



**POLITECHNIKA  
RZESZOWSKA**  
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA



**WYDZIAŁ  
BUDOWY MASZYN  
I LOTNICTWA**  
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

# **Sterowanie pozycyjno-siłowe robotem przemysłowym w warunkach niepewności więzów**

Autor: **mgr inż. Paweł Obal**

Promotor: **dr hab. inż. Piotr Gierlak, prof. uczelni**

Promotor pomocniczy: **dr hab. inż. Dariusz Szybicki, prof. uczelni**

**Rzeszów 2025**



*Składam serdeczne podziękowania:*  
*promotorowi dr. hab. inż. Piotrowi Gierlakowi, prof. uczelni*  
*oraz promotorowi pomocniczemu dr. hab. inż. Dariuszowi Szybickiemu, prof. uczelni*  
*za liczne dyskusje, rady i wskazówki dotyczące pracy,*  
*rodzinie i znajomym za okazane wsparcie,*  
*w szczególności Natalii, Piotrowi, Joannie, Dominikowi, Wojciechowi i Jakubowi.*





## Spis treści

Wykaz ważniejszych oznaczeń .....	7
1. Wstęp .....	11
2. Przegląd literatury .....	13
3. Motywacja, cel i zakres pracy .....	27
3.1. Motywacja pracy .....	27
3.2. Cel pracy .....	28
3.3. Zakres pracy .....	29
3.4. Oryginalne elementy pracy .....	30
4. Budowa stanowiska badawczego .....	31
5. Model matematyczny robota ABB IRB 2400 .....	36
5.1. Kinematyka robota .....	36
5.2. Jakobian manipulatora .....	46
5.3. Dynamiczne równania ruchu robota – formalizm Eulera-Lagrange’a .....	50
5.4. Dynamiczne równania ruchu robota – formalizm Newtona-Eulera .....	60
5.5. Parametry fizyczne modelu .....	65
6. Sterowanie pozycyjno-siłowe z uwzględnieniem niepewności więzów .....	73
6.1. Sterowanie w przestrzeni zadaniowej .....	73
6.2. Właściwości strukturalne modelu matematycznego .....	79
6.3. Projektowanie układu sterowania .....	80
6.4. Stabilność układu sterowania .....	84
7. Badania symulacyjne .....	87
8. Badania eksperymentalne .....	104
8.1. Test nr 1 – sterowanie pozycyjno-siłowe z uwzględnieniem niepewności więzów ....	105
8.2. Test nr 2 – klasyczne sterowanie pozycyjno-siłowe .....	118
8.3. Test nr 3 – implementacja algorytmu sterowania w zrobotyzowanym frezowaniu ....	122
9. Wnioski .....	138
10. Kierunki dalszych badań .....	140
Bibliografia .....	141
Dodatek .....	152
Część A. Program robota .....	152
Część B. Elementy kinematyki robota .....	153
Część C. Elementy dynamiki robota .....	163
Spis ilustracji .....	191
Spis tabel .....	196



## Wykaz ważniejszych oznaczeń

$\mathbf{A}(\mathbf{q})$	– macierz bezwładności wyrażona we współrzędnych zadaniowych,
$a_i$	– odległość mierzona od osi przegubów $i$ -tego członu wzdłuż osi $x$ ,
$\mathbf{a}_i^j$	– wektor przyspieszenia liniowego układu związanego z $i$ -tym członem względem układu związanego z punktem $j$ ,
$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	– wektor oporów ruchu i grawitacji wyrażony we współrzędnych zadaniowych,
$b_{\tau i}, b_{n i}, b_{p i}$	– ograniczenie wektorów zakłóceń działających odpowiednio na kierunkach stycznych, normalnych oraz działających na orientację
$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$	– wektor momentów sił odśrodkowych i sił Coriolisa wyrażony we współrzędnych konfiguracyjnych,
$\mathbf{c}$	– wektor współrzędnych zadaniowych,
$\mathbf{c}_\tau, \mathbf{c}_n, \mathbf{c}_p$	– wektor współrzędnych stycznych, normalnych i współrzędnych orientacji w przestrzeni zadaniowej,
$\mathbf{c}_d$	– wektor współrzędnych zadanych efektora końcowego w przestrzeni zadaniowej,
$\tilde{\mathbf{c}}$	– błąd realizacji ruchu w przestrzeni zadaniowej,
$d_i$	– odległość mierzona od osi przegubów $i$ -tego członu wzdłuż osi $z$ ,
$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$	– wektor oporów ruchu wyrażony we współrzędnych konfiguracyjnych,
$F_{Si}$	– współl. tarcia statycznego $i$ -tego członu,
$F_{Ci}$	– współl. tarcia Coulomba $i$ -tego członu,
$F_{vi}$	– współl. tarcia wiskotycznego $i$ -tego członu,
$\mathbf{F}_n$	– wektor sił nacisku na kierunkach normalnych,
$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$	– funkcja opisująca nieliniowości modelu matematycznego układu robototoczenie,
$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$	– aproksymacja funkcji $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ ,
$\mathbf{G}(\mathbf{q})$	– wektor grawitacji wyrażony we współrzędnych konfiguracyjnych,
$\mathbf{g}$	– wektor przyspieszenia ziemskiego,
$\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	– macierz sił odśrodkowych i Coriolisa wyrażona we współrzędnych zadaniowych,
$\mathbf{I}_i$	– macierz masowych momentów bezwładności względem układu odniesienia $i$ -tego członu,
$\mathbf{J}$	– jakobian manipulatora,
$\mathbf{J}_v$	– część jakobianu określająca prędkość liniową,
$\mathbf{J}_\omega$	– część jakobianu określająca prędkość kątową,

$\mathbf{K}_e$	– diagonalna macierz sprężystości otoczenia,
$K_{Rti}, K_{Rti},$	– wzmocnienie sterowania odpornego dla przemieszczeń liniowych odpowiednio na kierunkach stycznych i normalnych,
$K_{R\rho k}$	– wzmocnienie sterowania odpornego orientacji,
$\mathbf{K}_D$	– macierz wzmocnień sterownia PD,
$\mathbf{k}(\mathbf{q})$	– funkcja kinematyki robota,
$k_F, k_G$	– stałe ograniczające macierz $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,
$k_H$	– stała ograniczająca macierz $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,
$k_\psi$	– stała ograniczająca macierz $\boldsymbol{\Psi}(\mathbf{q}, t)$ ,
$l$	– wymiar przestrzeni zadaniowej,
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	– macierz bezwładności wyrażona we współrzędnych konfiguracyjnych,
$m_i$	– masa $i$ -tego członu,
$n$	– liczba stopni swobody robota,
$\mathbf{o}_i^{i-1}$	– wektor translacji układu $i$ -tego do układu $i-1$ ,
$\mathbf{p}$	– wektor parametrów modelu,
$\hat{\mathbf{p}}$	– ocena wektora parametrów modelu,
$p$	– wymiar przestrzeni orientacji w przestrzeni zadaniowej,
$r$	– wymiar podprzestrzeni normalnej,
$\mathbf{r}_i^j$	– wektor współrzędnych położenia $i$ -tego punktu względem punktu $j$ ,
$\mathbf{R}_i^{i-1}$	– macierz rotacji układu $i$ -tego względem układu $i-1$ ,
$\mathbf{Rot}_{x,\alpha}, \mathbf{Rot}_{y,\phi}, \mathbf{Rot}_{z,\theta}$	– macierze elementarnych obrotów,
$\mathbf{T}_i^{i-1}$	– macierz transformacji $i$ -tego układu do układu $i-1$ ,
$\mathbf{Trans}_{x,a}, \mathbf{Trans}_{y,b}, \mathbf{Trans}_{z,d}$	– macierze elementarnych przesunięć,
$q_i$	– współrzędna kątowa $i$ -tego członu robota ( $i$ -ta współrzędna konfiguracyjna),
$\mathbf{q}$	– wektor współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej,
$Q$	– kwaternion jednostkowy,
$\mathbf{U}$	– wektor sterowań wyrażony we współrzędnych zadaniowych,
$\mathbf{U}_R$	– wektor sterowania odpornego we współrzędnych zadaniowych,
$\mathbf{u}$	– wektor sterowań w przestrzeni konfiguracyjnej,
$\mathbf{v}_i^j$	– wektor prędkości liniowej punktu początkowego układu odniesienia, związanego z $i$ -tym członem względem układu $j$ ,
$w$	– wymiar przestrzeni położenia w przestrzeni zadaniowej,
$\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$	– macierz regresji,

$\mathbf{\varepsilon}_i^j$	– wektor przyspieszenia kąowego rotacji układu związanego z $i$ -tym członem względem układu $j$ ,
$\mu_{\tau i}$	– współczynnik tarcia suchego na $i$ -tym kierunku stycznym,
$\eta$	– składowa skalarna kwaternionu jednostkowego,
$\Lambda$	– diagonalna macierz projektowa,
$\lambda$	– wektor sił i momentów interakcji z otoczeniem wyrażony we współrzędnych zadaniowych,
$\mathbf{v}$	– wektor prędkości przestrzennej,
$\varsigma$	– składowa wektorowa kwaternionu jednostkowego,
$\xi(t)$	– wektor zakłóceń wyrażony we współrzędnych konfiguracyjnych,
$\Omega$	– wektor sił uogólnionych,
$\omega_i^j$	– wektor prędkości kątowej rotacji układu związanego z $i$ -tym członem względem układu $j$ ,
$\omega_{Sti}$	– współczynnik prędkości Stribecka $i$ -tego członu,
$\xi(t)$	– wektor zakłóceń wyrażony we współrzędnych konfiguracyjnych,
$\Psi(\mathbf{q}, t)$	– wektor zakłóceń wyrażony we współrzędnych zadaniowych,
$\zeta_{\min}$	– ściśle dodatnia minimalna wartość własna macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ ,
$\zeta_{\max}$	– ściśle dodatnia maksymalna wartość własna macierzy $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ .



# 1. Wstęp

W dzisiejszym świecie dominującą rolę w rozwoju cywilizacji odgrywają osiągnięcia naukowe i technologiczne, które kształtują gospodarkę oraz codzienne życie społeczeństwa tworzącego tzw. cywilizację naukowo-techniczną. Charakteryzuje się ona szybkim tempem rozwoju technologii, nauki oraz współzależnością różnych gałęzi gospodarki na poziomie globalnym. Istotnym aspektem rozwoju naszej cywilizacji jest robotyzacja i automatyzacja niemal każdej dziedziny życia, poczynając od przemysłu po medycynę, edukację i życie codzienne. W coraz większej liczbie domów znajdują się roboty sprząające oraz asystenci głosowi, sprzężeni z systemami automatyki budynków. W restauracjach i hotelach można spotkać roboty mobilne wspierające pracę obsługi transportując np. posiłki do stolików. Roboty stosowane w medycynie to nie tylko osławiony robot chirurgiczny da Vinci, ale także roboty mobilne transportujące różne materiały po rozległych obiektach szpitalnych, w tym również substancje lecznicze, zabezpieczając je przed niepożądanym dostępem oraz zapewniając odpowiednie warunki przechowywania. Postęp robotyki pozwala również na budowę zaawansowanych protez i urządzeń wspomagających osoby z niepełnosprawnością. Roboty wspierają akcje ratownicze, mogą operować w ekstremalnym środowisku niebezpiecznym dla człowieka. Biorą one udział w konfliktach zbrojnych, zarówno jako broń mogąca autonomicznie rażać wskazane przez wojskowego operatora cele, jak i pomoc w usuwaniu min, niewybuchów oraz innych materiałów niebezpiecznych. W przemyśle stosowanie automatów i robotów zastępujących tradycyjną ludzką pracę jest powszechne i wdrażane od wielu lat. Pozwala to poprawić wydajność i sprawność produkcji zmniejszając koszty. Nowością w tej dziedzinie jest integracja wszystkich maszyn w jeden system produkcyjny (konceptcja Przemysłu 4.0). Stosowane w przemyśle technologie informatyczne pozwalają monitorować cały proces produkcyjny w czasie rzeczywistym, archiwizować dane oraz wykorzystywać sztuczną inteligencję do ich analizy. Systemy zarządzania produkcją mogą uczyć się i w konsekwencji podejmować autonomiczne decyzje, wykonując różne zadania, adaptując różne procesy do zmieniających się warunków. Systemy oparte o sztuczną inteligencję pozwalają na predykcję zdarzeń mogących negatywnie wpływać na proces produkcyjny i z wyprzedzeniem im przeciwdziałać.

Taki stan rzeczy odciska swój ślad w społeczeństwie. Coraz trudniej na rynku pracy o ludzi chcących wykonywać zawody związane z pracą manualną, co zwiększa zapotrzebowania na automatyzację różnych procesów. Dzięki temu powstaje więcej miejsc pracy w sektorze technologicznym, związanych z programowaniem, konserwacją i obsługą robotów oraz systemów automatyki. Wymusza to na społeczeństwie konieczność ciągłego podnoszenia kwalifikacji i zdobywania nowych umiejętności, aby sprostać wymaganiom dynamicznie zmieniającego się środowiska pracy. Niesie to ze sobą również oczekiwania wobec systemu edukacji, aby kształcił odpowiednich specjalistów oraz niwelował zjawisko analfabetyzmu technologicznego, prowadzącego do marginalizacji części społeczeństwa i ułatwiał dostosowanie się do wymogów rynku pracy. Ciągły rozwój technologiczny jest możliwy dzięki pracy ośrodków badawczych, zarówno w sektorze państwowym jak i prywatnym. Rozwojowi robotyki sprzyja opracowywanie coraz dokładniejszych i bardziej kompaktowych urządzeń pomiarowych oraz bardziej wydajnych i precyzyjnych napędów, nie tylko elektrycznych. Można dzisiaj spotkać się z konstrukcjami, w których osie pozycjonowane są zasilane

pneumatycznie lub hydraulicznie. Jednocześnie rozwój technologii informacyjnych i sprzętu komputerowego przyczynia się do zmniejszania gabarytów układów sterowania wraz ze wzrostem ich wydajności oraz możliwości. Rozbudowane obliczenia związane z dynamiką, kinematyką robotów oraz przetwarzaniem informacji z systemów sensorycznych są wykonywane dużo szybciej niż było to możliwe kilkanaście lat temu. Nowoczesne pamięci mieszczą dużo większe ilości danych niż kiedyś oraz oferują duże szybkości ich transferu. Dzięki temu projektując dziś roboty i układy automatyki projektanci są mniej ograniczeni, mogą swobodniej integrować rozwiązania różnych dziedzin. Powoli zaciera się granica między rozwiązaniami stosowanymi tylko do przemysłu, a tymi dostępnymi na licencji *open source*. Można to dostrzec na przykładzie rozwoju sterowników przemysłowych PLC, które kiedyś realizowały program pisany w językach niskopoziomowych, operując bezpośrednio na rejestrach pamięci. Obecnie wyewoluowały one do urządzeń mogących wykonywać kod programu napisany w językach wysokopoziomowych, znanych i wykorzystywanych do pisania programów na komputery PC. Sterowniki PLC mogą również komunikować się przez Internet, np.: z urządzeniami Internetu rzeczy czy serwerami poczty elektronicznej i stron internetowych. Pojawiły się też rozwiązania sterowników wirtualnych, które można uruchomić jako maszynę wirtualną na komputerze PC lub w kontenerach. Innym przykładem mogą być roboty manipulacyjne, które projektowane z myślą o pracy w zakładach przemysłowych, coraz częściej są wykorzystywane w branży rozrywkowej do operowania kamerami filmowymi lub elementami iluminacji świetlnych. Kiedyś wymagały do obsługi dedykowanych paneli operatorskich, które dziś zastępuje powszechnie dostępny tablet.

Rzeczywistość sprawiła też, że katalog zadań, które można zrobotyzować ciągle się poszerza. W niniejszej pracy analizowano zagadnienie robotyzacji procesu obróbki mechanicznej, przy czym jej celem nie jest wykorzystanie przeznaczonych do tego obrabiarek sterowanych numerycznie, ale robotycznych ramion manipulacyjnych. Konstrukcje tego typu nie nadają się do precyzyjnej obróbki tzw. twardych materiałów. Ustępują one obrabiarkom pod względem dokładności, sztywności i szybkości obróbki. Za to ich przewagą jest elastyczność, wszechstronność i niższa cena. Standardowa konstrukcja robota antropomorficznego ma większą ruchliwość niż standardowa trzy osiowa obrabiarka CNC, co jest pożądane w obróbce części o skomplikowanym kształcie. Stanowisko zrobotyzowane może składać się z kilku robotów oraz dodatkowych osi takich jak pozycjonery czy tory jezdne. Zwiększa to dodatkowo dostępną przestrzeń roboczą i pozwala obrabiać duże detale o skomplikowanych kształtach bez zmiany sposobu zamocowania. Producenci robotów przemysłowych dbają o to, aby można było łatwo integrować je z innymi systemami automatyki. Zalety te sprawiają, że roboty przemysłowe są coraz chętniej stosowane do operacji szlifowania, gratowania, polerowania oraz frezowania detali niewymagających dużej precyzji, np. przy wstępnej obróbce odlewów, mającej na celu usunięcie wad. W pracy podjęto temat wykorzystania sterowania pozycją i siłą robotów manipulacyjnych w zadaniach związanych z obróbką mechaniczną odlewów. Zlokalizowano lukę w tego typu systemach sterowania dostępnych komercyjnie i zaproponowano autorskie rozwiązanie niwelujące dostrzeżone braki.



## 2. Przegląd literatury

Manipulatory odgrywają kluczową rolę w rozwoju przemysłu, umożliwiając precyzyjne wykonywanie różnych zadań, głównie monottonnych, ciężkich oraz niebezpiecznych dla człowieka. Możliwości robotyzacji różnych procesów rosną z roku na rok dzięki pracy tysięcy naukowców na całym świecie, czego odzwierciedleniem są ogromne liczby artykułów, książek oraz patentów dotyczących szeroko rozumianej robotyki [1, 2]. Niniejsza praca skupia się na zagadnieniach sterowania robotem w przypadku robotyzacji procesów obróbki mechanicznej detali odlewanych, które w wyniku krzepnięcia uzyskują geometrię w dużym zakresie tolerancji kształtu i wymiarów. Ma to znaczenie w przypadku automatyzacji obróbki polegającej na usuwaniu wypływek, ponieważ ich wielkość i kształt nie są możliwe do przewidzenia, a ma to niebagatelny wpływ na siły wywierane na narzędzie podczas obróbki. W pracy zaprezentowano podejście do tego problemu uwzględniające zastosowanie robotów przemysłowych. Omówiono problemy syntezy sterowania manipulatorem przemysłowym w interakcji z otoczeniem, co wiąże się z opracowaniem opisu matematycznego kinematyki i dynamiki manipulatora oraz modelu jego interakcji. Omówione zostały zagadnienia związane z kontrolą siły w interakcji antropomorficznego manipulatora sześćoosiowego z detalem poddawany obróbce mechanicznej.

W literaturze można znaleźć wiele różnych podejść do modelowania i sterowania robotów w interakcji ze środowiskiem. Ogólnie metody sterowania interakcją pomiędzy robotem a elementami środowiska można podzielić na:

- a) metody aktywne,
- b) metody pasywne.

Metody pasywne wykorzystują podatność konstrukcji mechanicznej na siły oddziaływania w kontakcie ze środowiskiem. Może ona wynikać z podatności strukturalnej ramion, złączy i efektora końcowego (końcówka narzędzia robota) [3] lub podatności elementów środowiska. Mówimy wtedy o podatności stałej, ponieważ jej zmiana wymagałaby przebudowania konstrukcji. Konstrukcja mechaniczna takiego robota jest projektowana z uwzględnieniem zmiany podatności wynikającej z wzajemnego ustawienia ruchomych członów w taki sposób, aby te zmiany były niewielkie i ograniczone oraz aby oczekiwana wartość podatności była osiągnięta w ustawieniu istotnym dla realizowanego zadania. Podatność może również wynikać z nastaw serwowzmacniaczy napędów [4] co pozwala dostosowywać podatność urządzenia do zadania. Źródłem podatności może być także dodatkowe urządzenie, np. narzędzie podatne zamontowane na sztywnym ramieniu manipulatora przemysłowego [5–7] lub urządzenie przytwierdzone do elementów środowiska w otoczeniu robota [8]. Odpowiednia podatność takich urządzeń uzyskiwana jest przez zastosowanie elementów sprężystych o określonej stałej sztywności lub elementów dających możliwość zmiany sztywności w pewnym zakresie. Są one projektowane z uwzględnieniem wymagań określonych dla konkretnego zadania. Zaletami stosowania metod pasywnych są:

- a) niskie koszty wdrożenia z uwagi na to, że nie wymagają one pomiaru sił kontaktu,
- b) krótszy czas reakcji na zmiany sił interakcji w porównaniu do metod aktywnych.

Jako wady należy wymienić:

- a) niską elastyczność dla zastosowań w przemyśle, gdyż źródło podatności jest projektowane do konkretnego zadania,

- b) brak sprzężenia zwrotnego od sił interakcji, który sprawia, że układ sterowania ruchem robota nie może zagwarantować, że w ogóle dojdzie do interakcji, oraz że siły kontaktu nie osiągną zbyt wysokich wartości.

Metody aktywnego sterowania interakcją mogą być rozwiązaniem eliminującym część wad sterowania pasywnego. W sterowaniu aktywnym podstawą jest znajomość wartości siły interakcji i kształtu ograniczeń geometrycznych środowiska. Dla uściślenia w pracy termin *siła* oznacza ogólnie siły i momenty związane z kartezjańskim układem odniesienia. Dokładniej, to trzy składowe wektora siły i trzy składowe wektora momentu na trzech kierunkach osi układu kartezjańskiego. Podobnie w przypadku *pozycji*, termin ten odnosi się do współrzędnych położenia oraz orientacji jednego układu kartezjańskiego względem drugiego. Wartość siły interakcji w sterowaniu aktywnym może być określona na podstawie pomiaru z czujnika siły lub oszacowana na podstawie pomiaru parametrów medium wymuszającego pracę efektora np. pomiaru prądu zasilającego silnik elektryczny lub pomiaru ciśnienia płynu dostarczanego do siłownika. Natomiast jako czujniki do pomiaru siły wykorzystuje się różnego rodzaju przetworniki wielkości fizycznych, m.in. [9]:

- a) Przetworniki piezoelektryczne, które wykorzystują zjawisko powstawania potencjału elektrycznego w wyniku deformacji kryształu pod wpływem siły.
- b) Przetworniki pojemnościowe, w których ugięcie membrany pod wpływem siły wywołuje zmianę pojemności, co jest wykrywane jako zmiana napięcia w obwodzie elektrycznym.
- c) Przetworniki indukcyjne, w których siła elektromotoryczna równoważy siłę interakcji, wywieraną na magnetyczny element ruchomy, a wielkość siły jest proporcjonalna do wielkości natężenia prądu płynącego przez cewkę.
- d) Przetworniki do pomiaru przyspieszenia, które pozwalają określić wartość siły na podstawie pomiaru przyspieszenia znanej masy.
- e) Przetworniki ciśnienia, w których element odkształcalny np. membrana zmienia ciśnienie płynu po jednej stronie w wyniku oddziaływania siły po jej drugiej stronie, a mierzona siła jest proporcjonalna do zmian ciśnienia.
- f) Przetworniki tensometryczne, które zmieniają swoją rezystancję pod wpływem odkształcenia, a podłączone do obwodu pomiarowego, np. mostka Wheatstone’a, pozwalają mierzyć zmiany napięcia elektrycznego, które są proporcjonalne do wielkości odkształcenia. Wartość siły powodującej odkształcenie tensometru określa się na podstawie prawa Hooke’a.

W układach sterowania siłą wykorzystywanych w robotach przemysłowych najczęściej stosuje się czujniki sił montowane na końcu kiści manipulatora, między flanszą efektora końcowego a narzędziem [10–12]. Termin *flansza* w kontekście konstrukcji robotów manipulacyjnych oznacza element na końcu łańcucha kinematycznego, przeznaczonego do montażu narzędzi. Najczęściej jest to okrągła płyta z rozmieszczonymi na jej powierzchni otworami montażowymi. Termin ten funkcjonuje powszechnie w społeczności związanej z automatyką i robotyką przemysłową.

Istnieją także rozwiązania pozwalające na pomiar sił bezpośrednio w opuszkach palców chwytaka [13]. Oceny wartości sił wywieranych przez robota na środowisko, można dokonać na podstawie momentów generowanych przez napędy [14] lub mierzonych przez czujniki zamontowane na wałkach napędowych poszczególnych członów robota [15–19]. Wymaga to

jednak znajomości dokładnego modelu dynamiki obiektu. Stosowane są również rozwiązania, w których czujnik siły jest umiejscowiony w podstawie robota [20–23] lub poza robotem na powierzchni kontaktu współpracującego z robotem elementu [24]. Ciężar narzędzia zamontowanego do czujnika oraz siły związane z efektami bezwładności mogą być pomijalnie małe, lub można je kompensować. Należy zauważyć, że czujniki siły wprowadzają dodatkową podatność w układzie, od której w dużej mierze zależą właściwości czujnika, takie jak czułość i zakres pomiarowy. Dlatego w rozwiązaniach dla robotów przemysłowych często stosuje się sześciosiłowe czujniki tensometryczne [4, 11, 12], nie tylko z uwagi na ich dużą sztywność, ale także odporność na uszkodzenia mechaniczne oraz lekką i kompaktową budowę. Ponadto zapewniają one kompleksowy pomiar siły, czyli składowych wektora siły wraz ze składowymi momentu sił.

Metody aktywnego sterowania interakcją można podzielić na dwie grupy:

- a) metody realizujące pośrednie sterowanie siłą,
- b) metody realizujące bezpośrednie sterowanie siłą.

W pierwszym podejściu siła kontaktu jest wynikiem sterowania trajektorią ruchu bez wyraźnie zamkniętej pętli sprzężenia zwrotnego siły [25–31]. Zaliczamy do nich metody sterowania impedancją i admitancją mechaniczną [32–34]. O sterowaniu impedancją mówimy, jeżeli układ sterowania steruje siłą interakcji w odpowiedzi na odchylenie od zadanej ścieżki. Zaś w sterowaniu admitancyjnym kontroler reaguje na siły interakcji sterując położeniem manipulatora. W literaturze dotyczącej sterowania robotami oba terminy są często stosowane w odniesieniu do tego samego schematu sterowania. Zakłada on model interakcji jako układ masy, sprężyny i tłumika, a samo pojęcie impedancji mechanicznej jest analogią do układów elektrycznych, gdzie przepływ prądu jest wywoływany przez napięcie i zależy od impedancji elektrycznej. Tak samo w układach mechanicznych siła powoduje przemieszczenie obiektu, a jego prędkość zależy od impedancji mechanicznej. Gdy wartość impedancji jest duża, duże wartości siły interakcji powodują niewielkie przemieszczenia i analogicznie przy małej impedancji odchylenie od trajektorii zadanej robota powodują niewielkie zmiany siły interakcji. W literaturze można się spotkać również z uproszczonym podejściem do sterowania impedancyjnego i admitancyjnego, jakimi są odpowiednio sterowanie sztywnością [28, 35] i podatnością [28, 36], gdzie pomijane są zjawiska inercji oraz tłumienia. Natomiast jeżeli celem sterowania jest sterowanie zależnością jedynie między siłą a prędkością robota, to taki schemat jest opisany w literaturze jako sterowanie tłumieniem [28]. Ogólnie celem sterowania impedancją jest zapewnienie określonych relacji między siłą interakcji a ruchem, przeciwnie do metod sterowania realizujących bezpośrednie sterowanie siłą, których celem jest podążanie za określoną trajektorią siły. Wśród metod bezpośredniego sterowania siłą można wyróżnić dwie strategie:

- a) hybrydowe sterowanie pozycyjno-siłowe,
- b) równoległe sterowanie pozycyjno-siłowe.

Obie strategie pozwalają na jednoczesną realizację trajektorii ruchu oraz siły. Hybrydowe sterowanie pozycyjno-siłowe zostało zaproponowane po raz pierwszy w pracach [37, 38]. Punktem wyjścia było założenie, że przestrzeń zadaniową robota można podzielić na dwie podprzestrzenie. Układ sterowania może kontrolować jednocześnie trajektorię ruchu i siłę nacisku na wzajemnie niezależnych od siebie kierunkach. Implementacja tej strategii wymaga określenia dokładnego modelu kontaktu robota ze środowiskiem. Jeżeli dokładny opis

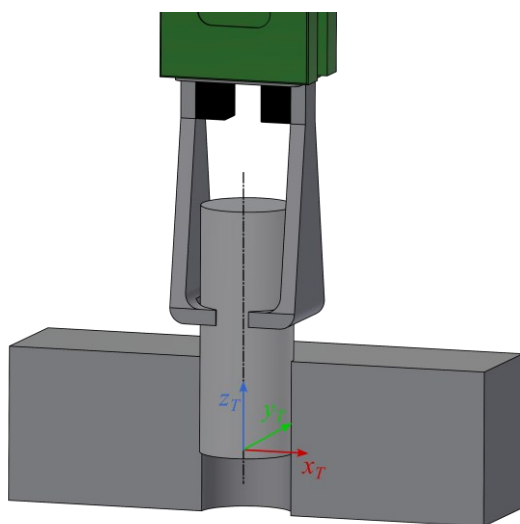
powierzchni kontaktu nie jest dostępny to lepszym rozwiązaniem będzie zastosowanie strategii równoległego sterowania pozycyjno-siłowego, która zakłada jednoczesne podążanie za trajektorią ruchu i siły, ale w taki sposób, że rola sterowania siłą jest dominująca. Prace nad takim podejściem opisano w artykule [39], w którym zaproponowano układ sterowania składający się z regulatora PD realizującego sterownie ruchem i regulatora PI sterującego siłą. Takie rozwiązanie sprawia, że pętla sterowania siły dominuje nad pętlą sterowania położeniem, ponieważ cały system sterowania dąży do uzyskania zadanej siły, kosztem większego błędu położenia.

Modelowanie interakcji robota ze środowiskiem jest złożonym problemem, ponieważ zjawisko kontaktu jest sumą wielu różnych zjawisk, zarówno lokalnych, które wynikają z charakterystyki powierzchni styku, jak i globalnych związanych z właściwościami dynamicznymi manipulatora oraz środowiska. Jest on niekiedy dużo bardziej złożonym zagadnieniem niż modelowanie robota. Ogólnie zagadnienie sprowadza się do zdefiniowania przestrzeni zadaniowej i uwzględnienia cech współpracujących powierzchni narzędzia i otoczenia. Z reguły definiuje się przestrzeń zadaniową jako przestrzeń kartezjańską, zakładając jej orientację względem powierzchni kontaktu w taki sposób, że część kierunków przestrzeni jest do niej styczna. Dzięki temu ruch efektora końcowego jest opisywany względem kierunków stycznych do powierzchni kontaktu zaś wywierany na nią nacisk określa się względem kierunków normalnych. W zależności od charakterystyki powierzchni interakcji można rozważyć model uwzględniający oporu ruchu na kierunkach stycznych lub pominąć to zjawisko, traktując je jako zakłócenie. W przypadku modelowania nacisku wywieranego w interakcji na powierzchnię kontaktu można rozpatrywać następujące schematy zaczynając od najmniej złożonego:

- a) model sztywnego otoczenia [40],
- b) model uwzględniający podatność otoczenia [41],
- c) model uwzględniający podatność i tłumienie otoczenia [42–44],
- d) model uwzględniający podatność, tłumienie oraz bezwładność otoczenia [44, 45].

Te modele mają fundamentalne znaczenie z punktu widzenia projektowania i implementacji zaawansowanych systemów sterowania, które muszą efektywnie współpracować z otoczeniem, adaptując się do zmian jego właściwości. Model sztywnego otoczenia zakłada, że otoczenie jest nieskończenie sztywne, co wymusza dostosowanie pozycji efektora końcowego robota w wyniku interakcji. W przypadku modelu uwzględniającego podatność otoczenia przyjmuje się, że otoczenie ulega deformacji w wyniku interakcji z robotem. Interakcja jest modelowana jako oddziaływanie na element sprężysty. Wielkość deformacji wynikającej z siły zależy od sztywności środowiska. W przestrzeni kartezjańskiej zależność siły i deformacji może być opisywana jako model sprężyny uogólnionej, tak jak opisano w pracy [46]. Wówczas sztywność środowiska jest przedstawiana jako macierz o wymiarach  $6 \times 6$ , nazywana macierzą sztywności, którą można przekształcić w macierz podatności. Model ten jest bardziej realistyczny niż model sztywnego otoczenia. Bardziej zaawansowanym sposobem modelowania jest uwzględnienie w modelu otoczenia zjawiska tłumienia. Wpływa ono na redukcję oscylacji podczas interakcji. Wadami tego podejścia są zwiększenie złożoności modelu oraz trudności związane z identyfikacją parametrów takiego modelu. Jednak najbardziej skomplikowanym modelem interakcji jest model dynamiczny, który uwzględnia oprócz tłumienia i sprężystości także bezwładność. Każdy kolejny krok w kierunku bardziej

złożonego modelu pozwala uzyskać dokładniejszy opis matematyczny, ale również wymaga bardziej zaawansowanych technik obliczeniowych co wpływa na pogorszenie szybkości obliczeń. Popularnym rozwiązaniem jest model interakcji w przestrzeni zadaniowej zdefiniowanej w oparciu o ograniczenia wynikające z geometrii środowiska. Przestrzeń zadaniową stanowi układ odniesienia względem, którego opisywane są więzy geometryczne jakie środowisko nakłada na ruch manipulatora. Zetknięcie efektora końcowego manipulatora z powierzchnią więzów powoduje powstanie siły reakcji. Kierunek tej siły zależy od kształtu powierzchni kontaktu, a wartość siły od podatności środowiska i konstrukcji robota, w tym również podatności narzędzia oraz czujnika siły. Zjawisko tarcia często traktuje się jako zakłócenie i pomija się je w modelu interakcji. Wszystkie te więzy, pozycyjne i siłowe wynikające z interakcji narzędzia ze środowiskiem są nazywane więzami naturalnymi [37]. W celu wymuszenia określonego zachowania manipulatora nakłada się na niego więzy sztuczne, takie jak zadana prędkość ruchu efektora końcowego wzdłuż powierzchni kontaktu i zadana siła nacisku na powierzchnię kontaktu. To jakie więzy sztuczne i naturalne występują w modelu interakcji robota ze środowiskiem zależy od zadania jakie ma realizować robot. Przykładem zrobotyzowanych zadań, w których dochodzi do interakcji są operacje montażowe, np. zadanie umieszczenia obiektu w otworze. Celem zadania jest wprowadzenie detalu do otworu unikając zablokowania, czyli tak, aby jego powierzchnia boczna była ustawiona równolegle do powierzchni otworu. W prezentowanym przypadku przestrzeń zadaniową określono względem układu związanego z manipulowanym obiektem, tak jak pokazano na rys. 2.1. Znajdujący się w otworze detal posiada dwa stopnie swobody, obrót i przesunięcie względem osi  $z$ , zatem na tym kierunku występują naturalne więzy siłowe, takie jak składowa wektora siły na kierunku osi  $z$ :  $F_{Tz}=0$  i składowa wektora momentu na kierunku osi  $z$ :  $M_{Tz}=0$ . Przyjmują one wartości zero, ponieważ nie dochodzi na tym kierunku do interakcji z powierzchnią detalu.



