symetryczny aktuator. Rysunki 3.9-3.10 ilustrują umiejscowienie s-PZT i c-PZT na powierzchni płyty dla pierwszych sześciu postaci drgań własnych. Rys. 3.11 przedstawia ideę modelowania symetrycznych aktuatorów.

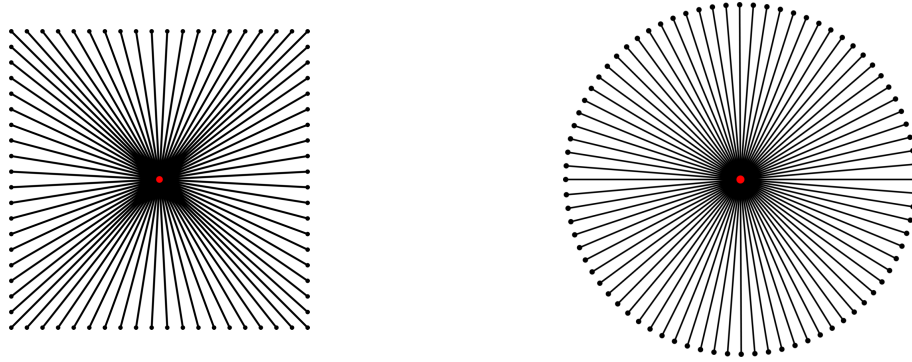


Rys. 3.9 Lokalizacja s-PZT dla pierwszych sześciu modów.



Rys. 3.10 Lokalizacja c-PZT dla pierwszych sześciu modów.

W taki sam sposób może być wyznaczona lokalizacja s-PZT i c-PZT dla kolejnych postaci drgań własnych płyty. Należy podkreślić, iż dla drugiego i piątego modu płyta posiada więcej niż jeden punkt, w którym moment gnący płyty osiąga absolutne ekstremum. W takim przypadku, wybrano jeden z tych punktów jako (x_a, y_a) .



Rys. 3.11 Idea modelowania s-PZT (po lewej) i c-PZT (po prawej).

3.3.2. Redukcja drgań po zastosowaniu a-PZT

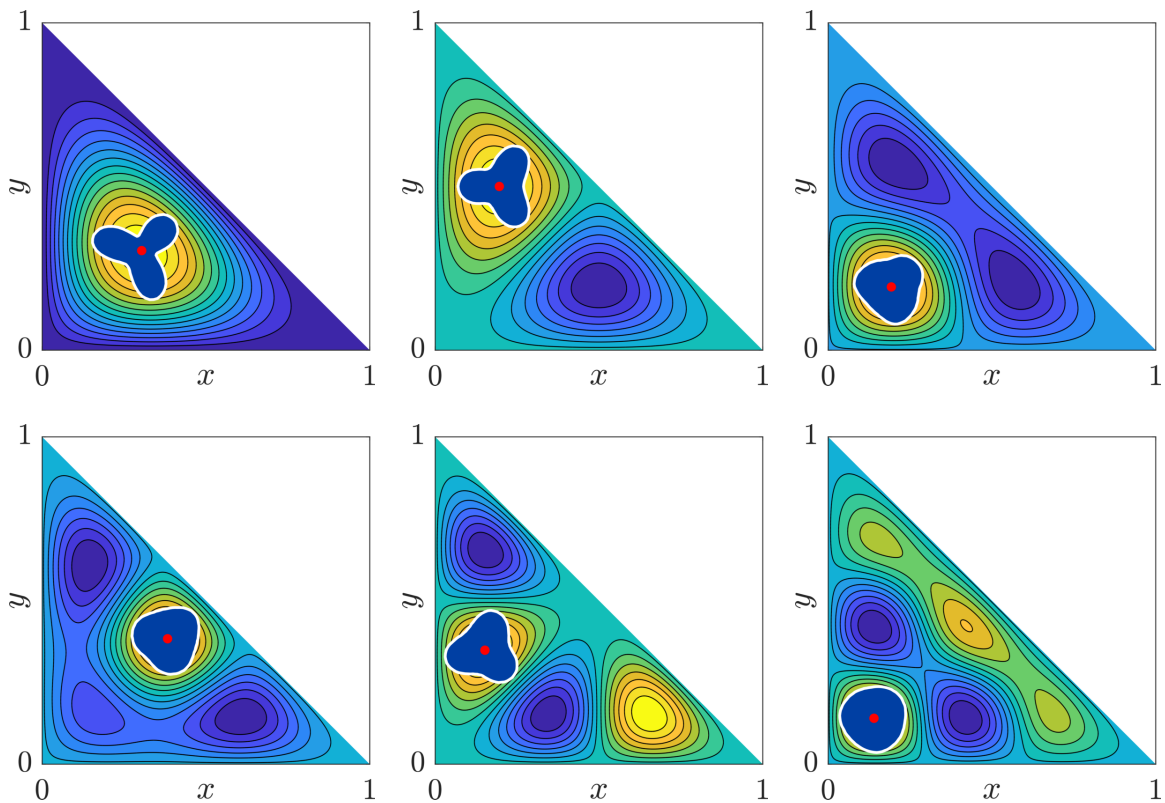
Zagadnienie optymalizacji związane z a-PZT dotyczy:

- 1– znalezienia punktu (x_a, y_a) , który jest punktem wspólnym dla wszystkich włókien asymetrycznego aktuatora,
- 2– znalezienia asymetrii ramion każdego włókna osobno.

Zgodnie z zależnością (3.61), punkt, w którym efekt działania a-PZT jest największy, jest punktem, w którym suma momentów gnących płyty w dwóch prostopadłych kierunkach, osiąga maksimum. Maksymalizując tę składową równania, można przejść do maksymalizowania pozostałych zmiennych. Drugi krok optymalizacji odpowiada optymalizacji a-PZT dla belki, z tym, że procedura ta jest wykonywana dla każdego włókna osobno. Znalezienie długości ramion poszczególnych par sił, przy określonym punkcie (x_a, y_a) w poprzednim kroku optymalizacji, prowadzi do otrzymania konturu a-PZT. Problem optymalizacji długości ramion włókna a-PZT w dwóch wymiarach może być zrealizowany na dwa sposoby.

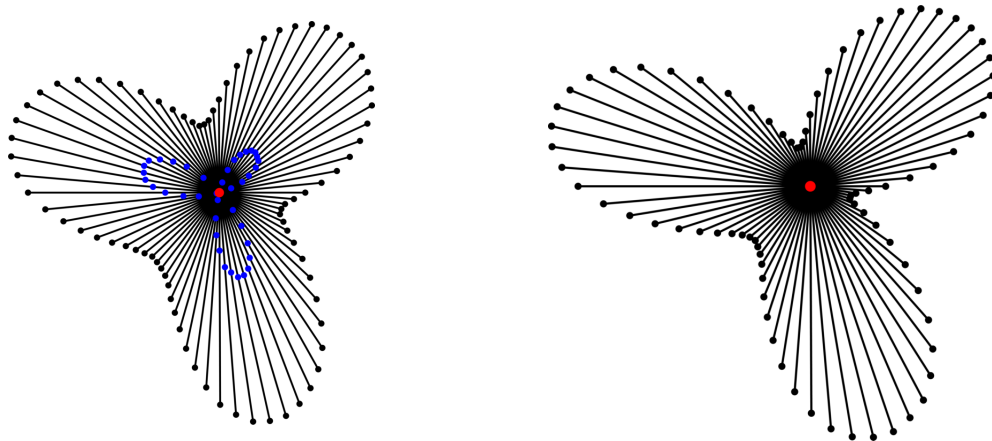
Można potraktować punkt (x_a, y_a) jako punkt wspólny dla wszystkich włókien i jednocześnie lokalnie – jako punkt przyłożenia dwóch sił w modelu a-PZT, Rys. 3.6. Wtedy optymalizacja w drugim kroku jest jednoparametrowa. Jeżeli przez (x_a^*, y_a^*) oznaczymy lokalne punkty przyłożenia dwóch sił w modelu a-PZT to pierwszy sposób otrzymania kształtu a-PZT wiąże się z założeniem $(x_a, y_a) = (x_a^*, y_a^*)$ dla każdego włókna.

Drugi sposób polega na potraktowaniu punktu (x_a, y_a) jedynie globalnie jako punkt wspólny wszystkich włókien, jednakże później procedurę optymalizacji długości ramion a-PZT przeprowadzić zupełnie na nowo dla każdego kierunku, tak jak dla belki. Wtedy optymalizacja będzie dwuparametrowa, stąd $(x_a, y_a) \neq (x_a^*, y_a^*)$ dla każdego z włókien. W pracy zaprezentowano wyniki obydwu podejść określając pierwsze z nich jako podejście uproszczone, drugie jako ścisłe. Rys. 3.12 przedstawia wyniki podejścia ścisłego.



Rys. 3.12 Lokalizacja ścisłego a-PZT dla pierwszych sześciu modów.

Wybór optymalizacji ścisłej lub uproszczonej skutkuje otrzymaniem podobnych, choć różniących się, kształtów. Rysunek 3.13 ilustruje różnice w kształtach a-PZT przy podejściu ścisłym i uproszczonym dla pierwszej postaci drgań własnych. Niebieskie punkty na włóknach ścisłego a-PZT są lokalnymi punktami (x_a^*, y_a^*) po optymalizacji dwuparametrowej.



Rys. 3.13 Aktuator a-PZT otrzymany przy podejściu ścisłym (po lewej) i przy podejściu uproszczonym (po prawej).

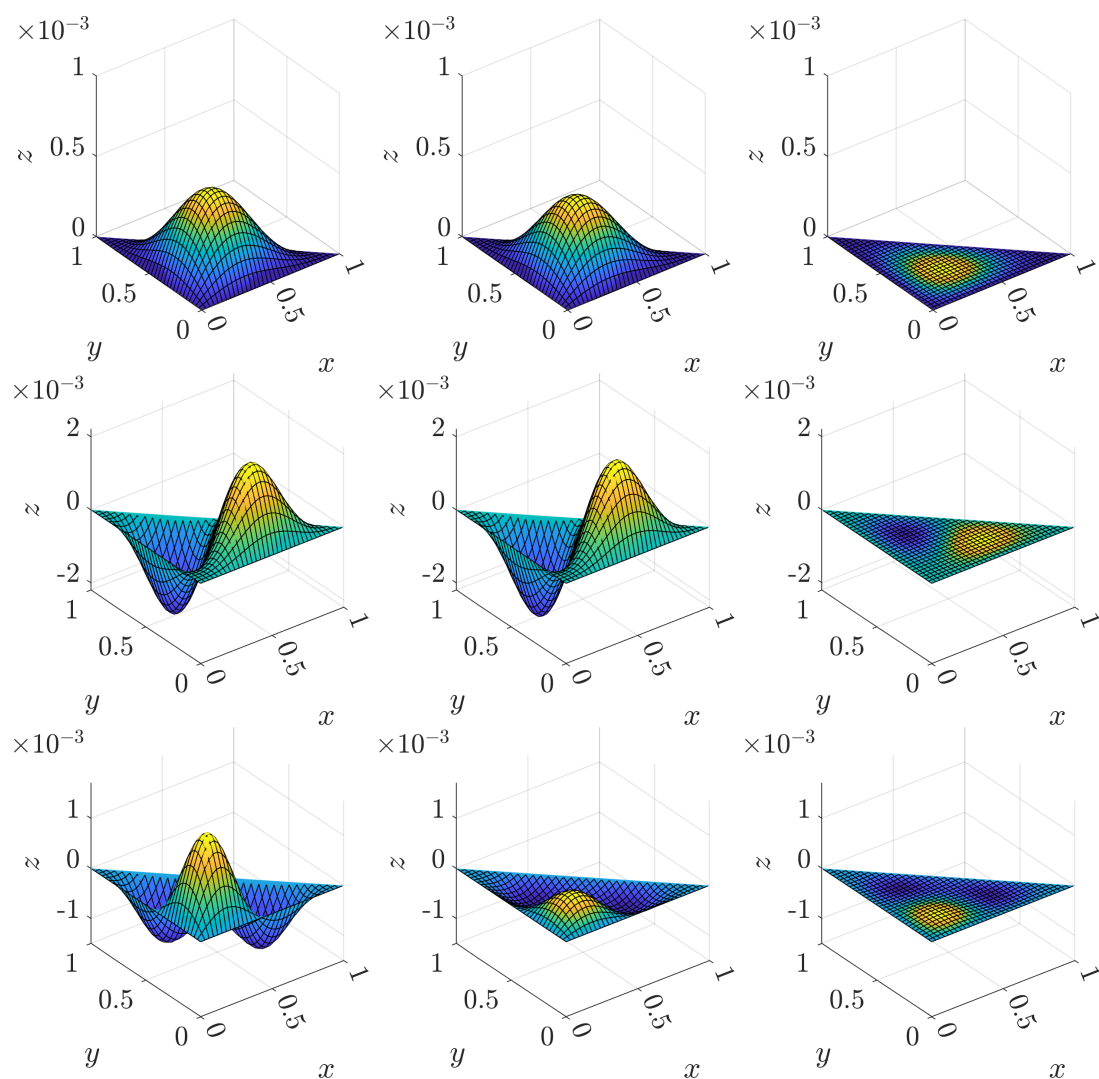
W przypadku uproszczonego a-PZT globalny punkt (x_a, y_a) jest także lokalnym punktem dla każdego włókna osobno. Suma długości włókien w obu przypadkach jest taka sama.

3.4. Porównanie wyników redukcji

Amplituda drgań płyty została wyznaczona w pewnym zakresie częstotliwości w celu weryfikacji efektywności poszczególnych aktuatorów. Wskaźnik efektywności redukcji drgań został obliczony dla częstotliwości bliskiej częstotliwości rezonansowej $\{\omega_{f;v}\} = \{\omega_v\} - 0.8$ rad/s, Tab. 3.3. Rysunek 3.14 ilustruje efekt redukcji dla pierwszych trzech modów.

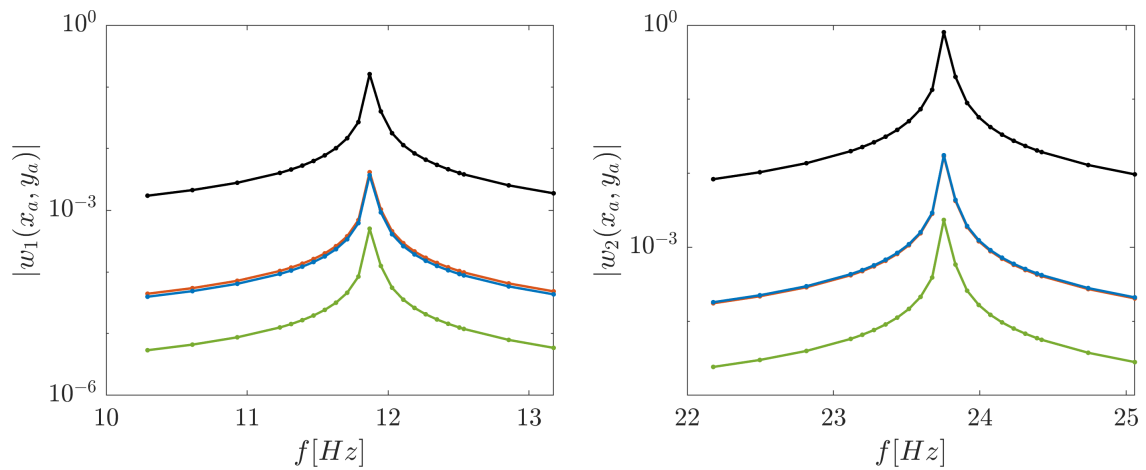
Postać drgań	R_v			
	s-PZT	c-PZT	a-PZT	
			ściśle a-PZT	uproszczony a-PZT
1	97.48 %	97.70 %	99.96 %	99.69 %
2	97.89 %	97.82 %	99.99 %	99.71 %
3	98.45 %	99.55 %	99.94 %	99.89 %
4	99.97 %	99.60 %	99.99 %	99.94 %
5	97.00 %	97.98 %	99.97 %	99.66 %
6	97.42 %	99.85 %	99.95 %	99.93 %

Tab. 3.3 Wyniki wskaźnika efektywności redukcji drgań R_v .