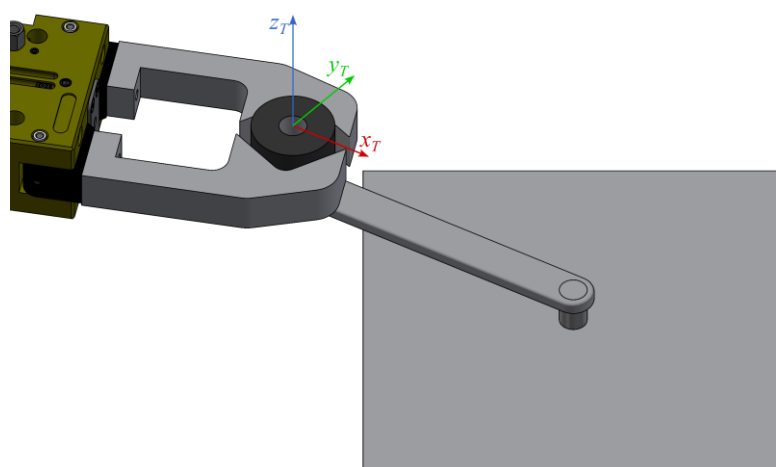
Rys. 2.1. Wkładanie cylindrycznego kołka do otworu

WIĘZY NATURALNE	
POZYCYJNE	$v_{Tx}=0$
	$v_{Ty}=0$
	$\omega_{Tx}=0$
	$\omega_{Ty}=0$
SIŁOWE	$F_{Tz} = 0$
	$M_{Tz} = 0$
WIĘZY SZTUCZNE	
POZYCYJNE	$v_{Tz}=v_d$
	$\omega_{Ty}=\omega_d$
SIŁOWE	$F_{Tx}=0$
	$F_{Ty}=0$
	$M_{Tx}=0$
	$M_{Ty}=0$

Na pozostałych kierunkach powierzchnia otworu blokuje możliwość przemieszczenia, więc istnieją naturalne więzy pozycyjne blokujące ruch, które można przedstawić jako składowe  $x$  i  $y$  wektora prędkości liniowej o wartości 0, oznaczone jako:  $v_{Tx}=0$  i  $v_{Ty}=0$ , oraz składowe

$x$  i  $y$  wektora prędkości kątowej o wartości zero, oznaczone jako  $\omega_{Tx}=0$  i  $\omega_{Ty}=0$ . Umieszczenie detalu w otworze na odpowiednią głębokość i w odpowiedniej orientacji będzie spełnione jeśli zostaną zrealizowane równania opisujące sztuczne więzy pozycyjne:  $v_{Tz}=v_d$ ,  $\omega_{Ty}=\omega_d$ . Wartość  $v_{Td}$  oznacza zadaną wartość prędkości liniowej, a  $\omega_{Td}$  oznacza zadaną wartość prędkości kątowej. Sztuczne więzy siłowe:  $F_{Tx}=0$ ,  $F_{Ty}=0$ ,  $M_{Tx}=0$ ,  $M_{Ty}=0$  odpowiadają za utrzymanie detalu w osi otworu, aby uniknąć zablokowania go.

Innym przykładem zadania może być obsługa przez robota prostego urządzenia jakim jest korba. Celem zadania jest obracanie korbą trzymając chwytkiem za uchwyt korby, który ma dwa stopnie swobody, obrót wokół własnej osi oraz obrót wokół osi korby. Jak pokazano na rys. 2.2, układ odniesienia przestrzeni zadaniowej jest związany z uchwytem korby, a oś  $x$  przecina oś obrotu korby oraz uchwytu.



#### WIĘZY NATURALNE

POZYCYJNE	$v_{Tx}=0$
	$v_{Tz}=0$
	$\omega_{Tx}=0$
	$\omega_{Ty}=0$
SIŁOWE	$F_{Ty}=0$
	$M_{Tz}=0$

#### WIĘZY SZTUCZNE

POZYCYJNE	$v_{Ty}=v_{Td}$
	$\omega_{Tz}=\omega_{Td}$
	$F_{Tx}=0$
	$F_{Tz}=0$
SIŁOWE	$M_{Tx}=0$
	$M_{Ty}=0$

Rys. 2.2. Obracanie korbą za pomocą obrotowego uchwytu

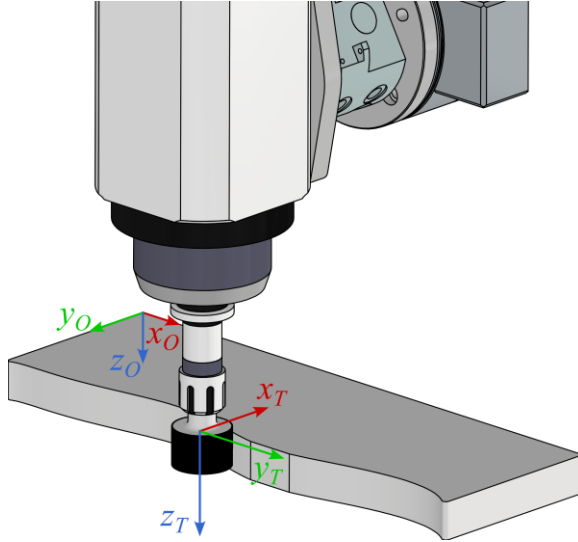
Naturalne więzy pozycyjne występujące w tak określonej przestrzeni zadaniowej to:  $v_{Tx}=0$ ,  $v_{Tz}=0$ ,  $\omega_{Tx}=0$ ,  $\omega_{Ty}=0$ , zaś więzy siłowe to:  $F_{Ty}=0$ ,  $M_{Tz}=0$ . Celem zadania jest ustawienie korby w określonej pozycji unikając wywierania nacisków wzdłuż osi  $x$ , które mogłyby ją uszkodzić. Umożliwiają to sztuczne więzy narzucone na ruch chwytaka, czyli więzy pozycyjne:  $v_{Ty}=v_{Td}$ ,  $\omega_{Tz}=\omega_{Td}$  oraz więzy siłowe:  $F_{Tx}=0$ ,  $F_{Tz}=0$ ,  $M_{Tx}=0$ ,  $M_{Ty}=0$ .

Kolejnym przykładem zadań polegających na interakcji manipulatora ze środowiskiem są różnego rodzaju operacje obróbki mechanicznej. W realizacji tego typu zadań stosowane są dwie strategie sterowania polegające na:

- utrzymaniu dokładnej pozycji narzędzia względem obrabianego detalu, bez przekraczania określonych sił wywieranych na narzędzie skrawające (strategia stosowana w aplikacjach frezowania, toczenia, cięcia i wiercenia),
- utrzymaniu określonej siły nacisku narzędzia na powierzchnię detalu z jednoczesnym ruchem po zadanej ścieżce (strategia stosowana w aplikacjach szlifowania, polerowania i gratowania).

Pierwsza strategia zakłada, że ruch narzędzia jest dokładnie określony względem obrabianego detalu, tzn. układu  $xoyozo$ . Na pozycję efektora końcowego narzuca się sztuczne więzy pozycyjne:  $x_T=x_d$ ,  $y_T=y_d$ ,  $z_T=z_d$ ,  $\mathbf{R}_T^O=\mathbf{R}_d$ , gdzie  $x_d$ ,  $y_d$ ,  $z_d$  to zadane wartości

przemieszczeń liniowych punktu  $T$  względem osi  $x_O$ ,  $y_O$  i  $z_O$ , zaś  $\mathbf{R}_d$  to zadana macierz rotacji określająca pożądaną orientację układu narzędzia  $x_T y_T z_T$  względem układu  $x_O y_O z_O$ . Celem definiowania sztucznych więzów siłowych jest utrzymanie pożądaných sił oporu działających na kierunkach stycznych do powierzchni styku, wzdłuż których odbywa się ruch narzędzia. W przykładzie pokazanym na rys. 2.3 osiami stycznymi są osie  $y$  i  $z$ , zatem sztuczne więzy siłowe to:  $F_{Ty} \leq F_{\max 1}$ ,  $F_{Tz} \leq F_{\max 2}$ .



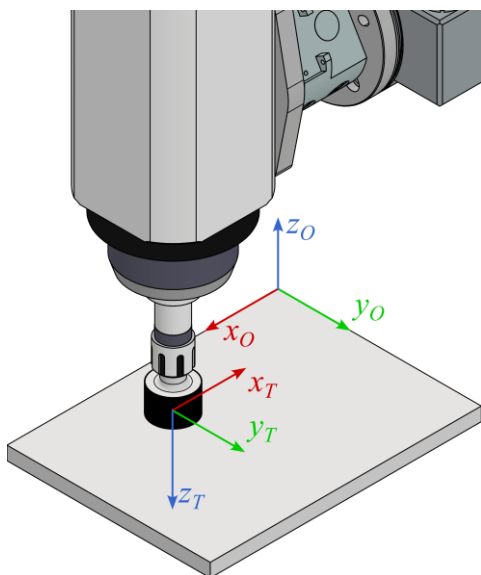
Rys. 2.3. Strategia nieprzekraczania sił oporu

WIĘZY NATURALNE	
SIŁOWE	$F_{Tx} = F_n$
	$M_{Tx} = 0$
	$M_{Ty} = -F_{Tz} \cdot \frac{d_N}{2}$
	$M_{Tz} = F_{Ty} \cdot \frac{d_N}{2}$
WIĘZY SZTUCZNE	
POZYCYJNE	$x_T = x_d$
	$y_T = y_d$
	$z_T = z_d$
	$\mathbf{R}_T^O = \mathbf{R}_d$
SIŁOWE	$F_{Ty} \leq F_{\max 1}$
	$F_{Tz} \leq F_{\max 2}$

Jako więzy naturalne w tym przypadku wyróżnia się jedynie więzy siłowe, czyli siłę nacisku  $F_{Tx} = F_n$ , działającą na kierunku osi  $x_T$ , oraz momenty, których wartości wynikają z sił interakcji:  $M_{Tx} = 0$ ,  $M_{Ty} = -F_{Tz} \cdot \frac{d_N}{2}$ ,  $M_{Tz} = F_{Ty} \cdot \frac{d_N}{2}$ . Z uwagi na niewielką wysokość narzędzia można założyć, że punkt styku narzędzia z powierzchnią detalu znajduje się na osi  $x$ . Zatem moment wzdłuż osi  $x$  będzie wynosić 0, a moment wzdłuż osi  $y$  i  $z$  wynika z siły oporu oraz średnicy narzędzia  $d_N$ . W przypadku narzędzi o małych średnicach można założyć, że momenty  $M_{Ty}$  i  $M_{Tz}$  mają wartości zerowe.

W drugiej strategii celem zadania jest utrzymanie siły nacisku narzędzia. Wygodnym podejściem jest zdefiniowanie przestrzeni zadaniowej w taki sposób, aby naturalne więzy pozycyjne i siłowe występowały na niezależnych kierunkach przyjętego układu odniesienia  $x_O y_O z_O$  związanego z detalem. W przypadku pokazanym na rys. 2.4, układ odniesienia przestrzeni zadaniowej  $x_O y_O z_O$  związany z płaską powierzchnią obrabianego detalu. Naturalne więzy pozycyjne występują na kierunku osi  $z$ , która jest prostopadła do obrabianej płaszczyzny. Na pozostałych kierunkach nie występują żadne ograniczenia ruchu, zatem naturalne więzy siłowe, określone względem układu  $x_O y_O z_O$  to:  $F_{Ox}=0$ ,  $F_{Oy}=0$ ,  $M_{Ox}=0$ ,  $M_{Oy}=0$ ,  $M_{Oz}=0$ . Wykonanie ścieżki obróbczej wymaga spełnienia narzuconych na ruch robota sztucznych więzów pozycyjnych:  $v_{Tx}^O = v_{xd}$ ,  $v_{Ty}^O = v_{yd}$ ,  $\omega_{Tx}^O = \omega_{xd}$ ,  $\omega_{Ty}^O = \omega_{yd}$ ,  $\omega_{Tz}^O = \omega_{zd}$ . W celu uściślenia zapisu w oznaczeniu współrzędnej pozycji górny indeks określa układ odniesienia, względem którego określono pozycję układu o początku określonym w dolnym indeksie. Dolny indeks zwiera także informację o kierunku osi, której dotyczy dana wartość. Za zapewnienie

odpowiedniej siły nacisku wywieranej przez narzędzie na powierzchnię detalu odpowiadają narzucone na ruch robota sztuczne więzy siłowe  $F_{Oz}=F_d$ .



Rys. 2.4. Strategia utrzymania siły nacisku w interakcji z otoczeniem

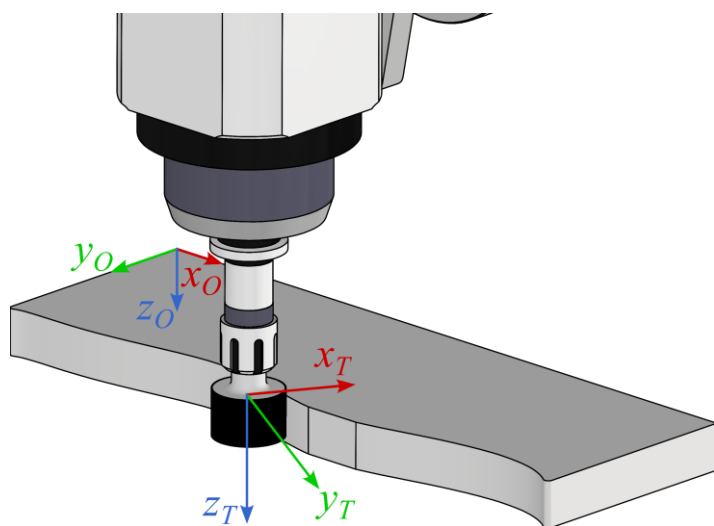
#### WIĘZY NATURALNE

POZYCYJNE	$v_{Tz}^O = 0$
SIŁOWE	$F_{Ox}=0$ $F_{Oy}=0$ $M_{Ox}=0$ $M_{Oy}=0$ $M_{Oz}=0$

#### WIĘZY SZTUCZNE

POZYCYJNE	$v_{Tx}^O = v_{xd}$ $v_{Ty}^O = v_{yd}$ $\omega_{Tx}^O = \omega_{xd}$ $\omega_{Ty}^O = \omega_{yd}$ $\omega_{Tz}^O = \omega_{zd}$
SIŁOWE	$F_{Oz} = F_d$

W przypadku gdy powierzchnia obrabiana detalu nie jest płaska, tak jak pokazano w kolejnym przykładzie na rys. 2.5, wtedy wygodniej jest zdefiniować zadanie w układzie związanym z narzędziem robota. Przy takim podejściu jedna z osi układu  $x_T y_T z_T$  jest ustawiona normalnie do powierzchni kontaktu.



Rys. 2.5. Strategia utrzymania siły nacisku w interakcji z otoczeniem

#### WIĘZY NATURALNE

POZYCYJNE	$v_x=0$
SIŁOWE	$F_{Ty}=0$ $F_{Tz}=0$ $M_{Tx}=0$ $M_{Ty}=0$ $M_{Tz}=0$

#### WIĘZY SZTUCZNE

POZYCYJNE	$v_{Ty}^T = v_{yd}$ $v_{Tz}^T = v_{zd}$ $\omega_{Tx}^T = \omega_{xd}$ $\omega_{Ty}^T = \omega_{yd}$ $\omega_{Tz}^T = \omega_{zd}$
SIŁOWE	$F_{Tx}=F_d$

W trakcie wykonywania ruchu orientacja układu  $x_T y_T z_T$  dopasowuje się do powierzchni interakcji. W prezentowanym przykładzie osią normalną jest oś  $x_T$  zaś pozostałe są osiami stycznymi. Siła nacisku narzędzia na powierzchnię detalu jest realizowana podobnie jak w poprzednim przykładzie dzięki sztucznym więzom siłowym w postaci  $F_{Tx}=F_d$ , przy czym oś  $x_T$  zmienia swoją orientację względem detalu w zależności od krzywizny ścieżki obróbkowej,



opisanej na powierzchni detalu. Ruch robota opisują zaś równania sztucznych więzów pozycyjnych:  $v_{Ty}^T = v_{yd}$ ,  $v_{Tz}^T = v_{zd}$ ,  $\omega_{Tx}^T = \omega_{xd}$ ,  $\omega_{Ty}^T = \omega_{yd}$ ,  $\omega_{Tz}^T = \omega_{dz}$ .

Przedstawione sposoby definiowania zadań mają zastosowanie w przypadku powierzchni o mało skomplikowanym kształcie i nie wyczerpują wszystkich możliwości [47]. Na potrzeby opisu bardziej złożonych interakcji, koncepcja definicji przestrzeni zadaniowej w oparciu o ograniczenia została rozwinięta do koncepcji wielu przestrzeni. Każda z nich umożliwia modelowanie określonej części związanych z geometrią zadania ruchów oraz występujących ograniczeń. Całkowity model uzyskuje się jako zbiór wszystkich opisów zadań i ograniczeń opisanych względem przypisanej przestrzeni zadania. Takie podejście otwiera możliwości operowania obiektami o złożonej geometrii oraz wykorzystania systemu wielu czujników sił i momentów do jednoczesnego kontrolowania ruchu robota i siły kontaktu w różnych punktach kontaktu, na różnych kierunkach. Należy jednak zauważyć, że w praktyce modelowy opis więzów często nie jest zbieżny z geometrią w rzeczywistości, co może wynikać z deformacji powierzchni kontaktu, czy też błędów zamocowania detalu lub narzędzia. Odporność układu kontroli na takie zakłócenia wzrasta dzięki pomiarowi siły i ruchu w przestrzeni zadaniowej. Dzięki pomiarom sił można uwzględnić opory ruchu na kierunkach stycznych do powierzchni kontaktu oraz korygować orientację narzędzia względem powierzchni kontaktu uwzględniając przy tym pomiar ruchu. Jest to szczególnie istotne w przypadku, gdy powierzchnia kontaktu nie jest płaska.

Jeżeli chodzi o sposoby modelowania robotów i projektowania układów sterowania, to dogłębne omówienie tych tematów można znaleźć w książkach [48–52]. Opisano w nich systematyczne podejście do opisu kinematyki złożonych struktur manipulatorów. W odniesieniu do modelowania dynamiki to autorzy książek [48–52] proponują traktowanie manipulatora jako łańcucha brył sztywnych, połączonych ze sobą przegubowo. Takie podejście jest relatywnie proste i intuicyjne, co czyni je atrakcyjnym do wykorzystania w syntezie sterowania. Bardziej złożone podejście zakłada uwzględnienie dynamiki układów napędowych poszczególnych złączy oraz występowania różnych niepożądanych zjawisk takich jak opory ruchu czy luz przekładniowy [53–55]. Aby uzyskać jeszcze dokładniejszy model, rozpatruje się elastyczność złączy i członów robota [56, 57]. To jaki ostatecznie model zostanie przyjęty zależy od tego, które zjawiska mają istotny wpływ na ruch manipulatora realizującego określone zadanie oraz jakie możliwości obliczeniowe musi posiadać platforma informatyczna.

Szybkość obliczeń ma niebagatelne znaczenie, jeżeli chodzi o możliwość wykorzystania określonego modelu do celów sterowania. W praktyce środowisko stanowi złożoną geometrycznie strukturę o różnych parametrach fizycznych, które mogą ulegać zmianie pod wpływem czynników zewnętrznych. Często rozkład mas i kształt powierzchni kontaktu może być trudny do określenia. Dlatego najczęściej stosuje się model robota jako układ brył sztywnych, uwzględniając jedynie opory ruchu w złączach. W celu zminimalizowania wpływu błędów wynikających z podatności i luzów występujących w zespole napędowym stosuje się dodatkowy system pomiaru kąta obrotu za przekładnią, mierząc kąty obrotów bezpośrednio pomiędzy konstrukcyjnymi członami robota [58]. Inna metoda polega na wykonaniu pomiarów pozycji efektora końcowego w możliwie jak największej ilości ustawień, co pozwala określić mapę poprawek dla systemu sterowania, korygujących ustawienie członów manipulatora. W pracy [59] wykazano, że korzystnym jest przeprowadzenie takich pomiarów uwzględniając

dodatkowe obciążenie manipulatora, takie jak ciężar narzędzia i osprzętu. Dzięki temu można skorygować błędy wynikające także z elastyczności członów. W praktyce w przypadku modelu otoczenia najczęściej zakłada się sztywną powierzchnię kontaktu lub uwzględnia się jedynie jej podatność. Częściowo wynika to z faktu, że wyznaczenie parametrów otoczenia nie jest łatwym zadaniem i każdorazowe wdrożenie układu sterowania opartego o bardziej złożony model otoczenia wymagałoby od programistów robotów specjalistycznej wiedzy lub procedur pozwalających na identyfikację potrzebnych parametrów. Dlatego na dziś bardziej złożone modele pozostają w sferze rozważań akademickich. W kwestii doboru stopnia złożoności modelu do syntezy sterowania siłą można sięgnąć do pracy [60], w której autorzy przeanalizowali wpływ różnych czynników mających znaczenie w kontekście syntezy sterowania siłą robotów manipulacyjnych i przedstawili następujące wnioski:

- a) Sztywność konstrukcji robota ma kluczowy wpływ na precyzyjne utrzymanie siły kontaktu z otoczeniem.
- b) Większa bezwładność poszczególnych elementów może prowadzić do dłuższego czasu reakcji systemu co utrudnia szybkie dostosowanie obiektu sterowania do zmian sił kontaktu.
- c) Tłumienie redukuje oscylacje i poprawia stabilność sterowania siły.
- d) Uwzględnienie w modelu robota podatności złączy oraz zjawisk nieliniowych takich jak tarcie i luz przekładniowy pozwala na kompensację ich wpływu w układzie sterowania.
- e) Napędy mają ograniczenia w zakresie maksymalnych prędkości i sił co ogranicza maksymalną wydajność systemu.
- f) Opóźnienia związane z przetwarzaniem sygnałów przez kontroler mają wpływ na pogorszenie wydajności sterowania, a minimalizacja tych opóźnień jest ważna dla utrzymania stabilnej kontroli siły.

Potrzebę stosowania sprzężenia zwrotnego od siły interakcji z otoczeniem dostrzeżono już w latach 50-tych XX wieku, przy okazji konstruowania maszyn do zdalnego operowania materiałami radioaktywnymi. W artykułach [28, 61] przedstawiono przykład manipulatora opracowanego przez Raymonda C. Goertza do operowania materiałami radioaktywnymi przez operatora znajdującego się w innym pomieszczeniu, osłoniętym przed szkodliwym promieniowaniem. Interfejs sterujący manipulatorem był wyposażony w elektryczne serwomechanizmy, które odpowiadały za przekazywanie operatorowi bodźców stanowiących informację zwrotną o siłach działających na manipulator. W latach 60-tych sterowanie ręczne zastępowano komputerowymi układami kontroli, co zrodziło potrzebę opracowania sposobu sterowania manipulatorem w odpowiedzi na interakcję z otoczeniem, które można zaimplementować w informatycznych układach kontroli. Pierwszym pomysłem było sterowanie siłą oparte na regułach. Program sterujący był zapisany w formie prostych reguł określających kierunek i zwrot ruchu robota oraz wartość siły lub momentu, po przekroczeniu którego robot ma się zatrzymać. Duży postęp w dziedzinie sterowania siłą nastąpił w latach 70-tych. Wypracowano wtedy fundamentalne koncepcje schematów kontroli interakcji:

- a) sterowanie podatnością/sztywnością,
- b) sterowanie tłumieniem,
- c) sterowanie impedancją,
- d) sterowanie hybrydowe pozycja-siła,

które były rozwijane przez następne lata i stosowane do różnych zadań i konstrukcji robotów. Patrząc na przekrój prac opublikowanych w latach 80-tych [4, 25–31, 35–38, 62–67] można zauważyć, że dwa paradygmaty, czyli sterowanie impedancją i hybrydowe sterowanie pozycja-siła stały się wiodącymi, jeśli chodzi o kontrolę interakcji w układach sterowania manipulatorami. Na temat wykorzystania sterowania impedancją N. Hogan wydał serię artykułów. W pracy [29] podjął temat sterowania zachowaniem manipulatora poprzez kontrolę impedancji efektora końcowego w kontakcie z otoczeniem. Przedstawiony algorytm pozwala na unikanie przeszkód o losowym charakterze w drodze do określonego celu bez konieczności szczegółowego planowania trasy. W artykule [25] autor przedstawił teoretyczne podstawy koncepcji sterowania impedancją. Opisał jak parametry środowiska, czyli sztywność, tłumienie i masa mogą zostać użyte do kontroli interakcji zapewniając zarówno odpowiednią precyzję pozycjonowania jak i realizacji siły kontaktu. Wykazał, że w interakcji pomiędzy manipulatorem a otoczeniem samo sterowanie pozycją lub siłą może okazać się niewystarczające i należy kontrolować również impedancję manipulatora, aby zachować stabilność i precyzję ruchu. W drugiej części serii [26] autor przedstawił, jak teoria sterowania impedancją może zostać wdrożona w rzeczywistych rozwiązaniach. Omówił konkretne aspekty projektowania i wdrażania systemów sterowania impedancją, w tym konfigurację parametrów układu sterowania. Przedstawił algorytm sprzężenia zwrotnego, który steruje impedancją narzuconą na efektor końcowy manipulatora. Ten algorytm eliminuje potrzebę rozwiązywania zadania odwrotnego kinematyki w sterowaniu ruchem robota. Autor podał również techniki praktycznego wdrażania systemu sterowania impedancją w robotach. Uwzględnił problemy związane z precyzyjną kontrolą ruchu i sił interakcji, proponując efektywne sposoby na uzyskanie pożądanej impedancji w różnych scenariuszach. W trzeciej części [27] N. Hogan pokazał, jak teoria i praktyczne implementacje opisane we wcześniejszych częściach mogą być wykorzystane do praktycznych zastosowań. Omówił, w jaki sposób można wykorzystać techniki optymalizacyjne do wyboru odpowiedniego poziomu impedancji w różnych zadaniach. Zaproponował również użycie sterowania impedancją w określonych scenariuszach zadań, takich jak: unikanie kolizji, ruch w środowisku, gdzie nie ma określonych ograniczeń kinematycznych oraz manipulacja w środowisku o zmiennej admitancji. Rozwinięcie sterowania impedancją zaproponowano w pracach [67, 68] jako sterowanie hybrydowe. Autorzy zaproponowali, aby w algorytmie sterowania impedancją zastosować podział przestrzeni zadaniowej na podprzestrzenie sterowania siłą i pozycją, znane z hybrydowego sterowania pozycja-siła. Przedstawili symulację z wykorzystaniem manipulatora dwuczłonowego do realizacji zadania umieszczenia wałka w otworze, wykazując skuteczność prezentowanego algorytmu w płynnym i precyzyjnym manipulowaniu obiektami. Sterowanie impedancją znajduje też zastosowanie w bardziej złożonych przypadkach. Autor książki [69] wykorzystał sterowanie impedancyjne do sterowania robotami redundantnymi wchodzącymi w interakcje z otoczeniem. Opisał też wpływ podatności złączy manipulatorów na dynamikę całego systemu oraz implikacje tego zjawiska dla projektowania układu sterowania. Wynikiem jego prac są praktyczne implementacje algorytmów sterowania na przykładzie zaawansowanego systemu robotycznego jak humanoidalny robot DLR Justin. Naukowcy zauważyli potrzebę dostosowywania parametrów algorytmu sterowania impedancją, takich jak sztywność, tłumienie i masa, podczas pracy. Wynikiem ich prac są algorytmy sterowania zmienną impedancją opisane między innymi w pracy [70]. Jej autorzy przeanalizowali problem

stabilności systemów ze zmienną impedancją w sterowaniu robotami i zaproponowali niezależny od stanu warunek stabilności dla zmiennych profili sztywności i tłumienia. W przypadku nieznanego środowiska można zastosować algorytmy adaptacyjne, które mogą identyfikować właściwe wartości impedancji [71]. W pracy [72] zaprezentowano algorytm adaptacji impedancji, który polega na iteracyjnym dostosowywaniu parametrów ramienia robota, tak aby uzyskać pożądany model pomimo nieznanego środowiska. Adaptacyjne metody mogą być realizowane z zastosowaniem sztucznych sieci neuronowych. W pracy [73] zastosowano sieci neuronowe z analizą falkową (WNN) do adaptacji parametrów impedancji w przypadku zmiennego środowiska, bez znajomości jego sztywności i geometrii. Autorzy udowodnili skuteczność zaproponowanego podejścia w eksperymencie, w którym manipulator sześćoosiowy realizował zadaną trajektorię ruchu po powierzchni otoczenia utrzymując określoną siłę nacisku z dużą dokładnością.

Z kolei jedne z pierwszych prac dotyczących koncepcji hybrydowego sterowania pozycja-siła opisano w artykułach [37, 38]. Prace M. Raiberta oraz J. Craiga miały duży wpływ na rozwój technik sterowania robotami w zakresie sterowania siłą. Zaproponowany przez nich algorytm sterowania zakłada jednocześnie i bezpośrednie sterowanie zarówno pozycją jak i siłą w interakcji ze środowiskiem. Zastosowane podejście wykorzystuje model otoczenia w przestrzeni zadaniowej zdefiniowanej w oparciu o naturalne i sztuczne ograniczenia, opisane w [36, 47, 66]. W artykule [37] autorzy przedstawili model matematyczny i architekturę hybrydowego sterowania pozycja-siła. Pozycyjne sprzężenie zwrotne zostało zrealizowane z zastosowaniem pomiaru kątów złączy robota a sprzężenie od siły pochodziło z czujnika zamontowanego w miejscu efektora końcowego. Autorzy zweryfikowali słuszność zaprezentowanego podejścia w toku analizy symulacji oraz badań eksperymentalnych, przeprowadzonych na manipulatorze dwuczłonowym. Na podstawie tej pracy H. Zhang i R. Paul zaproponowali modyfikację, która polega na transformacji współrzędnych z przestrzeni zadaniowej do przestrzeni złączowej manipulatora [74]. Zastosowali macierz podatności złączowej, co umożliwiło zdekomponowanie przestrzeni złączowej na część odpowiedzialną za osiągnięcie zadanej pozycji efektora końcowego i część odpowiadająca za uzyskanie odpowiedniej podatności na wybranych kierunkach w przestrzeni zadaniowej, aby uzyskać zadaną siłę nacisku. Z kolei H. Seraji rozwinął koncepcję sterownia hybrydowego integrując ją z adaptacyjnym algorytmem sterowania [75]. W artykule szczegółowo opisano jak adaptacyjne metody sterowania pozwalają poprawić dokładność śledzenia zadanych trajektorii położenia i sił pomimo zmiennych parametrów dynamicznych manipulatora oraz środowiska. Uwzględniono wpływ sprzężenia krzyżowego pętli sterownia siłą na sterownię pozycją i odwrotnie. Autor przedstawił wyniki symulacji, które potwierdziły skuteczność proponowanych metod adaptacyjnych w różnych scenariuszach operacyjnych, na przykładach, w których uwzględniono niepewności modelu manipulatorów oraz zewnętrzne zakłócenia, takie jak zmienne obciążenia i zmiany parametrów otoczenia. Wykazano, że w tego typu przypadkach sprawdzają się również adaptacyjne algorytmy sterowania oparte na sieciach neuronowych [76, 77] oraz logice rozmytej [78–80]. Nieco odmienne podejście do adaptacji zaprezentowali autorzy pracy [81], którzy zaproponowali, aby w hybrydowym sterowaniu pozycja-siła zastosować adaptacyjny algorytm uczenia. Opracowali algorytm wykorzystujący kompensację z sprzężeniem wyprzedzającym, który cyklicznie aktualizuje parametry układu sterowania pozycją i siłą po zakończeniu wykonywanej operacji. System sterowania uczy się

realizowania dokładniejszej trajektorii na podstawie błędów z poprzedniego cyklu. W toku rozwoju metod hybrydowego sterowania pozycja-siła zauważono potrzebę adaptacji nie tylko parametrów dynamicznych, ale także potrzebę dostosowywania przestrzeni zdaniowej do zmiennej geometrii powierzchni kontaktu. Nieznajomość dokładnego kształtu powierzchni interakcji wprowadza niepewności w pomiarze siły kontaktu, która jest określona na podstawie orientacji efektora końcowego. W celu poradzenia sobie z tym problemem autorzy pracy [82] opracowali algorytm, który na podstawie danych z czujników pozycji i siły estymuje kształt powierzchni ograniczającej, z którą manipulator wchodzi w interakcję. Zaimplementowali ten algorytm w hybrydowym sterowaniu pozycja-siła i przeprowadzili badania eksperymentalne wykazując, że takie podejście pozwala zastosować hybrydowe podejście do sterowania bez znajomości dokładnego kształtu powierzchni kontaktu. Podobne rozwiązanie przedstawili autorzy pracy [83], z tym, że zaproponowali oni także zmianę architektury sterowania hybrydowego na schemat hierarchiczny. W tym schemacie pętla sterowania siłą jest zamknięta wokół wewnętrznej pętli sterowania pozycją. Kontroler siły wprowadza korekty do zadanej wartości sterowania pozycyjnego, tak aby utrzymywać zadaną siłę nacisku. Natomiast autorzy pracy [84] zwrócili uwagę na zjawisko deformacji członów konstrukcji manipulatora, które mogą ulegać zginaniu i skręcaniu pod wpływem sił interakcji. Zaproponowano zastosowanie metody aproksymacji funkcji B-spline do modelowania deformacji członów. Uwzględnienie tego modelu w syntezy hybrydowego sterowania pozycja-siła pozwala na kompensację wpływu deformacji członów na ruch manipulatora. Z kolei w pracy [85] zaprezentowano manipulator redundantny, którego tylko ostatni człon jest modelowany jako człon elastyczny. Zastosowany model zakłada, że elastyczne ramię jest zbudowane z serii sztywnych łączników połączonych wirtualnymi sprężynami skrętnymi. Metody hybrydowego sterowania pozycja-siła znajdują zastosowanie również w układach wielorobotowych [86–88], w których współpracujące roboty realizują złożone operacje montażowe i manipulacyjne ciężkich obiektów, a także w konstrukcjach innych niż klasyczne roboty manipulacyjne, takich jak np. elastyczny manipulator szkieletowy [89].

Alternatywą dla bezpośredniego sterowania manipulatorem w interakcji z otoczeniem jest urządzenie RCC (ang. *Remote Center of Compliance*) [5–7, 63, 90]. RCC jest montowane na ramieniu manipulatora jako effektor końcowy, który wprowadza dodatkową podatność w interakcji z otoczeniem. Jego podatność powinna być z założenia większa niż podatność ramienia robota. Wówczas układ sterowania realizuje zadaną trajektorię ruchu, a dzięki odkształceniu RCC effektor końcowy może się dopasować do powierzchni kontaktu pod wpływem sił interakcji. Urządzenie jest projektowane do realizacji konkretnego zadania i nie wymaga stosowania dodatkowych czujników ani elementów aktywnych. Pierwsze rozwiązania tego typu były opracowywane dla aplikacji montażowych, aby kompensować niedokładności pozycjonowania części montowanych przez manipulator. Bardziej zaawansowanym rozwiązaniem jest RCC o zmiennej podatności, które przedstawiono w pracy [91]. Wykorzystuje ono napędy i układ czujników optoelektronicznych do realizacji sterowania impedancją. Dzięki temu można je wykorzystywać w szerszym zakresie zadań, które normalnie wymagałyby kilku klasycznych urządzeń RCC. Kolejnym rozwinięciem tej koncepcji są mikro-manipulatory, czyli niezależne osie sterowane, które odpowiadają za sterowanie interakcją niezależnie od ruchów manipulatora [92, 93]. W tym podejściu makro-manipulator porusza mikro-manipulatorem zamocowanym w miejscu efektora końcowego wzdłuż powierzchni

kontaktu, a układ sterowania mikro-manipulatora kontroluje siłę interakcji z powierzchnią. Takie podejście jest z powodzeniem stosowane w aplikacjach przemysłowych do szlifowania i polerowania. Konstrukcja mikro-manipulatora składa się z:

- a) czujników pozwalających mierzyć siłę lub deformacje wynikające z kontaktu z otoczeniem,
- b) osi sterowanych odpowiadających za ruch narzędzia,
- c) opcjonalnie zintegrowanego wrzeciona w przypadku aplikacji obróbczych.

Jako osie sterowane mogą być wykorzystywane siłowniki elektryczne i pneumatyczne [94–98].

Sterowanie siłą interakcji z otoczeniem znajduje zastosowanie nie tylko w manipulatorach pracujących w przemyśle. W literaturze opisano przykłady stosowania tego typu sterowania w manipulatorach montowanych w pojazdach podwodnych [99, 100] do pobierania próbek organizmów morskich, inspekcji podwodnych instalacji czy spawania podwodnego. Z kolei w artykule [101] zaimplementowano sterowanie impedancją w czterowirnikowym bezzałogowym statku powietrznym umożliwiając wykonywanie zadań wymagających interakcji z otoczeniem, związanych z inspekcją osprzętu w zakładach przemysłowych, znajdującego się w niedostępnych dla obsługi miejscach.

Podsumowując, problem sterowania interakcją robota z otoczeniem zajmuje środowisko naukowe od początków istnienia robotyki. Rozwój technologii pozwolił wdrażać coraz bardziej złożone algorytmy sterowania. Pomimo powstania wielu prac, zainteresowanie tym tematem nie spada i ciągle wprowadzane są ulepszenia w tego typu sterowaniu. Nowe możliwości implementacji dotyczą zarówno obszaru robotyki przemysłowej jak i mobilnej.

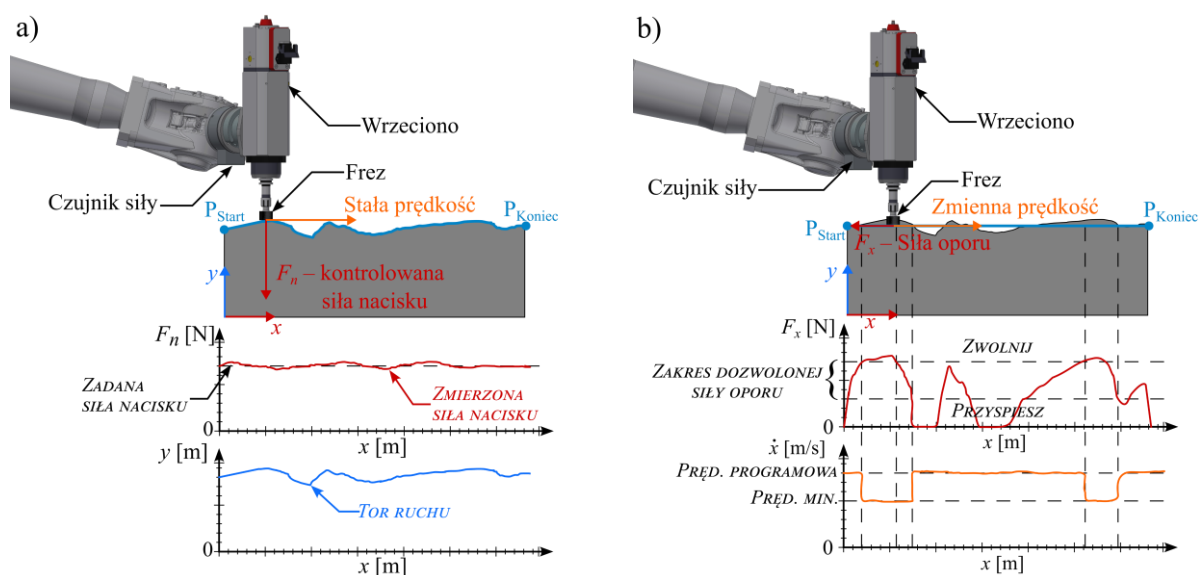
### 3. Motywacja, cel i zakres pracy

#### 3.1. Motywacja pracy

W Katedrze Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej prowadzone były prace badawcze nad implementacją sterowania siłą w operacjach obróbki skrawaniem odlewanych elementów silnika lotniczego [102–108] oraz odlewów żeliwnych [109] z wykorzystaniem robotów przemysłowych firmy ABB. Układ sterowania tego producenta, podobnie jak w robotach KUKA oraz FANUC oferuje gotowe strategie do typowych aplikacji zrobotyzowanych wymagających sterowania interakcją z otoczeniem [110–112]. Roboty ABB wspierają następujące strategie sterowania interakcją:

- strategie montażowe (*FC Assembly*),
- strategia zmiany prędkości efektora końcowego pod wpływem sił oporu (strategia *FC SpeedChange*),
- strategia sterowania siłą nacisku (*FC Pressure*).

Każda aplikacja zawiera zestaw funkcji i procedur do programowania i parametryzacji układu sterowania robota. Strategie *FC SpeedChange* i *FC Pressure* są przeznaczone do operacji obróbki mechanicznej takich jak polerowanie, szlifowanie, frezowanie i gratowanie. Na rys. 3.1 porównano sposób działania obu strategii. Celem strategii *FC Pressure* (rys. 3.1a) jest utrzymanie stałej siły nacisku na powierzchnię otoczenia, nawet jeżeli dokładna pozycja powierzchni nie jest znana. Robot koryguje pozycję na kierunku normalnym do powierzchni, aby uzyskać określony nacisk na obiekt, zaś na kierunkach stycznych do powierzchni realizuje zadaną trajektorię ruchu. Jest to klasyczny przykład wykorzystania algorytmu sterowania hybrydowego pozycja-siła. Producent określił, że strategia *FC Pressure* jest przeznaczona do operacji polerowania, szlifowania i czyszczenia, w których powierzchnia powinna być równa i gładka.



Rys. 3.1. Schemat działania strategii kontroli siły w robotach ABB a) *FC Pressure*, b) *FC SpeedChange*

Natomiast strategia *FC SpeedChange* polega na zmniejszaniu prędkości realizacji zadanej ścieżki w odpowiedzi na przekroczenie określonych wartości siły wywieranej na narzędzie (rys. 3.1b). Tym samym zmniejszana jest siła interakcji i minimalizowany jest błąd realizacji ścieżki spowodowany ugięciem ramienia robota. Obniża się również ryzyko uszkodzenia narzędzia z powodu zbyt dużych naprężeń. Producent zakłada wykorzystanie tej strategii do operacji obróbkowych, w których ważna jest dokładność realizacji ścieżki z naciskiem na obróbkę surowych odlewów. Jako przykłady zastosowania podaje operacje frezowania, gratowania i usuwania wypływek detali odlewanych.

W toku prac nad wdrożeniami sterowania siłą do zrobotyzowanej obróbki elementów odlewanych okazało się, że żadna z obu strategii nie jest wystarczająca, aby osiągnąć wymaganą jakość i wydajność obróbki. Cechami charakterystycznymi procesu odlewania są duża tolerancja kształtu detalu powstałego w procesie krzepnięcia oraz losowo występujące wypłyvky o trudnym do przewidzenia kształcie. Zastosowanie strategii *FC Pressure* pozwala realizować obróbkę powierzchni pomimo niepewności jej kształtu. Ścieżka, po której porusza się narzędzie dopasowuje się samoczynnie do kształtu powierzchni kontaktu, podczas gdy siła interakcji jest utrzymywana na określonym poziomie. Problem pojawia się w przypadku nieregularnego kształtu powierzchni obrabianej, np. podczas operacji usuwania wypływek. Duże wypłyvky mogą spowodować odsunięcie narzędzia od zakładanej ścieżki obróbki i w połączeniu z nieregularnym kształtem doprowadzić do utraty kontaktu narzędzia z powierzchnią części. W odpowiedzi na taki stan algorytm sterowania zwiększy prędkość ruchu na kierunku normalnym, co może doprowadzić do przerwania operacji albo gwałtownego zderzenia z detalem, a w konsekwencji do uszkodzenia narzędzia lub ramienia manipulatora. Innym przykładem wdrożenia strategii sterowania *FC Pressure* jest obróbka elementów cienkościennych. W takich przypadkach występowanie nawet małych wad odlewniczych może doprowadzić do ich pogłębiania a nawet przecięcia warstwy materiału. Rozwiązaniem tych problemów wydaje się zastosowanie strategii *FC SpeedChange*, której działanie nie modyfikuje zadanej ścieżki obróbki. Wpływa jedynie na zmianę prędkości poruszania się narzędzia wzdłuż zadanej ścieżki. W ten sposób traci się jednak ważną funkcjonalność jaką jest możliwość dopasowywania ścieżki do obrabianej powierzchni. Dostrzeżone problemy występujące w komercyjnych rozwiązaniach stały się impulsem do pracy nad układem sterowania siłą interakcji, wolnego od wymienionych wad.

### 3.2. Cel pracy

Przedmiotem pracy było opracowanie układu sterowania, który połączy zalety dwóch różnych strategii: strategii sterowania ruchem po zadanej ścieżce i strategii sterowania siłą, w ramach jednego algorytmu. Celem pracy było zatem opracowanie i przetestowanie układu sterowania robotem przemysłowym, który zagwarantuje ruch narzędzia wzdłuż zaplanowanej ścieżki z niewielką odchyłką i umożliwi sterowanie siłą nacisku narzędzia na powierzchnię kontaktu w bliskim otoczeniu ścieżki ruchu. W związku z celem pracy przyjęto następujące założenia dotyczące funkcjonalności układu sterowania:

- a) Układ sterowania oparty jest o algorytm hybrydowego sterowania pozycja-siła.
- b) Układ sterowania ma zapewnić utrzymanie siły kontaktu w interakcji z obrabianym detalem o ile nie wymaga to nadmiernego odejścia od zadanej ścieżki ruchu.



- c) Sterownie siłą interakcji ma odbywać się w ograniczonym obszarze wyznaczonym względem nominalnej pozycji powierzchni kontaktu.
- d) Algorytm sterowania ma umożliwiać dobór wpływu składowych strategii sterowania, czyli wzmacnianie strategii realizującej zadaną ścieżkę ruchu lub wzmacnianie strategii realizującej zadaną siłę nacisku.

Przedstawiony cel pracy oraz przyjęte założenia funkcjonalne układu sterowania pozycyjno-siłowego robotem przemysłowym w warunkach niepewności więzów stanowiły podstawę do opracowania przedstawionego w dalszych rozdziałach algorytmu sterowania.

### 3.3. Zakres pracy

W pracy przedstawiono problem sterowania pozycyjno-siłowego robotem przemysłowym w warunkach niepewności więzów. We wstępie opisano jak rozwój technologii wpłynął na możliwości automatyzacji i robotyzacji procesów przemysłowych. W rozdziale 2 wykonano przegląd literatury, przedstawiając aktualny stan wiedzy w zakresie metod modelowania i sterowania robotów w interakcji z otoczeniem, jednocześnie umiejscawiając przeprowadzone badania w odpowiednim kontekście naukowym. W rozdziale 3 wskazano na motywacje do podjęcia działań na rzecz eliminacji istniejącej luki w dostępnych współcześnie rozwiązaniach dotyczących układów sterowania interakcją robotów z otoczeniem oraz określono cel i zakres pracy. W rozdziale 4 zaprezentowano budowę stanowiska badawczego wraz z platformą informatyczną, pozwalającą na implementację algorytmów sterowania. Natomiast rozdział 5 dotyczy opracowania modelu matematycznego robota, zawierającego opis jego kinematyki i dynamiki. Opis dynamiki sformułowano z wykorzystaniem zarówno formalizmu Eulera-Lagrange'a, jak i formalizmu Newtona-Eulera, co pozwoliło zminimalizować ryzyko błędów obliczeniowych. Rozdział zakończono oszacowaniem wartości parametrów fizycznych modelu robota wraz z weryfikacją ich poprawności poprzez analizę zgodności przebiegów momentów uzyskanych z modelu i rzeczywistego robota. W rozdziale 6 przedstawiono syntezę układu sterowania w oparciu o algorytm sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów geometrycznych, zaproponowany w pracy [113], który wprowadza do układu sterowania siłą dodatkowy człon jako wirtualną siłę reakcji na zmiany kształtu nominalnej powierzchni kontaktu. W syntezie sterowania wykorzystano model matematyczny robota przekonwertowany do opisu w przestrzeni zadaniowej. Rozdział zakończono dowodem stabilności zaproponowanego algorytmu sterowania. W rozdziale 7 przedstawiono metodykę oraz wyniki badań symulacyjnych, mających na celu pokazanie zasady działania opisywanego algorytmu sterowania. W rozdziale 8 zaprezentowano przeprowadzone badania eksperymentalne, które zostały podzielone na trzy testy. Pierwszy test jest odpowiednikiem przeprowadzonej symulacji. Jego celem była weryfikacja poprawności działania przyjętego algorytmu sterowania. Drugi test przeprowadzono w celu porównania opracowanego rozwiązania z wbudowanym układem sterownia siłą i pokazania różnic pomiędzy klasycznym układem hybrydowego sterowania pozycyjno-siłowego a układem uwzględniającym niepewności więzów. Trzeci test przeprowadzono w celu weryfikacji możliwości aplikacji opisywanego układu sterowania do obróbki skrawaniem. W rozdziale 9 zamieszczono podsumowanie i wnioski dotyczące niniejszej pracy, a w rozdziale 10 przedstawiono kierunki dalszych badań. Praca zawiera również bibliografię oraz dodatek zawierający materiały

uzupełniające, które pominięto w głównej części pracy w trosce o płynność treści. Zawarto w nim listing programu oraz szczegółową zawartość obszernych wyrażeń matematycznych.

### 3.4. Oryginalne elementy pracy

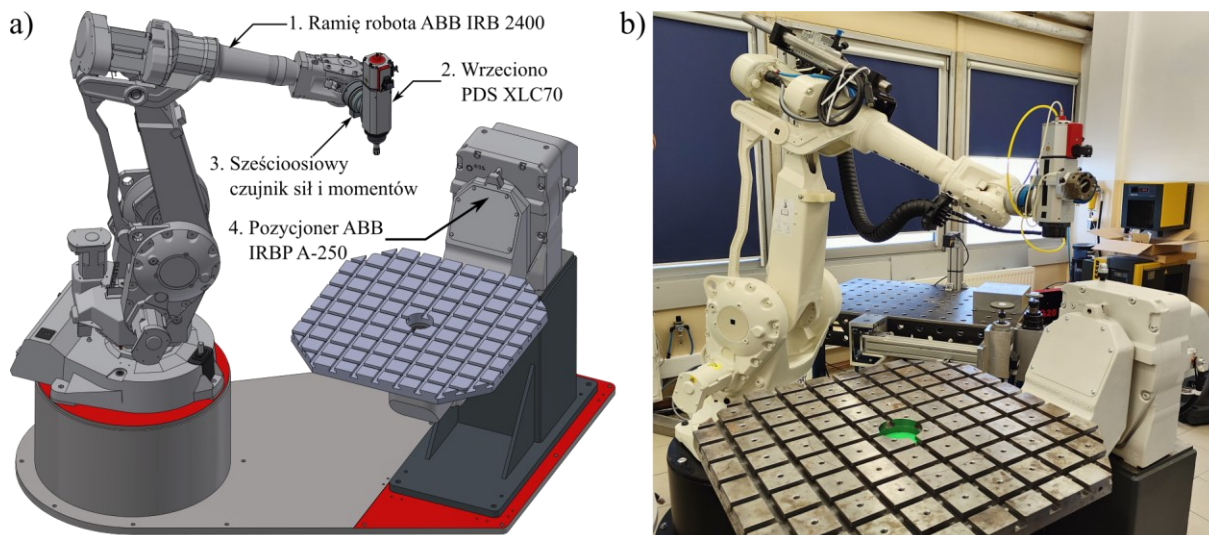
Do oryginalnych osiągnięć autora pracy można zaliczyć następujące elementy:

- a) Skonfigurowanie platformy badawczej obejmująca robota z pakietem sterowania siłą, sterowanie elektrowrzecionem i dodatek *External Guided Motion* do robotów ABB.
- b) Opracowanie platformy informatycznej integrującej kontroler robota i układ pomiarowy siły ze środowiskiem MATLAB/Simulink.
- c) Sformułowanie opisu matematycznego robota IRB2400 wchodzącego w interakcję z podatnym otoczeniem.
- d) Opracowanie metodyki estymacji parametrów fizycznych modelu matematycznego robota, w szczególności oporów ruchu.
- e) Opracowanie realistycznego modelu symulacyjnego interakcji robota z otoczeniem, z możliwością konfiguracji ukształtowania elementów środowiska i ustawienia pozycji punktu charakterystycznego narzędzia.
- f) Opracowanie układu sterowania robotem przemysłowym z uwzględnieniem interakcji z otoczeniem w warunkach niepewności więzów.
- g) Analiza wpływu parametrów układu sterowania na skuteczność realizacji trajektorii pozycyjnej i siłowej jednocześnie.
- h) Przeprowadzenie badań weryfikacyjnych systemu sterowania robotem obejmujące implementację w procesie frezowania, który można zaimplementować w procesie produkcyjnym.

Konkludując na podstawie przeprowadzonych prac oraz uzyskanych wyników można stwierdzić, że opracowane rozwiązania stanowią istotny wkład w rozwój metod sterowania robotami przemysłowymi w warunkach interakcji z otoczeniem. Proponowane podejście może znaleźć zastosowanie w procesach produkcyjnych, zwłaszcza w obróbce mechanicznej, gdzie wymagane jest utrzymanie zadanej ścieżki ruchu i kompensowanie niepewności kształtu obrabianego elementu.

## 4. Budowa stanowiska badawczego

W celu weryfikacji opracowanych w ramach pracy rozwiązań zbudowano stanowisko do zrobotyzowanej obróbki mechanicznej, którego schemat i zdjęcie zaprezentowano na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Stanowisko badawcze do zrobotyzowanej obróbki skrawaniem: a) schemat, b) zdjęcie stanowiska

Stanowisko składa się z robota manipulacyjnego ABB IRB 2400-16 i współpracującego z nim pozycjonera ABB IRBP A-250. Obydwoma jednostkami mechanicznymi steruje kontroler robota IRC5. Robot jest antropomorficznym manipulatorem sześćoosiowym o udźwigu 16 kg i zasięgu 1,55 m. W tabeli 4.1 zamieszczono wartości maksymalnych prędkości wszystkich osi robota. W tabeli 4.2 zamieszczono podane przez producenta parametry określające dokładność robota według normy ISO 9283.

Tabela 4.1. Wartości maksymalnych prędkości osi robota ABB IRB 2400

Oś	1.	2.	3.	4.	5.	6.
Maksymalna prędkość osi [rad/s]	2,618	2,618	2,618	6,283	6,283	7,854

Tabela 4.2. Dokładność robota określona według normy ISO 9283

Parametr	Wartość
Powtarzalność pozycji	0,03 mm
Dokładność pozycji	0,03 mm
Powtarzalność ścieżki liniowej	0,15 mm
Dokładność ścieżki liniowej	0,41 mm
Czas stabilizacji pozycji w zakresie 0,4 mm od pozycji zadanej	0,22 s

Robot jest wyposażony w fabryczny system sterowania siłą, który wykorzystuje sygnały z sześciosiowego czujnika sił i momentów 3HAC048735-001 zamontowanego na flanszy ramienia robota. Najważniejsze parametry techniczne czujnika sił zostały przedstawione w tabeli 4.3. Sygnał przetwornika czujnika jest przekazywany do kontrolera robota, który przetwarza je na trzy składowe wektora siły oraz trzy składowe wektora momentu określone względem kartezjańskiego układu odniesienia związanego z czujnikiem, który na potrzeby tej pracy oznaczono jako  $x_{syszs}$ . W kontrolerze robota można zdefiniować dodatkowy układ odniesienia dla pomiaru siły i wówczas kontroler transformuje mierzoną siłę do tego układu. Dzięki temu można uzyskać wartości sił i momentów względem układu związanego z detalem lub narzędziem robota. Do czujnika zamontowane jest wrzeciono PDS XLC70 o mocy 2,2 kW z automatyczną zmieniarą narzędzi, przeznaczoną do opravek narzędziowych HSK-E25.

Sterowanie robotem odbywa się z wykorzystaniem kontrolera robota IRC5, który wykonuje kod programu zapisany w jego pamięci. Kod programu dla kontrolerów IRC5 jest pisany w języku RAPID. Oprócz tego kontroler posiada dodatkową opcję programową o nazwie *External Guided Motion* (w skr. *EGM*), która stanowi interfejs umożliwiający sterowanie ruchem robota przez zewnętrzny układ sterowania. Interfejs *EGM* pozwala na sterowanie ruchem zarówno w przestrzeni konfiguracyjnej jak i w przestrzeni zadaniowej. Sygnał sterowania może być przekazywany do interfejsu *EGM* poprzez sygnały cyfrowe lub analogowe podłączone do fizycznej karty wejść/wyjść. Obsługiwana jest również dwukierunkowa komunikacja Ethernetowa przez protokół UDPUC (z ang. *User Datagram Protocol Unicast Communication*), dzięki czemu możliwe jest nie tylko przesyłanie sygnału sterowania do kontrolera, ale również odczyt parametrów stanu robota, w tym sygnałów z czujnika siły. Maksymalna częstotliwość wymiany pakietów danych wynosi 250 Hz a producent deklaruje, że opóźnienie reakcji robota na sygnał sterowania przez *EGM* mieści się w zakresie 10-20 ms w zależności od modelu robota.

Tabela 4.3. Parametry czujnika siły

Parametr	Wartości
<b>Zakres pomiaru siły</b>	$F_x, F_y$ : 660 N; $F_z$ : 1980 N
<b>Rozdzielczość pomiaru siły</b>	$F_x, F_y$ : 0,09 N; $F_z$ : 0,33 N
<b>Zakres pomiaru momentu obrotowego</b>	$M_x, M_y, M_z$ : 60 Nm
<b>Rozdzielczość pomiaru momentu obrotowego</b>	$M_x, M_y, M_z$ : 0,008 Nm
<b>Niepewność</b>	$F_x, F_y, F_z$ : 1,8%; $M_x, M_y$ : 1,92%; $M_z$ : 2,4%
<b>Masa</b>	1,25 kg
<b>Nieliniowość</b>	1,5%
<b>Błąd histerezy</b>	1,5%

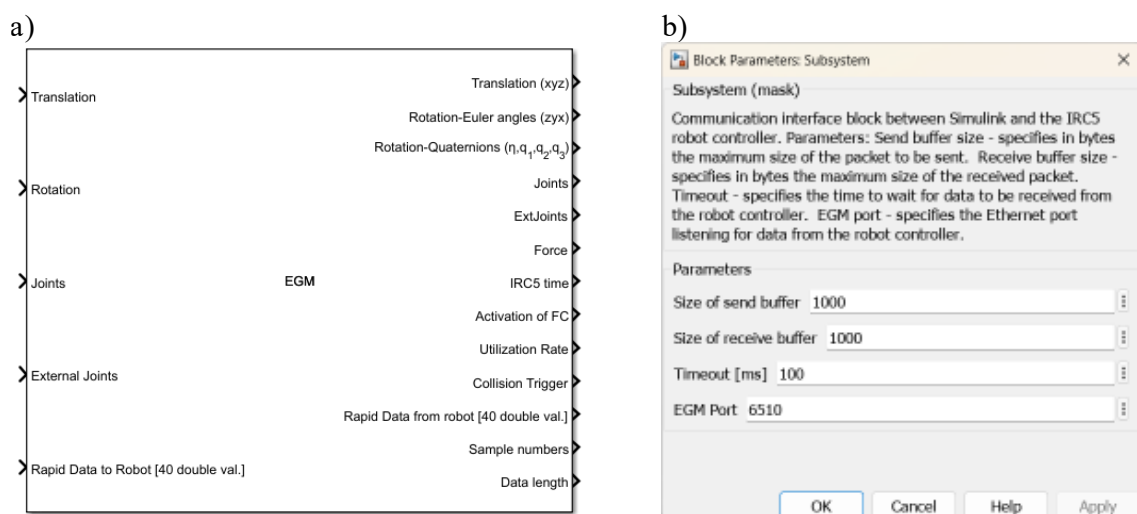
Interfejs *EGM* wykorzystuje mechanizm *Google Protocol Buffers* (w skr. *Protobuf*) do serializacji wymienianych pakietów danych, co pozwala zmniejszyć ich rozmiar i tym samym utrzymać wysoką prędkość transferu danych. Wiąże się to jednak z koniecznością zastosowania dodatkowego mechanizmu, który koduje dane wysyłane do kontrolera IRC5 i dekoduje dane

przychodzące, aby mogły być użyteczne dla zewnętrznego układu sterowania. Mechanizm *Protobuf* polega na tym, że struktura przesyłanych pakietów danych jest zapisana w pliku tekstowym z rozszerzeniem *.proto*. Na podstawie tego pliku może zostać wygenerowany kod w wybranym, spośród wspieranych, języków programowania. Taki kod zawiera zestaw instrukcji do serializacji i deserializacji pakietów danych. Aplikacja odczytuje dane z sieci, uruchamia deserializację, aby odczytać dane potrzebne do wykonania odpowiednich operacji, po czym tworzy komunikat do wysłania, uruchamia jego serializację i wysyła do interfejsu *EGM* w wybranym kontrolerze robota. Interfejs może działać w trzech trybach:

- EGM Position Stream* – w tym trybie *EGM* tylko przesyła dane o stanie robota do zewnętrznego urządzenia.
- EGM Position Guidance* – w tym trybie ruch robota jest sterowany z zewnętrznego urządzenia przez interfejs *EGM*.
- EGM Path Correction* – w tym trybie robot wykonuje zaprogramowaną w języku *RAPID* trajektorię ruchu, a zewnętrzne urządzenie przez interfejs *EGM* koryguje pozycję robota.

Tryb pracy jest ustawiany w programie wykonywanym przez kontroler robota. Możliwość swobodnego sterowania ruchem robota jest dostępna w trybie *EGM Position Guidance*, przy czym jednocześnie można sterować robotem albo w przestrzeni kartezjańskiej albo konfiguracyjnej. W obu przypadkach można ograniczyć możliwość sterowania do wybranych osi, np. do sterowania jedynie pozycją wzdłuż osi *x* i orientacją wzdłuż osi *z*. Pozostałe kierunki pozostaną wówczas bez zmian.

Jako platformę do przeprowadzenia badań symulacyjnych i eksperymentalnych wybrano środowisko Simulink uruchamiane na komputerze PC. Simulink oprócz tego, że pozwala w łatwy sposób projektować aplikacje przy użyciu schematów blokowych, to ponadto posiada narzędzie *Desktop Real-Time*, które dostarcza jądro czasu rzeczywistego m.in. dla systemów Windows. Środowisko Simulink wsparte oprogramowaniem MATLAB umożliwia również akwizycję danych oraz ich przetwarzanie i wizualizację.



Rys. 4.2. Blok interfejsu komunikacji z *EGM*

Celem nawiązania komunikacji pomiędzy aplikacją w Simulinku a kontrolerem robota, konieczne jest napisanie programu obsługującego mechanizm Protobuf. Simulink posiada gotowe narzędzia obsługujące komunikację Ethernetową wykorzystujące protokół UDP, lecz obecnie nie ma jeszcze gotowych narzędzi do obsługi *Protobuf*. Istnieje możliwość rozbudowywania funkcjonalności Simulinka o dodatkowe bloki napisane w językach MATLAB, C, C++ lub Fortran, poprzez funkcje systemowe *S-Function*, stanowiące interfejs programistyczny aplikacji (z ang. API) dla silnika Simulink. Korzystając z tego mechanizmu napisano blok interfejsu komunikacyjnego *EGM*, który obsługuje mechanizm *Protobuf* oraz zapewnia dwukierunkową komunikację z kontrolerem robota. Gotowy blok programu przedstawiono na rys. 4.2. Z lewej strony bloku znajdują się wejścia, do których przekazywane są wartości wysyłane do kontrolera robota:

- 1) Translation – trójelementowy wektor sygnałów sterowania położeniem w przestrzeni zadaniowej.
- 2) Rotation – trójelementowy wektor sygnałów sterowania orientacją w przestrzeni zadaniowej.
- 3) Joints – sześćelementowy wektor sterowania pozycją w przestrzeni konfiguracyjnej.
- 4) External Joints – sześćelementowy wektor sterowania pozycją osi dodatkowych.
- 5) Rapid data to Robot – tablica 40 sygnałów dowolnego przeznaczenia o podwójnej precyzji.

Blok programu jest blokiem uniwersalnym, który można zastosować do wszystkich możliwości konfiguracji EGM w trybie *Position Guidance* oraz *Position Stream*. Jeżeli w programie kontrolera aktywowano opcję sterowania wybranymi złączami, to wartości przychodzące do pozostałych wejść będą ignorowane. Po prawej stronie bloku znajdują się wyjścia bloku przekazujące dane odebrane z kontrolera oraz dane diagnostyczne:

- 1) Translation (xyz) – trójelementowy wektor wartości bieżącego położenia robota w przestrzeni zadaniowej wyrażony w mm.
- 2) Rotation-Eulera Angles (zyx) – trójelementowy wektor bieżącej orientacji robota opisywanej kątami Eulera według sekwencji zyx wyrażony w °.
- 3) Rotation-Quaternions ( $\eta$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ) – czteroelementowy wektor bieżącej orientacji robota opisywanej kwaternionem jednostkowym.
- 4) Joints – sześćelementowy wektor bieżącej pozycji złącz robota wyrażony w ° lub mm, w zależności od rodzaju złącza.
- 5) External Joints – sześćelementowy wektor bieżącej pozycji osi dodatkowych wyrażony w ° dla osi obrotowych lub mm dla osi liniowych.
- 6) Force – sześćelementowy wektor sygnałów z czujnika siły, czyli trzy składowe wektora siły wyrażone w N i trzy składowe wektora momentu wyrażone w Nm. Mierzone wartości odnoszą się do układu związanego z czujnikiem siły lub dodatkowym układem pomiaru siły, jeżeli wewnętrzny układ sterowania siłą zostanie aktywowany.
- 7) IRC5 Time – bieżący czas w kontrolerze IRC5. Sygnał zawiera wartości: godzina, minuta, sekunda, mikrosekunda.
- 8) Activation of FC – sygnał binarny informujący czy wewnętrzny układ sterowania siłą jest załączony.

- 9) Utilization Rate – procentowa wartość dostępnej wydajności robota, potrzebna do wykonania ruchu zgodnego z najnowszym wysłanym pakietem sygnału sterowania. Jeśli wartość przekracza 100%, robot nie będzie w stanie wykonać pełnego ruchu.
- 10) Collision Trigger – sygnał binarny informujący o wykryciu kolizji.
- 11) RAPID Data from Robot – tablica 40 sygnałów dowolnego przeznaczenia o podwójnej precyzji.
- 12) Sample numbers – numer odebranego pakietu danych od kontrolera.
- 13) Data length – długość odebranego pakietu danych wyrażona w bajtach.

W układzie sterowania użyteczne są sygnały pozycji oraz sygnały z czujnika siły. Pozostałe sygnały mogą być wykorzystane do monitorowania poprawności komunikacji z EGM oraz pracy jednostki mechanicznej. Producent umożliwił także przesyłanie 40 sygnałów, którym można przypisać własne parametry. Są to wartości typu zmiennoprzecinkowego o podwójnej precyzji. Dzięki temu jest możliwość akwizycji wartości parametrów, które nie zostały uwzględnione w systemie EGM, np.: momentów działających na człony robota lub wartości pozycji napędów robota przed przekładnią. Za ich pomocą można także obsługiwać urządzenia stanowiące osprzęt robota, np. chwytaki czy wrzeciona. Można przysyłać do kontrolera robota wartości zadanej prędkości wrzeciona oraz monitorować parametry jego pracy.

Podsumowując, w ramach pracy zbudowano stanowisko zrobotyzowane do obróbki mechanicznej oraz przygotowano platformę informatyczną umożliwiającą prowadzenie badań eksperymentalnych. Wyniki pierwszych badań przeprowadzonych na tym stanowisku przedstawiono w artykule [114]. W dalszej części pracy opisano model matematyczny robota IRB 2400 będącego elementem składowym tego stanowiska. Model ten posłużył do przeprowadzenia syntezy układu sterowania oraz badań symulacyjnych.

## 5. Model matematyczny robota ABB IRB 2400

### 5.1. Kinematyka robota

Do opisu kinematyki robota ABB IRB 2400 wykorzystano zmodyfikowaną notację Denavita-Hartenberga. Z każdym  $i$ -tym członem manipulatora związane jest kartezjański układ współrzędnych w następujący sposób:

- a) oś  $z_i$  pokrywa się z osią obrotu  $i$ -tego członu,
- b) oś  $x_i$  jest prostopadła do osi  $z_{i-1}$  oraz  $z_i$  i jest skierowana wzdłuż członu od przegubu  $i-1$  do  $i$ ,
- c) oś  $y_i$  uzupełnia prawoskrętny układ odniesienia.

Przekształcenie układu  $i$  do  $i-1$  opisuje macierz transformacji  $\mathbf{T}_i^{i-1}$ , uwzględniająca złożenie elementarnych obrotów i przesunięć:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \mathbf{Rot}_{x, \alpha_{i-1}} \mathbf{Trans}_{x, a_{i-1}} \mathbf{Rot}_{z, \theta_i} \mathbf{Trans}_{z, d_i}, \quad (5.1)$$

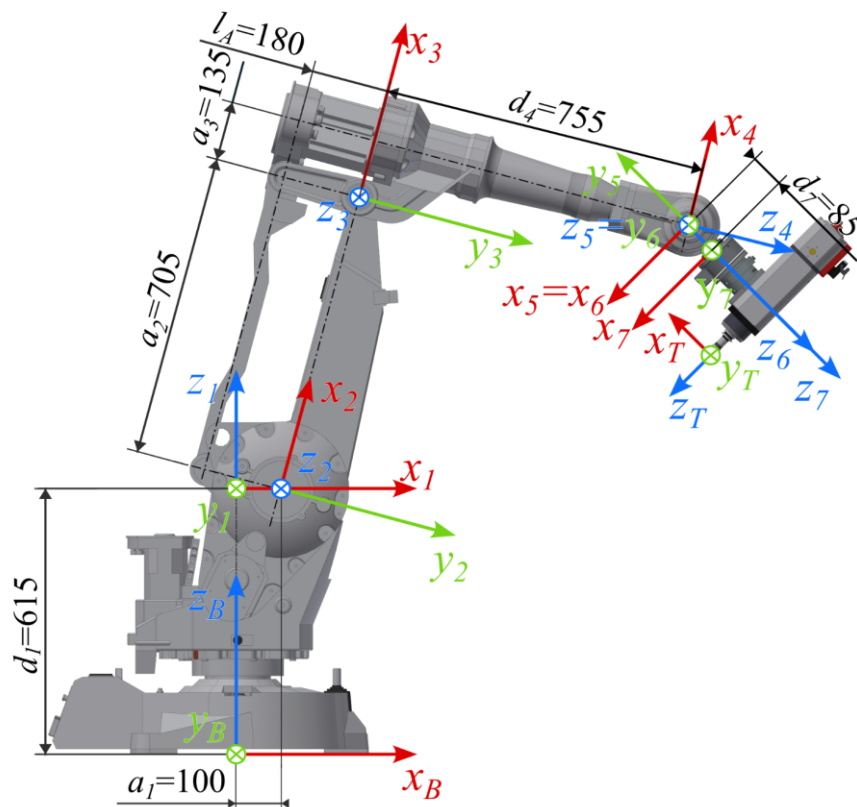
której szczegółowa forma jest następująca

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) & 0 & a_{i-1} \\ \sin(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_{i-1}) & -\sin(\alpha_{i-1}) & -d_i \sin(\alpha_{i-1}) \\ \sin(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\theta_i)\sin(\alpha_{i-1}) & \cos(\alpha_{i-1}) & d_i \cos(\alpha_{i-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

gdzie:  $\mathbf{Rot}_{x, \alpha_{i-1}}$  – macierz elementarnego obrotu układu wokół osi  $x$ ,  $\mathbf{Trans}_{x, a_{i-1}}$  – macierz elementarnego przesunięcia wzdłuż osi  $x$ ,  $\mathbf{Rot}_{z, \theta_i}$  – macierz elementarnego obrotu układu wokół osi  $z$ ,  $\mathbf{Trans}_{z, d_i}$  – macierz elementarnego przemieszczenia wzdłuż osi  $z$ ,  $\alpha_{i-1}$  – kąt skręcenia  $i$ -tego członu wokół osi  $x$ ,  $a_{i-1}$  – długość  $i$ -tego członu, mierzona jako odległość od osi przegubów, wzdłuż osi  $x$ ,  $\theta_i$  – kąt obrotu  $i$ -tego członu wokół osi  $z$ ,  $d_i$  – odległość mierzona od osi przegubów wzdłuż osi  $z$ .