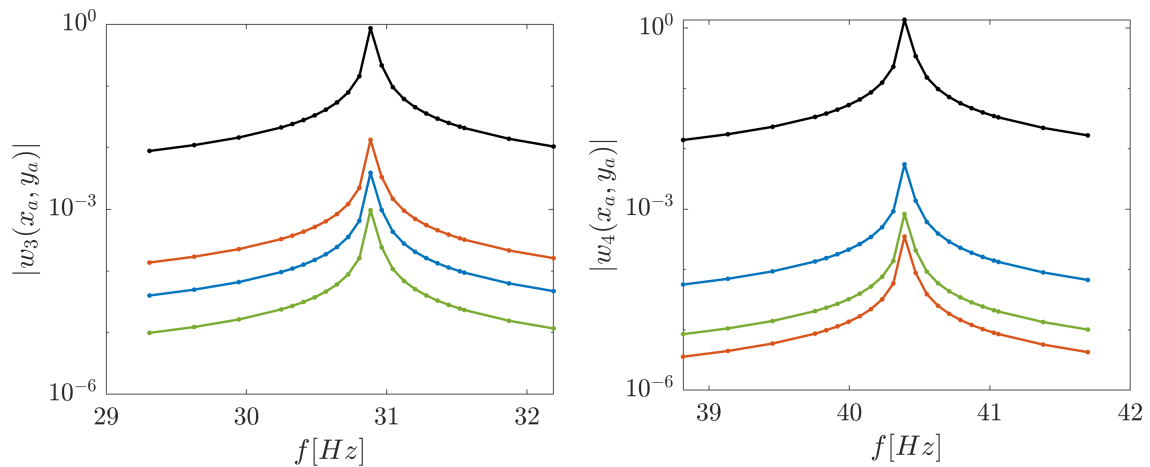


Rys. 3.14 Wyniki redukcji drgań przy użyciu aktuatorów PZT dla pierwszych trzech modów: s-PZT (po lewej), c-PZT (środek), a-PZT (po prawej).

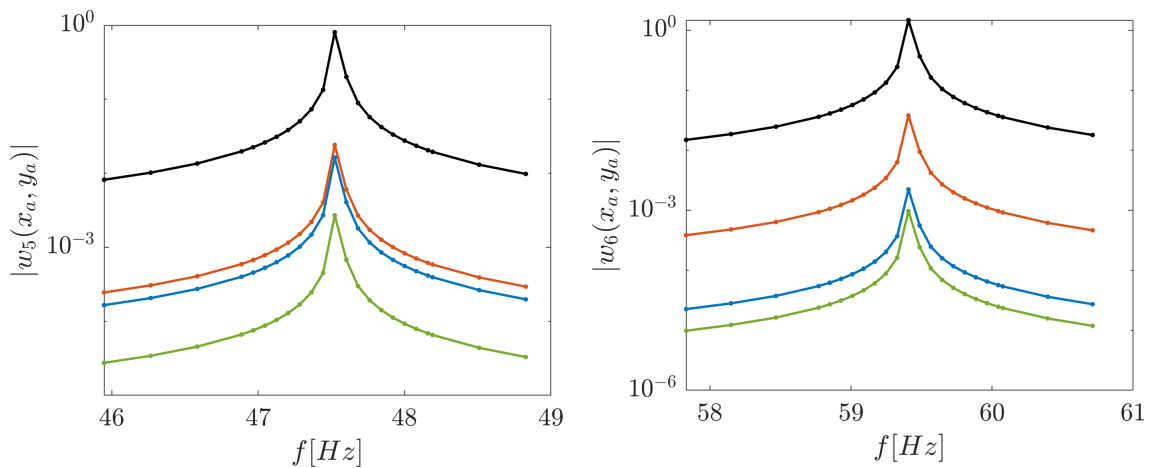
Charakterystyki widma amplitudowego zostały przedstawione dla uproszczonego wariantu a-PZT, Rys. 3.15-3.17. Uproszczony a-PZT wykazuje się większą efektywnością dla niemal wszystkich postaci drgań własnych w całym badanym zakresie. Wyjątkiem jest czwarty mod, dla którego uproszczony a-PZT charakteryzuje się minimalnie mniejszą efektywnością od s-PZT.



Rys. 3.15 Odpowiedź częstotliwościowa dla pierwszego modu (po lewej) i drugiego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).



Rys. 3.16 Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu (po lewej) i czwartego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).



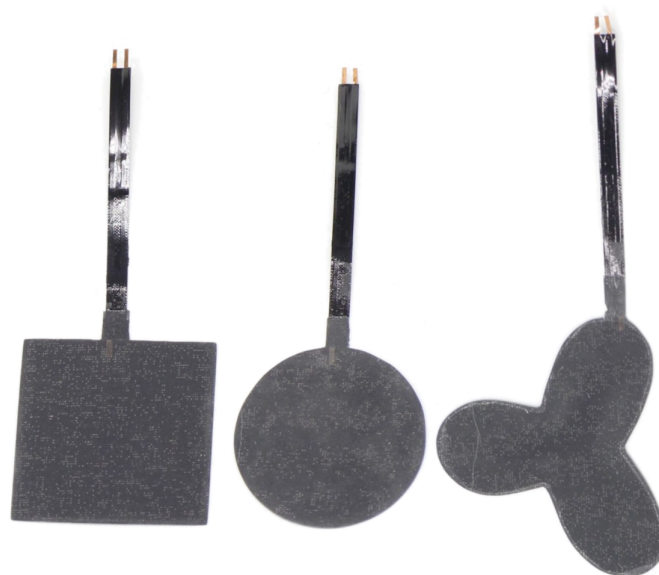
Rys. 3.17 Odpowiedź częstotliwościowa dla trzeciego modu (po lewej) i czwartego modu (po prawej): bez redukcji (czarny), z działaniem s-PZT (czerwony), z działaniem c-PZT (niebieski), z działaniem a-PZT (zielony).

Wyniki wskazują na znaczną efektywność a-PZT nad s-PZT. Maksymalna różnica w efektywności występuje dla modu piątego i wynosi prawie 3 %. Kształt a-PZT jest skorelowany z kształtem linii węzłowych dla danej postaci drgań własnych. Dla modu pierwszego, drugiego i piątego linie węzłowe tworzą trójkąty zbliżone do kształtu płyty, w rezultacie otrzymuje się nieregularny kształt aktuatora z trzema wierzchołkami. Co więcej, w przypadku tych postaci drgań widać wyraźną symetrię osiową w kształcie a-PZT. Symetria osiowa jest też widoczna dla pozostałych modów: trzeciego, czwartego i szóstego. Dla tych postaci drgań, linie węzłowe w obszarze lokalizacji a-PZT są zbliżone do kwadratu o zaokrąglonych wierzchołkach.

Rozdział 4

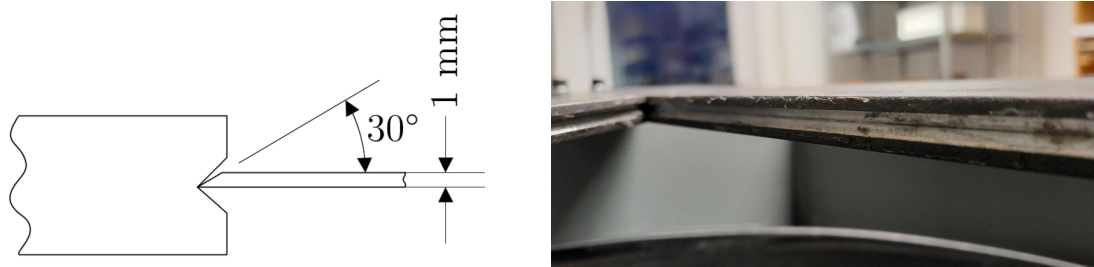
Eksperymentalna weryfikacja otrzymanych kształtów a-PZT dla płyty trójkątnej

W celu weryfikacji otrzymanych kształtów a-PZT i porównania ich efektywności z efektywnością regularnych aktuatorów (s-PZT c-PZT), przeprowadzono eksperyment aktywnej redukcji drgań. Wszystkie rodzaje PZT zamówiono u tego samego wykonawcy. Firma Bimitech Inc. wykonała a-PZT i s-PZT oraz c-PZT zgodnie z projektem. Aktuatory Bimitech PythonTM charakteryzują się wysoką efektywnością odginania, mogą być zasilane napięciem o różnym przebiegu (także sinusoidalnym) o amplitudzie do 200 V. Są to elementy o jednej warstwie materiału piezoelektrycznego (ang. *unimorph*), na której od góry i od dołu, na równoległych płaszczyznach, nałożone są elektrody. Końcówki elektrod są wyprowadzone na odległość kilku centymetrów poza PZT w celu ułatwienia podłączenia do źródła zasilania, Rys. 4.1. Z uwagi na fakt, iż PZT musi być trwale przymocowany do struktury, zamówiono trzy identyczne płyty trójkątne wykonane z austenitycznej stali chromowo-niklowej X5CrNi18-10. Do każdej z płyt przyklejono inny aktuator PZT: s-PZT, c-PZT i a-PZT. Płyty zostały zaprojektowane tak, aby wykorzystać obliczenia analityczne i numeryczne opisane w poprzednich rozdziałach. W obliczeniach przyjęto bezwymiarowy model płyty trójkątnej o długości przyprostokątnych równej jedności. Do eksperymentu użyto płyt równoramiennych o wymiarze przyprostokątnych równych 20 cm i grubości 1 mm. W ten sam sposób przeskalowano rozmiar aktuatorów.



Rys. 4.1 Badane akwatory piezoelektryczne: s-PZT (po lewej), c-PZT (na środku), a-PZT (po prawej).

Wszystkie rodzaje PZT zostały przymocowane do płyt przy pomocy dwuskładnikowego kleju epoksydowego. Realizacja swobodnego podparcia płyty została wykonana na podstawie [22]. Płyta swobodnie podparta była także przedmiotem badań [40], [41]. W zaprojektowanym mocowaniu płyty został wyfrezowany rowek w kształcie litery V o kącie rozwarcia 90 stopni. Płyta została sfazowana na brzegach pod kątem 30 stopni tak, aby krawędź płyty leżała swobodnie w wyfrezowanym rowku, Rys. 4.2. Połączenie płyty z ramą musi być uszczelnione, w pracy [22] zaproponowano silikonowy, uniwersalny uszczelniacz. W niniejszej pracy połączenie płyty z ramą zostało uszczelnione przy zastosowaniu termokurczliwych koszulek założonych na brzegi płyty. W eksperymencie wzięto pod uwagę pierwszą postać drgań własnych płyty. Zarówno lokalizacje s-PZT, c-PZT jak i lokalizacja oraz asymetria a-PZT zostały wyznaczone na drodze obliczeń analitycznych i numerycznych opisanych w poprzednich rozdziałach, Rys. 4.3.

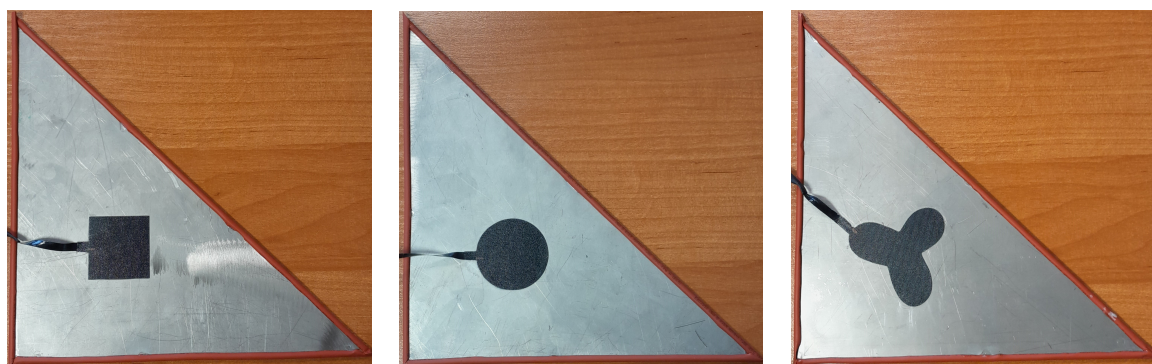


Rys. 4.2 Idea zamontowania płyty w ramie (po lewej), wyfrezowany w ramie rowek w kształcie litery V (po prawej).

Wyrażona w metodzie superpozycji Gormana wartość własna λ_*^2 jest niezależna od grubości płyty. Chcąc zweryfikować otrzymane wartości dla płyty o konkretnych wymiarach, należy w wyrażeniu na wartość własną uwzględnić grubość płyty: $\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{N_w}}$. Na podstawie tego wyrażenia można obliczyć częstotliwości drgań własnych ω , Tab. 4.1. Metoda Gormana nie uwzględnia modyfikacji geometrii płyty trójkątnej w postaci sfazowania płyty pod kątem 30 stopni. W tym celu wykonano model 3D płyty uwzględniający fazę 30 stopni na wszystkich brzegach oraz wykonano obliczenia w środowisku ANSYS dla warunków brzegowych swobodnego podparcia na wszystkich krawędziach płyty, Tab. 4.1. W analizie MES użyto 7201 elementów czworościennych drugiego rzędu, całkowita liczba stopni swobody wynosiła 44455.

	Postać drgań własnych					
	1	2	3	4	5	6
$\omega_{v, \text{ściśle}}$ [Hz]	296.78	593.57	771.64	1009.07	1187.14	1483.92
$\omega_{v, \text{ANSYS}}$ [Hz]	295.31	592.17	770.43	1010.40	1189.20	1489.70

Tab. 4.1 Częstotliwości drgań własnych dla pierwszych sześciu modów obliczone analitycznie oraz przy zastosowaniu środowiska ANSYS.



Rys. 4.3 Płyty trójkątne z przyklejonymi PZT: s-PZT (po lewej), c-PZT (na środku), a-PZT (po prawej).

4.1. Opis stanowiska badawczego

W skład stanowiska badawczego wchodzi, Rys. 4.4:

- komputer z zainstalowanym środowiskiem MATLAB, Arduino oraz PSIM,
- głośnik Beyma 18G550 o mocy 900 W,
- czujnik optoelektroniczny optoNCDT o zakresie pomiarowym 2 mm,
- płytki rozwojowa ESP32-DevKit V1,
- przetwornik analogowo-cyfrowy MCP3008,
- zasilacz symetryczny Korad KD3305P,
- obwód złożony z wzmacniaczy operacyjnych,
- wzmacniacz mocy EPA-104,
- aktuatory piezoelektryczne,
- płyty trójkątne,
- karta pomiarowa NI USB-6212 z końcówkami BNC,
- generator funkcji GW INSTEK AFG-2225.

Płyty zostały zamontowane w stalowej ramie przykręconej śrubami do kołnierza konstrukcji, wewnątrz której znajdował się głośnik. Głośnik Beyma był zamontowany w połowie wysokości konstrukcji stalowej, około 50 cm pod płytą. Beyma 18G550 jest 900-watowym głośnikiem niskotonowym o zakresie generowanego sygnału akustycznego 35-1500 Hz [6]. Sygnał akustyczny o danej częstotliwości był generowany przez głośnik w celu pobudzenia płyty do drgań. Sygnał ten był sygnałem sinusoidalnym podawanym na wejście głośnika poprzez generator funkcji GW INSTEK AFG-2225. Najważniejszymi cechami zastosowanego generatora jest to, że jest to generator dwukanałowy z możliwością synchronizacji fazy pomiędzy kanałami. Producent daje też możliwość ustawienia impedancji wejściowej na dwa poziomy (niski poziom 50-omowy i poziom wysoki). Zakres częstotliwości generowanych sygnałów zawiera się w przedziale 1 mikroherc do ok. 25 MHz dla sygnału sinusoidalnego [30]. Amplituda drgań płyty była mierzona przy pomocy czujnika optoelektronicznego optoNCDT o zakresie 2 mm.