Układy współrzędnych przyjęte do opisu kinematyki manipulatora ABB IRB 2400 oraz odległości między nimi pokazano na rys. 5.1. W pracy przyjęto konwencję oznaczania układów odniesienia, które na stałe są związane z konstrukcją robota, numerem członu łańcucha kinematycznego. Człony są numerowane zaczynając od podstawy, kończąc na układzie 7, związanym z flanszą, który jest nazywany układem narzędzia 0. Układy odniesienia, które można swobodnie definiować oznaczono symbolem literowym. Na rys. 5.1 pokazano układ bazowy oznaczony literą  $B$  oraz układ związany z efektem końcowym narzędzia mocowanego do flanszy robota oznaczony literą  $T$  i jest to tak zwany punkt charakterystyczny narzędzia. W literaturze naukowej i instrukcjach do robotów manipulacyjnych punkt ten nazywany jest w skrócie TCP (z ang. *Tool Center Point*). Ponieważ początek układu współrzędnych jest również punktem w przestrzeni, można wprowadzić współrzędne, które reprezentują położenie początku jednego układu współrzędnych względem drugiego.





Rys. 5.1. Schemat manipulatora ABB IRB 2400 z układami współrzędnych, obranymi zgodnie ze zmodyfikowaną notacją Denavita-Hartenberga

Człon trzeci tego manipulatora jest napędzany poprzez wodzik równoległy do członu drugiego a jego napęd jest współosiowy z napędem członu drugiego. Kąt obrotu członu jest wyrażony jako zmienna  $q_i$ , będącą współrzędną kątową mierzona wzdłuż osi napędowej członu. Parametry manipulatora ABB IRB 2400 według zmodyfikowanej notacji Denavita-Hartenberga zestawiono w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Parametry geometryczne manipulatora ABB IRB 2400 według zmodyfikowanej notacji Denavita-Hartenberga

	$a_i$ [m]	$\alpha_i$ [rad]	$d_i$ [m]	$q_i$ [rad]
<b>Człon 1</b>	0	0	$d_1=0,615$	$q_1$
<b>Człon 2</b>	$a_1=0,1$	$-\pi/2$	0	$q_2 - \frac{\pi}{2}$
<b>Człon 3</b>	$a_2=0,705$	0	0	$q_3 - q_2$
<b>Człon 4</b>	$a_3 = 0,135$	$-\pi/2$	$d_4=0,755$	$q_4$
<b>Człon 5</b>	0	$\pi/2$	0	$q_5 + \pi$
<b>Człon 6</b>	0	$\pi/2$	0	$q_6$
<b>Narzędzie 0</b>	0	0	$d_7=0,085$	0

Na podstawie ogólnego równania (5.2) zapisano macierze transformacji uwzględniające parametry z tabeli 5.1:

$$\mathbf{T}_1^B = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 & 0 \\ \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.3)$$

$$\mathbf{T}_2^1 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \sin(q_2) & \cos(q_2) & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \cos(q_2) & -\sin(q_2) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.4)$$

$$\mathbf{T}_3^2 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos(q_2 - q_3) & \sin(q_2 - q_3) & 0 & a_2 \\ -\sin(q_2 - q_3) & \cos(q_2 - q_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.5)$$

$$\mathbf{T}_4^3 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos(q_4) & \sin(q_4) & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -\sin(q_4) & -\cos(q_4) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.6)$$

$$\mathbf{T}_5^4 = \left[ \begin{array}{ccc|c} -\cos(q_5) & \sin(q_5) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\sin(q_5) & -\cos(q_5) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.7)$$

$$\mathbf{T}_6^5 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.8)$$

$$\mathbf{T}_7^6 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (5.9)$$

Stosując te macierze można określić transformację układu związanego z dowolnym członem do układu bazowego manipulatora według zależności:

$$\mathbf{T}_j^B = \prod_{k=1}^j \mathbf{T}_k^{k-1}. \quad (5.10)$$

W macierzy przekształcenia jednorodnego:

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^{i-1} & \mathbf{o}_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

można wyróżnić następujące elementy:  $\mathbf{R}_i^{i-1}$  – macierz rotacji układu  $i$ -tego względem układu  $i-1$ ,  $\mathbf{o}_i^{i-1}$  – wektor translacji układu  $i$ -tego do układu  $i-1$ .

W pracy przyjęto notację, zgodnie z którą symbole wektorów i macierzy przekształceń jednorodnych układów zawierają indeks dolny oznaczający element, z którym wektor lub układ jest związany, natomiast górny indeks oznacza element odniesienia, np.: wektor  $\mathbf{o}_7^7$  opisuje położenie punktu  $T$  względem układu 7, a wektor  $\mathbf{o}_7^T$  oznacza położenie punktu początkowego układu 7 względem układu związanego z punktem  $T$ .

Narzędzie 0 jest charakterystycznym punktem każdego robota manipulacyjnego. Względem niego określana jest pozycja charakterystycznych punktów związanych z narzędziami mocowanymi do flanszy robota. Macierz przekształcenia jednorodnego układu narzędzia 0 do układu bazowego manipulatora zapisana na podstawie zależności (5.3)-(5.10) jest następująca:

$$\mathbf{T}_7^B = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & o_x \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & o_y \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & o_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

gdzie:

$$R_{11} = c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}, \quad (5.13)$$

$$R_{12} = c_{q_1} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}, \quad (5.14)$$

$$R_{13} = c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}, \quad (5.15)$$

$$R_{21} = c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} - c_{q_3} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_5} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3}, \quad (5.16)$$

$$R_{22} = c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6}, \quad (5.17)$$

$$R_{23} = c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5}, \quad (5.18)$$

$$R_{31} = c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \quad (5.19)$$

$$R_{32} = c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \quad (5.20)$$

$$R_{33} = -c_{q_5} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}, \quad (5.21)$$

$$o_x = a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} + d_7 (c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}), \quad (5.22)$$

$$o_y = a_1 s_{q_1} + d_4 c_{q_3} s_{q_1} + a_2 s_{q_1} s_{q_2} + a_3 s_{q_1} s_{q_3} + d_7 (c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5}), \quad (5.23)$$

$$o_z = d_1 + a_2 c_{q_2} + a_3 c_{q_3} - d_4 s_{q_3} - d_7 (c_{q_5} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}). \quad (5.24)$$

Nazwy funkcji trygonometrycznych skrócono przyjmując następujące oznaczenia:

$$s_{q_i} = \sin(q_i), \quad c_{q_i} = \cos(q_i).$$

Uwzględniając narzędzie zamontowane do flanszy robota zdefiniowano nowy układ odniesienia związany z charakterystycznym punktem tego narzędzia, czyli TCP, który stanowi nowy punkt efektor końcowego. Jego pozycja jest określona względem układu odniesienia narzędzia 0 przez wektor współrzędnych  $\mathbf{o}_T^7$  i macierz rotacji  $\mathbf{R}_T^7$  co daje przekształcenie jednorodne zapisane jako:

$$\mathbf{T}_T^7 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_T^7 & & & \mathbf{o}_T^7 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.25)$$

TCP jest obierany w zależności od rodzaju narzędzia, np. w przypadku chwytaków jest to punkt pomiędzy palcami, w centrum przenoszono obiektu, w przypadku palników spawalniczych jest to punkt na końcu elektrody. Natomiast w przypadku wrzeciona najwygodniej obrać punkt w osi wrzeciona, na wysokości której narzędzie obróbcze będzie stykało się z powierzchnią obrabianego detalu. W schemacie na rys. 5.1 układ odniesienia efektor końcowego jest odwrócony względem osi  $y$  układu 7 o  $\frac{\pi}{2}$ , zatem macierz rotacji zapisano jako:

$$\mathbf{R}_T^7 = \mathbf{Rot}_{y, \frac{\pi}{2}} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.26)$$

Wprowadzając (5.26) do równania (5.25) otrzymano przekształcenie jednorodne układu efektor końcowego do układu narzędzia 0 w postaci:

$$\mathbf{T}_T^7 = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & x_T \\ 0 & 1 & 0 & y_T \\ -1 & 0 & 0 & z_T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (5.27)$$

Przekształcenie układu efektor końcowego do układu bazowego wyznaczono jako iloczyn przekształcenia (5.12) oraz (5.27):

$$\mathbf{T}_T^B = \mathbf{T}_7^B \mathbf{T}_T^7 = \left[ \begin{array}{ccc|c} \mathbf{R}_T^B & & & \mathbf{o}_T^B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.28)$$

gdzie:

$$R_{T11} = s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} + c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}, \quad (5.29)$$

$$R_{T12} = c_{q_1} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}, \quad (5.30)$$

$$R_{T13} = c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}, \quad (5.31)$$

$$R_{T21} = c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1}, \quad (5.32)$$

$$R_{T22} = c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6}, \quad (5.33)$$

$$R_{T23} = c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} - c_{q_3} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_5} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3}, \quad (5.34)$$

$$R_{T31} = c_{q_5} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}, \quad (5.35)$$

$$R_{T32} = c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \quad (5.36)$$

$$R_{T33} = c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} o_{Tx} = & a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} + (d_7 + z_T) (c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} \\ & - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}) + x_T (c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_6} \\ & - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}) + y_T (c_{q_1} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} \\ & + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}), \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} o_{Ty} = & a_1 s_{q_1} + d_4 c_{q_3} s_{q_1} + a_2 s_{q_1} s_{q_2} + a_3 s_{q_1} s_{q_3} + (d_7 + z_T) (c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} \\ & - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5}) + x_T (c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} - c_{q_3} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_5} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} \\ & - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3}) + y_T (c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} s_{q_6} \\ & + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6}), \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} o_{Tz} = & d_1 + a_2 c_{q_2} + a_3 c_{q_3} - d_4 s_{q_3} - (d_7 + z_T) (c_{q_5} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}) + x_T (c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} \\ & + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}) + y_T (c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Do zbudowania dynamicznego modelu manipulatora niezbędna jest znajomość prędkości oraz przyspieszeń poszczególnych członów. Zatem zdefiniowano wektor prędkości przestrzennej  $\mathbf{v}_i^B \in \mathbb{R}^6$ , który opisuje prędkość układu odniesienia związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego.

$$\mathbf{v}_i^B = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i^B \\ \boldsymbol{\omega}_i^B \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

gdzie:  $\mathbf{v}_i^B \in \mathbb{R}^3$  – prędkość liniowa punktu początkowego układu odniesienia, związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego,  $\boldsymbol{\omega}_i^B \in \mathbb{R}^3$  – prędkość kątowa układu związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego.

Prędkości liniowe układu związanego z  $i$ -tym członem robota względem układu bazowego określa równanie:

$$\mathbf{v}_i^B = \dot{\mathbf{o}}_i^B. \quad (5.42)$$

W przypadku robota ABB IRB 2400 wyznaczone prędkości liniowe są następujące:

$$\mathbf{v}_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{v}_2^B = \begin{bmatrix} -a_1 \dot{q}_1 s_{q_1} \\ a_1 \dot{q}_1 c_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{v}_3^B = \begin{bmatrix} a_2 \dot{q}_2 c_{q_1} (q_1) c_{q_2} - \dot{q}_1 s_{q_1} (a_1 + a_2 s_{q_2}) \\ \dot{q}_1 c_{q_1} (a_1 + a_2 s_{q_2}) + a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} s_{q_1} \\ -a_2 \dot{q}_2 s_{q_2} \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{v}_4^B = \begin{bmatrix} c_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) - \dot{q}_1 s_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ s_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) + \dot{q}_1 c_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ -d_4 \dot{q}_3 c_{q_3} - a_2 \dot{q}_2 s_{q_2} - a_3 \dot{q}_3 s_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{v}_5^B = \begin{bmatrix} c_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) - \dot{q}_1 s_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ s_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) + \dot{q}_1 c_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ -d_4 \dot{q}_3 c_{q_3} - a_2 \dot{q}_2 s_{q_2} - a_3 \dot{q}_3 s_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.47)$$

$$\mathbf{v}_6^B = \begin{bmatrix} c_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) - \dot{q}_1 s_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ s_{q_1} (a_2 \dot{q}_2 c_{q_2} + a_3 \dot{q}_3 c_{q_3} - d_4 \dot{q}_3 s_{q_3}) + \dot{q}_1 c_{q_1} (a_1 + d_4 c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + a_3 s_{q_3}) \\ -d_4 \dot{q}_3 c_{q_3} - a_2 \dot{q}_2 s_{q_2} - a_3 \dot{q}_3 s_{q_3} \end{bmatrix}. \quad (5.48)$$

Prędkość charakterystycznego punktu efektora końcowego manipulatora, czyli narzędzia 0 wynosi:

$$\mathbf{v}_7^B = \begin{bmatrix} \sigma_1 \dot{q}_1 + (a_2 c_{q_1} c_{q_2}) \dot{q}_2 + \sigma_3 \dot{q}_3 + (d_7 c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - d_7 c_{q_4} s_{q_1} s_{q_5}) \dot{q}_4 + \sigma_6 \dot{q}_5 \\ \sigma_2 \dot{q}_1 + (a_2 c_{q_2} s_{q_1}) \dot{q}_2 + \sigma_4 \dot{q}_3 + (d_7 c_{q_1} c_{q_4} s_{q_5} + d_7 s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_4 + \sigma_7 \dot{q}_5 \\ (-a_2 s_{q_2}) \dot{q}_2 + \sigma_5 \dot{q}_3 + (d_7 c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_4 + (d_7 s_{q_3} s_{q_5} - d_7 c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}) \dot{q}_5 \end{bmatrix}, \quad (5.49)$$

gdzie:

$$\sigma_1 = d_7 c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} - d_4 c_{q_3} s_{q_1} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 s_{q_1} s_{q_3} - d_7 c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} - d_7 c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - a_1 s_{q_1}, \quad (5.50)$$

$$\sigma_2 = a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} + d_7 c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - d_7 s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - d_7 c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}, \quad (5.51)$$

$$\sigma_3 = a_3 c_{q_1} c_{q_3} - d_4 c_{q_1} s_{q_3} - d_7 c_{q_1} c_{q_5} s_{q_3} - d_7 c_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}, \quad (5.52)$$

$$\sigma_4 = a_3 c_{q_3} s_{q_1} - d_4 s_{q_1} s_{q_3} - d_7 c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} - d_7 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_1} s_{q_5}, \quad (5.53)$$

$$\sigma_5 = d_7 c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5} - a_3 s_{q_3} - d_7 c_{q_3} c_{q_5} - d_4 c_{q_3}, \quad (5.54)$$

$$\sigma_6 = -d_7 c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} - d_7 c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} - d_7 c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3}, \quad (5.55)$$

$$\sigma_7 = d_7 c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} - d_7 c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} - d_7 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3}. \quad (5.56)$$

Natomiast prędkość punktu  $T$  wynosi:

$$\mathbf{v}_T^B = \begin{bmatrix} \sigma_1 \dot{q}_1 + (a_2 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_2}) \dot{q}_2 + \sigma_3 \dot{q}_3 + \sigma_6 \dot{q}_4 + \sigma_9 \dot{q}_5 + \sigma_{12} \dot{q}_6 \\ \sigma_2 \dot{q}_1 + (a_2 \mathbf{c}_{q_2} \mathbf{s}_{q_1}) \dot{q}_2 + \sigma_4 \dot{q}_3 + \sigma_7 \dot{q}_4 + \sigma_{10} \dot{q}_5 + \sigma_{13} \dot{q}_6 \\ (-a_2 \mathbf{s}_{q_2}) \dot{q}_2 + \sigma_5 \dot{q}_3 + \sigma_8 \dot{q}_4 + \sigma_{11} \dot{q}_5 + \sigma_{14} \dot{q}_6 \end{bmatrix}, \quad (5.57)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = & (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}) - \\ & d_4 \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} - a_2 \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_2} - a_3 \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - a_1 \mathbf{s}_{q_1} + \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\begin{aligned} & x_T (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}) + \\ & y_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 = & a_1 \mathbf{c}_{q_1} + d_4 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} + a_2 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_2} + a_3 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} + \\ & (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} - \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5}) + \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} & x_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4}) + \\ & y_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 = & a_3 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} - d_4 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}) + \\ & x_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6}) + \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$y_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6}),$$

$$\begin{aligned} \sigma_4 = & a_3 \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} - d_4 \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5}) + \\ & x_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1}) + \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$y_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6}),$$

$$\begin{aligned} \sigma_5 = & (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5}) - a_3 \mathbf{s}_{q_3} - d_4 \mathbf{c}_{q_3} + \\ & x_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3}) - \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$y_T (\mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6}),$$

$$\begin{aligned} \sigma_6 = & (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5}) + \\ & x_T (\mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4}) + \end{aligned} \quad (5.63)$$

$$y_T (\mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}),$$

$$\begin{aligned} \sigma_7 = & (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} + \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}) + \\ & x_T (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + x_T \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6}) + \end{aligned} \quad (5.64)$$

$$y_T (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}),$$

$$\sigma_8 = (d_7 + z_T) \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} + x_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + x_T \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4}) + y_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}), \quad (5.65)$$

$$\sigma_9 = (d_7 + z_T) (-\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3}) + x_T (\mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5}) + y_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6}), \quad (5.66)$$

$$\sigma_{10} = (d_7 + z_T) (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3}) + x_T (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}) + y_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6}), \quad (5.67)$$

$$\sigma_{11} = (d_7 + z_T) (\mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5}) + x_T (\mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} + x_T \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_5}) - y_T (\mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6}), \quad (5.68)$$

$$\sigma_{12} = x_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}) + y_T (\mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_5} + \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3}), \quad (5.69)$$

$$\sigma_{13} = x_T (\mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6}) + y_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4}), \quad (5.70)$$

$$\sigma_{14} = x_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6}) + y_T (\mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5}). \quad (5.71)$$

Prędkość kątowna jest opisywana wektorem prędkości kątowej  $\boldsymbol{\omega}(t)$ . Wektor ten jest jednoznacznie reprezentowany przez macierz skośnie symetryczną  $\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega})$  o następującej strukturze:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.72)$$

gdzie:  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ ,  $\omega_z$  to składowe wektora prędkości kątowej zapisanego w formie:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$

Różniczkując względem czasu macierz rotacji otrzymano następującą zależność:

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) \mathbf{R}(t). \quad (5.74)$$



Przekształcając tę zależność uzyskano macierz skośnie symetryczną elementów wektora prędkości kątowej:

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_n^B) = \dot{\mathbf{R}}_n^B (\mathbf{R}_n^B)^T. \quad (5.75)$$

W przypadku robota ABB IRB 2400 prędkości kątowe układów związanych z poszczególnymi członami względem układu bazowego są następujące:

$$\boldsymbol{\omega}_1^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.76)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2^B = \begin{bmatrix} -\dot{q}_2 s_{q_1} \\ \dot{q}_2 c_{q_1} \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.77)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3^B = \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 s_{q_1} \\ \dot{q}_3 c_{q_1} \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

$$\boldsymbol{\omega}_4^B = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 c_{q_1} c_{q_3} - \dot{q}_3 s_{q_1} \\ \dot{q}_3 c_{q_1} + \dot{q}_4 c_{q_3} s_{q_1} \\ \dot{q}_1 - \dot{q}_4 s_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.79)$$

$$\boldsymbol{\omega}_5^B = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 c_{q_1} c_{q_3} - \dot{q}_3 s_{q_1} + \dot{q}_5 (-c_{q_4} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4}) \\ \dot{q}_4 c_{q_3} s_{q_1} + \dot{q}_3 c_{q_1} + \dot{q}_5 (c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4}) \\ \dot{q}_1 - \dot{q}_4 s_{q_3} + \dot{q}_5 c_{q_3} s_{q_4} \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

$$\boldsymbol{\omega}_6^B = \boldsymbol{\omega}_7^B = \boldsymbol{\omega}_T^B = \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 s_{q_1} + \dot{q}_4 c_{q_1} c_{q_3} + (c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1}) \dot{q}_5 + \sigma_1 \dot{q}_6 \\ c_{q_1} \dot{q}_3 + (c_{q_3} s_{q_1}) \dot{q}_4 + (c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4}) \dot{q}_5 + \sigma_2 \dot{q}_6 \\ \dot{q}_1 - s_{q_3} \dot{q}_4 + (c_{q_3} s_{q_4}) \dot{q}_5 + (-c_{q_5} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_6 \end{bmatrix}, \quad (5.81)$$

gdzie:

$$\sigma_1 = c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}, \quad (5.82)$$

$$\sigma_2 = c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5}. \quad (5.83)$$

Uzyskany w ten sposób opis kinematyki został wykorzystany do generowania trajektorii efektora końcowego oraz opisu dynamiki manipulatora.

## 5.2. Jakobian manipulatora

W poprzednim podrozdziale przedstawiono równania wiążące pozycję i orientację w przestrzeni kartezjańskiej z pozycją przegubów w przestrzeni konfiguracyjnej. Wyznaczono także wektory odwzorowujące prędkości członów manipulatora w przestrzeni współrzędnych kartezjańskich. Takie odwzorowanie można wygodniej zapisać w formie macierzy jacobianowej, nazywanej dalej Jakobianem manipulatora lub w skrócie Jakobianem. Będzie on wykorzystywany do opisu dynamiki manipulatora oraz projektowania układu sterowania. Przekształcenie prędkości kątowej  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  z  $n$ -wymiarowej przestrzeni przegubowej do prędkości przestrzennej  $\mathbf{v}_i^B$   $i$ -tego członu z wykorzystaniem Jakobianu można zapisać jako:

$$\mathbf{v}_i^B = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i^B \\ \boldsymbol{\omega}_i^B \end{bmatrix} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.84)$$

gdzie:  $\mathbf{v}_i^B \in \mathbb{R}^3$  – prędkość liniowa punktu początkowego układu odniesienia związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego,  $\boldsymbol{\omega}_i^B \in \mathbb{R}^3$  – prędkość kątowa rotacji układu związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego,  $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{6 \times n}$  – Jakobian manipulatora,  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^n$  – wektor prędkości w przestrzeni konfiguracyjnej,  $\mathbf{v}_i^B \in \mathbb{R}^6$  – wektor prędkości przestrzennej  $i$ -tego członu względem układu bazowego.

Wyróżniając osobne jacobiany dla prędkości liniowej i kątowej, można zapisać następujące zależności:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_v \\ \mathbf{J}_\omega \end{bmatrix}, \quad (5.85)$$

$$\mathbf{v}_i^B = \mathbf{J}_v \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.86)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^B = \mathbf{J}_\omega \dot{\mathbf{q}}. \quad (5.87)$$

Wymiarowość macierzy jacobianowej zależy od liczby współrzędnych opisujących transformowane przestrzenie. W opisywanym przypadku przyjęto przestrzeń kartezjańską, opisywaną przez sześć zmiennych określających trzy translacje i trzy rotacje. Wymiar przestrzeni konfiguracyjnej manipulatora zależy od liczby niezależnych członów ruchomych. Opisywany manipulator posiada sześć niezależnych osi. Sposób wyznaczenia macierzy jacobianowej  $n$ -członowego manipulatora opisano w [51]. Macierz składa się  $n$  kolumn:

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \quad \dots \quad \mathbf{J}_n]. \quad (5.88)$$

W przypadku członów obrotowych elementy macierzy jacobianowej zostały zdefiniowane jako:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{vi} \\ \mathbf{J}_{\omega i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_i^0 \times (\mathbf{o}_n^0 - \mathbf{o}_i^0) \\ \mathbf{z}_i^0 \end{bmatrix}. \quad (5.89)$$

Robot IRB 2400 składa się z sześciu członów obrotowych, przy czym ruch członu drugiego nie powoduje zmiany orientacji dalszych członów. Uwzględniając ten fakt, do wyznaczenia Jakobianu manipulatora ABB IRB 2400 zastosowano następującą zależność:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^B \times (\mathbf{o}_T^B - \mathbf{o}_1^B) & \mathbf{z}_2^B \times (\mathbf{o}_3^B - \mathbf{o}_2^B) & \mathbf{z}_3^B \times (\mathbf{o}_T^B - \mathbf{o}_3^B) & \dots \\ \mathbf{z}_1^B & [0 \ 0 \ 0]^T & \mathbf{z}_3^B & \\ \mathbf{z}_4^B \times (\mathbf{o}_T^B - \mathbf{o}_4^B) & \mathbf{z}_5^B \times (\mathbf{o}_T^B - \mathbf{o}_5^B) & \mathbf{z}_6^B \times (\mathbf{o}_T^B - \mathbf{o}_6^B) \\ \mathbf{z}_4^B & \mathbf{z}_5^B & \mathbf{z}_6^B \end{bmatrix}. \quad (5.90)$$

gdzie symbol  $\mathbf{z}_i^B$  oznacza trzecią kolumnę macierzy rotacji układu związanego z  $i$ -tym członem względem układu bazowego. Tak wyznaczony jakobian pozwala na transformację do przestrzeni zadaniowej manipulatora.

W przypadku manipulatora ABB IRB 2400 jakobian ma postać:

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_3(d_7 + z_T) - d_4 c_{q_3} s_{q_1} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 s_{q_1} s_{q_3} - a_1 s_{q_1} + \sigma_1 x_T + \sigma_2 y_T \\ a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} + \sigma_6(d_7 + z_T) + \sigma_4 x_T + \sigma_5 y_T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (5.91)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{q_3} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3}, \\ \sigma_2 &= c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5}, \\ \sigma_4 &= c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}, \\ \sigma_5 &= c_{q_1} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_{q_1} c_{q_2} \\ a_2 c_{q_2} s_{q_1} \\ -a_2 s_{q_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.93)$$

$$\mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} a_3 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} - d_4 \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} + \sigma_3 (d_7 + z_T) + \sigma_1 x_T + \sigma_2 y_T \\ a_3 \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} - d_4 \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} + \sigma_6 (d_7 + z_T) + \sigma_4 x_T + \sigma_5 y_T \\ -a_3 \mathbf{s}_{q_3} - d_4 \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5} + \sigma_9 (d_4 + z_T) + \sigma_7 x_T + \sigma_8 y_T \\ -\mathbf{s}_{q_1} \\ \mathbf{c}_{q_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.94)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathbf{c}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \right), \\ \sigma_2 &= \mathbf{c}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} \right), \\ \sigma_3 &= -\mathbf{c}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} \right), \\ \sigma_4 &= \mathbf{s}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \right), \\ \sigma_5 &= \mathbf{s}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} \right), \\ \sigma_6 &= -\mathbf{s}_{q_1} \left( \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} \right), \\ \sigma_7 &= \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3}, \\ \sigma_8 &= -\mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6}, \\ \sigma_9 &= \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{c}_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} \sigma_3 d_7 + \sigma_1 x_T + \sigma_2 y_T + \sigma_3 z_T \\ \sigma_6 (d_7 + z_T) + \sigma_4 x_T + \sigma_5 y_T \\ \sigma_9 (d_7 + z_T) + \sigma_7 x_T + \sigma_8 y_T \\ \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_3} \\ \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_1} \\ -\mathbf{s}_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.96)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4}, \\ \sigma_2 &= \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} + \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_3} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}, \\ \sigma_3 &= \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} - \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_5}, \\ \sigma_4 &= \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4}, \\ \sigma_5 &= \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} - \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6}, \\ \sigma_6 &= \mathbf{c}_{q_1} \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5} + \mathbf{s}_{q_1} \mathbf{s}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}, \\ \sigma_7 &= \mathbf{c}_{q_3} \left( \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} + \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{c}_{q_6} \mathbf{s}_{q_4} \right), \\ \sigma_8 &= \mathbf{c}_{q_3} \left( \mathbf{c}_{q_4} \mathbf{c}_{q_6} - \mathbf{c}_{q_5} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_6} \right), \\ \sigma_9 &= \mathbf{c}_{q_3} \mathbf{s}_{q_4} \mathbf{s}_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.97)$$

$$\mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} \sigma_3 d_7 + \sigma_1 x_T + \sigma_2 y_T + \sigma_3 z_T \\ \sigma_6 (d_7 + z_T) + \sigma_4 x_T + \sigma_5 y_T \\ \sigma_9 (d_7 + z_T) + \sigma_7 x_T + \sigma_8 y_T \\ c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} \\ c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} \\ c_{q_3} s_{q_4} \end{bmatrix}, \quad (5.98)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5}, \\ \sigma_2 &= c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= -c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} - c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3}, \\ \sigma_4 &= c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1}, \\ \sigma_5 &= c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} - c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} - c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3}, \\ \sigma_7 &= c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} s_{q_5}, \\ \sigma_8 &= -c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_9 &= s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

$$\mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} \sigma_1 x_T + \sigma_2 y_T \\ \sigma_3 x_T + \sigma_4 y_T \\ \sigma_5 x_T + \sigma_6 y_T \\ c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5} \\ c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} \\ -c_{q_5} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \end{bmatrix}, \quad (5.100)$$

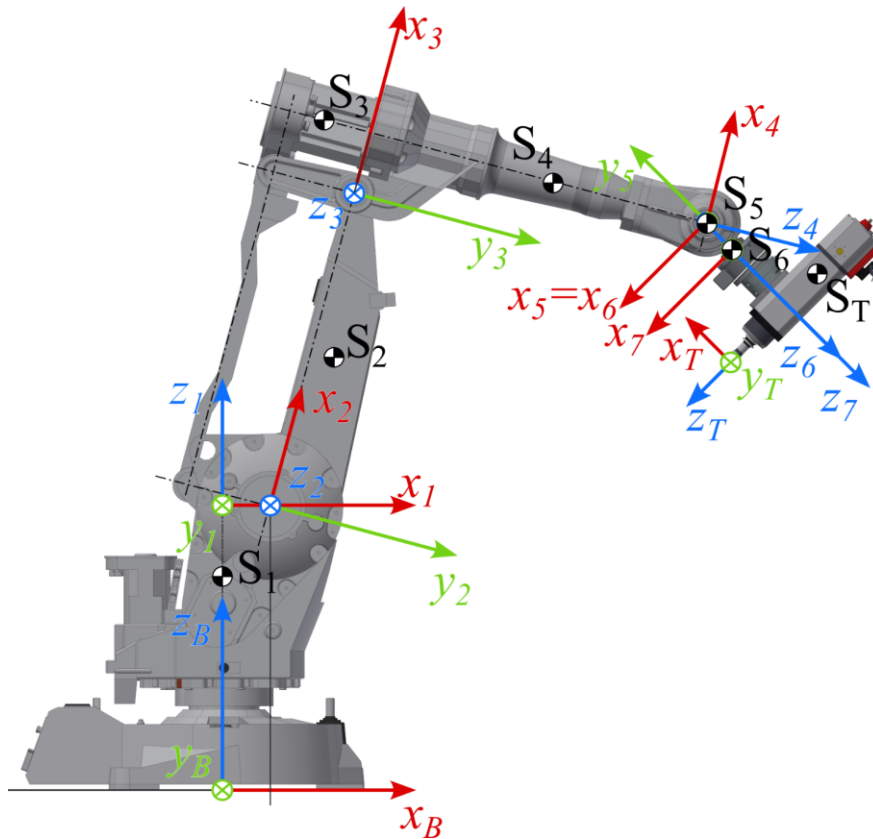
gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{q_1} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_4} c_{q_6} s_{q_1} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_5} s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}, \\ \sigma_2 &= c_{q_4} s_{q_1} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} + c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_4} - c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}, \\ \sigma_3 &= c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_1} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6}, \\ \sigma_4 &= c_{q_3} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_1} s_{q_3}, \\ \sigma_5 &= c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Wyznaczony jacobian może zostać wykorzystany do przekształceń równań dynamiki z przestrzeni konfiguracyjnej do przestrzeni zadaniowej i na odwrót.

### 5.3. Dynamiczne równania ruchu robota – formalizm Eulera-Lagrange’a

Celem przeprowadzonej analizy dynamicznej było wyznaczenie dynamicznych równań ruchu, które posłużyły do zaprojektowania układu sterowania robotem. Metody wyznaczania równań dynamiki manipulatorów zostały opisane np. w pracach [50–52]. W celu sformułowania równań dynamiki manipulatora przyjęto uproszczony model rozkładu mas, który zaprezentowano na rys. 5.2. Masa elementów równoległego ramienia poruszającego trzecim członem robota jest dużo mniejsza w stosunku do całej poruszanej masy członów 3, 4, 5 i 6. Jej wpływ na dynamikę obiektu jest pomijalnie mały.



Rys. 5.2. Schemat rozłożenia środków mas

Położenie środka masy  $i$ -tego członu względem układu współrzędnych związanego z członem opisuje wektor  $\mathbf{r}_{S_i}^i$ :

$$\mathbf{r}_{S_1}^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{S_1} \end{bmatrix}, \quad (5.102)$$

$$\mathbf{r}_{S_2}^2 = \begin{bmatrix} x_{S_2} \\ y_{S_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.103)$$

$$\mathbf{r}_{S_3}^3 = \begin{bmatrix} x_{S_3} \\ y_{S_3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.104)$$

$$\mathbf{r}_{S_4}^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{S_4} \end{bmatrix}, \quad (5.105)$$

$$\mathbf{r}_{S_5}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.106)$$

$$\mathbf{r}_{S_6}^6 = \begin{bmatrix} x_{S_6} \\ y_{S_6} \\ z_{S_6} \end{bmatrix}, \quad (5.107)$$

$$\mathbf{r}_{S_T}^7 = \begin{bmatrix} x_{S_T} \\ y_{S_T} \\ z_{S_T} \end{bmatrix}. \quad (5.108)$$

Położenie środka masy członu nr 6 zależy od narzędzia zamocowanego do flanszy robota. Ogólną postać równania Eulera-Lagrange'a, wyprowadzoną z równania dynamiki Newtona można zapisać jako:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Omega_i, \quad (5.109)$$

gdzie  $\Omega_i$  – siła uogólniona, odpowiadająca  $i$ -tej współrzędnej uogólnionej,  $L$  – funkcja Lagrange'a zapisana w postaci:

$$L = K - P, \quad (5.110)$$

gdzie  $K$  – energia kinetyczna,  $P$  – energia potencjalna.

Energię kinetyczną manipulatorów wielocłonowych można zapisać jako:

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad (5.111)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  – macierz bezwładności. Energia potencjalna w tym przypadku wynika wyłącznie z oddziaływania sił pola grawitacyjnego.

W przyjętym modelu pominięto zjawiska związane z odkształcaniem się konstrukcji robota. Zatem równanie określające energię potencjalną jest następujące:

$$P = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{g}^T \mathbf{o}_{S_i}^B, \quad (5.112)$$

gdzie:  $\mathbf{g} = [0 \ 0 \ -g]^T$ ,  $g = 9,81 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$  – wektor przyspieszenia ziemskiego,  $\mathbf{o}_{S_i}^B$  – wektor translacji środka masy  $i$ -tego członu manipulatora. Podstawiając równania (5.112) i (5.111) do (5.109) otrzymano:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{\Omega}, \quad (5.113)$$

gdzie:  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – macierz bezwładności,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  – wektor momentów sił odśrodkowych i sił Coriolisa,  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^n$  – wektor grawitacji,  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^n$  – wektor sił uogólnionych.  $n$  – liczba stopni swobody. Macierz bezwładności jest wyznaczana na podstawie zależności opisanej w [51] jako:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left( m_i \mathbf{J}_{v_{S_i}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{v_{S_i}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_i}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) \right), \quad (5.114)$$

gdzie:  $m_i$  – to masa  $i$ -tego członu,  $\mathbf{J}_{v_{S_i}}(\mathbf{q})$  i  $\mathbf{J}_{\omega_i}(\mathbf{q})$  – jacobiany stosowane do określenia odpowiednio prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej  $i$ -tego członu,  $\mathbf{I}_i$  – macierz masowych momentów bezwładności członów względem układu odniesienia równoległego do układu związanego z członem, ale którego punkt początkowy zaczepiono w środku masy  $i$ -tego członu,  $w$  – wymiar przestrzeni położenia w przestrzeni zadaniowej,  $p$  – wymiar przestrzeni orientacji w przestrzeni zadaniowej. Macierz  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  jest wyznaczana jako:

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n c_{ijk}(\mathbf{q}) \dot{q}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{M}_{kj}(\mathbf{q})}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathbf{M}_{ki}(\mathbf{q})}{\partial q_j} + \frac{\partial \mathbf{M}_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i. \quad (5.115)$$

Wektor sił grawitacji określono na podstawie energii potencjalnej manipulatora, zgodnie z równaniem:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \frac{\partial P(\mathbf{q})}{\partial q_i}. \quad (5.116)$$

Obliczenia rozpoczęto od wyznaczenia macierzy bezwładności manipulatora. Do tego potrzebna jest znajomość macierzy jacobianowych dla punktów stanowiących środek masy danego członu robota oraz macierzy masowych momentów bezwładności członów robota. Zgodnie z (5.89) jacobiany prędkości kątowych  $i$ -tych członów robota IRB 2400 mają postać:

$$\mathbf{J}_{\omega_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.117)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_2} = \begin{bmatrix} 0 & -s_{q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{q_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.118)$$



$$\mathbf{J}_{\omega_3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{q_1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.119)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_{q_1} & c_{q_1} c_{q_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{q_1} & s_{q_1} c_{q_3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -s_{q_3} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.120)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_{q_1} & c_{q_1} c_{q_3} & c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} - s_{q_1} c_{q_4} & 0 \\ 0 & 0 & c_{q_1} & s_{q_1} c_{q_3} & c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -s_{q_3} & c_{q_3} s_{q_4} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{J}_{\omega_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -s_{q_1} & c_{q_1} c_{q_3} & c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} - s_{q_1} c_{q_4} & c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \\ 0 & 0 & c_{q_1} & s_{q_1} c_{q_3} & c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} & s_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \\ 1 & 0 & 0 & -s_{q_3} & c_{q_3} s_{q_4} & -s_{q_3} c_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \end{bmatrix}. \quad (5.122)$$

Jakobiany prędkości liniowych środków mas  $i$ -tych członów to:

$$\mathbf{J}_{v_{S1}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.123)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S2}} = \begin{bmatrix} -s_{q_1} (a_1 + x_{S_2} s_{q_2} + y_{S_2} c_{q_2}) & c_{q_1} (x_{S_2} c_{q_2} - y_{S_2} s_{q_2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{q_1} (a_1 + x_{S_2} s_{q_2} + y_{S_2} c_{q_2}) & s_{q_1} (x_{S_2} c_{q_2} - y_{S_2} s_{q_2}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_{S_2} s_{q_2} - y_{S_2} c_{q_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.124)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S3}} = \begin{bmatrix} -s_{q_1} (a_1 + y_{S_3} c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + x_{S_3} s_{q_3}) & a_2 c_{q_1} c_{q_2} & c_{q_1} (x_{S_3} c_{q_3} - y_{S_3} s_{q_3}) & 0 & 0 & 0 \\ c_{q_1} (a_1 + y_{S_3} c_{q_3} + a_2 s_{q_2} + x_{S_3} s_{q_3}) & a_2 s_{q_1} c_{q_2} & s_{q_1} (x_{S_3} c_{q_3} - y_{S_3} s_{q_3}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 s_{q_2} & -y_{S_3} c_{q_3} - x_{S_3} s_{q_3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.125)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S4}} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{q_1} - (d_4 + z_{S_4}) s_{q_1} c_{q_3} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 s_{q_1} s_{q_3} & a_2 c_{q_1} c_{q_2} & & & \\ a_1 c_{q_1} + (d_4 + z_{S_4}) c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} & a_2 s_{q_1} c_{q_2} & & & \\ 0 & -a_2 s_{q_2} & & & \\ a_3 c_{q_1} c_{q_3} - (d_4 + z_{S_4}) c_{q_1} s_{q_3} & 0 & 0 & 0 & \\ a_3 s_{q_1} c_{q_3} - (d_4 + z_{S_4}) s_{q_1} s_{q_3} & 0 & 0 & 0 & \\ -(d_4 + z_{S_4}) c_{q_3} - a_3 s_{q_3} & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}, \quad (5.126)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S5}} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{q_1} - d_4 s_{q_1} c_{q_3} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 s_{q_1} s_{q_3} & a_2 c_{q_1} c_{q_2} & a_3 c_{q_1} c_{q_3} - d_4 c_{q_1} s_{q_3} \\ a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} & a_2 s_{q_1} c_{q_2} & a_3 s_{q_1} c_{q_3} - d_4 s_{q_1} s_{q_3} \dots \\ 0 & -a_2 s_{q_2} & -d_4 c_{q_3} - a_3 s_{q_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.127)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{S6,1}} & \mathbf{J}_{v_{S6,2}} & \mathbf{J}_{v_{S6,3}} & \mathbf{J}_{v_{S6,4}} & \mathbf{J}_{v_{S6,5}} & \mathbf{J}_{v_{S6,6}} \end{bmatrix}, \quad (5.128)$$

gdzie:

$$\mathbf{J}_{v_{S6,1}} = \begin{bmatrix} z_{S_6} (c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5} s_{q_1} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5}) - a_1 s_{q_1} - d_4 s_{q_1} c_{q_3} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 s_{q_1} s_{q_3} \\ z_{S_6} (c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}) + a_1 c_{q_1} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.129)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6,2}} = \begin{bmatrix} a_2 c_{q_1} c_{q_2} \\ a_2 s_{q_1} c_{q_2} \\ -a_2 s_{q_2} \end{bmatrix}, \quad (5.130)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6,3}} = \begin{bmatrix} a_3 c_{q_1} c_{q_3} - d_4 c_{q_1} s_{q_3} - z_{S_6} (c_{q_1} s_{q_3} c_{q_5} + c_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}) \\ a_3 s_{q_1} c_{q_3} - d_4 s_{q_1} s_{q_3} - z_{S_6} (s_{q_1} s_{q_3} c_{q_5} + s_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}) \\ -d_4 c_{q_3} - a_3 s_{q_3} + z_{S_6} (s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5}) \end{bmatrix}, \quad (5.131)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6,4}} = \begin{bmatrix} z_{S_6} (c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - s_{q_1} c_{q_4} s_{q_5}) \\ z_{S_6} (s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_5}) \\ z_{S_6} c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} \end{bmatrix}, \quad (5.132)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6,5}} = \begin{bmatrix} -z_{S_6} (c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} + s_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}) \\ z_{S_6} (c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} - s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} - s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}) \\ z_{S_6} s_{q_3} s_{q_5} - z_{S_6} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} \end{bmatrix}, \quad (5.133)$$

$$\mathbf{J}_{v_{S6,6}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.134)$$

W modelu dynamiki uwzględniono masę narzędzia, zatem określono dodatkowy jacobian prędkości liniowej środka masy narzędzia.

$$\mathbf{J}_{v_{ST}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{v_{ST,1}} & \mathbf{J}_{v_{ST,2}} & \mathbf{J}_{v_{ST,3}} & \mathbf{J}_{v_{ST,4}} & \mathbf{J}_{v_{ST,5}} & \mathbf{J}_{v_{ST,6}} \end{bmatrix}. \quad (5.135)$$

Elementy tego jacobianu to:

$$\mathbf{J}_{v_{ST,1}} = \begin{bmatrix} -a_1 s_{q_1} - a_2 s_{q_1} s_{q_2} - a_3 - s_{q_1} s_{q_3} - d_4 s_{q_1} c_{q_3} + \sigma_3 d_7 + \sigma_1 x_{S_T} + \sigma_2 y_{S_T} + \sigma_3 z_{S_T} \\ a_1 c_{q_1} + a_2 c_{q_1} s_{q_2} + a_3 c_{q_1} s_{q_3} + d_4 c_{q_1} c_{q_3} + \sigma_5 d_7 + \sigma_4 x_{S_T} + \sigma_6 y_{S_T} + \sigma_5 z_{S_T} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.136)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_2 &= c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} - s_{q_1} c_{q_3} c_{q_5}, \\ \sigma_4 &= c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - s_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} - c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + s_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}. \end{aligned} \quad (5.137)$$

$$\mathbf{J}_{v_{ST,2}} = \begin{bmatrix} a_2 c_{q_1} c_{q_2} \\ a_2 s_{q_1} c_{q_2} \\ -a_2 s_{q_2} \end{bmatrix}, \quad (5.138)$$

$$\mathbf{J}_{v_{ST,3}} = \begin{bmatrix} a_3 c_{q_1} c_{q_3} - d_4 c_{q_1} s_{q_3} + \sigma_3 d_7 + \sigma_1 x_{S_T} + \sigma_2 y_{S_T} + \sigma_3 z_{S_T} \\ a_3 s_{q_1} c_{q_3} - d_4 s_{q_1} s_{q_3} + \sigma_8 d_7 + \sigma_4 x_{S_T} + \sigma_5 y_{S_T} + \sigma_8 z_{S_T} \\ -a_3 s_{q_3} - d_4 c_{q_3} + \sigma_9 d_7 + \sigma_6 x_{S_T} + \sigma_7 y_{S_T} + \sigma_9 z_{S_T} \end{bmatrix}, \quad (5.139)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= c_{q_1} c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_2 &= c_{q_1} c_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= -c_{q_1} c_{q_5} s_{q_3} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}, \\ \sigma_4 &= s_{q_1} c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_5 &= s_{q_1} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + s_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_7 &= -c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} - s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_8 &= -s_{q_1} s_{q_3} c_{q_5} - s_{q_1} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5}, \\ \sigma_9 &= s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

$$\mathbf{J}_{v_{ST,4}} = \begin{bmatrix} \sigma_7 d_7 + \sigma_1 x_{S_T} + \sigma_2 y_{S_T} + \sigma_7 z_{S_T} \\ \sigma_8 d_7 + \sigma_3 x_{S_T} + \sigma_4 y_{S_T} + \sigma_8 z_{S_T} \\ \sigma_9 d_7 + \sigma_5 x_{S_T} + \sigma_6 y_{S_T} + \sigma_9 z_{S_T} \end{bmatrix}, \quad (5.141)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} - s_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_2 &= s_{q_1} c_{q_6} s_{q_4} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} + s_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} - c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_4 &= s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}, \\ \sigma_5 &= c_{q_3} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_6 &= c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_7 &= c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - s_{q_1} c_{q_4} s_{q_5}, \\ \sigma_8 &= c_{q_1} c_{q_4} s_{q_5} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}, \\ \sigma_9 &= c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.142)$$

$$\mathbf{J}_{v_{ST,5}} = \begin{bmatrix} \sigma_7 d_7 + \sigma_1 x_{S_T} + \sigma_2 y_{S_T} + \sigma_7 z_{S_T} \\ \sigma_8 d_7 + \sigma_3 x_{S_T} + \sigma_4 y_{S_T} + \sigma_8 z_{S_T} \\ \sigma_9 d_7 + \sigma_5 x_{S_T} + \sigma_6 y_{S_T} + \sigma_9 z_{S_T} \end{bmatrix}, \quad (5.143)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_2 &= c_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_3 &= s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_4 &= s_{q_1} c_{q_3} c_{q_5} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_5 &= s_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} c_{q_6}, \\ \sigma_6 &= -s_{q_3} c_{q_5} s_{q_6} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6}, \\ \sigma_7 &= -c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} - s_{q_1} c_{q_5} s_{q_4} - c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}, \\ \sigma_8 &= c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} - s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} - s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}, \\ \sigma_9 &= s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}. \end{aligned} \quad (5.144)$$

$$\mathbf{J}_{v_{ST,6}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 x_{S_T} + \sigma_2 y_{S_T} \\ \sigma_3 x_{S_T} + \sigma_4 y_{S_T} \\ \sigma_5 x_{S_T} + \sigma_6 y_{S_T} \end{bmatrix}, \quad (5.145)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} - s_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\
\sigma_2 &= s_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} + s_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\
\sigma_3 &= c_{q_1} c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} + s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\
\sigma_4 &= s_{q_1} c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_1} c_{q_4} s_{q_6} - s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + s_{q_1} s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}, \\
\sigma_5 &= c_{q_3} s_{q_4} c_{q_6} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6}, \\
\sigma_6 &= c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - s_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}.
\end{aligned} \tag{5.146}$$

Macierze momentów bezwładności  $i$ -tego członu określono jako:

$$\mathbf{I}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{1zz} \end{bmatrix}, \tag{5.147}$$

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} I_{2xx} & I_{2xy} & I_{2xz} \\ I_{2xy} & I_{2yy} & I_{2yz} \\ I_{2xz} & I_{2yz} & I_{2zz} \end{bmatrix}, \tag{5.148}$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} I_{3xx} & I_{3xy} & I_{3xz} \\ I_{3xy} & I_{3yy} & I_{3yz} \\ I_{3xz} & I_{3yz} & I_{3zz} \end{bmatrix}, \tag{5.149}$$

$$\mathbf{I}_4 = \begin{bmatrix} I_{4xx} & I_{4xy} & I_{4xz} \\ I_{4xy} & I_{4yy} & I_{4yz} \\ I_{4xz} & I_{4yz} & I_{4zz} \end{bmatrix}, \tag{5.150}$$

$$\mathbf{I}_5 = \begin{bmatrix} I_{5xx} & I_{5xy} & I_{5xz} \\ I_{5xy} & I_{5yy} & I_{5yz} \\ I_{5xz} & I_{5yz} & I_{5zz} \end{bmatrix}, \tag{5.151}$$

$$\mathbf{I}_6 = \begin{bmatrix} I_{6xx} & I_{6xy} & I_{6xz} \\ I_{6xy} & I_{6yy} & I_{6yz} \\ I_{6xz} & I_{6yz} & I_{6zz} \end{bmatrix}. \tag{5.152}$$

Jednocześnie macierz momentów bezwładności narzędzia określono w postaci:

$$\mathbf{I}_T = \begin{bmatrix} I_{Txx} & I_{Txy} & I_{Txz} \\ I_{Txy} & I_{Tyy} & I_{Tyx} \\ I_{Txz} & I_{Tyx} & I_{Tzz} \end{bmatrix}. \tag{5.153}$$

Uwzględniając bezwładność związaną z narzędziem, równanie (5.114) zapisano w formie:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n \left( m_i \mathbf{J}_{v_{ci}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{v_{ci}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_i}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_i(\mathbf{q}) \mathbf{I}_i \mathbf{R}_i^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_i}(\mathbf{q}) \right) +$$

$$m_T \mathbf{J}_{v_{ST}}^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{v_{ST}}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega_T}^T(\mathbf{q}) \mathbf{R}_T(\mathbf{q}) \mathbf{I}_T \mathbf{R}_T^T(\mathbf{q}) \mathbf{J}_{\omega_T}(\mathbf{q}), \quad (5.154)$$

gdzie:  $m_T$  – masa narzędzia,  $\mathbf{J}_{v_{ST}}(\mathbf{q})$  i  $\mathbf{J}_{\omega_T}(\mathbf{q})$  – jacobiany stosowane do określenia odpowiednio prędkości liniowej środka masy i prędkości kątowej narzędzia,  $\mathbf{I}_T$  – macierz momentów bezwładności narzędzia. W wyniku tych przekształceń otrzymano macierz bezwładności manipulatora IRB 2400 w postaci:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{61} & \cdots & M_{66} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (5.155)$$

Macierz  $\mathbf{C}$  wyznaczono na podstawie równania (5.115):

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{16} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{61} & \cdots & C_{66} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}. \quad (5.156)$$

Dokładne wartości macierzy  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{M}$  zostały wypisane w dodatku z względu na obszerny zapis. Następnie zgodnie z zależnością (5.116) wyznaczono wektor momentów sił ciężkości:

$$\mathbf{G} = [G_1 \quad G_2 \quad G_3 \quad G_4 \quad G_5 \quad G_6]^T, \quad (5.157)$$

gdzie:

$$G_1 = 0, \quad (5.158)$$

$$G_2 = -g m_2 (y_{S_2} c_{q_2} + x_{S_2} s_{q_2}) - a_2 g m_3 s_{q_2} - a_2 g m_4 s_{q_2} - a_2 g m_5 s_{q_2} - a_2 g (m_6 + m_T) s_{q_2}, \quad (5.159)$$

$$G_3 = -g m_6 (z_{S_6} c_{q_3+q_5} + d_4 c_{q_3} + a_3 s_{q_3}) - g m_4 (d_4 c_{q_3} + z_{S_4} c_{q_3} + a_3 s_{q_3}) - g m_5 (d_4 c_{q_3} + a_3 s_{q_3}) - g m_3 (y_{S_3} c_{q_3} + x_{S_3} s_{q_3}) - g m_T (d_4 c_{q_3} + a_3 s_{q_3} + (d_7 + z_{S_T}) (c_{q_3} c_{q_5} - c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}) + x_{S_T} (s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}) + y_{S_T} (c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6})), \quad (5.160)$$

$$G_4 = g z_{S_6} m_6 c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} + g m_T c_{q_3} (y_{S_T} (c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6}) + (d_7 + z_{S_T}) s_{q_4} s_{q_5} + x_{S_T} (c_{q_4} s_{q_6} + r_{cTx} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4})), \quad (5.161)$$

$$G_5 = g x_{S_6} m_6 (s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}) + g m_T ((d_7 + z_{S_T}) (s_{q_3} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}) + x_{S_T} (c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} s_{q_5}) - y_{S_T} (c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6})), \quad (5.162)$$

$$G_6 = g m_T \left( x_{S_T} \left( c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} \right) + y_{S_T} \left( c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} \right) \right). \quad (5.163)$$

Wektor sił uogólnionych uwzględnia wektor momentów napędowych  $\mathbf{u}$ , generowanych przez napędy manipulatora oraz wektor momentów oporów ruchu poszczególnych członów  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}})$ :

$$\mathbf{\Omega} = \mathbf{u} - \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}). \quad (5.164)$$

Opory ruchu zamodelowano w oparciu o model opisany w pracy [115] następującym równaniem:

$$\tau_f = \left( F_C + (F_S - F_C) e^{-\left| \frac{\dot{q}}{\omega_{St}} \right|^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}) + F_v \dot{q}, \quad (5.165)$$

gdzie:  $F_S$  – współczynnik tarcia statycznego,  $F_C$  – współczynnik tarcia Coulomba,  $F_v$  – współczynnik tarcia wiskotycznego,  $\omega_{St}$  – współczynnik prędkości Striebecka. W przypadku analizowanego robota IRB 2400 wektor oporów przyjęto w następującej postaci:

$$\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \left( F_{C_1} + (F_{S_1} - F_{C_1}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_1}{\omega_{St1}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_1) + F_{v_1} \dot{q}_1 \\ \left( F_{C_2} + (F_{S_2} - F_{C_2}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_2}{\omega_{St2}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_2) + F_{v_2} \dot{q}_2 \\ \left( F_{C_3} + (F_{S_3} - F_{C_3}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_3}{\omega_{St3}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_3) + F_{v_3} \dot{q}_3 \\ \left( F_{C_4} + (F_{S_4} - F_{C_4}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_4}{\omega_{St4}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_4) + F_{v_4} \dot{q}_4 \\ \left( F_{C_5} + (F_{S_5} - F_{C_5}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_5}{\omega_{St5}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_5) + F_{v_5} \dot{q}_5 \\ \left( F_{C_6} + (F_{S_6} - F_{C_6}) e^{-\left( \frac{\dot{q}_6}{\omega_{St6}} \right)^2} \right) \text{sgn}(\dot{q}_6) + F_{v_6} \dot{q}_6 \end{bmatrix}. \quad (5.166)$$

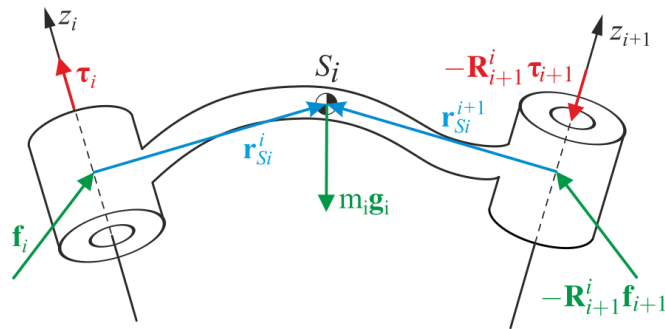
W ten sposób otrzymano macierzowe równanie opisujące dynamikę manipulatora przemysłowego ABB IRB 2400 w następującej postaci:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{u}, \quad (5.167)$$

które stanowi punkt wyjścia do dalszych prac.

## 5.4. Dynamiczne równania ruchu robota – formalizm Newtona-Eulera

W celu weryfikacji poprawności uzyskanych dynamicznych równań ruchu manipulatora ABB IRB 2400 przeprowadzono analizę dynamiki przy użyciu formalizmu Eulera Newtona opisanego w [51]. W odróżnieniu od równań Lagrange’a, w tej metodzie analizuje się ruch obrotowy i liniowy każdego członu manipulatora osobno, uwzględniając oddziaływania w postaci sił i momentów pochodzących od pozostałych członów. Obliczenia zostały przeprowadzono metodą rekurencyjną w przód – w tył. Rekurencja w przód pozwala określić prędkości i przyspieszenia poszczególnych członów robota, zaczynając od członu bazowego, na narzędziu kończąc. Dokonując obliczeń rekurencją w tył można obliczyć siły oraz momenty działające na przeguby manipulatora przechodząc przez wszystkie jego człony zaczynając od narzędzia. Na rys. 5.3 przedstawiono schemat ilustrujący siły i momenty działające na pojedynczy człon manipulatora, opisywane w układzie odniesienia, który jest związany z członem.



Rys. 5.3. Schemat sił i momentów działających na  $i$ -ty człon robota

Wektor  $\mathbf{f}_i$  to siła wywierana przez człon  $i-1$  na człon  $i$ , natomiast  $\mathbf{f}_{i+1}$  to siła oddziaływania członu  $i+1$  na człon  $i$ -ty. Zgodnie z zasadą akcji i reakcji siła ta ma przeciwny znak do siły oddziałującej na człon  $i+1$ , oraz musi być pomnożona przez macierz rotacji  $\mathbf{R}_{i+1}^i$ , aby była wyrażona w  $i$ -tym układzie związanym z  $i$ -tym członem. Podobny zapis dotyczy momentów oddziałujących na człon, czyli  $\boldsymbol{\tau}_i$  oraz  $-\mathbf{R}_{i+1}^i \boldsymbol{\tau}_{i+1}$ . Wektor tego momentu można zapisać w postaci:

$$\boldsymbol{\tau}_i = \begin{bmatrix} \tau_{xi} & \tau_{yi} & u_i \end{bmatrix}^T. \quad (5.168)$$

Moment napędowy  $u_i$  stanowi składową na osi z wektora momentu  $i$ -tego członu. Siła  $m_i \mathbf{g}_i$  jest siłą grawitacji, gdzie  $\mathbf{g}_i$  stanowi funkcję wektorową opisującą przyspieszenie ziemskie względem  $i$ -tego układu odniesienia. Punktem wyjścia do analizy dynamiki manipulatora są równania równowagi sił oraz momentów działających na  $i$ -ty człon w postaci:

$$m_i \mathbf{a}_{S_i} = \mathbf{f}_i - \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1} + m_i \mathbf{g}_i \quad (5.169)$$

$$\mathbf{I}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) = \boldsymbol{\tau}_i - \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{u}_{i+1} + \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{c_i}^i - (\mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}) \times \mathbf{r}_{c_i}^{i+1} - \boldsymbol{\tau}_{f_i} \quad (5.170)$$

gdzie:  $\mathbf{a}_{S_i}$  – przyspieszenie środka masy  $i$ -tego członu względem układu  $i$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  – przyspieszenie kątowe układu  $i$  względem układu  $i$ ,  $\mathbf{I}_i$  – macierz masowych momentów bezwładności



względem układu odniesienia równoległego do układu związanego z członem, ale którego punkt początkowy zaczepiono w środku masy  $i$ -tego członu,  $\mathbf{r}_{S_i}^i$  – wektor promień od  $i$ -tego przegubu do środka masy członu  $i$ ,  $\mathbf{r}_{S_i}^{i+1}$  – wektor promień od przegubu  $i+1$  do środka masy członu  $i$ ,  $\boldsymbol{\tau}_{f_i}$  – wektor momentu oporów ruchu członu  $i$ . Po przekształceniu równań (5.169) i (5.170) do postaci:

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_{S_i} + \mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1} - m_i \mathbf{g}_i, \quad (5.171)$$

$$\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{I}_i \boldsymbol{\varepsilon}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i) + \mathbf{R}_{i+1}^i \boldsymbol{\tau}_{i+1} - \mathbf{f}_i \times \mathbf{r}_{c_i}^i + (\mathbf{R}_{i+1}^i \mathbf{f}_{i+1}) \times \mathbf{r}_{c_i}^{i+1} + \boldsymbol{\tau}_{f_i}, \quad (5.172)$$

podstawiając kolejno  $i=n, n-1, \dots, 1$  można wyznaczyć momenty działające na poszczególne człony robota.

W pierwszym kroku iteracji uwzględniono siłę i moment wywierane przez narzędzie przymocowane do flanszy robota:

$$\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_T = m_T \mathbf{a}_{c_T} - m_T \mathbf{g}_6 \quad (5.173)$$

$$\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{I}_T \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \boldsymbol{\omega}_6 \times (\mathbf{I}_T \boldsymbol{\omega}_6) - \mathbf{f}_T \times \mathbf{r}_{c_T}^7 \quad (5.174)$$

Wektor funkcji przyspieszenia ziemskiego dla każdego członu manipulatora, przytwierdzonego podstawą do poziomej powierzchni bazowej jest określony następująco:

$$\mathbf{g}_i = -\mathbf{R}_i^0 \mathbf{g} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad (5.175)$$

Kolejno dla poszczególnych członów otrzymano następujące wartości:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}, \quad (5.176)$$

$$\mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} -g c_{q_2} \\ g s_{q_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.177)$$

$$\mathbf{g}_3 = \begin{bmatrix} -g c_{q_3} \\ g s_{q_3} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.178)$$

$$\mathbf{g}_4 = \begin{bmatrix} -g \sigma_1 \\ g \sigma_2 \\ g s_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.179)$$

$$\mathbf{g}_5 = \begin{bmatrix} -g(\sin(q_3)\sin(q_5) - \sigma_1 \cos(q_5)) \\ -g(\cos(q_5)\sin(q_3) + \cos(q_3)\cos(q_4)\sin(q_5)) \\ -g\sigma_2 \end{bmatrix}, \quad (5.180)$$

$$\mathbf{g}_6 = \begin{bmatrix} -g(\sigma_2 s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - \sigma_1 c_{q_5} c_{q_6}) \\ -g(\sigma_2 c_{q_6} - s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + \sigma_1 c_{q_5} s_{q_6}) \\ g(c_{q_5} s_{q_3} + \sigma_1 s_{q_5}) \end{bmatrix}, \quad (5.181)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos(q_3) \cos(q_4), \\ \sigma_2 &= \cos(q_3) \sin(q_4). \end{aligned} \quad (5.182)$$

Do uzyskania kompletnego rozwiązania potrzeba określenia zależności pomiędzy zmiennymi konfiguracyjnymi  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  a zmiennymi  $\mathbf{a}_{S_i}$ ,  $\boldsymbol{\omega}_i$  oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ , określonymi w przestrzeni kartezjańskiej związanej z poszczególnymi członami manipulatora. Prędkość kątową  $\boldsymbol{\omega}_i$  uzyskano mnożąc prędkości kątowe  $\boldsymbol{\omega}_i^B$  dane równaniami (5.76)-(5.81) przez transponowaną macierz rotacji układu odniesienia związanego z  $i$ -tym członem do układu bazowego:

$$\boldsymbol{\omega}_i = (\mathbf{R}_i^B)^T \boldsymbol{\omega}_i^B. \quad (5.183)$$

Uzyskane wyniki są następujące:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}, \quad (5.184)$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 c_{q_3} \\ -\dot{q}_1 s_{q_3} \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.185)$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \dot{q}_1 c_{q_3} \\ -\dot{q}_1 s_{q_3} \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}, \quad (5.186)$$

$$\boldsymbol{\omega}_4 = \begin{bmatrix} -\dot{q}_3 s_{q_4} + \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} \\ -\dot{q}_3 c_{q_4} - \dot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4} \\ \dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3} \end{bmatrix}, \quad (5.187)$$

$$\boldsymbol{\omega}_5 = \begin{bmatrix} \dot{q}_3 s_{q_4} c_{q_5} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} - s_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3}) \\ -\dot{q}_3 s_{q_4} s_{q_5} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} - c_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3}) \\ \dot{q}_5 + \dot{q}_3 c_{q_4} + \dot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4} \end{bmatrix}, \quad (5.188)$$

$$\boldsymbol{\omega}_6 = \begin{bmatrix} s_{q_6} (\dot{q}_5 + \dot{q}_3 c_{q_4} + \dot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4}) + c_{q_6} (c_{q_5} (\dot{q}_3 s_{q_4} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4}) - s_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3})) \\ c_{q_6} (\dot{q}_5 + \dot{q}_3 c_{q_4} + \dot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4}) - s_{q_6} (c_{q_5} (\dot{q}_3 s_{q_4} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4}) - s_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3})) \\ \dot{q}_6 + c_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3}) + s_{q_5} (\dot{q}_3 s_{q_4} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4}) \end{bmatrix}. \quad (5.189)$$

Przyspieszenie kątowne  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  wyznaczono jako:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = (\mathbf{R}_i^0)^T \dot{\boldsymbol{\omega}}_i^B. \quad (5.190)$$

Otrzymane wyniki, ze względu na rozbudowaną strukturę zapisu, zamieszczono w dodatku na końcu pracy. Położenie środka masy  $i$ -tego członu względem  $i$ -tego układu odniesienia zostało przedstawione za pomocą równań (5.102) - (5.107). Natomiast wektor promień od końca  $i$ -tego członu do środka masy został wyznaczony jako:

$$\mathbf{r}_{Si}^{i+1} = \mathbf{r}_{Si}^i - \mathbf{o}_{i+1}^i. \quad (5.191)$$

Odpowiednie wektory promienie dla poszczególnych członów mają następujące postacie:

$$\mathbf{r}_{S_1}^2 = \begin{bmatrix} -a_1 \\ 0 \\ z_{S_1} \end{bmatrix}, \quad (5.192)$$

$$\mathbf{r}_{S_2}^3 = \begin{bmatrix} x_{S_2} - a_2 \\ y_{S_2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.193)$$

$$\mathbf{r}_{S_3}^4 = \begin{bmatrix} x_{S_3} - a_3 \\ y_{S_3} - d_4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.194)$$

$$\mathbf{r}_{S_4}^5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{S_4} \end{bmatrix}, \quad (5.195)$$

$$\mathbf{r}_{S_5}^6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.196)$$

$$\mathbf{r}_{S_6}^7 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{S_6} - d_7 \end{bmatrix}, \quad (5.197)$$

$$\mathbf{r}_{S_T}^7 = \begin{bmatrix} x_{S_T} \\ y_{S_T} \\ z_{S_T} \end{bmatrix}. \quad (5.198)$$

Przyspieszenie środka masy  $i$ -tego członu wyznaczono przez rekurencję w przód iterując równanie:

$$\mathbf{a}_{S_i} = \mathbf{a}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \times \mathbf{r}_{S_i}^i + \boldsymbol{\omega}_i \times (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{S_i}^i). \quad (5.199)$$

Wyniki uzyskanych przyspieszeń zamieszczono w dodatku. Uzyskane zależności z równań (5.183), (5.190), (5.191) i (5.199) wprowadzono do równań (5.171) oraz (5.172) i wykonano kolejno obliczenia:

$$\mathbf{f}_T = m_T \mathbf{a}_{S_T} - m_T \mathbf{g}_T, \quad (5.200)$$

$$\boldsymbol{\tau}_T = \mathbf{I}_T \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \boldsymbol{\omega}_6 \times (\mathbf{I}_T \boldsymbol{\omega}_6) + (\mathbf{R}_7^6 \mathbf{f}_T) \times \mathbf{r}_{S_T}^7, \quad (5.201)$$

$$\mathbf{f}_6 = m_6 \mathbf{a}_{S_6} + \mathbf{R}_7^6 \mathbf{f}_T - m_6 \mathbf{g}_6 + \mathbf{f}_T, \quad (5.202)$$

$$\boldsymbol{\tau}_6 = \mathbf{I}_6 \boldsymbol{\varepsilon}_6 + \boldsymbol{\omega}_6 \times (\mathbf{I}_6 \boldsymbol{\omega}_6) + \mathbf{R}_7^6 \boldsymbol{\tau}_T - \mathbf{f}_6 \times \mathbf{r}_{S_6}^6 + \boldsymbol{\tau}_T - \boldsymbol{\tau}_{f_6}, \quad (5.203)$$

$$\mathbf{f}_5 = m_5 \mathbf{a}_{S_5} + \mathbf{R}_6^5 \mathbf{f}_6 - m_5 \mathbf{g}_5, \quad (5.204)$$

$$\boldsymbol{\tau}_5 = \mathbf{I}_5 \boldsymbol{\varepsilon}_5 + \boldsymbol{\omega}_5 \times (\mathbf{I}_5 \boldsymbol{\omega}_5) + \mathbf{R}_6^5 \boldsymbol{\tau}_6 - \mathbf{f}_5 \times \mathbf{r}_{S_5}^5 + (\mathbf{R}_6^5 \mathbf{f}_6) \times \mathbf{r}_{S_5}^6 + \boldsymbol{\tau}_{f_5}, \quad (5.205)$$

$$\mathbf{f}_4 = m_4 \mathbf{a}_{S_4} + \mathbf{R}_5^4 \mathbf{f}_5 - m_4 \mathbf{g}_4, \quad (5.206)$$

$$\boldsymbol{\tau}_4 = \mathbf{I}_4 \boldsymbol{\varepsilon}_4 + \boldsymbol{\omega}_4 \times (\mathbf{I}_4 \boldsymbol{\omega}_4) + \mathbf{R}_5^4 \boldsymbol{\tau}_5 - \mathbf{f}_4 \times \mathbf{r}_{S_4}^4 + (\mathbf{R}_5^4 \mathbf{f}_5) \times \mathbf{r}_{S_4}^5 + \boldsymbol{\tau}_{f_4}, \quad (5.207)$$

$$\mathbf{f}_3 = m_3 \mathbf{a}_{S_3} + \mathbf{R}_4^3 \mathbf{f}_4 - m_3 \mathbf{g}_3, \quad (5.208)$$

$$\boldsymbol{\tau}_3 = \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\varepsilon}_3 + \boldsymbol{\omega}_3 \times (\mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega}_3) + \mathbf{R}_4^3 \boldsymbol{\tau}_4 - \mathbf{f}_3 \times \mathbf{r}_{S_3}^3 + (\mathbf{R}_4^3 \mathbf{f}_4) \times \mathbf{r}_{S_3}^4 + \boldsymbol{\tau}_{f_3}, \quad (5.209)$$

$$\mathbf{f}_2 = m_2 \mathbf{a}_{S_2} + \mathbf{R}_3^2 \mathbf{f}_3 - m_2 \mathbf{g}_2, \quad (5.210)$$

$$\boldsymbol{\tau}_2 = \mathbf{I}_2 \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{I}_2 \boldsymbol{\omega}_2) + \mathbf{R}_3^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_{3x} & \boldsymbol{\tau}_{3y} & 0 \end{bmatrix}^T - \mathbf{f}_2 \times \mathbf{r}_{S_2}^2 + (\mathbf{R}_3^2 \mathbf{f}_3) \times \mathbf{r}_{S_2}^3 + \boldsymbol{\tau}_{f_2}, \quad (5.211)$$

$$\mathbf{f}_1 = m_1 \mathbf{a}_{S_1} + \mathbf{R}_2^1 \mathbf{f}_2 - m_1 \mathbf{g}_1, \quad (5.212)$$

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \mathbf{I}_1 \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\mathbf{I}_1 \boldsymbol{\omega}_1) + \mathbf{R}_2^1 \boldsymbol{\tau}_2 - \mathbf{f}_1 \times \mathbf{r}_{S_1}^1 + (\mathbf{R}_2^1 \mathbf{f}_2) \times \mathbf{r}_{S_1}^2 + \boldsymbol{\tau}_{f_1}. \quad (5.213)$$

Przekształcając uzyskane wyniki do równania o strukturze (5.167), otrzymano takie same postacie macierzy dynamicznego równania ruchu jak uzyskane metodą Lagrange'a. Zatem można przyjąć, że prezentowany model został sformułowany poprawnie.