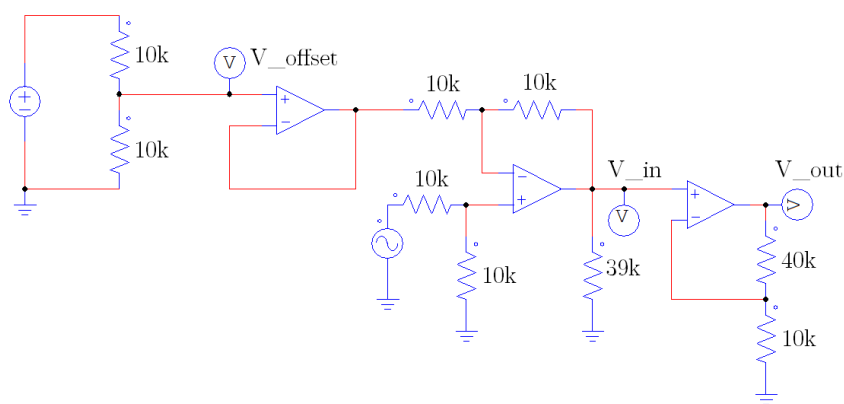
Czujnik ten musi być zamontowany w ściśle określonej przez producenta odległości od obiektu badań. Maksymalna częstotliwość próbkowania wynosi 20 kS/S.



Rys. 4.4 Stanowisko badawcze (po lewej), zamontowana płyta z a-PZT (po prawej).

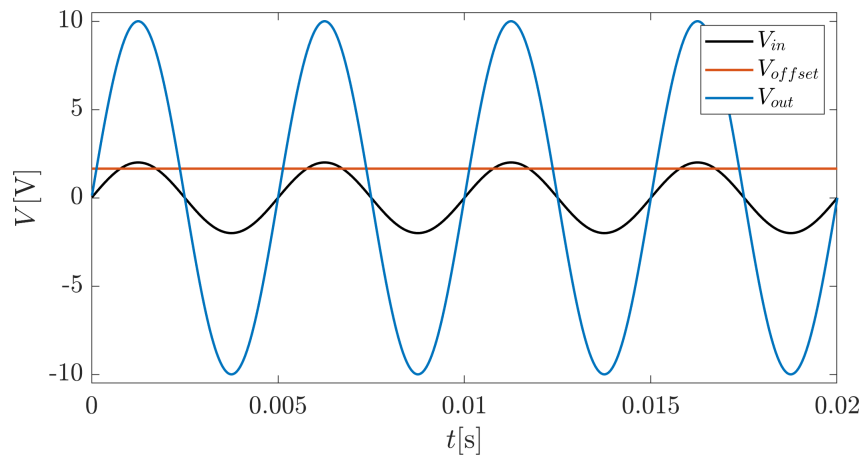
OptoNCDT daje możliwość niewielkiej obróbki mierzonego sygnału zanim zostanie on przesłany do urządzenia przetwarzającego sygnał. Jedną z opcji jest m.in. uśrednienie sygnału. W zależności od charakteru mierzonego sygnału, takie przetwarzanie może zniwelować np. nieregularne skokowe wartości, które zakłócają dalszy proces obróbki danych lub pracę systemu, którego częścią jest czujnik [56]. Sygnał mierzony przez czujnik stanowi wejście do algorytmu aktywnej redukcji drgań zaimplementowanego na płytce rozwojowej ESP32-DevKit V1. Płytką tą jest powszechnie stosowanym narzędziem w elektronice i ze względu na niewielki koszt, posiada szerokie zastosowanie: stacje pogodowe, sterowanie robotami, sterowanie procesami w urządzeniach Internetu Rzeczy, automatyka domowa, aplikacje audio, systemy bezpieczeństwa [24]. Płytką jest kompatybilna z środowiskiem Arduino, zatem istniejąca baza bibliotek i narzędzi związanych z rodziną Arduino, także wpływa na szerokie zastosowanie ESP32. Atutami ESP32 w kontekście zrealizowanego eksperymentu są przede wszystkim: wbudowane przetworniki cyfrowo-analogowe, protokół komunikacyjny I2C, interfejs SPI. Zanim jednak analogowy sygnał z czujnika zostanie przetworzony przez algorytm aktywnej redukcji drgań, jest odczytywany przez zewnętrzny przetwornik analogowo-cyfrowy MCP 3008 połączony z ESP32 poprzez interfejs SPI [60]. Przetwornik ten odczytuje sygnał w trybie różnicowym, tzn. używane są dwa kanały przetwornika, które po złożeniu dają sygnał z czujnika optoNCDT. W kolejnym kroku sygnał jest przetwarzany przez algorytm aktywnej redukcji drgań i poprzez wewnętrzny przetwornik cyfrowo-analogowy

kierowany z płytki ESP32 na układ wzmacniający. Obwód złożony z wzmacniaczy operacyjnych stanowi pierwszy poziom wzmocnienia dla sygnału wyjściowego. Schemat zaprojektowanego obwodu ilustruje Rys. 53. Drugą, prócz wzmocnienia, ważną funkcją tego obwodu jest wprowadzenie ujemnego offsetu dla sygnału wyjściowego. Ponieważ płytka ESP32 nie daje możliwości wygenerowania sygnału bipolarnego na wbudowany przetwornik cyfrowo-analogowy, konieczne jest wytworzenie sygnału unipolarnego i przesunięcie go o ujemną składową stałą już za płytką rozwojową w torze kontrolno-pomiarowym. Obwód został złożony z wzmacniaczy operacyjnych NE5532 firmy Texas Instruments [75] i zaprojektowany w programie PSIM [64], Rys. 4.5.



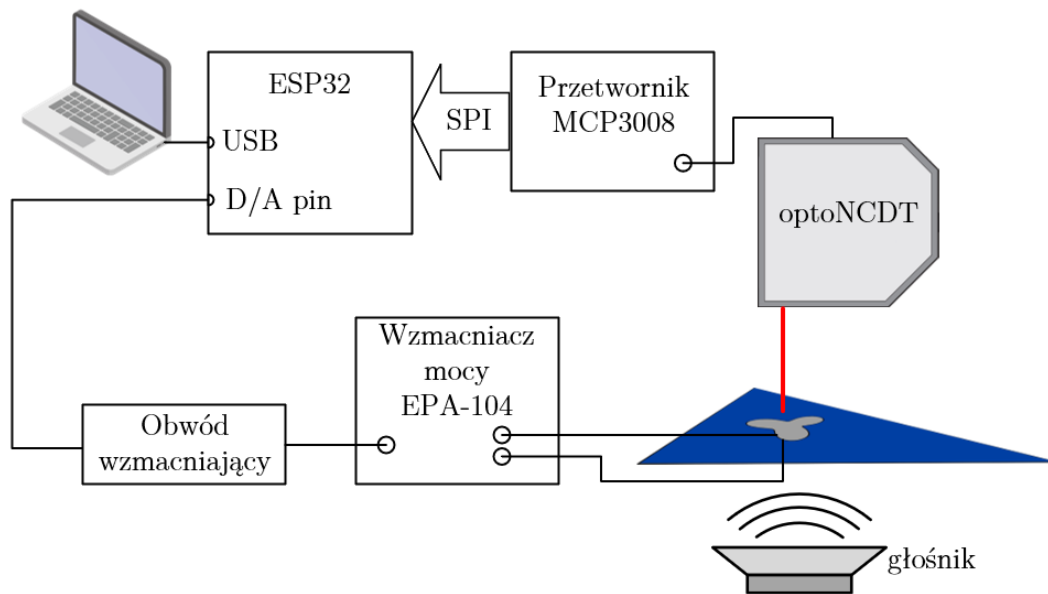
Rys. 4.5 Obwód wzmacniający sygnał zaprojektowany w programie PSIM.

Rysunek 4.6 ilustruje przykładowy sygnał o częstotliwości 200 Hz, który został obniżony o offset równy 1.65 woltów i wzmocniony poprzez wzmacniacz nieodwracający. Wartość składowej stałej została tak dobrana, ponieważ zakres generowanego sygnału analogowego przez wbudowany przetwornik cyfrowo-analogowy ESP32 wynosi od 0 do 3.3 woltów. Zatem w celu uzyskania sygnału bipolarnego, trzeba obniżyć sygnał unipolarny o zakresie 0 do 3.3 woltów do sygnału bipolarnego w zakresie -1.65 do 1.65 woltów wprowadzając ujemną składową stałą równą 1.65 woltów. Wzmocnienie, zgodnie z dobranymi rezystorami, wynosiło 5 [53].



Rys. 4.6 Przebiegi sygnałów w obwodzie wzmacniającym na różnych poziomach przetwarzania sygnału.

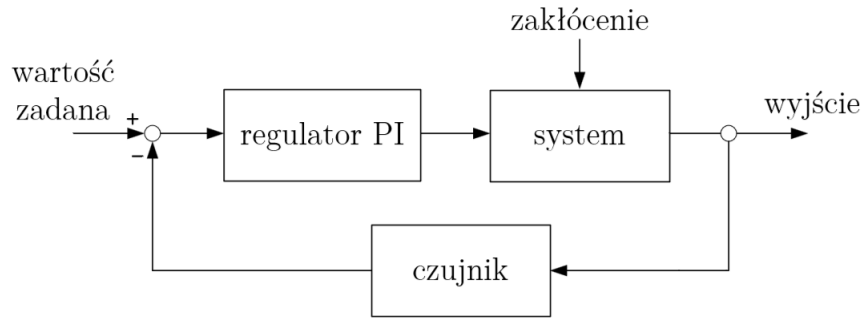
Aby wytworzyć ujemną składową stałą konieczne jest zasilanie układu wzmacniaczy zasilaniem symetrycznym. Do tego celu posłużył zasilacz Korad KD3305P, którego dwa kanały połączono szeregowo otrzymując w ten sposób zasilanie ± 15 V DC [20]. Za układem wzmacniającym w torze kontrolno-pomiarowym znajdował się wzmacniacz mocy EPA-104 przeznaczony jako wzmacniacz do PZT. Wzmacniacz ten także umożliwia wprowadzenie składowej stałej poprzez potencjometr oraz dostosowanie wzmocnienia do maksymalnie 20-krotnej wartości [63]. Przetworzony i wzmocniony sygnał został użyty do zasilenia PZT. Tor kontrolno-pomiarowy został zilustrowany na Rys. 4.7. Karta pomiarowa NI USB-6212 podłączona do komputera z oprogramowaniem MATLAB służyła do akwizycji danych otrzymanych w eksperymencie [59].



Rys. 4.7 Schemat zrealizowanego eksperymentu aktywnej redukcji drgań.

4.1.1. Układ aktywnej redukcji drgań

W ramach eksperymentu zaimplementowano na płytce rozwojowej ESP32 układ ze sprzężeniem zwrotnym i regulatorem PI. Regulator został zaimplementowany w języku C z wykorzystaniem biblioteki FastPID [55]. Podobny układ został zaproponowany w [67], z tym, że regulator był czysto proporcjonalny. W niniejszej pracy włączono również do pętli sterowania człon całkujący, jednakże wzmocnienie części całkującej było na stosunkowo niskim poziomie. Układ reagował na zakłócenie spowodowane w płycie przez falę akustyczną generowaną z głośnika. Następnie, na podstawie danych z czujnika i dla zadanych wartości członów proporcjonalnego i całkującego, program wyznaczał odpowiednie wyjście w danym kroku czasowym. Na podstawie biblioteki FastPID, częstotliwość wywoływania regulatora została ustawiona na wartość 10 kHz. Wartość zadana wynosiła 0, Rys. 4.8.



Rys. 4.8 Układ ze sprzężeniem zwrotnym wykorzystany w eksperymencie.

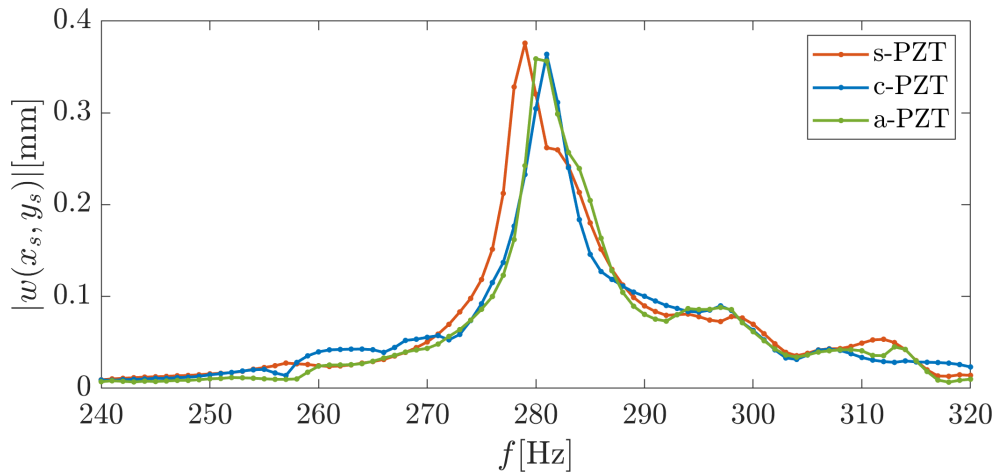
Na dalszym etapie wartości cyfrowe obliczonego wyjścia zostały przekonwertowane na wartości analogowe poprzez opisany wcześniej proces konwersji w wbudowanym przetworniku cyfrowo-analogowym.

4.2. Wyniki eksperymentów

Zakres eksperymentu obejmował wyznaczenie charakterystyk częstotliwościowych płyt: na zakłócenie z głośnika oraz przy włączonym systemie aktywnej redukcji drgań. W skład systemu aktywnej redukcji drgań wchodziły trzy rodzaje PZT: s-PZT, c-PZT i a-PZT. Każdy z aktuatorów pracował przy stałym wzmacnieniu sprzętowym, podczas gdy wzmacnienie programowe było dostosowywane, aby układ pracował w granicy stabilności. Przez wzmacnienie sprzętowe należy rozumieć wzmacnienie zawarte w obwodzie złożonym z wzmacniaczy operacyjnych oraz maksymalne wzmacnienie zapewnione przez wzmacniacz mocy EPA-104. Pierwszym zrealizowanym badaniem było sprawdzenie czy trzy identyczne płyty dają tę samą odpowiedź częstotliwościową na zakłócenie z głośnika. Rysunek 4.9 ilustruje otrzymane wyniki. Choć wszystkie płyty mają ten sam wymiar i zostały wykonane w ten sam sposób, to widać niewielkie różnice w otrzymanych charakterystykach. Pierwsza częstotliwość drgań własnych dla płyty z s-PZT przypada na wartość 279 Hz, dla a-PZT jest to wartość 280 Hz, natomiast dla c-PZT – 281 Hz. Uśredniając otrzymane wyniki, przyjęto wartość 280 Hz jako pierwszą częstotliwość drgań własnych płyty, Tab. 4.2.

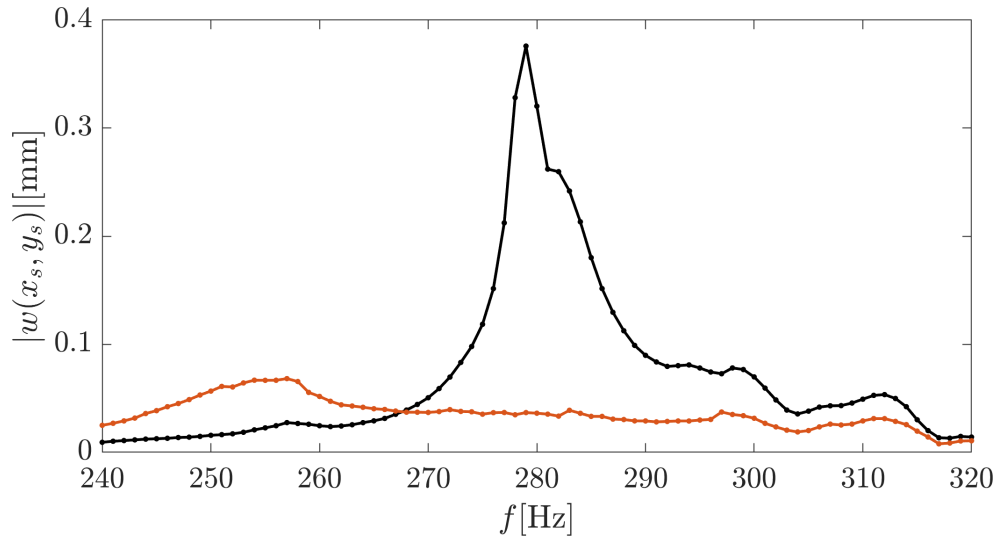
	Pierwsza częstotliwość drgań własnych płyty		
	analitycznie	ANSYS	eksperyment
ω_v [Hz]	296.78	295.31	280.00
błąd względny [%]	–	0.4953	5.6540

Tab. 4.2 Błędy względne wartości pierwszej częstotliwości drgań własnych płyty trójkątnej.



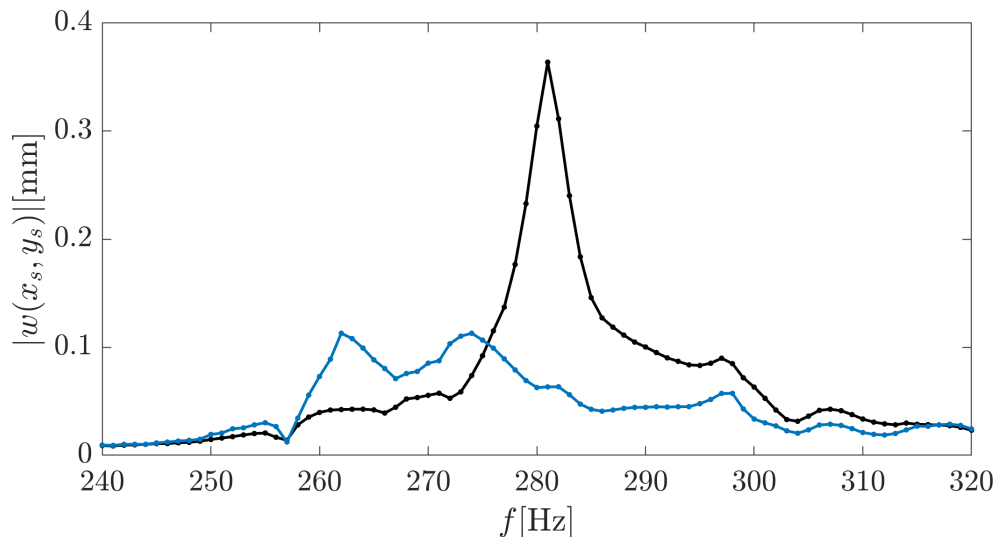
Rys. 4.9 Odpowiedź częstotliwościowa na zakłócenie z głośnika dla trzech płyt z trzema różnymi PZT: s-PZT, c-PZT i a-PZT.

Kolejnym krokiem było sprawdzenie efektywności aktywnej redukcji drgań dla stałego wzmocnienia sprzętowego i programowego dla badanych aktuatorów. W tym celu ustawiono wzmocnienie członu proporcjonalny regulatora PI na wartość 1.2 (wartość tę dobrano eksperymentalnie). Wzmocnienie części całkującej było ustawione na wartość 0.01 dla wszystkich aktuatorów. Rysunek 4.10 przedstawia wyniki odpowiedzi częstotliwościowej w układzie ze sprzężeniem zwrotnym i regulatorem PI dla s-PZT.

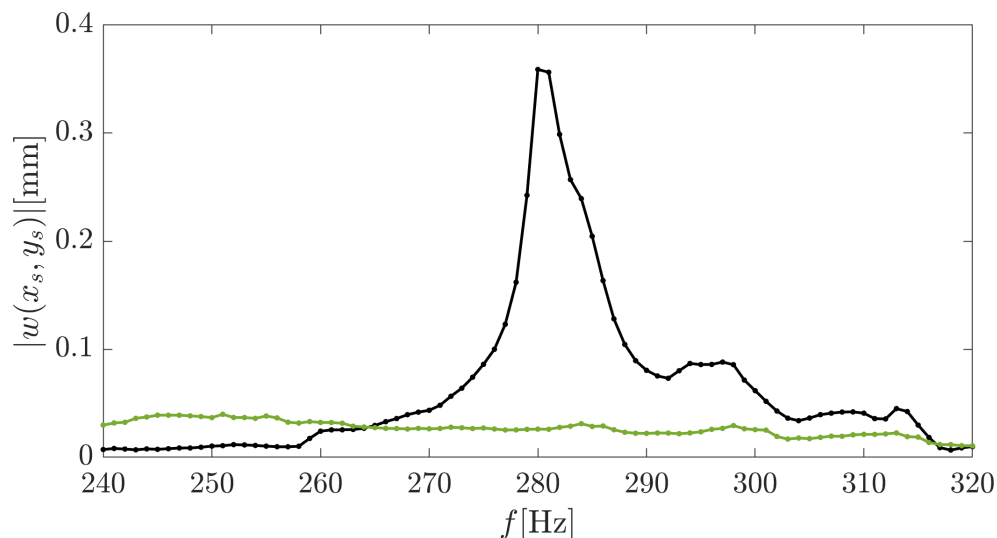


Rys. 4.10 Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla s-PZT (kolor czerwony) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$.

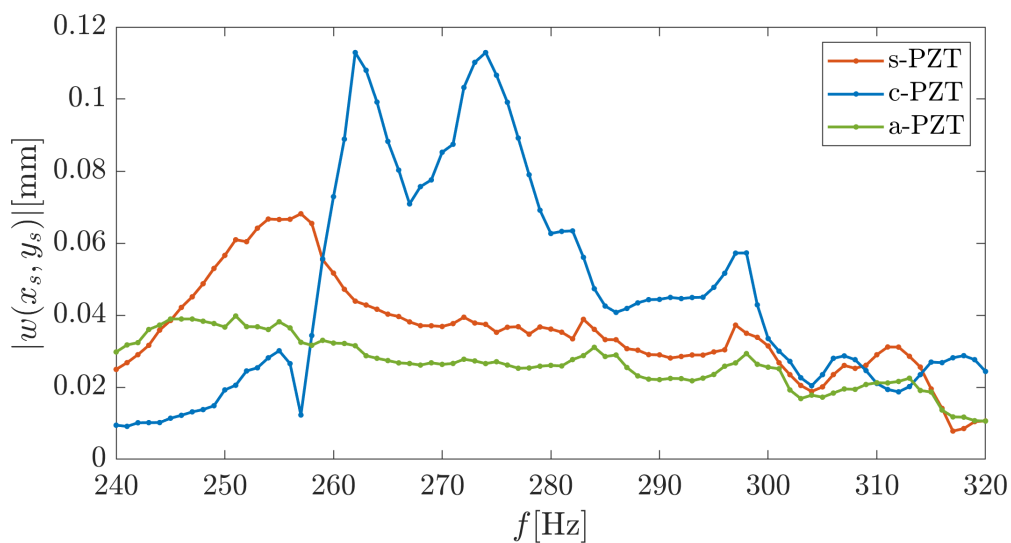
Rysunki 4.11-4.12 przedstawiają odpowiedź częstotliwościową sygnału zamkniętej pętli sterowania dla, odpowiednio, c-PZT i a-PZT. Wszystkie trzy wykresy świadczą o skutecznej redukcji drgań i znacznym zredukowaniu amplitudy dla częstotliwości rezonansowej. Niemniej jednak, porównanie trzech przebiegów sygnałów zamkniętej pętli sterowania potwierdza, że a-PZT cechuje się największą efektywnością w niemal całym badanym zakresie, Rys. 4.13.



Rys. 4.11 Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla c-PZT (kolor niebieski) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$.

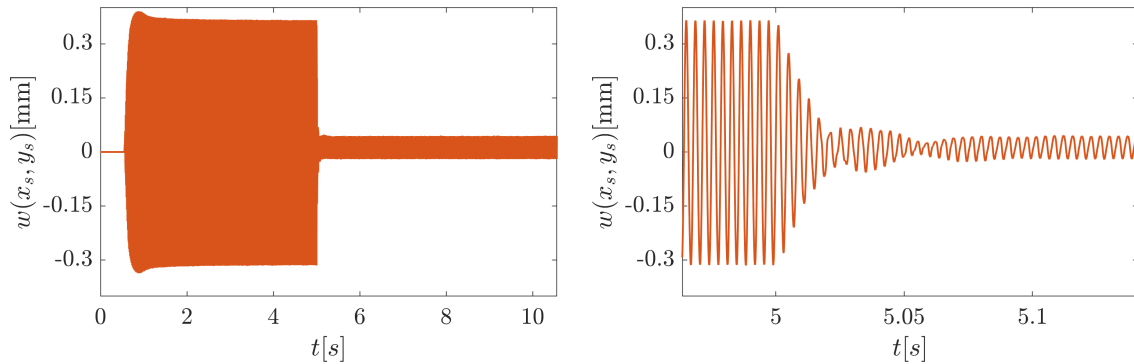


Rys. 4.12 Odpowiedź częstotliwościowa sygnału otwartej pętli sterowania (kolor czarny) i zamkniętej pętli sterowania dla a-PZT (kolor zielony) przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$.

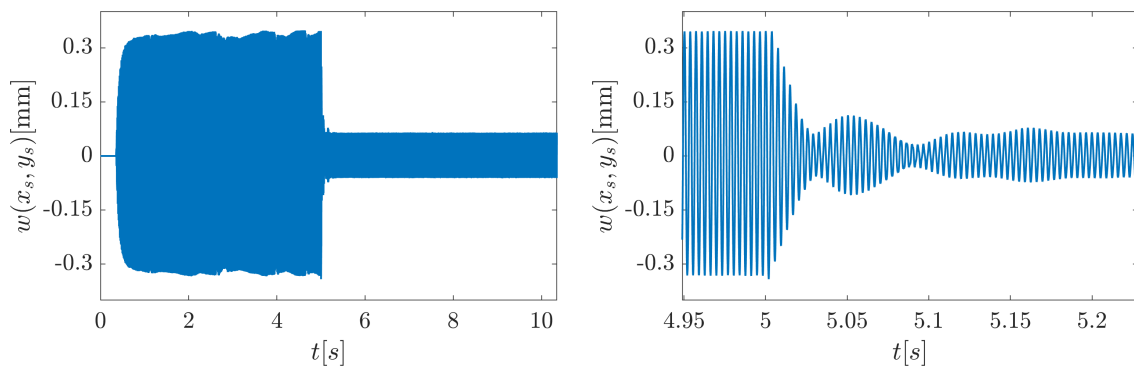


Rys. 4.13 Nałożone wykresy zamkniętej pętli sterowania dla trzech aktuatorów przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$: s-PZT, c-PZT i a-PZT.

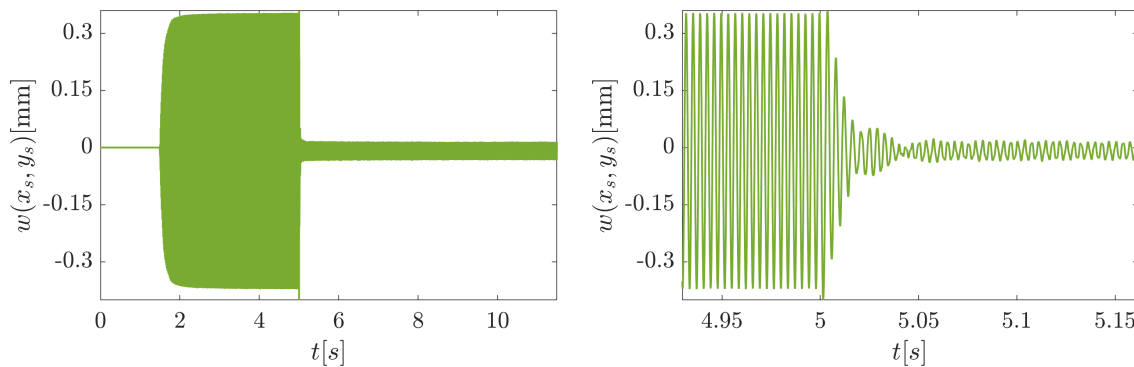
Rysunki 4.14-4.16 przedstawiają moment załączenia układu aktywnej redukcji drgań przy zastosowaniu trzech badanych aktuatorów. Układ redukcji został załączony w czasie $t_{ON} = 5$ s.



Rys. 4.14 Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.



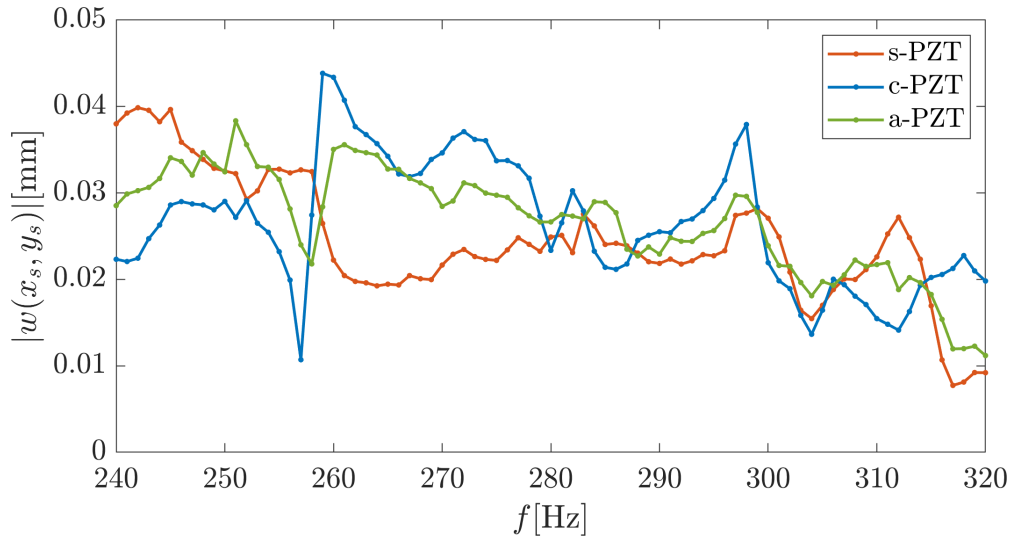
Rys. 4.15 Przebieg czasowy c-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.



Rys. 4.16 Przebieg czasowy a-PZT przy wzmacnieniu $K_p = 1.2$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.

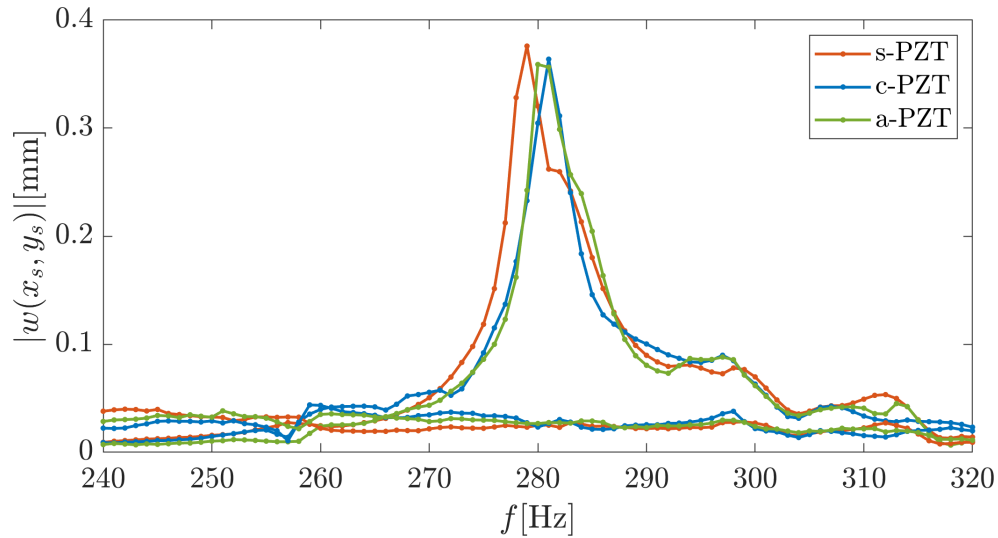
Kolejnym elementem eksperymentu było dostosowanie poziomu wzmacnienia programowego do wartości w maksymalnej w granicy stabilności. W tym celu, eksperymentalnie dobrano wartości wzmacnienia członu proporcjonalnego regulatora PI tak, aby

uzyskać wzmocnienie krytyczne. Eksperyment ten zrealizowano w celu uzasadnienia, że każdy z aktuatorów jest zdolny do zredukowania drgań do relatywnie niskiego poziomu. Różnica tkwi w tym, że wymagane jest większe wzmocnienie sygnału, a co za tym idzie – sygnał sterujący posiada większą energię więc także większą energię zasilania należy zapewnić, aby uzyskać dany poziom redukcji, Rys. 4.17.