## 5.5. Parametry fizyczne modelu

Przeprowadzenie badań symulacyjnych modelu wymaga znajomości parametrów fizycznych badanego obiektu takich jak masy, masowe momenty bezwładności i współczynniki tarcia. Masy poszczególnych członów manipulatora IRB 2400 oszacowano na podstawie dokumentacji technicznej elementów stanowiska. Położenie środków mas oraz wartości masowych momentów bezwładności zostały oszacowane na podstawie analizy modelu CAD manipulatora [116]. Ich wartości zaprezentowano w tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Parametry fizyczne manipulatora

	Masa		Środek masy		Masowe momenty bezwładności			
	Symbol	Wartość [kg]	Symbol	Wartość [mm]	Symbol	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]	Symbol	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]
<b>Człon 1</b>	$m_1$	192	$S_{1x}$	21	$I_{1xx}$	9,82183	$I_{1xy}$	0,50571
			$S_{1y}$	22	$I_{1yy}$	6,16127	$I_{1xz}$	-1,0596
			$S_{1z}$	-188,5	$I_{1zz}$	8,30224	$I_{1yz}$	0,10946
<b>Człon 2</b>	$m_2$	26,5	$S_{2x}$	253,4	$I_{2xx}$	0,23517	$I_{2xy}$	-0,0143
			$S_{2y}$	47,7	$I_{2yy}$	1,22338	$I_{2xz}$	0,01412
			$S_{2z}$	7	$I_{2zz}$	1,16539	$I_{2yz}$	0,00892
<b>Człon 3</b>	$m_3$	25,7	$S_{3x}$	139,5	$I_{3xx}$	0,58498	$I_{3xy}$	-0,0259
			$S_{3y}$	-99,5	$I_{3yy}$	0,22733	$I_{3xz}$	0,01089
			$S_{3z}$	-9,7	$I_{3zz}$	0,56479	$I_{3yz}$	-0,0003
<b>Człon 4</b>	$m_4$	29,7	$S_{4x}$	0,131	$I_{4xx}$	0,74128	$I_{4xy}$	-0,0003
			$S_{4y}$	-1,81	$I_{4yy}$	0,71936	$I_{4xz}$	0
			$S_{4z}$	-296,7	$I_{4zz}$	0,09626	$I_{4yz}$	0,00918
<b>Człon 5</b>	$m_5$	2,8	$S_{5x}$	-0,587	$I_{5xx}$	0,0034	$I_{5xy}$	0,00002
			$S_{5y}$	-0,245	$I_{5yy}$	0,00332	$I_{5xz}$	0
			$S_{5z}$	0,540	$I_{5zz}$	0,00419	$I_{5yz}$	0

	Masa		Środek masy		Masowe momenty bezwładności			
	Symbol	Wartość [kg]	Symbol	Wartość [mm]	Symbol	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]	Symbol	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]
<b>Człon 6</b>	$m_6$	0,8	$S_{6x}$	0,208	$I_{6xx}$	0,00023	$I_{6xy}$	0
			$S_{6y}$	0,035	$I_{6yy}$	0,00023	$I_{6xz}$	0
			$S_{6z}$	72,270	$I_{6zz}$	0,0003	$I_{6yz}$	0

Do robota może być zamontowane dowolne narzędzie, pod warunkiem, że nie przekracza ono dopuszczalnego obciążenia, określonego przez producenta. W pracy jako narzędzie użyte zostało elektrowrzeciono, którego parametry przedstawiono w tabeli 5.3. Dane pozyskano z procedury pomiarowej, dostępnej w robocie IRB 2400. Procedura ta polega na akwizycji pomiarów z czujnika siły dla różnych pozycji narzędzia i wyliczeniu na ich podstawie masy zamocowanego narzędzia, położenia środka masy oraz wartości masowych momentów bezwładności.

Tabela 5.3. Parametry fizyczne wrzeciona

	Masa		Środek masy		Masowe momenty bezwładności			
	Sym.	Wartość [kg]	Sym.	Wartość [mm]	Sym.	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]	Sym.	Wartość [kgm <sup>2</sup> ]
<b>Wrzeciono</b>	$m_T$	12,7	$S_{1x}$	-38,3	$I_{1xx}$	0,269	$I_{1xy}$	0
			$S_{1y}$	0	$I_{1yy}$	0,274	$I_{1xz}$	0
			$S_{1z}$	129,3	$I_{1zz}$	0,193	$I_{1yz}$	0

Punkt charakterystyczny narzędzia (TCP), został obrany jako najdalej wysunięty punkt narzędzia zamocowanego w uchwycie wrzeciona. W uchwycie zamontowano kulę transportową o średnicy 10 mm i najdalej wysuniętym punktem tego narzędzia jest punkt na przecięciu osi wrzeciona i płaszczyzny kuli. Współrzędne tego punktu zapisano w macierzy transformacji:

$$\mathbf{T}_T^7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x_T \\ 0 & 1 & 0 & y_T \\ -1 & 0 & 0 & z_T \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.214)$$

i wynoszą:

$$\begin{cases} x_T = 240 \text{ mm} \\ y_T = 0 \\ z_T = 162 \text{ mm} \end{cases} . \quad (5.215)$$

Współczynniki tarcia w modelu oporów ruchu określono na drodze badań eksperymentalnych, których metodykę opisano w pracy [117]. Kontroler robota IRC5, który steruje manipulatorem IRB2400 umożliwia dostęp w czasie rzeczywistym do parametrów ruchu robota oraz wartości momentów poprzez interfejs *External Guided Motion*, lub przez tzw. sygnały testowe, obsługiwane z poziomu aplikacji *Tune Master* [118], dostępnej na komputery klasy PC. W celu zebrania danych do oszacowania współczynników tarcia przeprowadzono serię eksperymentów, które polegały na poruszaniu pojedynczym członem robota w otoczeniu określonej pozycji kątowej i rejestrowaniu wartości momentu napędowego, potrzebnego do poruszania członem przy zadanej prędkości kątowej. W trakcie ruchu jednego członu ustawienie pozostałych członów dobierano tak, aby zniwelować wpływ sił ciężkości na wynik eksperymentu. Osiągnięcie tego w przypadku członów 2 i 3, ze względu na zamocowanie manipulatora do podłoża i ich ograniczony zakres ruchu jest niemożliwe. W przypadku pozostałych członów wyszukano takie ustawienia. Wpływ siły grawitacji skompensowano porównując momenty napędowe zarejestrowane w czasie ruchu członu w kierunku dodatnim i ujemnym w tej samej pozycji kątowej [119]. Gdy człon manipulatora porusza się ze stałą prędkością, zjawiska bezwładnościowe nie mają wpływu na jego ruch opisany równaniami dynamiki, a równanie ruchu upraszcza się do postaci:

$$\tau_{fi}(\dot{q}_i, q_i) + \tau_{gi}(q_i) = u_i . \quad (5.216)$$

gdzie:  $u_i$  – moment napędowy  $i$ -tego członu,  $\tau_{fi}$  – moment oporu ruchu  $i$ -tego członu,  $\tau_{gi}$  – moment siły grawitacji. Równanie to jest prawdziwe przy założeniu, że moment oporu jest symetryczny względem wartości 0 prędkości kątowej. W przypadku ruchu członu ze stałą prędkością wynoszącą  $\dot{q}_i^+$  moment napędowy  $u^+$  przy ruchu członu w kierunku dodatnim oraz moment napędowy  $u^-$  przy ruchu członu napędowego w kierunku ujemnym można zapisać jako:

$$\begin{cases} \tau_{f,i}(\dot{q}_i^+) + \tau_{g,i}(q_i^+) = u_i^+ , \\ \tau_{f,i}(-\dot{q}_i^+) + \tau_{g,i}(q_i^+) = u_i^- . \end{cases} \quad (5.217)$$

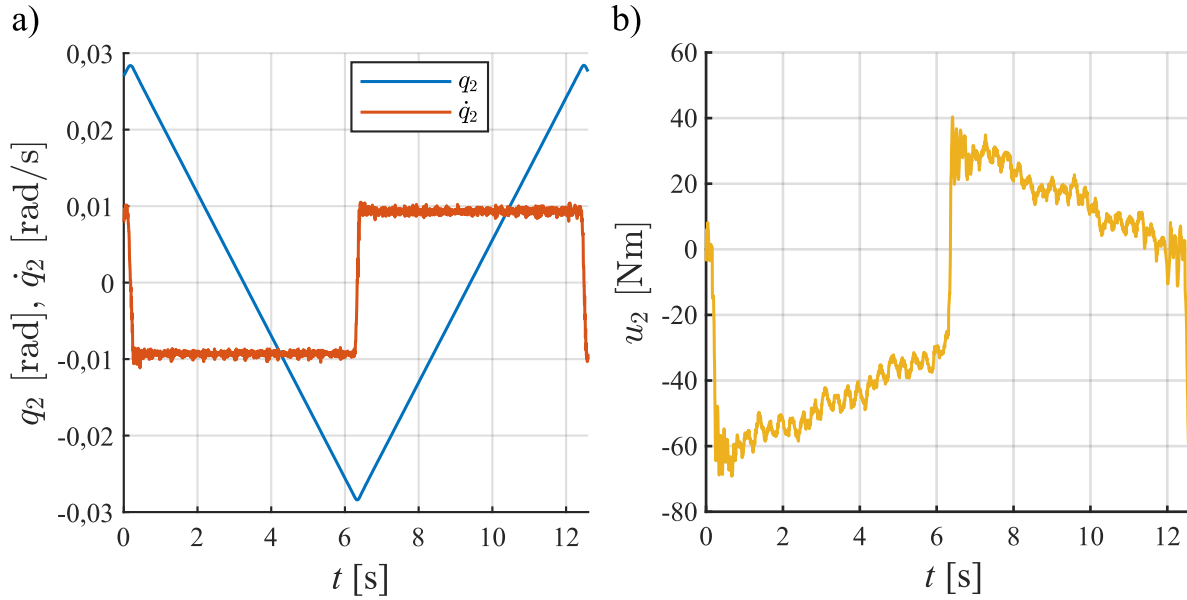
Biorąc pod uwagę, że moment siły grawitacji nie zależy od zwrotu wektora prędkości, to odejmując stronami równania (5.217), otrzymano równanie:

$$\tau_{f,i}(\dot{q}_i^+) - \tau_{f,i}(-\dot{q}_i^+) = u_i^+ - u_i^- , \quad (5.218)$$

a następnie uwzględniając, że  $\tau_{f,i}(-\dot{q}_i^+) \cong -\tau_{f,i}(\dot{q}_i^+)$ , otrzymano moment oporów ruchu  $i$ -tego członu:

$$\tau_{f,i}(\dot{q}_i^+) = \frac{u_i^+ - u_i^-}{2} . \quad (5.219)$$

Na rys. 5.4 pokazano zarejestrowane przebiegi położenia kąowego, prędkości kątowej oraz momentu napędowego członu drugiego, który pokazuje ruch w kierunku ujemnym i dodatnim z zadaną prędkością  $\dot{q}_2^\dagger = 9,3 \text{ rad/s}$  w otoczeniu punktu  $q_2^\dagger = 0$ .



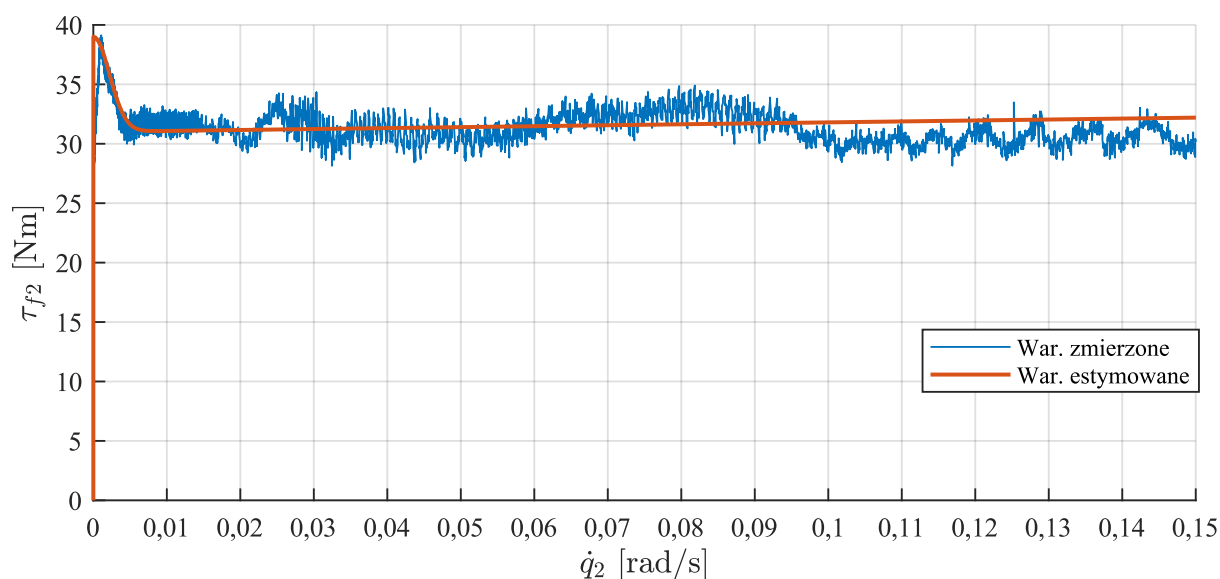
Rys. 5.4. a) Przebiegi kąta obrotu i prędkości kątowej 2. członu przy zadanej prędkości  $\dot{q}_2^\dagger = 9,3 \text{ rad/s}$ , b) przebieg zarejestrowanego momentu napędowego 2. członu

Większość zjawisk opisywanych w modelu równaniem (5.165) ma miejsce przy małych prędkościach. Dlatego po przeprowadzeniu szeregu wstępnych testów ustalono, że krok o jaki będzie zwiększana prędkość kątowa po pełnym cyklu ruchu będzie zmieniany w zakresie:

$$\Delta \dot{q}_i^\dagger = \begin{cases} 0,00001 \text{ rad/s}, & \text{dla } \dot{q}_i^\dagger = \langle 0,00001; 0,015 \rangle \text{ rad/s} \\ 0,0002 \text{ rad/s}, & \text{dla } \dot{q}_i^\dagger = \langle 0,015; 0,2 \rangle \text{ rad/s} \\ 0,001 \text{ rad/s}, & \text{dla } \dot{q}_i^\dagger = \langle 0,2; 0,5 \rangle \text{ rad/s} \end{cases} \quad (5.220)$$

Z zarejestrowanych przebiegów wyodrębniono wartości prędkości kątowej oraz momentu napędowego przy określonej wartości kątowej. W badaniu członu 2. wybrano punkt  $q_2^\dagger = 0$ . Uzyskane wartości wprowadzono do wzoru (5.219), dzięki czemu uzyskano wartości momentu sił oporu w funkcji prędkości. Celem uzyskania wartości współczynników występujących w modelu sił oporu opisanym równaniem (5.165), skorzystano z narzędzia *Curve Fitter* pakietu MATLAB, który pozwala wyznaczyć wartości współczynników krzywej na podstawie dopasowania jej do wartości pomiarowych. Na rys. 5.5 zaprezentowano wartości momentów uzyskanych z równania (5.219) na podstawie wyników eksperymentów oraz estymację momentu oporu, w funkcji prędkości kątowej członu przy kącie  $q_2^\dagger = 0$ . W celu pokazania efektu Stribacka wykres ograniczono do zakresu 0,15 rad/s.





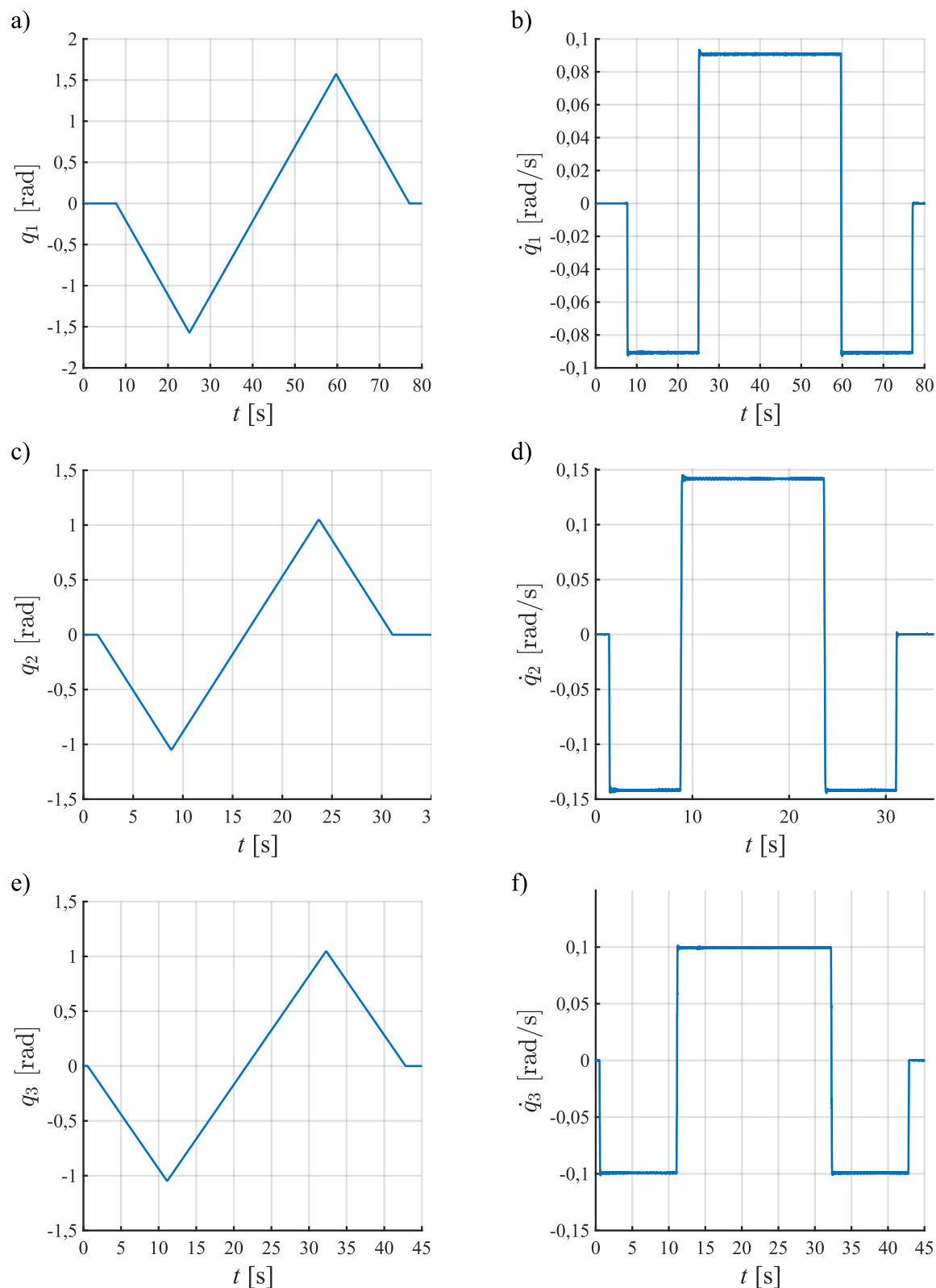
Rys. 5.5. Porównanie wartości momentu tarcia uzyskanych eksperymentalnie z wartościami estymowanymi dla drugiego członu robota

Eksperyment przeprowadzono dla wszystkich sześciu członów robota IRB2400, a wartości oszacowanych parametrów przyjętego modelu tarcia zapisano w tabeli 5.4.

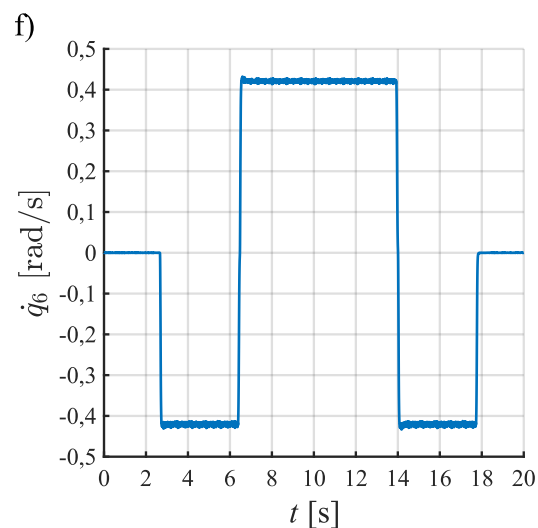
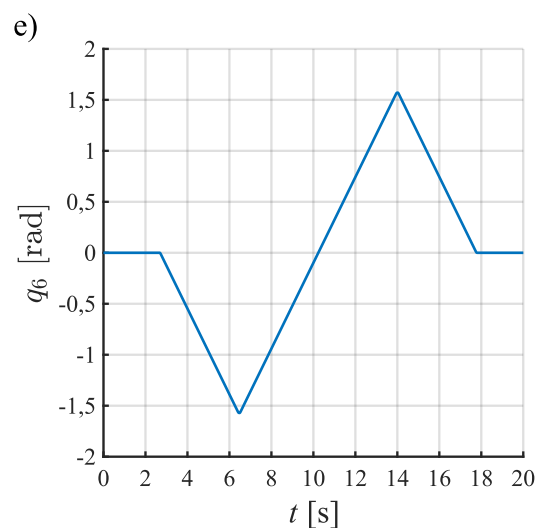
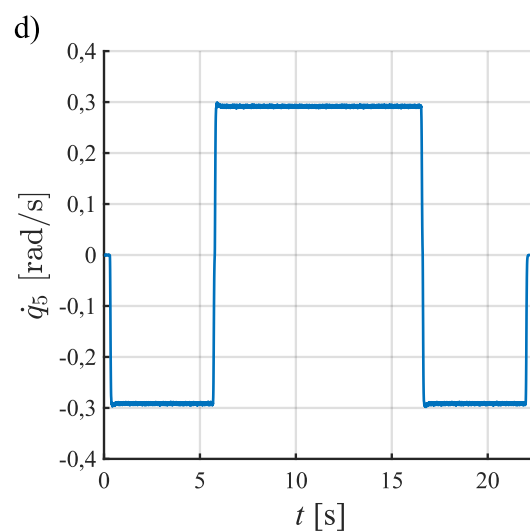
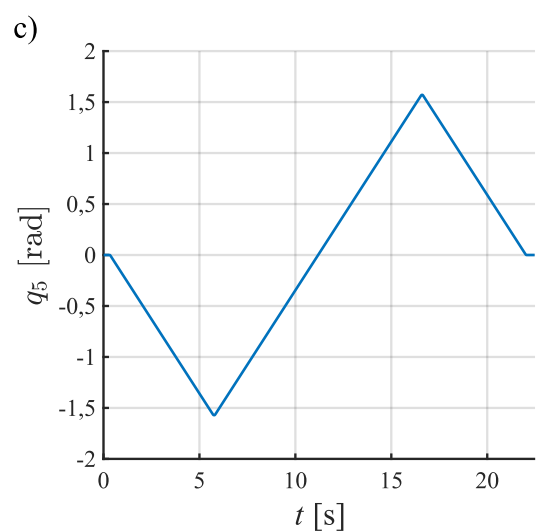
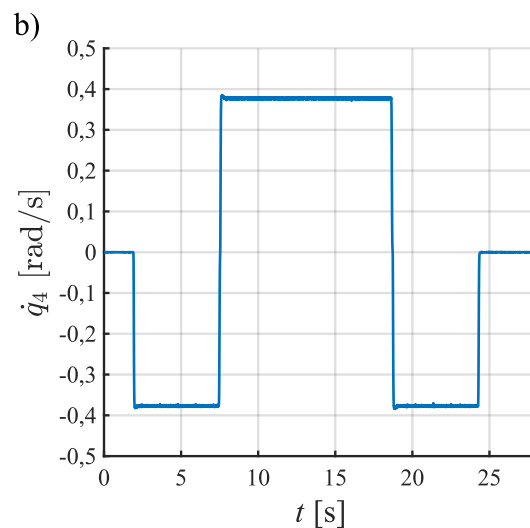
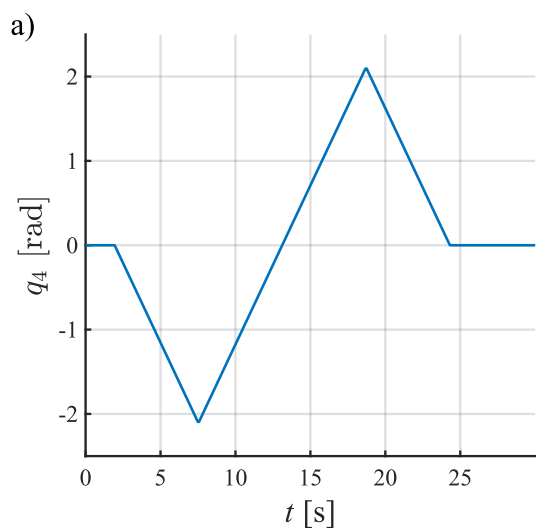
Tabela 5.4. Współczynniki modelu tarcia dla poszczególnych członów manipulatora

	$F_S$ [Nm]	$F_C$ [Nm]	$F_v$ [Nm]	$\omega_{St}$ [rad/s]
<b>Człon 1</b>	36,3	24,2	11,85	0,0085
<b>Człon 2</b>	39,2	31,2	8,323	0,0031
<b>Człon 3</b>	25,3	16,9	9,3613	0,0094
<b>Człon 4</b>	19,2	7,9	7,1228	0,0175
<b>Człon 5</b>	39,7	13,7	7,2654	0,0176
<b>Człon 6</b>	17,5	8,8	2,323	0,0162

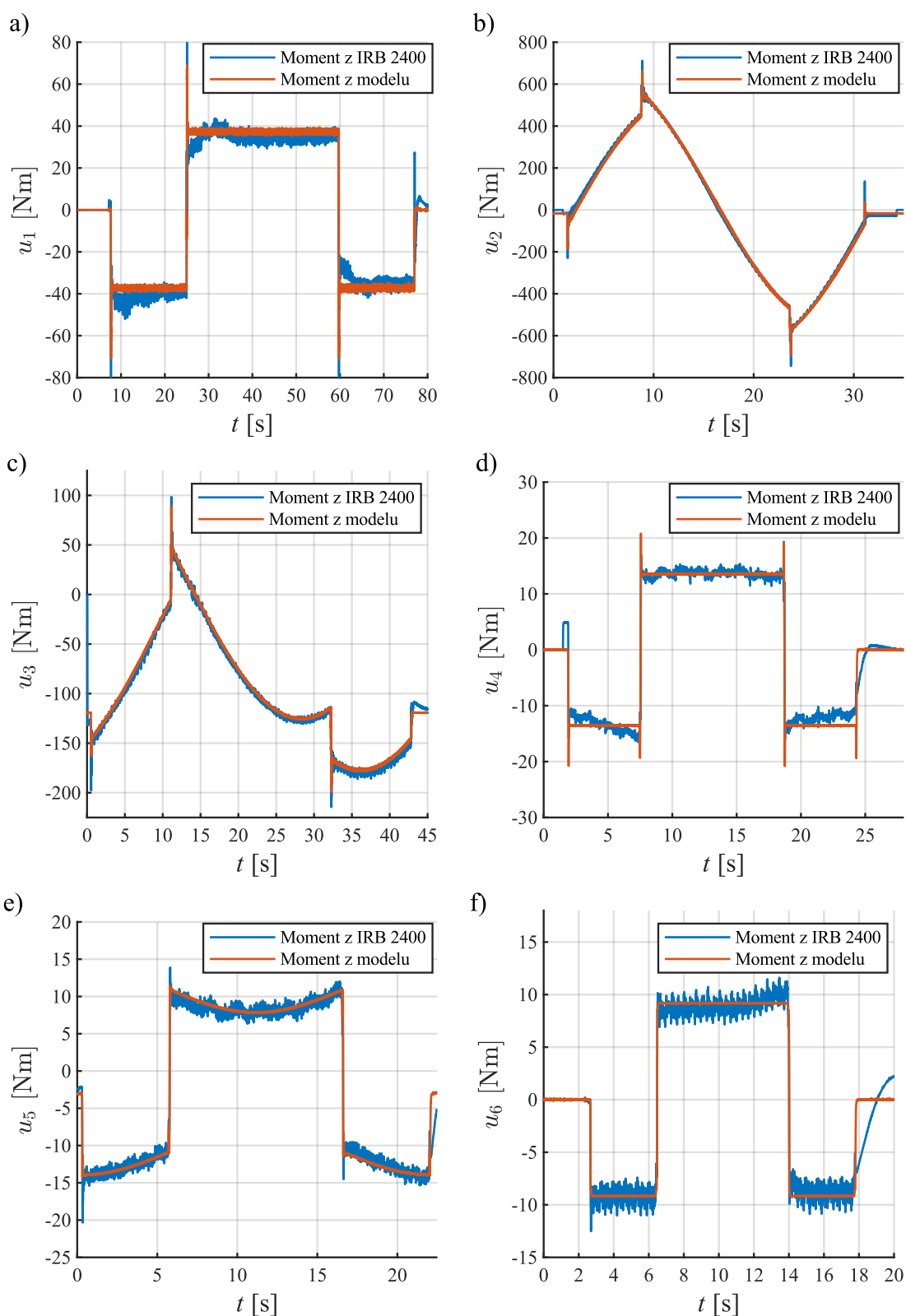
W celu sprawdzenia zbieżności modelu robota i obiektu rzeczywistego rozwiązano zadanie odwrotne dynamiki, przyjmując jako dane wejściowe parametry ruchu zarejestrowane podczas badań na rzeczywistym obiekcie. W dalszej części zaprezentowano przebiegi prędkości i przemieszczenia poszczególnych osi.



Rys. 5.6. Dane wejściowe do symulacji: a) przebiegi zadanych kątów obrotu 1. członu, b) przebiegi zadanych prędkości kątowych 1. członu, c) przebiegi zadanych kątów obrotu 2. członu, d) przebiegi zadanych prędkości kątowych 2. członu, e) przebiegi zadanych kątów obrotu 3. członu, f) przebiegi zadanych prędkości kątowych 3. członu



Rys. 5.7. Dane wejściowe do symulacji: a) przebiegi zadanych kątów obrotu 4. członu, b) przebiegi zadanych prędkości kątowych 4. członu c) przebiegi zadanych kątów obrotu 5. członu, d) przebiegi zadanych prędkości kątowych 5. członu e) przebiegi zadanych kątów obrotu 6. członu, f) przebiegi zadanych prędkości kątowych 6. członu



Rys. 5.8. Porównanie przebiegów momentów z modelu i z rzeczywistego robota dla: a) 1. członu b) 2. członu c) 3. członu d) 4. członu e) 5. członu f) 6. członu

Z analizy zaprezentowanych wykresów wynika, że rezultaty uzyskane z modelu są zbliżone z danymi eksperymentalnymi. Tak przygotowany model wykorzystano do przeprowadzenia badań symulacyjnych układu sterowania siłą.

## 6. Sterowanie pozycyjno-siłowe z uwzględnieniem niepewności więzów

### 6.1. Sterowanie w przestrzeni zadaniowej

W tym rozdziale opisano syntezę prawa sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów geometrycznych powierzchni interakcji. Proces sterowania odbywa się w kartezjańskiej przestrzeni zadaniowej, dlatego w pierwszym kroku przekonwertowano model matematyczny robota z opisu w przestrzeni konfiguracyjnej do przestrzeni zadaniowej. Następnie przedstawiono właściwości struktury modelu matematycznego, przedstawiono założenia i syntezę prawa sterowania. W ostatnim kroku przedstawiono dowód stabilności w oparciu o teorię stabilności Lapunowa.

Sterowanie pozycyjno-siłowe, znane również jako sterowanie hybrydowe, jest powszechnie stosowaną strategią sterowania manipulatorów, która pozwala na kontrolowanie trajektorii robota oraz sił działających na jego narzędzie. Jest ono szczególnie użyteczne w sytuacjach, w których robot wchodzi w interakcje z otoczeniem, a nie tylko wykonuje zadania w otwartej przestrzeni. Przykładami takich zastosowań są zadania montażowe lub zrobotyzowana obróbka taka jak gratowanie, frezowanie, szlifowanie czy polerowanie podczas realizacji których robot musi dostosować siłę nacisku narzędzia w zależności od wymaganej interakcji z otoczeniem. W tego typu aplikacjach stosuje się czujniki siły montowane pomiędzy flanszą robota a narzędziem, w celu realizacji sprzężenia zwrotnego od siły. Robot może realizować zadaną trajektorię ruchu dostosowując siły wywierane na narzędzie w odpowiedzi na zmiany w otoczeniu.

Sterowanie pozycyjno-siłowe może być zdefiniowane zarówno w przestrzeni konfiguracyjnej jak i w przestrzeni zadaniowej. Częściej w literaturze można spotkać się z opisem projektowania układów sterowania manipulatorami w przestrzeni konfiguracyjnej. W niniejszym rozdziale przedstawiono sposób opisu dynamiki manipulatora w przestrzeni zadaniowej i zaproponowano sposób sterowania pozycyjno-siłowego. Zaprezentowano również sposób transformacji opisu dynamiki z przestrzeni konfiguracyjnej do zadaniowej. W przypadku manipulatora ABB IRB2400 przestrzeń konfiguracyjna jest reprezentowana za pomocą kątów stawów łączących poszczególne człony. Równanie opisujące dynamikę manipulatora w przestrzeni konfiguracyjnej (5.167), określone w poprzednim rozdziale można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{u} + \mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda} \quad (6.1)$$

do którego wprowadzono dodatkowe elementy:  $\boldsymbol{\xi}(t) \in \mathbb{R}^n$  – wektor ograniczonych zakłóceń,  $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^{l \times n}$  – jacobian manipulatora,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  – wektor sił i momentów interakcji z otoczeniem wyrażony w przestrzeni zadaniowej,  $l$  – wymiar przestrzeni zadaniowej. Ostatni element równania (6.1), tj.  $\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}$  – wynika z interakcji robota z otoczeniem.