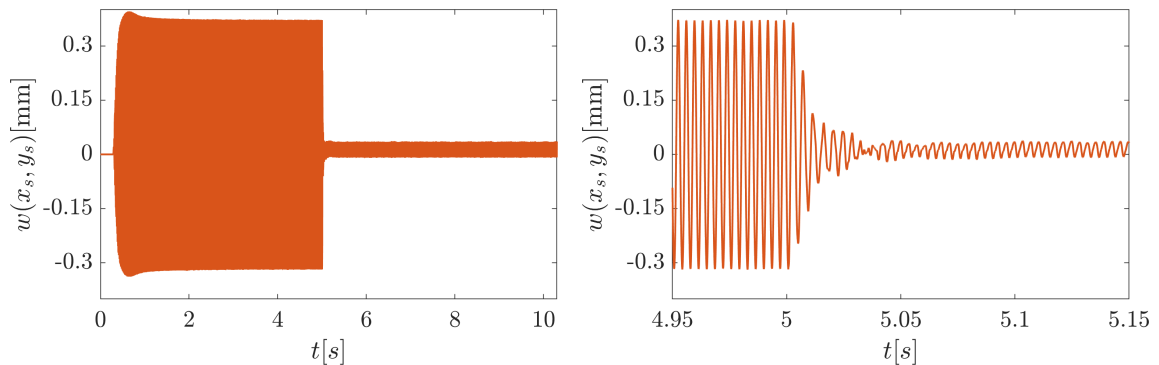
Rys. 4.17 Odpowiedź częstotliwościowa sygnałów zamkniętej pętli sterowania dla trzech aktuatorów przy wzmocnieniu krytycznym: $K_{P;s-PZT}^{kr} = 1.80$, $K_{P;c-PZT}^{kr} = 3.20$, $K_{P;a-PZT}^{kr} = 1.22$.

Charakterystyki z Rys. 4.17 pokazane na tle odpowiedzi częstotliwościowej sygnału otwartej pętli sterowania przedstawiają skalę uzyskanej redukcji drgań, Rys. 4.18.

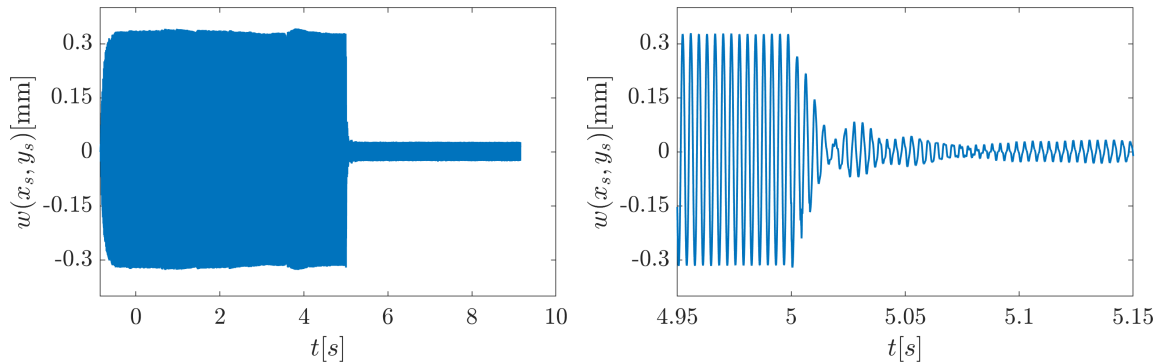


Rys. 4.18 Odpowiedź częstotliwościowa sygnałów zamkniętej pętli sterowania dla badanych aktuatorów na tle sygnałów otwartej pętli sterowania.

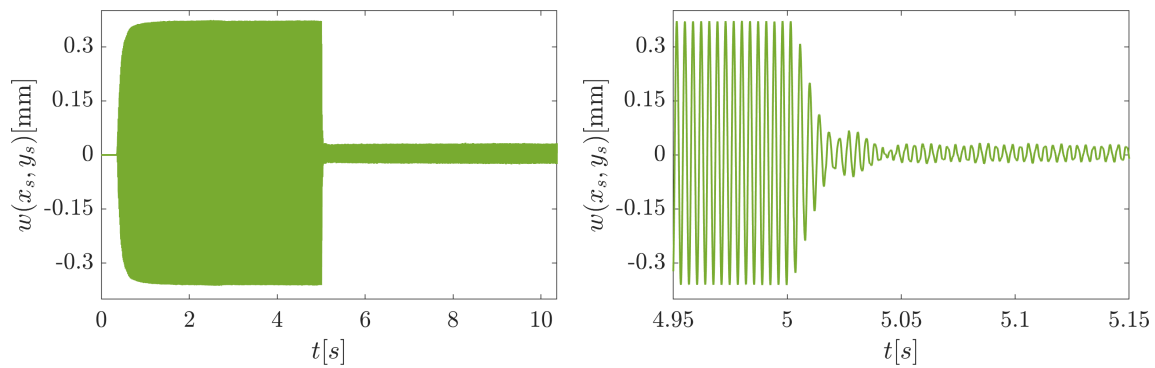
Przebiegi czasowe sygnału zamkniętej pętli sterowania, przedstawione na Rys. 4.19-4.21, przy wzmacnieniu krytycznym przedstawiają zredukowany przebieg drgań oraz moment załączenia systemu aktywnej redukcji drgań, który dla wszystkich eksperymentów wynosił $t_{ON} = 5$ s.



Rys. 4.19 Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P,s-PZT}^{kr} = 1.80$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.



Rys. 4.20 Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P;c-PZT}^{kr} = 3.20$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.



Rys. 4.21 Przebieg czasowy s-PZT przy wzmacnieniu krytycznym $K_{P;a-PZT}^{kr} = 1.22$, czas załączenia układu aktywnej redukcji drgań $t_{ON} = 5$ s.

Przeprowadzone eksperymenty dowodzą, że każdy z badanych aktuatorów może być wykorzystywany w aktywnej redukcji drgań płyt. Ponadto, poprzez dostosowanie wzmacnienia członu proporcjonalnego regulatora PI, można uzyskać pożądany poziom redukcji stosując każdy z aktuatorów. Jednakże kształt aktuatora ma wpływ na efektywność procesu redukcji drgań, stąd jego optymalizacja prowadzi do maksymalizacji efektywności redukcji.

Rozdział 5

Zakończenie, wnioski, kierunki dalszych badań

W pracy zrealizowano badania na drodze teoretycznej, numerycznej oraz eksperymentalnej. Wszystkie te działania łączył jeden cel – zrealizowanie celu pracy, udowodnienie tezy i potwierdzenie hipotezy. Zarówno rozważania teoretyczne, numeryczne jak i przeprowadzony eksperyment były środkami do uzasadnienia stwierdzenia, że optymalizacja kształtu oraz położenia PZT, przy założonym modelu matematycznym, prowadzi do maksymalizacji efektywności aktywnej redukcji drgań. Z tego wynika pierwszy, najważniejszy, ogólny wniosek pracy:

1. Nowy, uogólniony model a-PZT prowadzi do możliwości dostosowania długości ramion aktuatora przy zachowaniu stałej wartości momentów gnących klasycznego modelu PZT. Takie podejście stwarza możliwość dostosowania również położenia aktuatora. Te dwa rozwiązania powodują maksymalizację redukcji drgań płyty trójkątnej. Efektywność redukcji drgań przy zastosowaniu a-PZT jest największa przy tej samej ilości energii doprowadzonej do pozostałych rozpatrywanych PZT, a mianowicie c-PZT i s-PZT. W ten sposób zrealizowano cel pracy, udowodniono tezę i potwierdzono hipotezę.

Drugi wniosek dotyczy opracowanego algorytmu optymalizującego:

2. Efektem osiągniętych wyników w punkcie 1. jest sformułowanie algorytmu optymalizującego kształt PZT oraz jego rozmieszczenia na strukturze. Jako funkcję celu przyjęto minimalizację drgań struktury. Funkcja celu jest zależna od geometrycznych cech PZT, zatem umożliwia znalezienie optymalnego PZT, który przy minimalnej energii zapewni maksymalną efektywność redukcji drgań.

Następny wniosek jest związany z rozważaniami teoretycznymi oraz numerycznymi:

3. Szczególna postać funkcji celu w redukcji drgań stanu ustalonego jest funkcją momentu gnącego struktury w punkcie. Wyprowadzone wzory numeryczne, na bazie ilorazów różnicowych, prowadzą do stwierdzenia, że człon odpowiedzialny za efekt działania PZT w redukcji drgań belek jest zależny od momentu gnącego belki w punkcie x_{1a} . Natomiast w przypadku płyty, analogiczne zależności stwierdzają wpływ działania PZT w zależności od wartości sumy momentów gnących płyty w dwóch prostopadłych kierunkach w punkcie (x_a, y_a) . Przez analogię do krzywizn powierzchni, nazwano tę wielkość średnim momentem gnącym płyty w punkcie.

Kolejny wniosek łączy wszystkie rodzaje zrealizowanych badań:

4. Aktuator a-PZT wykazuje naj największą efektywność w aktywnej redukcji drgań struktury (belki lub płyty) spośród wszystkich badanych aktuatorów. Badania porównawcze przeprowadzono zakładając stałą długość wszystkich aktuatorów w przypadku belki oraz stałą długość i liczbę włókien składających się na a-PZT w przypadku drgań płyty trójkątnej. Dla wszystkich badanych aktuatorów, energia dodana do układu pozostawała na tym samym poziomie, stąd momenty gnące w modelu jedno- i dwuwymiarowym były także ustalone dla wszystkich PZT. Zarówno obliczenia analityczne, numeryczne, jak i badania eksperymentalne potwierdzają zasadność stosowania optymalizacji kształtu PZT (a-PZT) w celu maksymalizacji efektywności aktywnej redukcji drgań.

Kolejne wnioski wynikające z pracy są wnioskami szczegółowymi, które mogą być przyczynkiem do dalszych badań:

5. W optymalizacji a-PZT dla struktur jednowymiarowych zastosowano dwa podejścia: pierwsze wynikało z redukcji drgań stanu ustalonego, zaś drugie z redukcji drgań przy użyciu regulatora LQR. Należy podkreślić, iż dla pierwszych dwóch postaci drgań własnych algorytm optymalizujący oparty o amplitudę pętli otwartej i amplitudę pętli zamkniętej z regulatorem LQR wskazał ten sam punkt (w granicach błędu numerycznego) określający położenie a-PZT co algorytm bazujący na ścisłych przesłankach w redukcji drgań stanu ustalonego. Dla trzeciego modu jest rozbieżność wyników, ponieważ algorytm dla stanu ustalonego wskazał punkt, w którym moment gnący osiąga absolutne ekstremum, zaś algorytm bazujący na amplitudzie pętli otwartej bez regulatora i z regulatorem LQR, wskazał punkt będący drugim w kolejności, lokalnym maksimum momentu gnącego.

6. Asymetria a-PZT dla drgań belki różniła się w zależności od zastosowanego podejścia optymalizacyjnego (podejście bazujące na ścisłych przesłankach w redukcji drgań stanu ustalonego oraz podejście bazujące na amplitudzie pętli otwartej bez regulatora oraz pętli zamkniętej z regulatorem LQR). Otrzymano zbliżone, aczkolwiek minimalnie różne wartości długości ramion a-PZT. Bardziej wyrazista asymetria została wskazana przy drugim podejściu.
7. Algorytm bazujący na amplitudzie pętli otwartej bez regulatora i z amplitudzie pętli zamkniętej z regulatorem LQR wykazują pełną zbieżność wyników, zarówno w przypadku położenia punktu x_a jak i określenia asymetrii ramion a-PZT dla belki.
8. Kształt a-PZT w aktywnej redukcji drgań płyt trójkątnych jest skorelowany z umiejscowieniem linii węzłowych dla danej postaci drgań własnych. Szczególnie znaczone ma kształt tych linii wokół punktu, w którym średni moment gnący płyty osiąga absolutne ekstremum.
9. Ścisłe i uproszczone kształty a-PZT wykazują różnice w asymetrii włókien składających się na aktuator; pkt. 3.3.2. Dla wszystkich postaci drgań, prócz czwartej, zarówno ścisły, jak i uproszczony a-PZT osiągają lepszą efektywność od s-PZT i c-PZT. Dla czwartego modu s-PZT cechuje się większą efektywnością o 0.03 % od uproszczonego a-PZT. Niemniej jednak, ścisły a-PZT cechuje się największą efektywnością dla wszystkich postaci drgań.
10. Eksperymentalna weryfikacja a-PZT potwierdza największą efektywność optymalnego PZT w niemal całym badanym zakresie częstotliwości. Wyraźną różnicę widać pomiędzy a-PZT, a c-PZT. W przypadku s-PZT różnica pomiędzy a-PZT jest mniejsza. Gorsze rezultaty c-PZT mogą wynikać z niedoskonałości wykonania płyty. Mimo, że wszystkie zostały wykonywane na tych samych narzędziach i z tego samego materiału, istnieje możliwość, że w mikroskali różnią się od siebie, co może mieć wpływ na wyniki.

Wszystkie przedstawione wnioski potwierdzają słuszność optymalizacji kształtu i rozmieszczenia PZT w celu maksymalizacji efektywności aktywnej redukcji drgań struktur jednowymiarowych i płyt trójkątnych.

Kierunki dalszych badań

Badania przeprowadzone w pracy traktują o optymalizacji kształtu aktuatora piezoelektrycznego w zastosowaniu do aktywnej redukcji drgań płyty trójkątnej. W pracy rozważono płytę w kształcie trójkąta prostokątnego o równych przyprostokątnych. Algorytm optymalizacyjny jest na tyle ogólny, że można go z powodzeniem zastosować do innych warunków brzegowych płyty, różnych kształtów płyty, a także do struktury, której rozwiązanie jest dane inną, numeryczną metodą, np. metodą elementów skończonych.

Naturalną konsekwencją przeprowadzonych badań jest z pewnością rozważenie drgań powłok i struktur bryłowych. Jako że te ustroje mechaniczne są opisane innymi równaniami, należałoby przeprowadzić rozważania teoretyczne analogicznie do belki i płyty oraz na nowo sformułować szczególne postacie funkcji celu.

Innym kierunkiem badań wynikającym z pracy może być zastosowanie innego rodzaju aktuatora piezoelektrycznego, np. piezoelektryków ułożonych w stos połączonych ramą w kształcie litery gamma. Taka konstrukcja tworzy jeden zastępczy moment gnący w modelu klasycznym, wymaga uwzględnienia masy dołączonej do struktury. Postawione zagadnienie optymalizacyjne pod względem efektywności redukcji drgań musiałyby być rozpatrzone jako całkiem nowe.

Bibliografia

- [1] AKTAS K.G., ESEN I. (2020), State-Space Modeling and Active Vibration Control of Smart Flexible Cantilever Beam with the Use of Finite Element Method, *Engineering, Technology & Applied Science Research*, 10(6), pp. 6549-6556.
- [2] ARIDOGAN A., BASDOGAN I. (2015), A review of active vibration and noise suppression of plate-like structures with piezoelectric transducers, *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(12), pp. 1455–1476, doi: 10.1177/1045389X15585896.
- [3] AUGUSTYN E., KOZIEŃ M.S., PRAĆIK M. (2014), FEM analysis of active reduction of torsional vibrations of clamped-free beam by piezoelectric elements for separated mode, *Archives of Acoustics*, 39(4), pp. 639-644, doi: 10.2478/aoa-2014-0069.
- [4] BARBONI R., MANNINI A., FANTINI E., GAUDENZI P. (2000), Optimal placement of PZT actuators for the control of beam dynamics, *SMART MATERIALS AND STRUCTURES*, 9, pp. 110–120, doi: 10.1088/0964-1726/9/1/312.
- [5] BAILEY T., HUBBARD J.E. JR. (1985), Distributed Piezoelectric-Polymer Active Vibration Control of a Cantilever Beam, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 8(5), doi:10.2514/3.20029.
- [6] BEYMA, *18G550 Low Frequency Transducer G50 Series Manual*, https://www.beyma.com/speakers/Fichas_Tecnicas/beyma-speakers-data-sheet-low-mid-frequency-18G550.pdf.
- [7] BOETTCHER U., MATTHES L., KNIGGE B., DE CALLAFON R.A., TALKE F.E. (2012), Suppression of cross-track vibrations using a self-sensing micro-actuator in hard disk drives, *Microsystem Technologies*, 18, pp. 1309–1317, doi: 10.1007/s00542-012-1533-x.
- [8] BRAŃSKI A. (2011), An optimal distribution of actuators in active beam vibration – some aspects, theoretical considerations, [in:] *Acoustic Waves – From Microdevices to Helioseismology*, Beghi M.G. [Ed.], pp. 397–418, IntechOpen, Rijeka.
- [9] BRAŃSKI A. (2012), Modes orthogonality of mechanical system simple supported beam-actuators-concentrated masses, *Acta Physica Polonica A*, 121(1A), pp. 126–131.