Siły i momenty wynikające z oddziaływania manipulatora na otoczenie są określane na podstawie pomiaru z czujnika siły. W przypadku gdy zadaniem robota jest realizacja trajektorii pozycyjno-siłowej, zdefiniowanej w przestrzeni zadaniowej, wygodnie jest sprowadzić opis

dynamiki do przestrzeni zadaniowej. Takie podejście zaproponowano w pracy [113]. Przestrzeń zadaniową manipulatora definiuje się najczęściej jako przestrzeń kartezjańską. W pracy przyjęto oznaczenie  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^l$  jako wektor współrzędnych pozycji w przestrzeni zadaniowej. Związek pomiędzy współrzędnymi konfiguracyjnymi  $\mathbf{q}$  i zadaniowymi  $\mathbf{c}$  opisuje równanie kinematyki, które można zapisać następująco:

$$\mathbf{c} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) \in \mathbb{R}^l, \quad (6.2)$$

gdzie  $\mathbf{k}(\mathbf{q})$  to funkcja kinematyki robota. Po zróżniczkowaniu równania kinematyki względem czasu otrzymano równanie określające zależności pomiędzy prędkościami w przestrzeni zadaniowej i konfiguracyjnej:

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.3)$$

gdzie  $\mathbf{J}$  to jacobian manipulatora. Różniczkując równanie (6.3) otrzymano zależności pomiędzy przyspieszeniami:

$$\ddot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}. \quad (6.4)$$

Wprowadzając zależności (6.3) i (6.4) do równania dynamiki manipulatora (6.1) i mnożąc je obustronnie przez  $(\mathbf{J}^T)^{-1}$ , otrzymano równanie opisujące dynamikę manipulatora we współrzędnych zadaniowych:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{c}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{c}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.5)$$

gdzie:

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{q}) = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \in R^{l \times l}, \\ \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{J}^{-1} - (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{M}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{J}} \mathbf{J}^{-1} \in R^{l \times l}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (\mathbf{J}^T)^{-1} (\mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})) \in R^l, \\ \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t) = (\mathbf{J}^T)^{-1} \boldsymbol{\xi}(t) \in R^l, \\ \mathbf{U} = (\mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{u} \in R^l. \end{cases} \quad (6.6)$$

Z punktu widzenia opisu matematycznego zjawiska kontaktu narzędzia z otoczeniem wygodnie jest wydzielić z przestrzeni zadaniowej podprzestrzeń styczną  $\{T\}$  i normalną  $\{N\}$ :  $\{C\} = \{T\} \oplus \{N\}$  [113]. Na kierunkach podprzestrzeni normalnej są opisywane zjawiska związane ze sprężystością natomiast na kierunkach podprzestrzeni stycznej – zjawisko tarcia. Sterowanie pozycyjne w przestrzeni zadaniowej nie ogranicza się wyłącznie do przemieszczeń liniowych. Konieczne jest również określenie współrzędnych orientacji, dlatego wektor współrzędnych  $\mathbf{c}$  zapisano jako:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_\tau \\ \mathbf{c}_n \\ \mathbf{c}_\rho \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l, \quad (6.7)$$

gdzie:  $\mathbf{c}_\tau \in \mathbb{R}^{w-r}$  – wektor współrzędnych stycznych,  $\mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^r$  – wektor współrzędnych normalnych do powierzchni kontaktu narzędzia manipulatora z otoczeniem,  $\mathbf{c}_p \in \mathbb{R}^p$  – to wektor współrzędnych orientacji narzędzia,  $r$  i  $(w-r)$  to wymiary podprzestrzeni  $\{N\}$  i  $\{T\}$ ,  $w$  to wymiar podprzestrzeni współrzędnych położenia,  $p$  – wymiar podprzestrzeni współrzędnych orientacji. Do opisu orientacji narzędzia wybrano metodę opartą o kwaternion jednostkowy, który jest zdefiniowany jako:

$$Q = c_{\rho 1} + c_{\rho 2}\mathbf{i} + c_{\rho 3}\mathbf{j} + c_{\rho 4}\mathbf{k} \in \mathbb{H}, \quad (6.8)$$

gdzie  $\eta = c_{\rho 1} \in \mathbb{R}$  jest składową skalarną kwaternionu,  $\boldsymbol{\varsigma} = [c_{\rho 2} \ c_{\rho 3} \ c_{\rho 4}]^T \in \mathbb{R}^3$  jest składową wektorową kwaternionu,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  – to jednostki urojone. Składowe te można przedstawić jako wektor:

$$\mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\varsigma} \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Składowe kwaternionu jednostkowego muszą następujący spełniać warunek:

$$c_{\rho 1}^2 + c_{\rho 2}^2 + c_{\rho 3}^2 + c_{\rho 4}^2 = 1, \quad (6.10)$$

który zapewnia, że współrzędne tworzą jednostkową hipersferę w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Tak zdefiniowany kwaternion może reprezentować rotacje jako kąt obrotu  $\varphi$  wokół osi zdefiniowanej przez wektor jednostkowy  $\mathbf{n} = [n_x \ n_y \ n_z]^T$ . Kąt  $\varphi$  może się zmieniać w zakresie od 0 do  $\pi$ . Elementy kwaternionu są wtedy określone jako:

$$\mathbf{c}_p = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi / 2) \\ n_x \sin(\varphi / 2) \\ n_y \sin(\varphi / 2) \\ n_z \sin(\varphi / 2) \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

Kwaterniony jednostkowe i macierze rotacji można konwertować między sobą. Macierz rotacji wyrażona w składowych kwaternionu ma następującą formę:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} c_{\rho 1}^2 + c_{\rho 2}^2 - c_{\rho 3}^2 - c_{\rho 4}^2 & 2(c_{\rho 2}c_{\rho 3} - c_{\rho 1}c_{\rho 4}) & 2(c_{\rho 2}c_{\rho 4} + c_{\rho 1}c_{\rho 3}) \\ 2(c_{\rho 2}c_{\rho 3} + c_{\rho 1}c_{\rho 4}) & c_{\rho 1}^2 - c_{\rho 2}^2 + c_{\rho 3}^2 - c_{\rho 4}^2 & 2(c_{\rho 3}c_{\rho 4} - c_{\rho 1}c_{\rho 2}) \\ 2(c_{\rho 2}c_{\rho 4} - c_{\rho 1}c_{\rho 3}) & 2(c_{\rho 3}c_{\rho 4} + c_{\rho 1}c_{\rho 2}) & c_{\rho 1}^2 - c_{\rho 2}^2 - c_{\rho 3}^2 + c_{\rho 4}^2 \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Natomiast konwersja w drugą stronę jest bardziej skomplikowana. W pracy [120] zaprezentowano metodę Shepperda, której wynikiem jest układ czterech rozwiązań:

$$\mathbf{c}_\rho^{(1)} = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{23}}}{(r_{32}-r_{23})} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{23}}}{(r_{13}-r_{31})} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{23}}}{(r_{21}-r_{12})} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}+r_{22}+r_{23}}}{(r_{21}-r_{12})} \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

$$\mathbf{c}_\rho^{(2)} = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(r_{32}-r_{23})}{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{23}}} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{23}}}{(r_{12}+r_{21})} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{23}}}{(r_{23}+r_{32})} \\ \frac{\sqrt{1+r_{11}-r_{22}-r_{23}}}{(r_{23}+r_{32})} \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

$$\mathbf{c}_\rho^{(3)} = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(r_{13}-r_{31})}{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{23}}} \\ \frac{(r_{12}+r_{21})}{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{23}}} \\ \frac{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{23}}}{(r_{23}+r_{32})} \\ \frac{\sqrt{1-r_{11}+r_{22}-r_{23}}}{(r_{23}+r_{32})} \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{c}_\rho^{(4)} = \begin{bmatrix} c_{\rho 1} \\ c_{\rho 2} \\ c_{\rho 3} \\ c_{\rho 4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{(r_{21}-r_{12})}{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{23}}} \\ \frac{(r_{31}+r_{13})}{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{23}}} \\ \frac{(r_{32}+r_{23})}{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{23}}} \\ \frac{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{23}}}{\sqrt{1-r_{11}-r_{22}+r_{23}}} \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$



Wybór najlepszego rozwiązania zależy od tego, który element wektora

$$\begin{bmatrix} r_{11} + r_{22} + r_{33} \\ r_{11} \\ r_{22} \\ r_{33} \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

jest największy. W pracy [121] porównano jeszcze inne metody obliczania składowych kwaternionu jednostkowego odpowiadającego macierzy rotacji. Roboty ABB domyślnie w instrukcjach do programowania ścieżek manipulatora wykorzystują kwaterniony. Zaletą takiego podejścia jest ominięcie problemów punktów osobliwych, występujących w przypadku reprezentacji orientacji przy użyciu kątów Eulera. Kolejną zaletą jest uproszczenie zapisu i prowadzenia obliczeń w porównaniu do macierzy rotacji. Zastosowanie kwaternionów pozwala zredukować 9 parametrów macierzy rotacji  $3 \times 3$ , do wektora 4-ro elementowego. Pochodną z kwaternionu jednostkowego względem czasu stanowi wektor pochodnych składowych kwaternionu:

$$\dot{\mathbf{c}}_p = \begin{bmatrix} \dot{c}_{p1} \\ \dot{c}_{p2} \\ \dot{c}_{p3} \\ \dot{c}_{p4} \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Odwzorowaniem prędkości kątowej narzędzia względem układu globalnego z zastosowaniem kwaternionu jednostkowego i jego pochodnej jest funkcja  $\omega: \mathbb{H} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , zdefiniowana jako:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega(\mathbf{c}_p, \dot{\mathbf{c}}_p) \end{bmatrix} = 2\dot{\mathbf{c}}_p \otimes \bar{\mathbf{c}}_p, \quad (6.19)$$

gdzie:  $\bar{\mathbf{c}}_p$  to kwaternion sprzężony,  $\otimes$  to operator mnożenia kwaternionów. Natomiast przyspieszenie kątowe jest określone następująco:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon(\dot{\mathbf{c}}_p, \ddot{\mathbf{c}}_p) \end{bmatrix} = 2(\ddot{\mathbf{c}}_p \otimes \bar{\mathbf{c}}_p + \dot{\mathbf{c}}_p \otimes \dot{\bar{\mathbf{c}}}_p). \quad (6.20)$$

Stosując taką parametryzację opisu współrzędnych orientacji, wektor prędkości przestrzennej  $\mathbf{v}$  nie jest bezpośrednio pochodną względem czasu elementów wektora pozycji  $\mathbf{c}$ , lecz jest określony jako:

$$\dot{\mathbf{c}} = \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_r \\ \dot{\mathbf{c}}_n \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}, \quad (6.21)$$

gdzie:  $\mathbf{J}$  – jacobian geometryczny manipulatora, określony zależnością (5.90). Podobnie wektor przyspieszenia jest dany jako:

$$\ddot{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{c}}_\tau \\ \ddot{\mathbf{c}}_n \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}}. \quad (6.22)$$

Istotnym zjawiskiem wynikającym z kontaktu narzędzia manipulatora z otoczeniem jest siła sprężystości. Kierunek jej działania zdefiniowano w podprzestrzeni kierunków normalnych przestrzeni zadaniowej. Wektor tej siły jest modelowany równaniem:

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{K}_e \mathbf{c}_n, \quad (6.23)$$

gdzie:  $\mathbf{F}_n \in \mathbb{R}^r$  to wektor sił nacisku na kierunkach normalnych,  $\mathbf{K}_e$  to diagonalna macierz sprężystości otoczenia, taka, że  $\mathbf{K}_e = \mathbf{K}_e^T > \mathbf{0}$ . Siła ta ma wpływ na siły oporów ruchu wynikających z kontaktu narzędzia z powierzchnią otoczenia na kierunkach stycznych. Siły te zostały zamodelowane jako tarcie suche:

$$F_{\tau i} = \mu_{\tau i} F_{n j} \operatorname{sgn}(\dot{c}_{\tau i}), \quad (6.24)$$

gdzie  $F_{\tau i}$  to siła tarcia na  $i$ -tym kierunku stycznym, powodowana przez  $j$ -tą siłę  $F_{n j}$  na kierunku normalnym do płaszczyzny kontaktu narzędzia z otoczeniem,  $\mu_{\tau i}$  to współczynnik tarcia suchego na  $i$ -tym kierunku stycznym. Siły te można przestawić jako wektor sił interakcji w formie:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_\tau \\ \lambda_n \\ \lambda_p \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

gdzie:  $\lambda_\tau = \mathbf{F}_\tau \in \mathbb{R}^{w-r}$  to wektor sił stycznych,  $\lambda_n = \mathbf{F}_n \in \mathbb{R}^r$  to wektor sił normalnych,  $\lambda_p \in \mathbb{R}^p$  to wektor momentów sił interakcji. Wektor momentów sił interakcji zamodelowano równaniem:

$$\lambda_p = [\lambda_\tau \quad \lambda_n]^T \times \mathbf{r}_C^T, \quad (6.26)$$

gdzie  $\mathbf{r}_C^T$  to wektor promień odległości punktu  $C$  styku narzędzia z otoczeniem względem układu odniesienia związanego z narzędziem. Zgodnie z równaniem (6.23) siła wywierana na narzędzie jest zależna od jego przemieszczenia się w głąb materiału na kierunku normalnym.

Można wyrazić to przemieszczenie w funkcji siły interakcji jako:

$$\mathbf{c}_n = \mathbf{P}_e \mathbf{F}_n, \quad (6.27)$$

gdzie:  $\mathbf{P}_e = \mathbf{K}_e^{-1} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  to odwrotność macierzy sprężystości, nazywana macierzą podatności otoczenia, która spełnia warunek  $\mathbf{P}_e = \mathbf{P}_e^T > \mathbf{0}$ .

Wprowadzając zależności (6.7), (6.19), (6.20) i (6.27) do opisu dynamiki (6.5) otrzymano:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{E}\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{U} + \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.28)$$

gdzie:

$$\dot{\mathbf{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_{\tau} \\ \dot{\mathbf{F}}_{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{\omega}}_{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^l, \quad (6.29)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{(w-r) \times (w-r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{\mathbf{e}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{I}}_{p \times p} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l}, \quad (6.30)$$

$\tilde{\mathbf{I}}_{i \times j}$  to macierz jednostkowa o wymiarach  $i \times j$ . Taki opis pozwala na sterowanie ruchem na kierunkach stycznych, siłą na kierunkach normalnych oraz orientacją narzędzia manipulatora.

## 6.2. Właściwości strukturalne modelu matematycznego

Przed przystąpieniem do wyprowadzenia prawa sterowania określono właściwości strukturalne modelu matematycznego, które są istotne w zagadnieniu stabilności układu sterowania [51, 113, 122].

**Właściwość I.** Macierz bezwładności  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  jest symetryczną macierzą dodatnio określoną. Pod warunkiem, że jacobian  $\mathbf{J}$  zachowuje pełny rząd, macierz  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  spełnia ograniczenie:

$$\zeta_{\min} \mathbf{I} \leq \mathbf{A}(\mathbf{q}) \leq \zeta_{\max} \mathbf{I}, \quad (6.31)$$

gdzie  $\zeta_{\min}$  i  $\zeta_{\max} < \infty$  oznaczają ściśle dodatnią minimalną i maksymalną wartość własną macierzy  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$  dla wszystkich konfiguracji  $\mathbf{q}$ .

**Właściwość II.** Macierz  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  spełnia ograniczenie:

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| \leq k_H \|\dot{\mathbf{c}}\|, \quad (6.32)$$

gdzie  $k_H > 0$  jest dodatnią stałą.

**Właściwość III.** Macierz  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  spełnia ograniczenie:

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\| = \left\| \left( \mathbf{J}^{-1} \right)^T \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \left( \mathbf{J}^{-1} \right)^T \mathbf{G}(\mathbf{q}) \right\| \leq k_F \|\dot{\mathbf{q}}\| + k_G, \quad (6.33)$$

gdzie  $k_F > 0, k_G > 0$  są dodatnimi stałymi.

**Właściwość IV.** Macierz  $\Psi(\mathbf{q}, t)$  spełnia ograniczenie:

$$\|\Psi(\mathbf{q}, t)\| \leq k_{\Psi}, \quad (6.34)$$

gdzie  $k_{\Psi} > 0$  to dodatnia stała.

**Właściwość V.** Macierz  $\mathbf{E}^T [\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})] \mathbf{E}$  jest skośnie symetryczna, gdyż macierz  $\mathbf{S}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{M}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  jest skośnie symetryczna. Dowód został opisany w pracy [113].

### 6.3. Projektowanie układu sterowania

Algorytm sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów do realizacji sterowania robotem manipulacyjnym IRB 2400, którego właściwości dynamiczne opisano równaniem (6.28), zaczerpnięto z pracy [116]. Projektując układ sterowania przyjęto założenie o braku możliwości wygenerowania idealnego sterowania kompensującego  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , które opiera się na dokładnej znajomości struktury i parametrów modelu obiektu. Z praktycznego punktu widzenia dokładna znajomość wszystkich parametrów obiektu jest nieosiągalna. Dlatego zaproponowano algorytm bazujący na teorii sterowania odpornego. W celu realizacji takiego sterowania robotem przyjęto:

- zadaną trajektorię ruchu narzędzia w płaszczyźnie stycznej  $\mathbf{c}_{\tau d}(t), \dot{\mathbf{c}}_{\tau d}(t), \ddot{\mathbf{c}}_{\tau d}(t)$ ,
- zadaną trajektorię orientacji narzędzia  $\mathbf{c}_{pd}(t), \dot{\mathbf{c}}_{pd}(t), \ddot{\mathbf{c}}_{pd}(t)$ ,
- zadaną ścieżkę nominalną ruchu narzędzia na kierunkach normalnych  $\mathbf{c}_{n\text{nom}}(t)$ , oraz jej pochodną  $\dot{\mathbf{c}}_{n\text{nom}}(t)$ , wynikające z kształtu powierzchni otoczenia,
- zadaną trajektorię siłową na kierunkach normalnych  $\mathbf{F}_{nd}(t), \dot{\mathbf{F}}_{nd}(t), \ddot{\mathbf{F}}_{nd}(t)$ .

Zdefiniowano błędy realizacji ruchu w płaszczyźnie stycznej:

$$\tilde{\mathbf{c}}_{\tau} = \mathbf{c}_{\tau d} - \mathbf{c}_{\tau}, \quad (6.35)$$

i realizacji siły na kierunku normalnym:

$$\tilde{\mathbf{F}}_n = \mathbf{F}_{nd} - \mathbf{F}_n. \quad (6.36)$$

Błąd sterowania orientacją jest określany jako względna orientacja kartezjańskich układów odniesienia związanych z narzędziem, reprezentujących kolejno zadaną i aktualną orientację narzędzia względem wspólnego układu bazowego. Ponieważ do opisu orientacji narzędzia wykorzystano kwaternion jednostkowy, to względną orientację można określić jako [123–125]:

$$\tilde{\mathbf{c}}_p = \mathbf{c}_{pd} \otimes \bar{\mathbf{c}}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\eta} \\ \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta\eta_d + \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta}_d \\ \eta\boldsymbol{\zeta}_d - \eta_d \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{\zeta}_d \end{bmatrix}. \quad (6.37)$$

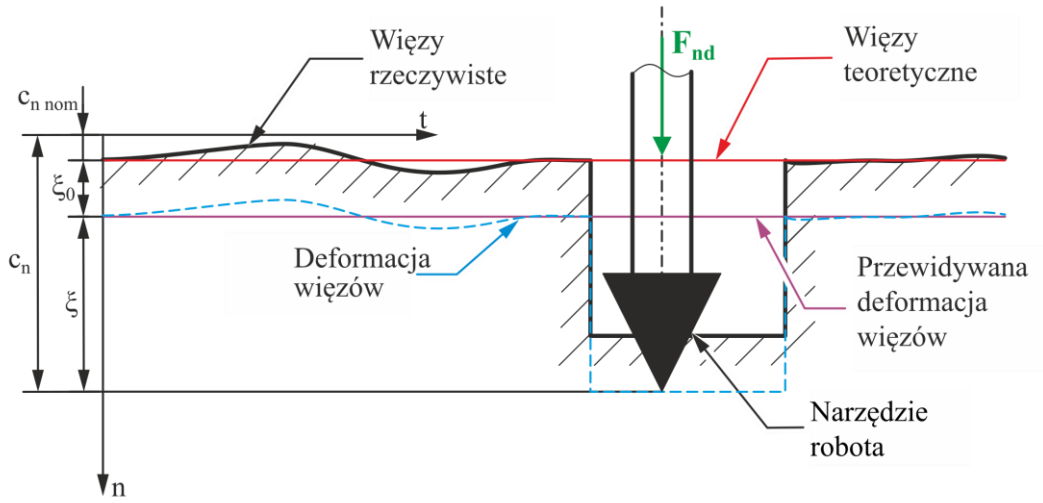
Należy zauważyć, że gdy kwaternion jednostkowy aktualnej orientacji narzędzia manipulatora osiąga wartość zadaną, tj.  $\mathbf{c}_p = \pm \mathbf{c}_{pd}$ , to względna orientacja wynosi  $\tilde{\mathbf{c}}_p = \begin{bmatrix} \pm 1 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4$ . W związku z tym logicznym rozwiązaniem jest przyjęcie, że reprezentacją błędu orientacji pomiędzy dwoma układami współrzędnych jest składowa wektorowa kwaternionu względnej orientacji [123, 125]:

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\zeta}_x & \tilde{\zeta}_y & \tilde{\zeta}_z \end{bmatrix}^T = \eta\boldsymbol{\zeta}_d - \eta_d \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\zeta} \times \boldsymbol{\zeta}_d. \quad (6.38)$$

Opisywany algorytm sterowania wymaga także wprowadzenia dodatkowej wielkości  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^r$ , zdefiniowanej jako:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{c}_n - \mathbf{c}_{n\text{nom}} - \boldsymbol{\xi}_0, \quad (6.39)$$

która jest miarą wielkości odchylenia pozycji narzędzia od zakładanej pozycji wynikającej z przewidywanej deformacji więzów na kierunkach normalnych, co pokazano na rys. 6.1.



Rys. 6.1. Prezentacja działania strategii sterowania siłą z uwzględnieniem niepewności więzów rzeczywistej powierzchni

Przewidywana wielkość deformacji więzów  $\xi_0$  jest określana jako odchylenie od nominalnej ścieżki narzędzia  $c_{n\ nom}$  wynikające z oddziaływania zadanej siły nacisku:

$$\xi_0 = \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{F}_{nd} . \quad (6.40)$$

Celem układu sterowania jest realizacja trajektorii zadanej, czyli minimalizacja błędu nadążania. W przypadku trajektorii ruchu na kierunkach stycznych i orientacji, układ sterowania będzie dążył do minimalizacji błędów  $\tilde{\mathbf{c}}_\tau$  i  $\tilde{\mathbf{c}}_\rho$ . Natomiast na kierunkach normalnych zastosowano kooperacyjną strategię sterowania, której celem jest minimalizacja wyrażenia:

$$\tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \xi , \quad (6.41)$$

gdzie  $\mathbf{w}_\xi \geq 0$  to macierz wzmocnienia kooperacji, która określa udział strategii utrzymania nominalnej ścieżki ruchu na kierunkach normalnych w momencie wystąpienia niepewności powierzchni kontaktu. Gdy  $\mathbf{w}_\xi = 0$  to układ sterowania dąży jedynie do minimalizacji błędu siły, czyli zachowuje się jak klasyczny układ sterowania siłą. Zwiększenie wartości  $\mathbf{w}_\xi$  powoduje wzmocnienie znaczenia strategii utrzymania ścieżki nominalnej. Ostatecznie zdefiniowano wektor błędu nadążania w postaci:

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_\tau \\ \tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \xi \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix} . \quad (6.42)$$

Zgodnie z teorią sterowania nadążnego układami nieliniowymi przyjęto uogólniony błąd nadążania jako liniową kombinację błędu nadążania i jego pochodnej:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e} , \quad (6.43)$$

gdzie  $\Lambda \in \mathbb{R}^l$  to diagonalna macierz wzmocnień. W postaci macierzowej można to zapisać jako:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_\tau \\ \mathbf{s}_n \\ \mathbf{s}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_\tau \\ \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_n - \mathbf{w}_\xi \dot{\tilde{\xi}} \\ \dot{\tilde{\omega}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_\tau \\ \tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix}, \quad (6.44)$$

gdzie:  $\Lambda_\tau \in \mathbb{R}^{(m-r) \times (m-r)}$ ,  $\Lambda_n \in \mathbb{R}^{r \times r}$  i  $\Lambda_p \in \mathbb{R}^{(p-1) \times (p-1)}$  to diagonalne macierze wzmocnień. Po przekształceniu tego równania do postaci:

$$\dot{\mathbf{\theta}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_{\tau d} \\ \dot{\mathbf{F}}_{nd} - \mathbf{w}_\xi \dot{\tilde{\xi}} \\ \dot{\omega}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_\tau \\ \tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix} - \mathbf{s} \quad (6.45)$$

i wprowadzeniu do dynamicznego równania ruchu (6.28), uzyskano opis dynamiki w funkcji uogólnionego błędu nadążania:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{E}\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\mathbf{s} + \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{E}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda}, \quad (6.46)$$

gdzie wprowadzono pomocniczą zmienną:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{c}}_{\tau d} \\ \dot{\mathbf{F}}_{nd} - \mathbf{w}_\xi \dot{\tilde{\xi}} \\ \dot{\omega}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Lambda_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_\tau \\ \tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix}. \quad (6.47)$$

Z równania (6.46) można wyodrębnić funkcję:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{E}\dot{\mathbf{v}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (6.48)$$

która stanowi opis nieliniowości dynamiki manipulatora. Równanie (6.46) przyjmuje postać:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\mathbf{E}\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{E}\mathbf{s} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U} - \boldsymbol{\lambda}. \quad (6.49)$$

Następnie dla takiego opisu układu sformułowano prawo sterowania w postaci:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) - \boldsymbol{\lambda} + \mathbf{U}_R, \quad (6.50)$$

gdzie:  $\mathbf{U}_R \in \mathbb{R}^l$  to sterowanie odporne,  $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \mathbf{r} \in \mathbb{R}^l$  to sterowanie kompensujące nieliniowości dynamiki manipulatora, opisywanych przez funkcję  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ ,  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^l$  to sterowanie kompensujące siły i momenty wynikające z interakcji z otoczeniem,  $\mathbf{K}_D \in \mathbb{R}^{l \times l}$  to diagonalna macierz wzmocnień taka, że  $\mathbf{K}_D = \mathbf{K}_D^T > 0$ . Pierwszy składnik prawa sterowania, czyli

$$\mathbf{K}_D \mathbf{s} = \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}_D \Lambda \mathbf{e}, \quad (6.51)$$

to forma regulatora PD, gdzie iloczyn  $\mathbf{K}_D \Lambda$  stanowi macierz wzmocnień członu proporcjonalnego, a samo  $\mathbf{K}_D$  to macierz wzmocnień członu różniczkującego. W postaci macierzowej zapis tego wyrażenia jest następujący:

$$\mathbf{K}_D \mathbf{s} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{D\tau} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Dn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Dp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{c}}}_\tau \\ \dot{\tilde{\mathbf{F}}}_n - \mathbf{w}_\xi \dot{\tilde{\xi}} \\ \tilde{\omega} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{D\tau} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Dn} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{Dp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_\tau & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \Lambda_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_\tau \\ \tilde{\mathbf{F}}_n - \mathbf{w}_\xi \tilde{\xi} \\ \tilde{\xi} \end{bmatrix}, \quad (6.52)$$

gdzie:  $\mathbf{K}_{D\tau} \in \mathbb{R}^{(w-r) \times (w-r)}$ ,  $\mathbf{K}_{Dn} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  i  $\mathbf{K}_{Dp} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  to diagonalne macierze wzmocnień. Kolejnym składnikiem prawa sterowania jest funkcja aproksymująca funkcję  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ :

$$\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{E} \dot{\mathbf{v}} + \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{E} \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (6.53)$$

gdzie  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  mają taką samą strukturę jak składniki funkcji  $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$ , lecz nie zawierają rzeczywistych parametrów opisywanego obiektu, tylko ich oceny. Jak już wspomniano, realnie nie da się wyznaczyć wartości parametrów w pełni odpowiadających parametrom rzeczywistego obiektu. Wynika to ze złożoności obiektu i klasy wybranego modelu dynamiki. Ostatnim elementem prawa sterowania jest człon sterowania odpornego, który można zdekomponować następująco:

$$\mathbf{U}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{R\tau} \\ \mathbf{U}_{Rn} \\ \mathbf{U}_{Rp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{R\tau i} \frac{s_{\tau i}}{|s_{\tau i}|} \\ K_{Rnj} \frac{s_{nj}}{|s_{nj}|} \\ K_{Rp k} \frac{s_{\rho k}}{|s_{\rho k}|} \end{bmatrix}; \begin{cases} i = 1, \dots, (w-r), \\ j = 1, \dots, r, \\ k = 1, \dots, p. \end{cases} \quad (6.54)$$

gdzie  $K_{R\tau i} > 0$ ,  $K_{Rnj} > 0$  i  $K_{Rp k} > 0$  to stałe wartości wzmocnień sterowanie odpornego. Wstawiając prawo sterowania do równania (6.49) i uwzględniając (6.53), otrzymano:

$$\mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{E} \dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{E} \mathbf{s} - \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{U}_R + \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t), \quad (6.55)$$

gdzie  $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})$  stanowi różnicę pomiędzy wartościami rzeczywistymi obiektu sterowania a ich estymacją. Można tę funkcję zapisać w formie liniowej względem błędów ocen parametrów jako:

$$\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}}, \quad (6.56)$$

gdzie  $\mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^{l \times d}$  to macierz regresji, natomiast  $\tilde{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^d$  to błąd estymacji parametrów:

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - \hat{\mathbf{p}}, \quad (6.57)$$

gdzie  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  to wektor rzeczywistych wartości parametrów obiektu,  $\hat{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^d$  to wektor ocen wartości parametrów obiektu,  $d$  to wymiar wektora parametrów.

## 6.4. Stabilność układu sterowania

W tej części wykazano, że układ sterowania jest stabilny przy założeniach, które są następujące:

- a) Zadana trajektoria pozycyjno-siłowa dla manipulatora  $\theta_d(t)$ ,  $\dot{\theta}_d(t)$ ,  $\ddot{\theta}_d(t)$  jest ograniczona.
- b) Parametry obiektu  $p_i, i=1, \dots, d$  przyjmują wartości z założonego przedziału:

$$|p_i - \hat{p}_i| \leq k_{pi}, \quad (6.58)$$

gdzie  $k_{pi} > 0, i=1, \dots, d$ , to ograniczenie zmian wartości  $i$ -tego parametru.

- c) Wektor zakłóceń  $\psi(\mathbf{q}, t)$  po zdekomponowaniu na elementy zakłóceń dla przemieszczeń liniowych podprzestrzeni stycznej i normalnej oraz dla orientacji zapisano w postaci:

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \psi_\tau(\mathbf{q}, t) \\ \psi_n(\mathbf{q}, t) \\ \psi_\rho(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

i spełnia ograniczenie:

$$\begin{aligned} |\psi_{\tau i}| &\leq b_{\tau i}, i = 1, \dots, (w-r), \\ |\psi_{ni}| &\leq b_{ni}, i = 1, \dots, r, \\ |\psi_{\rho i}| &\leq b_{\rho i}, i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (6.60)$$

gdzie  $\psi_\tau \in \mathbb{R}^{(w-r)}$ ,  $\psi_n \in \mathbb{R}^r$  i  $\psi_\rho \in \mathbb{R}^p$ , a  $b_{\tau i} > 0, b_{ni} > 0$  i  $b_{\rho i} > 0$  to stałe.

Wartości wzmocnień dla wektora sterowania odpornego wyznaczono w oparciu o teorię stabilności Lapunowa. Jako kandydatkę na funkcję Lapunowa przyjęto następującą funkcję:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{s}. \quad (6.61)$$

Różniczkując funkcję (6.61) względem czasu i podstawiając równanie (6.55) otrzymano:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{E} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \\ & - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{U}_R + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \psi(\mathbf{q}, t). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Porządkując wyrażenie, otrzymano:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \left[ \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q}) \mathbf{E} \mathbf{s} - 2\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right] \mathbf{E} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \\ & - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{U}_R + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \psi(\mathbf{q}, t). \end{aligned} \quad (6.63)$$



Jak wynika z właściwości strukturalnych modelu, wyrażenie  $\mathbf{E}^T [\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\mathbf{E}\mathbf{s} - 2\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{E}$  jest macierzą skośnie symetryczną, zatem:

$$\mathbf{s}^T \mathbf{E}^T [\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{q})\mathbf{E}\mathbf{s} - 2\mathbf{H}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})]\mathbf{E}\mathbf{s} = 0. \quad (6.64)$$

Wykorzystując ten fakt przekształcono funkcję (6.63) do postaci:

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) - \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{U}_R + \mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{q}, t). \quad (6.65)$$

Funkcja (6.56), wektor parametrów i wektor ocen parametrów mogą zostać zdekomponowane w taki sam sposób jak wektor uogólnionego błędu nadążania zaprezentowany w (6.44), aby wyodrębnić z nich elementy podprzestrzeni przemieszczeń na kierunkach stycznych, normalnych oraz orientacji. Stosując taką dekompozycję uzyskano zapis:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -\mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\tau^T & \mathbf{s}_n^T & \mathbf{s}_\rho^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{(w-r) \times (w-r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{I}}_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_\tau(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} \\ \mathbf{Y}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} \\ \mathbf{Y}_\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\tau^T & \mathbf{s}_n^T & \mathbf{s}_\rho^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{I}}_{(w-r) \times (w-r)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{I}}_{p \times p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi}_\tau(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\tau} \\ \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{Rn} \\ \boldsymbol{\psi}_\rho(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\rho} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.66)$$

w którym macierz regresji zdekomponowano na podmacierze  $\mathbf{Y}_\tau(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^{(w-r) \times d}$ ,  $\mathbf{Y}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^{r \times d}$ ,  $\mathbf{Y}_\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}^{p \times d}$ , a wektor zakłóceń na wektory  $\boldsymbol{\psi}_\tau(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^{w-r}$ ,  $\boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $\boldsymbol{\psi}_\rho(\mathbf{q}, t) \in \mathbb{R}^p$  które odpowiadają podprzestrzeniom kierunków stycznych, normalnych oraz orientacji. Po uporządkowaniu wyrażeń uzyskano zapis:

$$\dot{V} = -\mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} + \begin{bmatrix} \mathbf{s}_\tau^T & \mathbf{P}_e \mathbf{s}_n^T & \mathbf{s}_\rho^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_\tau(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_\tau(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\tau} \\ \mathbf{Y}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{Rn} \\ \mathbf{Y}_\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_\rho(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\rho} \end{bmatrix}. \quad (6.67)$$

Ostatni element stanowi macierz, której zapis można przestawić w równoważnej formie w następującej postaci:

$$\mathbf{Y}_\tau(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_\tau(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\tau} = \left\{ \sum_{j=1}^w Y_{\tau ij} \tilde{p}_j + \psi_{\tau i} - K_{R\tau i} \frac{s_{\tau i}}{|s_{\tau i}|} \right\}; \begin{cases} i = 1, \dots, (w-r) \\ j = 1, \dots, d \end{cases}, \quad (6.68)$$

$$\mathbf{Y}_n(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_n(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{Rn} = \left\{ \sum_{j=1}^w Y_{n ij} \tilde{p}_j + \psi_{n i} - K_{Rn i} \frac{s_{n i}}{|s_{n i}|} \right\}; \begin{cases} i = 1, \dots, r \\ j = 1, \dots, d \end{cases}, \quad (6.69)$$

$$\mathbf{Y}_\rho(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}}) \tilde{\mathbf{p}} + \boldsymbol{\psi}_\rho(\mathbf{q}, t) - \mathbf{U}_{R\rho} = \left\{ \sum_{j=1}^w Y_{\rho ij} \tilde{p}_j + \psi_{\rho i} - K_{R\rho i} \frac{s_{\rho i}}{|s_{\rho i}|} \right\}; \begin{cases} i = 1, \dots, p \\ j = 1, \dots, d \end{cases}. \quad (6.70)$$

Jako współczynniki wzmocnień sterowania odpornego przyjęto:

$$\begin{aligned}
 K_{R\tau i} &= \sum_{j=1}^w |Y_{\tau ij}| k_{pj} + b_{\tau i} + \kappa_{\tau i}; i = 1, \dots, (w-r); j = 1, \dots, d, \\
 K_{Rni} &= \sum_{j=1}^w |Y_{nij}| k_{pj} + b_{ni} + \kappa_{ni}; i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, d, \\
 K_{R\rho i} &= \sum_{j=1}^w |Y_{\rho ij}| k_{pj} + b_{\rho i} + \kappa_{\rho i}; i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, d,
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

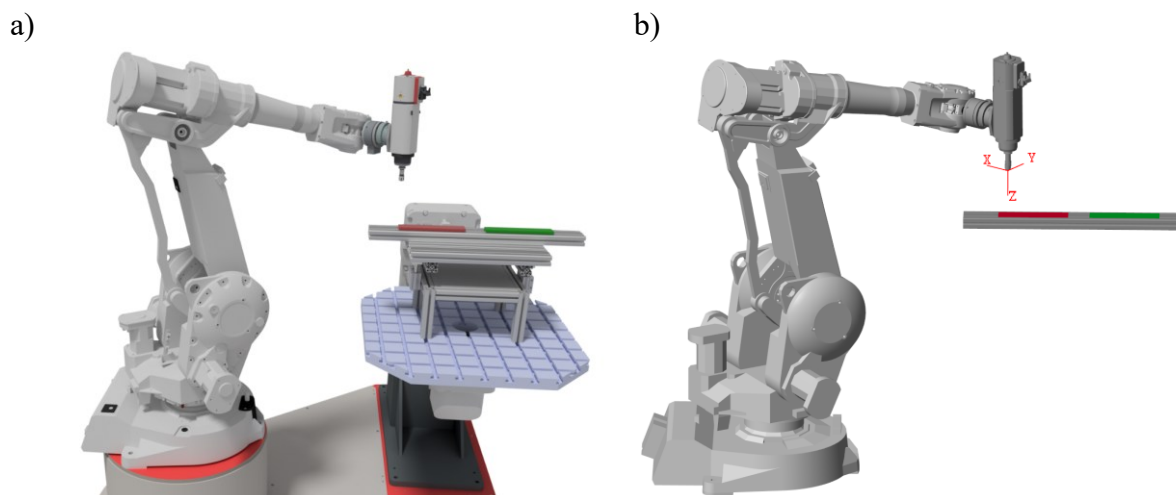
gdzie:  $\kappa_{\tau i} > 0, \kappa_{ni} > 0$  i  $\kappa_{\rho i} > 0$ . Dzięki temu uzyskano zależność:

$$\dot{V} \leq -\mathbf{s}^T \mathbf{E}^T \mathbf{K}_D \mathbf{s} - \sum_{i=1}^{m-r} \kappa_{\tau i} |s_{\tau i}| - \sum_{i=1}^r \kappa_{ni} P_{ei} |s_{ni}| - \sum_{i=1}^{p-1} \kappa_{\rho i} |s_{\rho i}|, \tag{6.72}$$

Warunek opisany równaniem (6.72) gwarantuje, że trajektoria układu dotrze do powierzchni ślizgowej w ograniczonym czasie i będzie się na niej utrzymywać. Struktura uogólnionego błędu nadążania na kierunkach stycznych  $s_{ni}$  zawiera zarówno błąd siły jak i pozycji względem ścieżki nominalnej, ale jak wykazano w pracy [113], w przypadku wystąpienia niepewności powierzchni kontaktu układ sterowania zapewni, że sygnały błędu nadążania za siłą oraz błędu nadążania za ścieżką nominalną osiągną pewnego rodzaju równowagę. Innymi słowy sygnał błędu odejścia od ścieżki nominalnej zrównoważy sygnał błędu siły.