- [10] BRAŃSKI A. (2013), Effectiveness analysis of the beam modes active vibration protection with different number of actuators, *Acta Physica Polonica A*, 123(6), pp. 1123–1127, doi: 10.12693/APhysPolA.123.1123.
- [11] BRAŃSKI A., BORKOWSKI M., SZELA S. (2008), The Idea of the Selection of PZT-Beam Interaction Forces in Active Vibration Protection Problem, *Acta Physica Polonica A*, 118(1), doi: 10.12693/APhysPolA.118.17
- [12] BRAŃSKI A., KURAS R. (2022), Asymmetrical PZT Applied To Active Reduction of Asymmetrically Vibrating Beam – Semi-Analytical Solution, *Archives of Acoustics*, 47(4), pp. 555–564, doi: 10.24425/aoa.2022.142891.
- [13] BRAŃSKI A., KURAS R. (2023), PZT Asymmetrical Shape Optimization in Active Vibration Reduction of Triangular Plates, *Archives of Acoustics*, 48(3), pp. 425–432, doi: 10.24425/aoa.2023.145241.
- [14] BRAŃSKI A., LIPIŃSKI G. (2011), Analytical determination of the PZT's distribution in active beam vibration protection problem, *Acta Physica Polonica A*, 119(6A), pp. 936–941.
- [15] BRAŃSKI A., SZELA S. (2008), Improvement of effectiveness in active triangular plate vibration reduction, *Archives of Acoustics*, 33(4), pp. 521–530.
- [16] BRAŃSKI A., SZELA S. (2010), Quasi-optimal PZT distribution in active vibration reduction of the triangular plate with P-F-F boundary conditions, *Archives of Control Sciences*, 20(2), pp. 209–226, doi: 10.2478/v10170-010-0014-7.
- [17] CALLIPARI F., SABATINI M., ANGELETTI F., IANNELLI P., GASBARRI P. (2022), Active vibration control of large space structures: Modelling and experimental testing of offset piezoelectric stack actuators, *Acta Astronautica*, 198, pp. 733–745, doi: 10.1016/j.actaastro.2022.05.058.
- [18] CAO K., XIE R., ZHOU J., ZHANG X., WANG J., LI S. (2023), Optimizing the Location of the Piezoelectric Actuator and Analyzing Its Effect on the Dynamics of Asymmetric Flexible Spacecraft, *Aerospace*, 10(8), 716, doi: 10.3390/aerospace10080716.
- [19] DE SILVA C.W. (2000), *Vibration: Fundamentals and Practive*, CRC Press, Boca Raton, USA.
- [20] DONGGUAN KORAD TECHNOLOGY CO., LTD., KD3300 DC Power Supply Series User Manual, <https://static.eleshop.nl/mage/media/downloads/KD3305usermanual.pdf>.
- [21] DONOSO A., SIGMUND O. (2009), Optimization of piezoelectric bimorph actuators with active damping for static and dynamic loads, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 38, pp. 171–183, doi: 10.1007/s00158-008-0273-0.
- [22] DUMOND P., MONETTE D., ALLADKANI F., AKL J., CHIKHAOUI I. (2019), Simplified setup for the vibration study of plates with simply-supported boundary conditions, *MethodsX*, 6, pp. 2106–2117, doi: 10.1016/j.mex.2019.09.023.

- [23] ELMAS S. (2009), *Active vibration control and real-time surface profile monitoring system for a high performance machining process*, Ph.D. Thesis, Loughborough University.
- [24] ESPERSIF SYSTEMS INC. (2023), *ESP32 Technical Reference Manual*, https://www.espressif.com/sites/default/files/documentation/esp32_technical_reference_manual_en.pdf.
- [25] FAWADE A.S., FAWADE S.S. (2016), Modeling and analysis of vibration controlled cantilever beam bounded by PZT Patch, *International Journal of Engineering Inventions*, 5(7), pp. 7–14.
- [26] FICHTENHOLTZ G.M. (1999), *Differential and Integral Calculus*, PWN, Warszawa.
- [27] FINIKOW S.P. (1956), *Geometria różniczkowa*, PWN, Warszawa.
- [28] FULLER C.R., ELLIOT S.J., NIELSEN P.A. (1997), *Active Control of Vibration*, Academic Press, London.
- [29] GONÇALVES J.F., DE LEON D.M., PERONDI E.A. (2017), Topology optimization of embedded piezoelectric actuators considering control spillover effects, *Journal of Sound and Vibration*, 388, pp. 20–41, doi: 10.1016/j.jsv.2016.11.001.
- [30] GOOD WILL INSTRUMENT CO., LTD., *Arbitrary Function Generator AFG-2225 User Manual*, <https://www.gwinstek.com/en-global/products/downloadSeriesDownNew/5250/430>.
- [31] GORMAN D.J. (1983), A highly accurate analytical solution for free vibration analysis of simply supported right triangular plates, *Journal of Sound and Vibration*, 89(1), pp. 107–118, doi: 10.1016/0022-460X(83)90914-8.
- [32] GORMAN D.J. (1999), *Vibration analysis of Plates by the Superposition Method*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.
- [33] GUPTA V., SHARMA M., THAKUR N. (2011), Mathematical modeling of actively controlled piezo smart structures: a review, *Smart Structures and Systems*, 8(3), pp. 275–302, doi: 10.12989/sss.2011.8.3.275.
- [34] HANSEN C.H., SNYDER S.D. (1997), *Active Control of Noise and Vibration*, E&FN SPON, London.
- [35] HER S.-C., CHEN H.-Y. (2020), Deformation of composite laminates induced by surface bonded and embedded piezoelectric actuators, *Materials*, 13(14), 3201, doi: 10.3390/ma13143201.
- [36] HU K.M., LI H. (2018), Multi-parameter optimization of piezoelectric actuators for multi-mode active vibration control of cylindrical shells, *Journal of Sound and Vibration*, 426, pp. 166–185, doi: 10.1016/j.jsv. 2018.04.021.
- [37] HUANG Z., MAO Y., DAI A., HAN M., WANG X., CHU F. (2022), Active Vibration Control of Piezoelectric Sandwich Plates, *Materials*, 15(11), 3907, doi:10.3390/ma15113907.

- [38] KALISKI S. (1986), *Drgania i fale*, PWN, Warszawa.
- [39] KHASAWNEH F.A., SEGALMAN D. (2019), Exact and numerically stable expressions for Euler-Bernoulli and Timoshenko beam modes, *Applied Acoustics*, 151, pp. 215–228, doi: 10.1016/j.apacoust.2019.03.015.
- [40] KOSZEWNIAK A. (2016), The optimal vibration control of the plate structure by using piezo-actuators, [in:] *17th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pp. 358–363, High Tatras, Slovakia, doi: 10.1109/CarpathianCC.2016.7501123.
- [41] KOSZEWNIAK A. (2017), The active vibration control of the plate structure by using LQG controller and piezo-strips, [in:] *22nd International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR)*, pp. 797–802, Miedzyzdroje, Poland, doi: 10.1109/MMAR.2017.8046930.
- [42] KOZIEŃ M.S. (2013), Analytical solutions of excited vibrations of a beam with application of distribution, *Acta Physica Polonica A*, 123(6), pp. 1029–1033, doi: 10.12693/APhysPolA.123.1029.
- [43] KOZIEŃ M.S. (2019), *Współczesne problemy mechaniki w ujęciu teorii dystrybucji*, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków, Poland.
- [44] KOZIEŃ M.S., ŚCISŁO Ł. (2015), Simulation of control algorithm for active reduction of transversal vibrations of beams by piezoelectric elements based on identification of bending moment, *Acta Physica Polonica A*, 128(1A): 56–61, doi: 10.12693/APhysPolA.128.A-56.
- [45] KURAS R. (2022), Influence of the PZT Actuator Asymmetry on the LQR Control Parameters in the Active Reduction Vibrations of Beams, *Vibrations in Physical Systems*, 33(3), doi: 10.21008/j.0860-6897.2022.3.05.
- [46] KURAS R., HAJDER S. (2024), Experimental validation of asymmetric PZT optimal shape in the active vibration reduction of triangular plates, *International Journal of Electronics and Telecommunications*, w druku.
- [47] LE S. (2009), *Active vibration control of a flexible beam*, Master's Thesis, Mechanical and Aerospace Engineering, San Jose State University, doi: 10.31979/etd.r8xgwaar.
- [48] LEISSA A.W. (1969), *Vibration of Plates*, Scientific and Technical Information Division NASA, Washington.
- [49] LENIOWSKA L., SIERŻĘGA M. (2019), Vibration control of a circular plate using parametric controller with phase shift adjustment, *Mechatronics*, 58, pp. 39–46, doi: 10.1016/j.mechatronics.2019.01.003.
- [50] LENIOWSKA L., MAZAN D. (2015), MFC Sensors and Actuators in Active Vibration Control of the Circular Plate, *Archives of Acoustics*, 40(2), pp. 257–265, doi: 10.1515/aoa-2015-0028.

- [51] MAJKUT L. (2010a), Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics. Part I: Theoretical formulation, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(4), pp. 423–436, doi: 10.1590/S1679-78252010000400004.
- [52] MAJKUT L. (2010b), Eigenvalue based inverse model of beam for structural modification and diagnostics: Examples of using, *Latin American Journal of Solids and Structures*, 7(4), pp. 437–456, doi: 10.1590/S1679-78252010000400005.
- [53] MANCINI R. (2016), Understanding Basic Analog — Ideal Op Amps, Application Report SLAA068A, Texas Instruments, <http://www.ti.com/lit/an/slaa068a/slaa068a.pdf>.
- [54] MAO Q., PIETRZKO S. (2013), *Control of Noise and Structural Vibration*, Springer, London, England.
- [55] MATERA M. (2019), *FastPID*, GitHub, <https://github.com/mike-matera/FastPID>.
- [56] MICRO-EPSILON MESSTECHNIK GMBH & CO.KG (2008), *Instruction Manual optoNCDT 22xx*, https://www.lagerwerk.com/media/pdf/bf/ee/ac/optoNCDT22XX_en.pdf.
- [57] MOHEIMANI S.O.R., FLEMING A.J. (2006), *Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping*, Springer-Verlag London Ltd., London, doi: 10.1007/1-84628-332-9.
- [58] MUTHALIF A.G.A., NOR K.A.M., WAHID A.N., ALI A. (2021), Optimization of Piezoelectric Sensor-Actuator for Plate Vibration Control Using Evolutionary Computation: Modeling, Simulation and Experimentation, *IEEE Access*, 9: 100725–100734, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3096972.
- [59] NATIONAL INSTRUMENTS CORP. (2009), *NI USB-621x User Manual*, <https://ni.com/manuals>.
- [60] NELSON C. (2021), *MCP3008 8-Channel 10-Bit ADC*, GitHub, https://github.com/adafruit/Adafruit_MCP3008.
- [61] OSIŃSKI Z. (1986), *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa, Polska.
- [62] PAVELKA V., SURANEK P., STRAMBERSKY R. (2021), Thin Plate Active Vibration Control, [in:] *22nd International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pp. 1–4, Velké Karlovice, Czech Republic, doi: 10.1109/ICCC51557.2021.9454648.
- [63] PIEZO SYSTEMS INC., *Piezo Linear Amplifier – Operating Manual*, <https://info.piezo.com/hubfs/Manuals/EPA104%20MANUAL.pdf>.
- [64] POWERSIM INC. (2020), *PSIM User’s Manual*. <https://www.powersimtech.com>.
- [65] PREUMONT A. (2011), *Vibration Control of Active Structures*, 3rd ed., Springer, Berlin, Germany.
- [66] QUARTERONI A. (2009), *Numerical Models for Differential Problems*, Springer-Verlag, Milan.

- [67] RAHMAN T.A.Z., DARUS I.Z.M. (2011), Experimental evaluation of Active Vibration Control of a flexible plate using proportional gain controller, [in:] *IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications*, pp. 382–386, Langkawi, Malaysia, doi: 10.1109/ISIEA.2011.6108736.
- [68] RAO S.S. (2007), *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey.
- [69] RAO S.S. (2011), *Mechanical Vibrations*, Pearson Prentice Hall, New Jersey, USA.
- [70] RZEPECKI J., CHRAPONSKA A., MAZUR K., WRONA S., PAWELCZYK M. (2019), Semi-active reduction of device casing vibration using a set of piezoelectric elements, [in:] *20th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, pp. 1–5, Kraków-Wieliczka, Poland.
- [71] SALIBA H.T. (1990), Transverse free vibration of simply supported right triangular thin plates: A highly accurate simplified solution, *Journal of Sound and Vibration*, 139(2), pp. 289–297, doi: 10.1016/0022-460X(90)90889-8.
- [72] SALIBA H.T. (1996), Free vibration of simply supported general triangular thin plates: An accurate simplified solution, *Journal of Sound and Vibration*, 196(1), pp. 45–57, doi: 10.1006/jsvi.1996.0466.
- [73] SUN Y., SONG Z., LI F. (2022), Theoretical and experimental studies of an effective active vibration control method based on the deflection shape theory and optimal algorithm, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 170, 108650, doi: 10.1016/j.ymssp.2021.108650.
- [74] SWANSON D., BLACK P., GIRONDIN V., BACHMEYER P., JOLLY M. (2015), Active vibration control using circular force generators, [in:] *41st European Rotorcraft Forum*, pp. 627–637, Munich, Germany.
- [75] TEXAS INSTRUMENTS INC. (2015), *NE5532x, SA5532x Dual Low-Noise Operational Amplifiers*, <https://www.ti.com/lit/gpn/NE5532A>.
- [76] THE MATHWORKS INC. (2022). MATLAB version: 9.13.0 (R2022b), Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. <https://www.mathworks.com>.
- [77] TIMOSZENKO S., WOJNOWSKY-KRIEGER S. (1962), *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa.
- [78] TROJANOWSKI R., WICIAK J. (2019), Numerical Analyses of the Effectiveness of an Integrated Disc Based Piezoelectric Sensor-Actuator, *Vibrations in Physical Systems*, 30(1), 2019142.
- [79] TROJANOWSKI R., WICIAK J. (2020), Impact of the size of the sensor part on sensor-actuator efficiency, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 58(2), pp. 391–401, doi: 10.15632/jtam-pl/118948.
- [80] TROJANOWSKI R., WICIAK J. (2022), Piezoelectric Square Based Sensor-actuator Hybrid in Vibration Reduction, *Vibrations in Physical Systems*, 33(3), 2022303, doi: 10.21008/j.0860-6897.2022.3.03.

- [81] UCHINO K. (2017), The Development of Piezoelectric Materials and the New Perspective, [in:] *Advanced Piezoelectric Materials (Second Edition)*, Uchino K. [Ed.], pp. 1-92, Woodhead Publishing, doi: 10.1016/B978-0-08-102135-4.00001-1.
- [82] WANG W. (2003), *Electrode shape optimization of piezoelectric transducers*, Ph.D. Thesis, University of Florida.
- [83] WANG J., SHEPARD JR W.W., KEITH A., WILLIAMS K.A., GATTIS C.B. (2006), Active vibration control of a plate-like structure with discontinuous boundary conditions, *Smart Materials and Structures*, 15(51), doi: 10.1088/0964-1726/15/3/N01.
- [84] WICIAK J., TROJANOWSKI R. (2014), The Effect of Material Composition of Piezoelectric Elements with Chosen Shapes on Plate Vibration Reduction, *Acta Physica Polonica A*, 125(4-A), pp. 179–182, doi: 10.12693/APhysPolA.125.A-179.
- [85] WRONA S. (2022), Performance Analysis of Active Structural Acoustic Control Applied to a Washing Machine, *Sensors*, 22(19), 7357, doi: 10.3390/s22197357.
- [86] WRONA S., PAWEŁCZYK M. (2013), Controllability-Oriented Placement of Actuators for Active Noise-Vibration Control of Rectangular Plates Using a Memetic Algorithm, *Archives of Acoustics*, 38(4), pp. 529-536, doi: 10.2478/aoa-2013-0062.
- [87] WRONA S., PAWEŁCZYK M., CHEER J. (2021), Acoustic radiation-based optimization of the placement of actuators for active control of noise transmitted through plates, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 147, 107009, doi: 10.1016/j.ymsp.2020.107009.
- [88] WRONA S., PAWEŁCZYK M., CHENG L. (2021), Semi-active links in double-panel noise barriers, *Mechanical Systems and Signal Processing*, 154, 107542, doi: 10.1016/j.ymsp.2020.107542.
- [89] WRONA S., PAWEŁCZYK M., CHENG L. (2022)., Sound transmission through a panel with a hybrid active and semi-active control system, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 536, 117172, doi: 10.1016/j.jsv.2022.117172.
- [90] WRONA S., PAWEŁCZYK M., QIU X. (2020), Shaping the acoustic radiation of a vibrating plate, *Journal of Sound and Vibration*, 476, 115285, doi: /10.1016/j.jsv.2020.115285.
- [91] YASSIN B., LAHCEN A., ZERIAB E. (2018), Hybrid optimization procedure applied to optimal location finding for piezoelectric actuators and sensors for active vibration control, *Applied Mathematical Modelling*, 62, pp. 701–716, doi: 10.1016/j.apm.2018.06.017.
- [92] YU S. (2012), Dedicated to Daniel Joseph Gorman (1930–2011), *Computers & Structures*, 104-105, p. 1, doi: 10.1016/j.compstruc.2012.05.005.
- [93] ZHANG S.Q., SCHMIDT R. (2012), LQR control for vibration suppression of piezoelectric integrated smart structures, *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 12(1): 695–696, doi: 10.1002/pamm. 201210336.

-
- [94] ZHANG X., TAKEZAWA A., KANG Z. (2018), Topology optimization of piezoelectric smart structures for minimum energy consumption under active control, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 58, pp. 185–199, doi: 10.1007/s00158-017-1886-y.
- [95] ZORIĆ N.D., TOMOVIĆ A.M., OBRADOVIĆ A.M., RADULOVIĆ R.D., PETROVIĆ G.R. (2019), Active vibration control of smart composite plates using optimized self-tuning fuzzy logic controller with optimization of placement, sizing and orientation of PFRC actuators, *Journal of Sound and Vibration*, 456, pp. 173–198, doi: 10.1016/j.jsv.2019.05.035.
- [96] ŻOŁOPA E., BRAŃSKI A. (2014a), Comparison of Formulas Obtained for Analytical and LQ Idea Approaches to Determine the Optimal Actuator Location in Active Multimodal Beam Vibration Reduction, *Archives of Acoustics*, 39(4), pp. 599-603, doi: <https://doi.org/10.2478/aoa-2014-0064>.
- [97] ŻOŁOPA E., BRAŃSKI A. (2014b), Analytical Determination of Optimal Actuators Position for Single Mode Active Reduction of Fixed-free Beam Vibration Using the Linear Quadratic Problem Idea, *Acta Physica Polonica A*, 125(4-A), DOI: <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.125.A-155>.

Dodatek A

Postacie drgań własnych dla belki

Skrypt obliczający częstości drgań własnych belki z masą punktową oraz przedstawiający postacie drgań własnych

```
1 clear all
2 close all
3
4
5 %% Dane do pełnego przekroju prostopadłościennego
6
7 L = 1; % długość belki, m
8 X_M = 0.39 * L; % współrzędna masy punktowej dla
   pierwszego modu
9 M = 0.3; % waga masy punktowej
10 E = 69 * 10^9; % moduł Younga dla aluminium, Pa
11 ro = 2700; % gęstość aluminium, kg/m^3
12 b1 = 50 * 10^(-3); % szerokość belki, m
13 h11 = 5 * 10^(-3); % grubość belki, m
14 A = b1 * h11; % pole przekroju poprzecznego, m^2
15 I = b1 * h11^3 / 12; % geometryczny moment bezwładności, m^4
16
17 %% równanie wiekowe
18 N = 20;
19 beta_x = 0:0.001:70;
20
21 z = zeros(N,1);
22 x0 = 1;
23 z(1) = fzero(@(beta_x) fun(beta_x, M, L, X_M, ro, A),x0);
24
25 for ii=2:N
26
27     x0 = ii;
28     z(ii) = fzero(@(beta_x) fun(beta_x, M, L, X_M, ro, A),x0);
29
30     if floor(z(ii-1)/0.1) ~= floor(z(ii)/0.1)
31         a(ii) = z(ii);
32     end
33
```

```

34 end
35 b = unique(a);
36 z = [z(1) b(2:end)]';
37
38 beta = z;
39
40 omega.rad = sqrt(beta.^4 * E * I / (ro * A)); % czestosc, rad/s
41 omega.hz = omega.rad * 1 / (2 * pi); % czestosc, Hz
42
43 %% wykresy
44
45 krok = 0.001;
46 x = 0:krok:L;
47 NOfMods = 1:5;
48 figure
49 hold on
50 for ii=1:length(NOfMods)
51
52     a11 = 1;
53     a12 = 0;
54     a13 = 1;
55     a14 = 0;
56     a15 = 0;
57
58     a21 = beta(ii)^2;
59     a22 = 0;
60     a23 = -beta(ii)^2;
61     a24 = 0;
62     a25 = 0;
63
64     a31 = cosh(beta(ii)*L);
65     a32 = sinh(beta(ii)*L);
66     a33 = cos(beta(ii)*L);
67     a34 = sin(beta(ii)*L);
68     a35 = (beta(ii) * M) / (2 * ro * A) * (sinh(beta(ii)*(L-X_M))
69     ... - sin(beta(ii)*(L-X_M)));
70
71     a41 = beta(ii)^2*cosh(beta(ii)*L);
72     a42 = beta(ii)^2*sinh(beta(ii)*L);
73     a43 = -beta(ii)^2*cos(beta(ii)*L);
74     a44 = -beta(ii)^2*sin(beta(ii)*L);
75     a45 = (beta(ii)^3 * M) / (2 * ro * A) * (sinh(beta(ii)*(L-X_M)
76     ) ... + sin(beta(ii)*(L-X_M)));
77
78     a51 = cosh(beta(ii)*X_M);
79     a52 = sinh(beta(ii)*X_M);
80     a53 = cos(beta(ii)*X_M);
81     a54 = sin(beta(ii)*X_M);
82     a55 = -1;
83
84     A_matrix = [a11 a12 a13 a14 a15;
85                 a21 a22 a23 a24 a25;
86                 a31 a32 a33 a34 a35;
87                 a41 a42 a42 a44 a45;
88                 a51 a52 a53 a54 a55];
89
90     CC = null(A_matrix);
91
92     W = CC(1) * cosh(beta(ii)*x) + ...
93     CC(2) * sinh(beta(ii)*x) + ...
94     CC(3) * cos(beta(ii)*x) + ...
95     CC(4) * sin(beta(ii)*x) + ...

```

```
96     CC(5) * (beta(ii) * M) / (2 * ro * A) * ...
97     (sinh(beta(ii)*(x-X_M)) - sin(beta(ii)*(x-X_M))) .* heaviside(
98     x-X_M);
99     plot(x, W, 'LineWidth', 1.5)
100 end
101 set(gcf, 'Color', 'w');
102 xlabel = xlabel('$x$');
103 ylabel = ylabel('$X_{\epsilon}$');
104 set(xlabel, 'Interpreter', 'latex');
105 set(ylabel, 'Interpreter', 'latex');
106 legend('mod 1', 'mod 2', 'mod 3', 'mod 4', 'mod 5')
```

Listing A.1 Postacie drgań własnych belki z masą punktową.

Dodatek B

Częstości drgań własnych dla płyty

Skrypt obliczający częstości drgań własnych płyty trójkątnej

```
1 clear all
2 close all
3
4 %% Dane
5 v_P = 0.33;           % liczba Poissona, [-]
6 a = 1;               % wymiar plyty, m
7 b = 1;               % wymiar plyty, m
8
9 PHI = b / a;
10
11 d_przeciwp = sqrt(a^2 + b^2);
12 wys = a * b / d_przeciwp;
13 alfa = atan(a/b);
14
15 % Wartości teta_1, teta_2, teta_3
16 teta_1 = cos(alfa)^2 + v_P * sin(alfa)^2;
17 teta_2 = sin(alfa)^2 + v_P * cos(alfa)^2;
18 teta_3 = (1 - v_P) * sin(2*alfa);
19
20 %%%%%%%%%%%
21 % lambda = 4.442882 i wielokrotnosci - false root %
22 %%%%%%%%%%%
23 %% dane wejsciowe algorytmu
24 BEGIN = 1;
25 DLIM = 20;
26 STEP = 0.00001;
27 lambda = BEGIN:STEP:DLIM;
28 DET_A = zeros(length(lambda), 2);
29 DDDLIM=1;
30
31 k = 6;
32 m = k;
33 n = k;
34
35 Aij = zeros(n,m);
36 Aikj = zeros(n,m);
37 Aijk = zeros(n,m);
```

```

38 Aikjk = zeros(n,m);
39
40 for dd=BEGIN:STEP:DLIM
41     lambda = dd;
42     for mm=1:m
43         beta_m = PHI * sqrt(lambda^2 + (mm * pi)^2);
44         if lambda^2 < (mm * pi)^2
45             gamma_m = PHI * sqrt((mm * pi)^2 - lambda^2);
46         else
47             gamma_m = PHI * sqrt(lambda^2 - (mm * pi)^2);
48         end
49         % Wartości teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku
50         1 - BB1
51         teta_1m_BB1 = (beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) * ...
52         sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 + v_P * PHI^2 * (mm * pi)
53         ^2) * ...
54         sin(gamma_m));
55         teta_2m_BB1 = -(beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) *
56         ...
57         sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)
58         ^2) * ...
59         sinh(gamma_m));
60         teta_11m_BB1 = 1 / (sinh(beta_m) + teta_1m_BB1 * ...
61         sin(gamma_m));
62         teta_22m_BB1 = 1 / (sinh(beta_m) + teta_2m_BB1 * ...
63         sinh(gamma_m));
64         % Wartości teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku
65         2 - BB2
66         teta_1m_BB2 = -sinh(beta_m) / sin(gamma_m);
67         teta_2m_BB2 = -sinh(beta_m) / sinh(gamma_m);
68         teta_11m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) - ...
69         teta_1m_BB2 * gamma_m^2 * sin(gamma_m));
70         teta_22m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) + ...
71         teta_2m_BB2 * gamma_m^2 * sinh(gamma_m));
72         for nn=1:n
73             % Wyrażenia składające się na całki I, II, III
74             EX1 = beta_m * (cosh(beta_m) - ...
75             cos(mm * pi - nn * pi)) / ...
76             (beta_m^2 + (mm * pi - nn * pi)^2);
77             EX2 = beta_m * (cos(mm * pi + nn * pi) - ...
78             cosh(beta_m)) / ...
79             (beta_m^2 + (mm * pi + nn * pi)^2);
80             if gamma_m^2 - (mm * pi - nn * pi)^2 == 0
81                 EX3 = sin(gamma_m)/2 ;
82             else
83                 EX3 = gamma_m * (cos(mm * pi - nn * pi) - ...
84                 cos(gamma_m)) / ...
85                 (gamma_m^2 - (mm * pi - nn * pi)^2);
86             end
87             if gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2 == 0
88                 EX4 = -sin(gamma_m)/2 ;
89             else
90                 EX4 = gamma_m * (cos(gamma_m) - ...
91                 cos(mm * pi + nn * pi)) / ...
92                 (gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2);
93             end
94             EX5 = gamma_m * (cosh(gamma_m) - ...
95             cos(mm * pi - nn * pi)) / ...
96             (gamma_m^2 + (mm * pi - nn * pi)^2);
97             EX6 = gamma_m * (cos(mm * pi + nn * pi) - ...
98             cosh(gamma_m)) / ...
99             (gamma_m^2 + (mm * pi + nn * pi)^2);

```

```

96     % Obliczanie Y
97     Y1 = (mm * pi + nn * pi) * (cosh(beta_m) - ...
98         cos(mm * pi + nn * pi)) / (beta_m^2 + ...
99         (mm * pi + nn * pi)^2);
100     Y2 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(mm * pi - nn * pi) -
...
101         cosh(beta_m) / (beta_m^2 + ...
102         (mm * pi - nn * pi)^2);
103     if gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2 == 0
104         Y3 = sin(gamma_m) / 2;
105     else
106         Y3 = (mm * pi + nn * pi) * (cos(gamma_m) - ...
107         cos(mm * pi + nn * pi)) / ((mm * pi + nn * pi)
^2 - ...
108         gamma_m^2);
109     end
110     if gamma_m - (mm * pi - nn * pi) == 0
111         Y4 = -sin(gamma_m) / 2 ;
112     elseif gamma_m + (mm * pi - nn * pi) == 0
113         Y4 = sin(gamma_m) / 2;
114     else
115         Y4 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(gamma_m) - ...
116         cos(mm * pi - nn * pi)) / (gamma_m
^2 - ...
117         (mm * pi - nn * pi)^2);
118     end
119     Y5 = (mm * pi + nn * pi) * (cosh(gamma_m) - ...
120         cos(mm * pi + nn * pi)) / (gamma_m^2 + ...
121         (mm * pi + nn * pi)^2);
122     Y6 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(mm * pi - nn * pi) -
...
123         cosh(gamma_m) / (gamma_m^2 + ...
124         (mm * pi - nn * pi)^2);
125
126     % wspolczynniki A1n, A2n, A3n dla BB1
127     if lambda^2 < (mm * pi)^2
128         A1n_BB1 = -teta_22m_BB1 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2 +
...
129             teta_2m_BB1 * (EX5 + EX6));
130
131         A2n_BB1 = teta_22m_BB1 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) + ...
132             teta_2m_BB1 * gamma_m^2 * (EX5 + EX6));
133
134         A3n_BB1 = teta_22m_BB1 * (mm * pi) * (beta_m * ...
135             (Y1 + Y2) + teta_2m_BB1 * gamma_m * ...
136             (Y5 + Y6));
137     else
138         A1n_BB1 = -teta_11m_BB1 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2 +
...
139             teta_1m_BB1 * (EX3 + EX4));
140
141         A2n_BB1 = teta_11m_BB1 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) - ...
142             teta_1m_BB1 * gamma_m^2 * (EX3 + EX4));
143
144         A3n_BB1 = teta_11m_BB1 * (mm * pi) * (beta_m * ...
145             (Y1 + Y2) + teta_1m_BB1 * gamma_m * ...
146             (Y3 + Y4));
147     end
148
149     % wspolczynniki A1n, A2n, A3n dla BB2
150     if lambda^2 < (mm * pi)^2
151         A1n_BB2 = -teta_22m_BB2 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2 +
...
152             teta_2m_BB2 * (EX5 + EX6));

```

```

153     A2n_BB2 = teta_22m_BB2 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) + ...
154             teta_2m_BB2 * gamma_m^2 * (EX5 + EX6));
155
156     A3n_BB2 = teta_22m_BB2 * (mm * pi) * (beta_m * ...
157             (Y1 + Y2) + teta_2m_BB2 * gamma_m * ...
158             (Y5 + Y6));
159
160     else
161     A1n_BB2 = -teta_11m_BB2 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2 +
162     ...
163             teta_1m_BB2 * (EX3 + EX4));
164
165     A2n_BB2 = teta_11m_BB2 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) - ...
166             teta_1m_BB2 * gamma_m^2 * (EX3 + EX4));
167
168     A3n_BB2 = teta_11m_BB2 * (mm * pi) * (beta_m * ...
169             (Y1 + Y2) + teta_1m_BB2 * gamma_m * ...
170             (Y3 + Y4));
171     end
172     % obliczanie macierzy A
173     if lambda^2 < (mm * pi)^2
174         Aij(nn,mm) = teta_22m_BB1 * (EX1 + EX2 + ...
175             teta_2m_BB1 * (EX5 + EX6));
176     else
177         Aij(nn,mm) = teta_11m_BB1 * (EX1 + EX2 + ...
178             teta_1m_BB1 * (EX3 + EX4));
179     end
180     Aikj(nn,mm) = - (teta_1 * PHI^2 * A1n_BB1 + ...
181             teta_2 * A2n_BB1 + ...
182             teta_3 * PHI * A3n_BB1);
183     if lambda^2 < (mm * pi)^2
184         Aijk(nn,mm) = teta_22m_BB2 * (EX1 + EX2 + ...
185             teta_2m_BB2 * (EX5 + EX6));
186     else
187         Aijk(nn,mm) = teta_11m_BB2 * (EX1 + EX2 + ...
188             teta_1m_BB2 * (EX3 + EX4));
189     end
190     Aikjk(nn,mm) = - (teta_1 * PHI^2 * A1n_BB2 + ...
191             teta_2 * A2n_BB2 + ...
192             teta_3 * PHI * A3n_BB2);
193     end
194 end
195
196 % Obliczanie wyznacznika
197 A = [Aij Aijk ; Aikj Aikjk];
198 DET_A(DDDLIM,1) = det(A);
199 DET_A(DDDLIM,2) = dd;
200 DDDLIM=DDDLIM+1;
201 end
202 figure
203 plot(DET_A(:,2),DET_A(:,1),'-o')
204 set(gca,'YScale','log');
205

```

Listing B.1 Częstości drgań własnych płyty trójkątnej.

Dodatek C

Postacie drgań własnych dla płyty

Skrypt obliczający postacie drgań własnych płyty trójkątnej

```
1 clear all
2 close all
3 %% DANE WEJSCIOWE
4 % stal 1.4301 (X5CrNi18-10)
5 ro = 7900; % gestosc, kg/m^3
6 E = 193*10^9; % modul Younga, Pa
7 v_P = 0.33; % liczba Poissona, [-]
8 h = 0.001; % grubosc plyty, m
9 Di = E * h^3 / (12 * (1 - v_P^2)); % sztywnosc plytowa, Pa m^4
10
11 a = 1; % wymiar plyty, m
12 b = 1; % wymiar plyty, m
13
14 PHI = b / a;
15
16 lambda = 7.024815; % eigenvalue #1 49.348025784225
17 % lambda = 9.934589; % eigenvalue #2 98.696058598921
18 % lambda = 11.327173; % eigenvalue #3 128.304848171929
19 % lambda = 12.953119; % eigenvalue #4 167.783291828161
20 % lambda = 14.049630; % eigenvalue #5 197.392103136900
21 % lambda = 15.707963; % eigenvalue #6 246.740101609369
22 % lambda = 16.019043; % eigenvalue #7 256.609738635849
23 % lambda = 16.917994; % eigenvalue #8 286.218520984036
24
25 %%
26 krok = 0.001;
27 omega = lambda^2 / a^2 * sqrt(Di/ro/h); % omega w radianach
28 omega_HZ = omega * 1/(2*pi); % omega w Hz
29
30 d_przeciwp = sqrt(a^2 + b^2);
31 Pole = a * b / 2;
32 wys = a * b / d_przeciwp;
33 alfa = atan(b/a);
34
35 % Wartosci teta_1, teta_2, teta_3
36 teta_1 = cos(alfa)^2 + v_P * sin(alfa)^2;
37 teta_2 = sin(alfa)^2 + v_P * cos(alfa)^2;
```

```

38 teta_3 = (1 - v_P) * sin(2*alfa);
39
40
41 DET_A = zeros(length(lambda), 2);
42 k = 6;
43 m = k;
44 n = k;
45 Aij = zeros(n, m);
46 Aikj = zeros(n, m);
47 Aijk = zeros(n, m);
48 Aikjk = zeros(n, m);
49
50 %% bloki BB1 i BB2
51 for mm=1:m
52
53     beta_m = PHI * sqrt(lambda^2 + (mm * pi)^2);
54     gamma_m = PHI * sqrt(lambda^2 - (mm * pi)^2);
55
56     if abs(imag(gamma_m)) > 0
57         gamma_m = PHI * sqrt((mm * pi)^2 - lambda^2);
58     end
59
60 % Wartosci teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku 1 - BB1
61 teta_1m_BB1 = (beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) * ...
62     sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 + v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) *
63     ...
64     sin(gamma_m));
65
66 teta_2m_BB1 = -(beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) * ...
67     sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) *
68     ...
69     sinh(gamma_m));
70
71 teta_11m_BB1 = 1/(sinh(beta_m) + teta_1m_BB1 * ...
72     sin(gamma_m));
73
74 teta_22m_BB1 = 1/(sinh(beta_m) + teta_2m_BB1 * ...
75     sinh(gamma_m));
76
77 % Wartosci teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku 2 - BB2
78 teta_1m_BB2 = -sinh(beta_m) / sin(gamma_m);
79
80 teta_2m_BB2 = -sinh(beta_m) / sinh(gamma_m);
81
82 teta_11m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) - ...
83     teta_1m_BB2 * gamma_m^2 * sin(gamma_m));
84
85 teta_22m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) + ...
86     teta_2m_BB2 * gamma_m^2 * sinh(gamma_m));
87
88 for nn=1:n
89     % Wyrazenia skladajace sie na calki I, II, III
90     EX1 = beta_m * (cosh(beta_m) - ...
91         cos(mm * pi - nn * pi)) / ...
92         (beta_m^2 + (mm * pi - nn * pi)^2);
93     EX2 = beta_m * (cos(mm * pi + nn * pi) - ...
94         cosh(beta_m)) / ...
95         (beta_m^2 + (mm * pi + nn * pi)^2);
96     if gamma_m^2 - (mm * pi - nn * pi)^2 == 0
97         EX3 = sin(gamma_m)/2;
98     else
99         EX3 = gamma_m * (cos(mm * pi - nn * pi) - ...
100             cos(gamma_m)) / ...
101             (gamma_m^2 - (mm * pi - nn * pi)^2);

```

```

100     end
101     if gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2 == 0
102         EX4 = -sin(gamma_m)/2 ;
103     else
104         EX4 = gamma_m * (cos(gamma_m) - ...
105             cos(mm * pi + nn * pi)) / ...
106             (gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2);
107     end
108     EX5 = gamma_m * (cosh(gamma_m) - ...
109         cos(mm * pi - nn * pi)) / ...
110         (gamma_m^2 + (mm * pi - nn * pi)^2);
111     EX6 = gamma_m * (cos(mm * pi + nn * pi) - ...
112         cosh(gamma_m)) / ...
113         (gamma_m^2 + (mm * pi + nn * pi)^2);
114
115     % Obliczanie Y
116     Y1 = (mm * pi + nn * pi) * (cosh(beta_m) - ...
117         cos(mm * pi + nn * pi)) / (beta_m^2 + ...
118         (mm * pi + nn * pi)^2);
119     Y2 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(mm * pi - nn * pi) - ...
120         cosh(beta_m)) / (beta_m^2 + ...
121         (mm * pi - nn * pi)^2);
122     if gamma_m^2 - (mm * pi + nn * pi)^2 == 0
123         Y3 = sin(gamma_m) / 2;
124     else
125         Y3 = (mm * pi + nn * pi) * (cos(gamma_m) - ...
126             cos(mm * pi + nn * pi)) / ((mm * pi + nn * pi)^2
127 - ...
128             gamma_m^2);
129     end
130     if gamma_m - (mm * pi - nn * pi) == 0
131         Y4 = -sin(gamma_m) / 2 ;
132     elseif gamma_m + (mm * pi - nn * pi) == 0
133         Y4 = sin(gamma_m) / 2;
134     else
135         Y4 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(gamma_m) - ...
136             cos(mm * pi - nn * pi)) / (gamma_m^2 -
137 - ...
138             (mm * pi - nn * pi)^2);
139     end
140     Y5 = (mm * pi + nn * pi) * (cosh(gamma_m) - ...
141         cos(mm * pi + nn * pi)) / (gamma_m^2 + ...
142         (mm * pi + nn * pi)^2);
143     Y6 = (mm * pi - nn * pi) * (cos(mm * pi - nn * pi) - ...
144         cosh(gamma_m)) / (gamma_m^2 + ...
145         (mm * pi - nn * pi)^2);
146     % wspolczynniki A1n, A2n, A3n dla BB1
147     if lambda^2 < (mm * pi)^2
148         A1n_BB1 = -teta_22m_BB1 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2
149 + ...
150         teta_2m_BB1 * (EX5 + EX6));
151         A2n_BB1 = teta_22m_BB1 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) +
152 - ...
153         teta_2m_BB1 * gamma_m^2 * (EX5 + EX6));
154         A3n_BB1 = teta_22m_BB1 * (mm * pi) * (beta_m * ...
155         (Y1 + Y2) + teta_2m_BB1 * gamma_m * ...
156         (Y5 + Y6));
157     else
158         A1n_BB1 = -teta_11m_BB1 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2
159 + ...
160         teta_1m_BB1 * (EX3 + EX4));

```

```

157         A2n_BB1 = teta_11m_BB1 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) -
...
158             teta_1m_BB1 * gamma_m^2 * (EX3 + EX4));
159
160         A3n_BB1 = teta_11m_BB1 * (mm * pi) * (beta_m * ...
161             (Y1 + Y2) + teta_1m_BB1 * gamma_m * ...
162             (Y3 + Y4));
163     end
164
165     % współczynniki A1n, A2n, A3n dla BB2
166     if lambda^2 < (mm * pi)^2
167
168         A1n_BB2 = -teta_22m_BB2 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2
+ ...
169             teta_2m_BB2 * (EX5 + EX6));
170
171         A2n_BB2 = teta_22m_BB2 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) +
...
172             teta_2m_BB2 * gamma_m^2 * (EX5 + EX6));
173
174         A3n_BB2 = teta_22m_BB2 * (mm * pi) * (beta_m * ...
175             (Y1 + Y2) + teta_2m_BB2 * gamma_m * ...
176             (Y5 + Y6));
177     else
178
179         A1n_BB2 = -teta_11m_BB2 * (mm * pi)^2 * (EX1 + EX2
+ ...
180             teta_1m_BB2 * (EX3 + EX4));
181
182         A2n_BB2 = teta_11m_BB2 * (beta_m^2 * (EX1 + EX2) -
...
183             teta_1m_BB2 * gamma_m^2 * (EX3 + EX4));
184
185         A3n_BB2 = teta_11m_BB2 * (mm * pi) * (beta_m * ...
186             (Y1 + Y2) + teta_1m_BB2 * gamma_m * ...
187             (Y3 + Y4));
188
189     end
190     % obliczanie macierzy A
191     if lambda^2 < (mm * pi)^2
192         Aij(nn,mm) = teta_22m_BB1 * (EX1 + EX2 + ...
193             teta_2m_BB1 * (EX5 + EX6));
194     else
195         Aij(nn,mm) = teta_11m_BB1 * (EX1 + EX2 + ...
196             teta_1m_BB1 * (EX3 + EX4));
197     end
198     Aikj(nn,mm) = - (teta_1 * PHI^2 * A1n_BB1 + ...
199         teta_2 * A2n_BB1 + ...
200         teta_3 * PHI * A3n_BB1);
201     if lambda^2 < (mm * pi)^2
202         Aijk(nn,mm) = teta_22m_BB2 * (EX1 + EX2 + ...
203             teta_2m_BB2 * (EX5 + EX6));
204     else
205         Aijk(nn,mm) = teta_11m_BB2 * (EX1 + EX2 + ...
206             teta_1m_BB2 * (EX3 + EX4));
207     end
208     Aikjk(nn,mm) = - (teta_1 * PHI^2 * A1n_BB2 + ...
209         teta_2 * A2n_BB2 + ...
210         teta_3 * PHI * A3n_BB2);
211 end
212 end
213 %% Obliczanie stalych całkowania
214
215 A = [Aij Aijk ; Aikj Aikjk];

```



```

216
217 [U S V] = svd(A, 0);
218 Es = V(:, end);
219
220 Es_coeff = 1/Es(1);
221 Es = Es*(1/Es(1));
222
223
224 %% rysowanie wykresow
225 A_triangle = [0, 0];           % punkt 1
226 B_triangle = [b, 0];         % punkt 2
227 D_triangle = [0, a];         % punkt 3
228
229 f = @(KSI, ETA) 0*KSI+0*ETA;
230
231 xv = [A_triangle(1) B_triangle(1) D_triangle(1) A_triangle(1)];
232 yv = [A_triangle(2) B_triangle(2) D_triangle(2) A_triangle(2)];
233
234 ksi1 = A_triangle(1):krok:B_triangle(1);
235 eta1 = A_triangle(2):krok:D_triangle(2);
236
237 [ksi, eta] = meshgrid(ksi1, eta1);
238 maska = inpolygon(ksi, eta, xv, yv);
239 Z_xy = f(ksi, eta);
240 Zpoly_xy = Z_xy;
241 Zpoly_xy(~maska) = NaN;
242
243 w1 = zeros(length(eta1), length(ksi1));
244 w2 = zeros(length(eta1), length(ksi1));
245
246 % ===== BB1
247
248 for mm=1:m
249     beta_m = PHI * sqrt(lambda^2 + (mm * pi)^2);
250     gamma_m = PHI * sqrt(lambda^2 - (mm * pi)^2);
251     if imag(gamma_m) > 0
252         gamma_m = PHI * sqrt((mm * pi)^2 - lambda^2);
253     end
254 % Wartości teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku 1 - BB1
255     teta_1m_BB1 = (beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) * ...
256     sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 + v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) *
257     ...
258     sin(gamma_m));
259     teta_2m_BB1 = -(beta_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) * ...
260     sinh(beta_m) / ((gamma_m^2 - v_P * PHI^2 * (mm * pi)^2) *
261     ...
262     sinh(gamma_m));
263     teta_11m_BB1 = 1/(sinh(beta_m) + teta_1m_BB1 * ...
264     sin(gamma_m));
265     teta_22m_BB1 = 1/(sinh(beta_m) + teta_2m_BB1 * ...
266     sinh(gamma_m));
267     if (lambda^2 < (mm * pi)^2)
268         w11 = Es(mm) * teta_22m_BB1 * (sinh(beta_m*eta) + ...
269         teta_2m_BB1 * sinh(gamma_m*eta)) .* sin(mm*pi*ksi);
270     ;
271     else
272         w11 = Es(mm) * teta_11m_BB1 * (sinh(beta_m*eta) + ...
273         teta_1m_BB1 * sin(gamma_m*eta)) .* sin(mm*pi*ksi);
274     end
275     w1 = w1 + w11;
276 end
277
278 % ===== BB2
279 for mm=1:m
280     beta_m = PHI * sqrt(lambda^2 + (mm * pi)^2);

```

```

277     gamma_m = PHI * sqrt(lambda^2 - (mm * pi)^2);
278     if imag(gamma_m) > 0
279         gamma_m = PHI * sqrt((mm * pi)^2 - lambda^2);
280     end
281 % Wartości teta_1m, teta_2m, teta_11m, teta_22m dla bloku 2 - BB2
282     teta_1m_BB2 = -sinh(beta_m) / sin(gamma_m);
283     teta_2m_BB2 = -sinh(beta_m) / sinh(gamma_m);
284     teta_11m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) - ...
285         teta_1m_BB2 * gamma_m^2 * sin(gamma_m));
286     teta_22m_BB2 = -1/(beta_m^2 * sinh(beta_m) + ...
287         teta_2m_BB2 * gamma_m^2 * sinh(gamma_m));
288     if (lambda^2 < (mm * pi)^2)
289         w22 = Es(mm+6) * teta_22m_BB2 * (sinh(beta_m*eta) +
290     ...
291             teta_2m_BB2 * sinh(gamma_m*eta)) .* sin(mm*pi*ksi)
292     ;
293     else
294         w22 = Es(mm+6) * teta_11m_BB2 * (sinh(beta_m*eta) +
295     ...
296             teta_1m_BB2 * sin(gamma_m*eta)) .* sin(mm*pi*ksi);
297     end
298     w2 = w2 + w22;
299 end
300 w1_calka = w1;
301 w2_calka = w2;
302 w1(~maska) = NaN;
303 w2(~maska) = NaN;
304 w1_calka(~maska) = 0;
305 w2_calka(~maska) = 0;
306 WSP_calka = w1_calka + w2_calka;
307
308 %% superpozycja plyt BB1 i BB2
309 NOOfContourPlots = 15;
310 WSP = w1 + w2;
311 figure
312 surf(ksi, eta, WSP)
313 shading interp
314
315 figure
316 contourf(ksi, eta, WSP, 30)
317

```

Listing C.1 Postacie drgań własnych płyty trójkątnej.