## 7. Badania symulacyjne

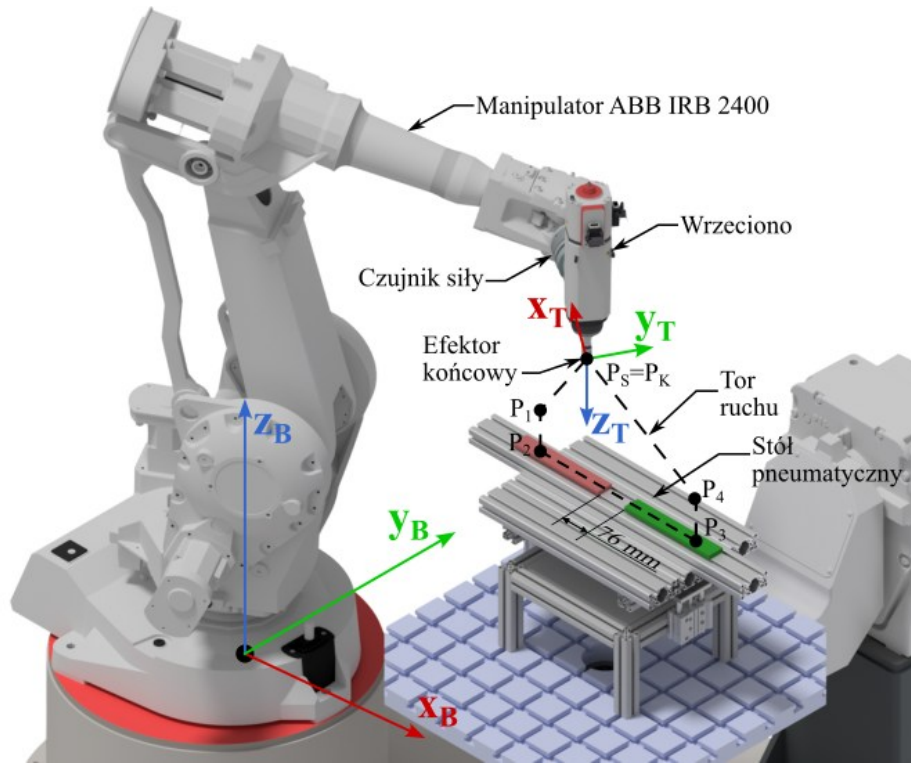
Do badań symulacyjnych zastosowano środowisko SIMULINK, w którym odwzorowano stanowisko badawcze znajdujące się w Laboratorium Robotyki Przemysłowej Katedry Mechaniki Stosowanej i Robotyki Politechniki Rzeszowskiej zaprezentowane na rys. 7.1.



Rys. 7.1. Widok stanowiska badawczego a) w środowisku CAD, b) w środowisku SIMULINK

W skład stanowiska wchodzi manipulator ABB IRB 2400, wyposażony w sześćoosiowy czujnik sił i momentów wykorzystywany w układzie sterowania siłą oraz wrzeciono obróbcze PDS XLC 70 o mocy 2,2 kW. Elementy stanowiska zostały odwzorowane w programie CAD i środowisku SIMULINK, w celu wizualizacji zachowania elementów stanowiska. Środowisko SIMULINK umożliwia zaprogramowanie animacji trójwymiarowej, która wspomaga ocenę zachowania się symulowanego modelu.

Opracowany model wykorzystano do przeprowadzenia badań symulacyjnych układu sterowania siłą z uwzględnieniem niepewności więzów. Zaproponowany test symulacyjny zakłada, że manipulator ze swobodnej pozycji wchodzi w kontakt z otoczeniem w postaci metalowej powierzchni i wykonuje prostoliniowy ruch po tej powierzchni utrzymując zadaną siłę nacisku wywieraną przez narzędzie. W pewnej odległości od punktu startowego znajduje się przerwa w powierzchni. Wprowadzono ją w celu sprawdzenia zachowania układu sterowania robota w przypadku, gdy kształt powierzchni interakcji jest niedokładnie określony. Założono, że powierzchnię interakcji stanowi zespół dwóch płaskowników stalowych rozsuniętych na środku, tak jak pokazano na rys. 7.2. Przestrzeń zadaniową robota manipulacyjnego  $\{C\}$  stanowi bazowy układ odniesienia  $x_B y_B z_B$ . Podzielono ją na dwa kierunki styczne  $c_{t1} = x_T$ ,  $c_{t2} = y_T$ , należące do podprzestrzeni  $\{T\}$  oraz jeden kierunek normalny  $c_n = z_T$ , należący do podprzestrzeni  $\{N\}$ , zatem powierzchnia interakcji jest równoległa do powierzchni  $x_B y_B$ . Do pełnego opisu ruchu robota IRB2400 potrzebne są parametry określające orientację układu  $x_T y_T z_T$  związanego z narzędziem względem układu bazowego  $x_B y_B z_B$ . W tym celu zastosowano kwaternion jednostkowy, przedstawiony w formie wektora:  $\mathbf{c}_p = [c_{p1} \ c_{p2} \ c_{p3} \ c_{p4}]^T$ . Powierzchnia narzędzia wchodząca w interakcję ma kształt półsfery o średnicy 10 mm. Przebieg symulacji pokazano na rys. 7.2.



Rys. 7.2. Schemat symulacji układu sterowania

Tor ruchu rozpoczyna się w pozycji  $P_s$ . Punkt charakterystyczny narzędzia osiąga kolejno pozycje oznaczone jako  $P_1, P_2, P_3, P_4$  kończąc ruch w pozycji  $P_k$ . Ruch pomiędzy pozycjami jest interpolowany linią prostą. Interakcja z otoczeniem zachodzi pomiędzy pozycjami  $P_2$  i  $P_3$ .

Do generowania trajektorii wykorzystano algorytm LSPB (z ang. *linear segments with parabolic blends*), generujący trapezoidalny profil prędkości, który pozwala uzyskać stałą prędkość przemieszczania pomiędzy pozycjami. Algorytm LSPB jest opisany następującym wzorem:

$$c(t) = \begin{cases} c_0 + \frac{a}{2}t^2, & 0 \leq t \leq t_b \\ \frac{c_f + c_0 - v_{\max}t_f}{2} + v_{\max}t, & t_b < t \leq t_f - t_b \\ c_f - \frac{at_f^2}{2} + at_ft - \frac{a}{2}t^2, & t_f - t_b < t \leq t_f \end{cases} \quad (7.1)$$

gdzie:  $c_0$  to wartość początkowa pozycji zadanej,  $c_f$  to wartość końcowa pozycji zadanej,  $v_{\max}$  to prędkość maksymalna,  $t_b$  to współczynnik określający czas przyspieszania i zwalniania,  $t_f$  to czas po jakim trajektoria ma osiągnąć pozycję końcową,  $a$  to przyspieszenie. Algorytm można parametryzować na wiele sposobów. W niniejszej pracy przyjęto zadany tor ruchu charakterystycznego punktu narzędzia, podzielonego na odcinki proste pomiędzy pozycją początkową i końcową. Dla każdego odcinka toru określono przyspieszenie  $a$  oraz czas trwania ruchu  $t_f$ . Przy takich założeniach należy wyliczyć prędkość  $v_{\max}$  oraz czas przyspieszenia i hamowania. Aby określić czas  $t_b$  należy rozwiązać równanie kwadratowe:

$$c_0 - c_f + at_f t_b - at_b^2 = 0. \quad (7.2)$$

Z dwóch rozwiązań wybierane jest rozwiązanie większe od zera lub gdy oba rozwiązania są dodatnie wybierane jest rozwiązanie o mniejszej wartości:

$$t_b = \frac{at_f \mp \sqrt{a(at_f^2 + 4c_0 - 4c_f)}}{2a}. \quad (7.3)$$

Rozwiązanie będzie użyteczne, jeśli otrzymany wynik spełnia warunek:  $t_b > 0 \wedge t_b \in \mathbb{R}$ , dlatego zadane parametry trajektorii określa poniższa nierówność:

$$a \geq \frac{4(c_f - c_0)}{t_f^2}. \quad (7.4)$$

Prędkość maksymalna jest wyliczana z zależności:

$$v_{\max} = \frac{c_f - c_0}{t_f - t_b}. \quad (7.5)$$

W tabeli 7.1 zamieszczono współrzędne punktów zadanego toru ruchu. Pozostałe parametry użyte w generatorze zadanej trajektorii ruchu oraz zadanej siły zamieszczono w tabeli 7.2. Do wygenerowania zadanej siły również zastosowano algorytm LSPB. Przebieg siły podzielony został na odcinki o stałej wartości zadanej oraz odcinki przejściowe, w których następuje zmiana wartości siły. Do wygenerowania przebiegu siły zadanej podano wartość początkową siły  $F_0$  i wartość końcową siły  $F_f$  oraz czas do jej osiągnięcia  $t_f$ . Pozostałe parametry wyznaczono z zależności:

$$\begin{cases} \dot{F}_{\max} = \frac{\frac{3}{2}(F_f - F_0)}{t_f}, \\ t_b = \frac{F_0 - F_f + \dot{F}_{\max} t_f}{\dot{F}_{\max}}, \\ \ddot{F} = \frac{\dot{F}_{\max}}{t_b}. \end{cases} \quad (7.6)$$

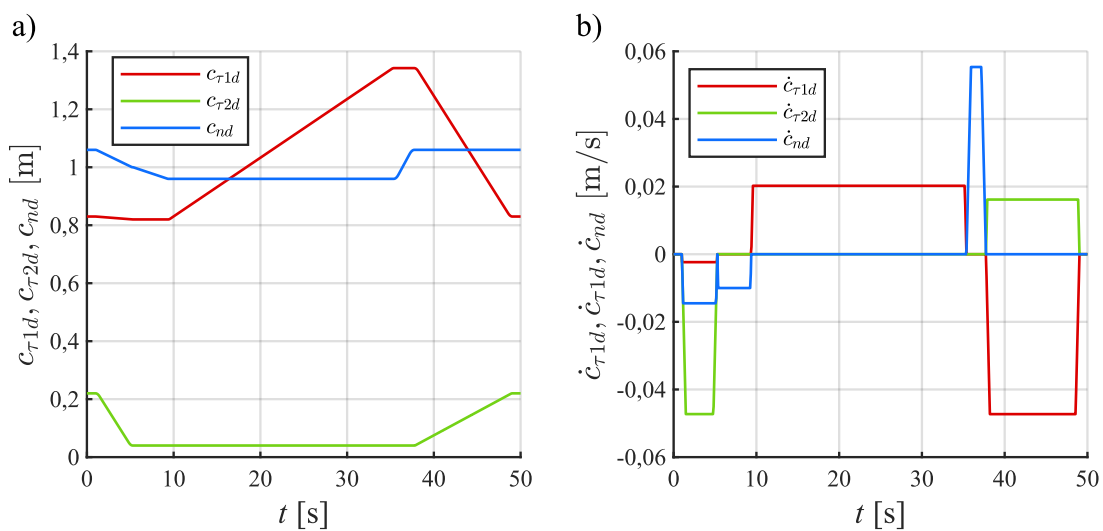
gdzie  $\dot{F}_{\max}$  to wartość maksymalna pochodnej siły względem czasu,  $\ddot{F}$  to druga pochodna siły względem czasu, która jest wartością stałą. Zadana siła docisku aktywuje się po 0,18 s przed założonym osiągnięciem punktu  $P_2$  i dezaktywuje się na około 1 s przed założonym osiągnięciem punktu  $P_3$ . Czas aktywacji siły zadanej ustawiono na 0,2 s. Wygenerowaną trajektorię pozycji zadanej pokazano na rys. 7.3, zaś przebieg wartości siły zadanej pokazano na rys. 7.4. Współrzędne orientacji zadanej są takie same dla każdej pozycji.

Tabela 7.1. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu

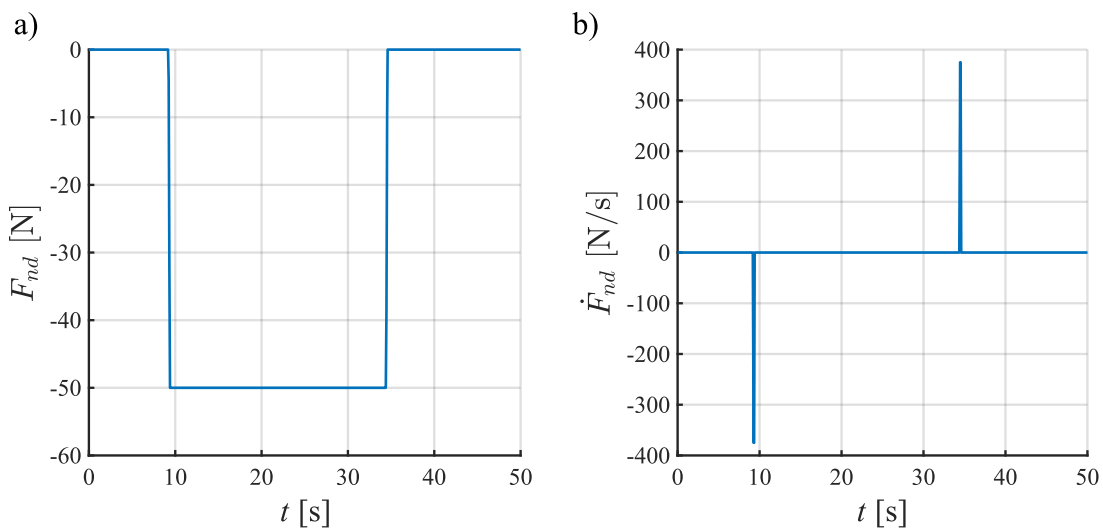
Pozycja	Współrzędna położenia [m]	Współrzędna orientacji
$P_S, P_K$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,83 \\ 0,22 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 1,06$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_1$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,82 \\ 0,04 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 1$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_2$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,82 \\ 0,04 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,96$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_3$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,342 \\ 0,04 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,96$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_4$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,342 \\ 0,04 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 1,06$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tabela 7.2. Parametry zadanej trajektorii

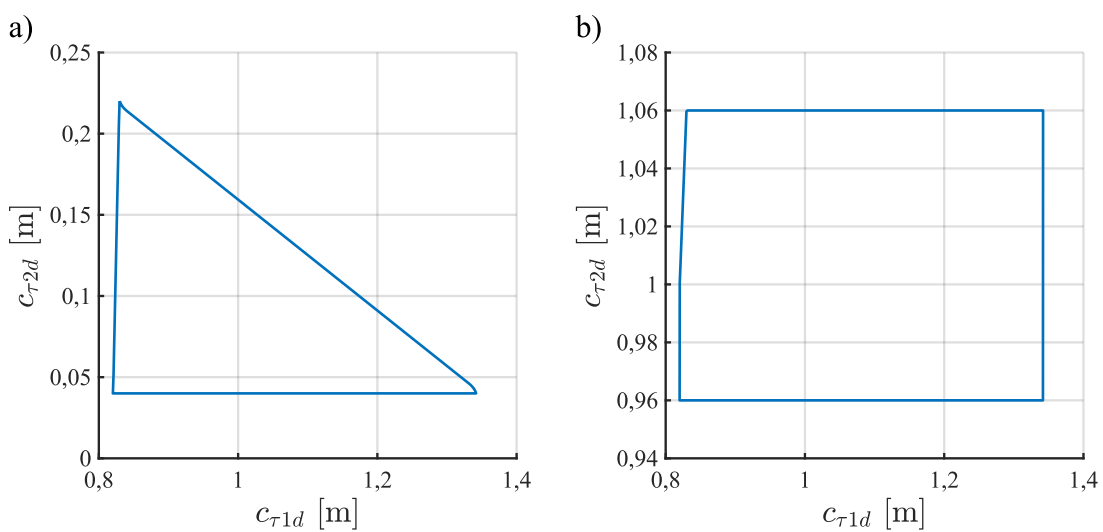
Ścieżka	Przyspieszenie	Czas	Siła	Czas
$P_S$	$a = 0,1 \text{ m/s}^2$	$t_f = 1 \text{ s}$	$F_{nd} = 0$	$t_f = 9 \text{ s}$
$P_S \rightarrow P_1$		$t_f = 4,28 \text{ s}$	$F_{nd} = 0 \rightarrow -50 \text{ N}$	$t_f = 0,2 \text{ s}$
$P_1 \rightarrow P_2$		$t_f = 4,1 \text{ s}$		
$P_2 \rightarrow P_3$		$t_f = 26 \text{ s}$	$F_{nd} = -50 \text{ N}$	$t_f = 25 \text{ s}$
$P_3 \rightarrow P_4$		$t_f = 2,36 \text{ s}$	$F_{nd} = -50 \text{ N} \rightarrow 0$	$t_f = 0,2 \text{ s}$
$P_4 \rightarrow P_K$		$t_f = 11,3 \text{ s}$		



Rys. 7.3. Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu  $T$ , b) składowe prędkości punktu  $T$

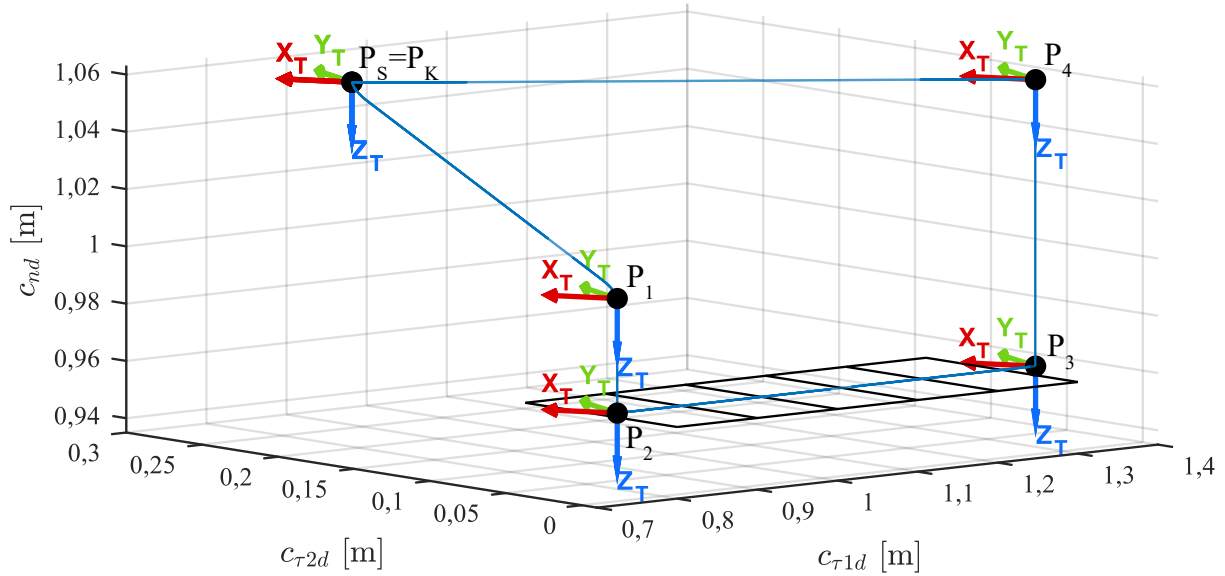


Rys. 7.4. Zadana wartość: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku



Rys. 7.5. Zadany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$

Na rys. 7.5 pokazano zadany tor ruchu w płaszczyznach  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$  i  $c_{\tau 1}$   $c_n$  natomiast na rys. 7.6 przedstawiono wykres przestrzenny zadanego toru. Zaznaczono na nim także przestrzenną orientację układu współrzędnych  $x_T y_T z_T$  związanego z narzędziem oraz zakładaną powierzchnię interakcji.



Rys. 7.6. Zadany tor ruchu punktu  $T$

Struktura zaprojektowanego układu sterowania do realizacji zadania zawiera szereg parametrów projektowych stanowiących współczynniki wzmocnień sterowania PD:  $\mathbf{K}_D = \text{diag}[K_{D\tau 1}, K_{D\tau 2}, K_{Dn}, K_{D\rho 1}, K_{D\rho 2}, K_{D\rho 3}]$ ,  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}[\Lambda_{D\tau 1}, \Lambda_{D\tau 2}, \Lambda_{Dn}, \Lambda_{D\rho 1}, \Lambda_{D\rho 2}, \Lambda_{D\rho 3}]$  oraz sterowania odpornego  $\mathbf{K}_R = [K_{R\tau 1}, K_{R\tau 2}, K_{Rn}, K_{R\rho 1}, K_{R\rho 2}, K_{R\rho 3}]$ . Ponadto realizacja sterowania wymaga określenia współczynnika sztywności otoczenia  $K_e$  oraz współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$ . Wszystkie parametry układu sterowania zestawiono w tabeli 7.3.

Tabela 7.3. Parametry układu sterowania

Parametr	Wartość
$K_{D\tau 1}$	5000
$K_{D\tau 2}$	5000
$K_{Dn}$	2000
$K_{D\rho 1}$	2000
$K_{D\rho 2}$	2000
$K_{D\rho 3}$	2000
$\Lambda_{D\tau 1}$	200
$\Lambda_{D\tau 2}$	200
$\Lambda_{Dn}$	500
$\Lambda_{D\rho 1}$	500



Parametr	Wartość
$\Lambda_{D\rho 2}$	500
$\Lambda_{D\rho 3}$	500
$K_{R\tau 1}$	50
$K_{R\tau 2}$	50
$K_{Rn}$	50
$K_{R\rho 1}$	20
$K_{R\rho 2}$	20
$K_{R\rho 3}$	20
$w_\xi$	100000
$K_e$	150000

Przyjęty w symulacji model interakcji robota ze środowiskiem, pokazany na rys. 7.7a zakłada punktowy styk narzędzia robota z powierzchnią kontaktu. Efektem interakcji jest wektor sił w postaci:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{\tau 1} \\ \lambda_{\tau 2} \\ \lambda_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (7.7)$$

gdzie:  $[\lambda_x \ \lambda_y \ \lambda_z]^T$  to wektor siły interakcji określony względem układu odniesienia przestrzeni zadaniowej,  $\lambda_p \in \mathbb{R}^3$  to wektor momentu interakcji względem układu odniesienia przestrzeni zadaniowej,  $\lambda_{\tau 1}, \lambda_{\tau 2}$  to siły oporu wywierane na narzędzie na kierunkach stycznych do powierzchni kontaktu,  $\lambda_n$  to siła nacisku wywierana na narzędzie, na kierunku normalnym do powierzchni kontaktu,  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^3$  to wektor zerowy. Siła nacisku jest wynikiem wgłębienia powierzchni narzędzia w głąb powierzchni detalu, co można wyrazić wzorem:

$$\lambda_n = K_e d, \quad (7.8)$$

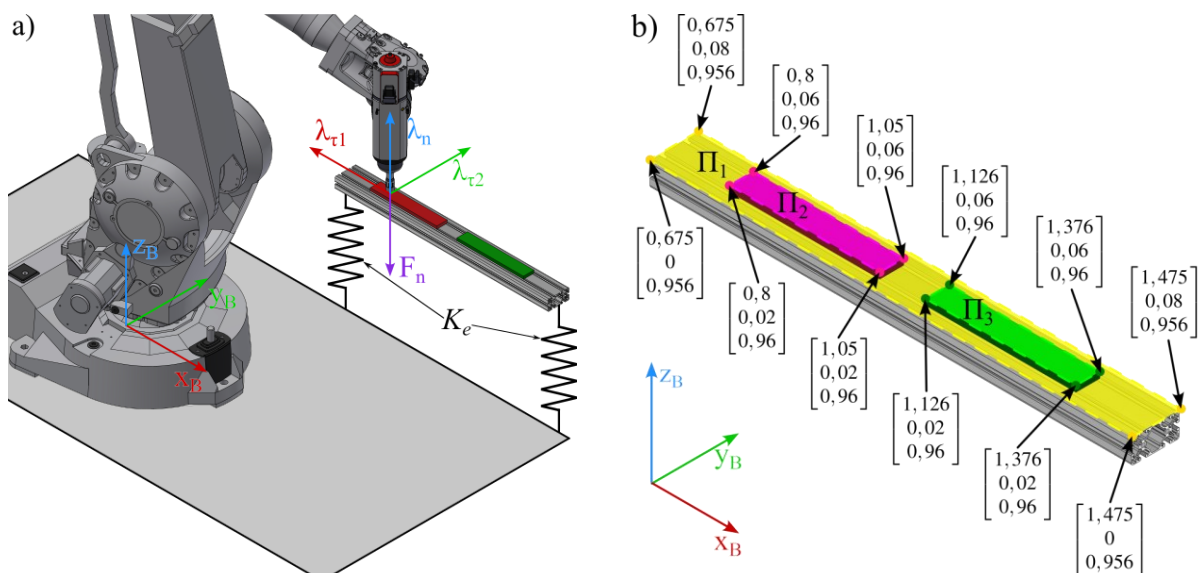
gdzie  $d$  oznacza głębokość wgłębienia, mierzoną względem powierzchni kontaktu. Natomiast siły oporu zostały zamodelowane jako tarcie suche:

$$\begin{aligned} \lambda_{\tau 1} &= \mu |\lambda_n| \frac{-\dot{c}_{\tau 1}}{\sqrt{\dot{c}_{\tau 1}^2 + \dot{c}_{\tau 2}^2}}, \text{ dla } \dot{c}_{\tau 1} \vee \dot{c}_{\tau 2} \neq 0, \\ \lambda_{\tau 2} &= \mu |\lambda_n| \frac{-\dot{c}_{\tau 2}}{\sqrt{\dot{c}_{\tau 1}^2 + \dot{c}_{\tau 2}^2}} \end{aligned} \quad (7.9)$$

gdzie  $\mu$  to współczynnik tarcia suchego, którego wartość w symulacji przyjęto  $\mu=0,2$ .

Ponieważ ruch może odbywać się niezależnie na dwóch kierunkach stycznych, to aby wyznaczyć rzut wektora siły tarcia wprowadzono zależności:  $\frac{\dot{c}_{\tau 1}}{\sqrt{\dot{c}_{\tau 1}^2 + \dot{c}_{\tau 2}^2}}, \frac{\dot{c}_{\tau 2}}{\sqrt{\dot{c}_{\tau 1}^2 + \dot{c}_{\tau 2}^2}}$ , które

odpowiadają kolejno wartościom funkcji cosinus i sinus kąta nachylenia wektora prędkości stycznej do osi stycznej  $\tau_1$ . Zwrot wektora siły tarcia jest przeciwny do wektora prędkości, stąd wynika znak minus przy wartości prędkości stycznej. Gdy efektor robota nie porusza się, to wartości sił oporu  $\lambda_{\tau 1}$  i  $\lambda_{\tau 2}$  wynoszą 0. W symulacji określono trzy powierzchnie kontaktu, oznaczone na rys. 7.7b jako  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ , które odpowiadają kolejno powierzchniom profilu aluminiowego oraz dwóm płaskownikom stalowym zamocowanym do niego.



Rys. 7.7. Schematy: a) interakcji narzędzia z otoczeniem, b) rozmieszczenia płaszczyzn interakcji

Powierzchnie mają kształt prostokąta i zostały zdefiniowane jako zbiór punktów o współrzędnych  $\{[x_{\Pi i}, y_{\Pi i}, z_{\Pi i}]^T \in \Pi_i\}$  określonych w układzie bazowym. Na rys. 7.7b zaznaczono współrzędne wierzchołków tych powierzchni. Siła nacisku wywierana przez narzędzie robota, oznaczona jako  $F_n$  ma przeciwny zwrot do zwrotu siły reakcji  $\lambda_n$ , zatem wartość siły przekazywanej do układu sterowania siłą jest wyliczana z następującej zależności:

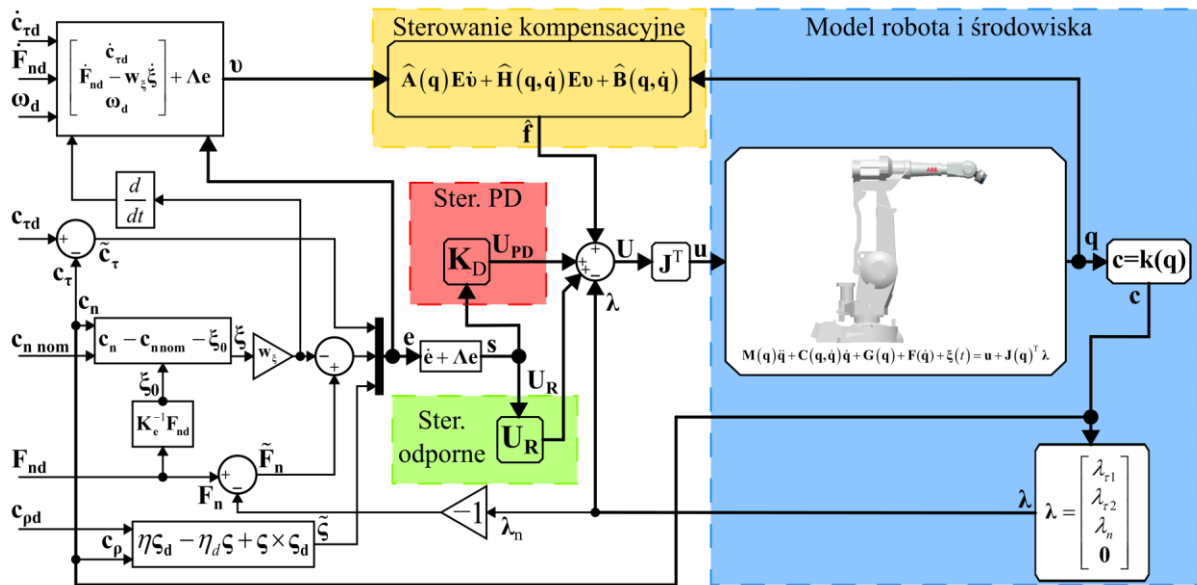
$$F_n = -\lambda_n = -K_e d. \quad (7.10)$$

W celu wyznaczenia wielkości deformacji obliczana jest pozycja punktu charakterystycznego narzędzia względem powierzchni interakcji, zgodnie ze wzorem:

$$d = \begin{cases} z_{\Pi i} - z_T, & \text{dla } (x_T, y_T) \in \Pi_i \wedge z_T < z_{\Pi i} \\ 0, & \text{dla } (x_T, y_T) \notin \Pi_i \vee z_T \geq z_{\Pi i} \end{cases}. \quad (7.11)$$

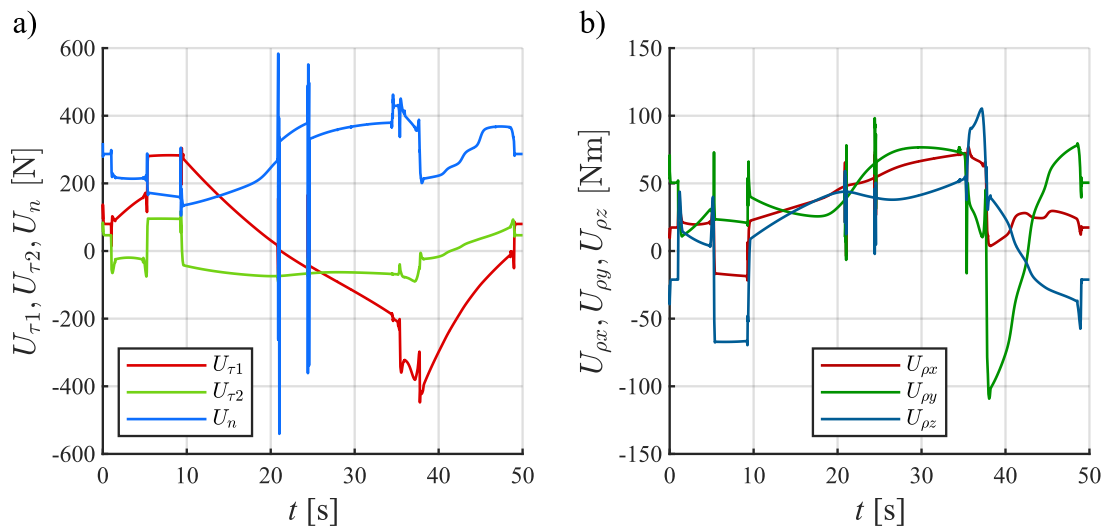
Deformacja jest wyliczana tylko wówczas, jeżeli punkt TCP narzędzia robota znajdują się w obszarze określonym przez zbiór współrzędnych  $i$ -tej powierzchni  $\Pi_i$ , innymi słowy, kiedy znajduje się w obszarze ograniczonym przez punkty wierzchołkowe określonej powierzchni. Ponieważ punkt styku narzędzia z powierzchnią jest jednocześnie jego punktem charakterystycznym, a siły reakcji stanowią zbieżny układ sił, więc momenty interakcji są wektorem zerowym  $\mathbf{0}^T \in \mathbb{R}^3$ . Równania (7.8) – (7.11) symulują działanie czujnika sił w rzeczywistym robocie.

Na rys. 7.8. przedstawiono schemat zawierający wszystkie elementy symulacji układu sterowania i połączenia między nimi.

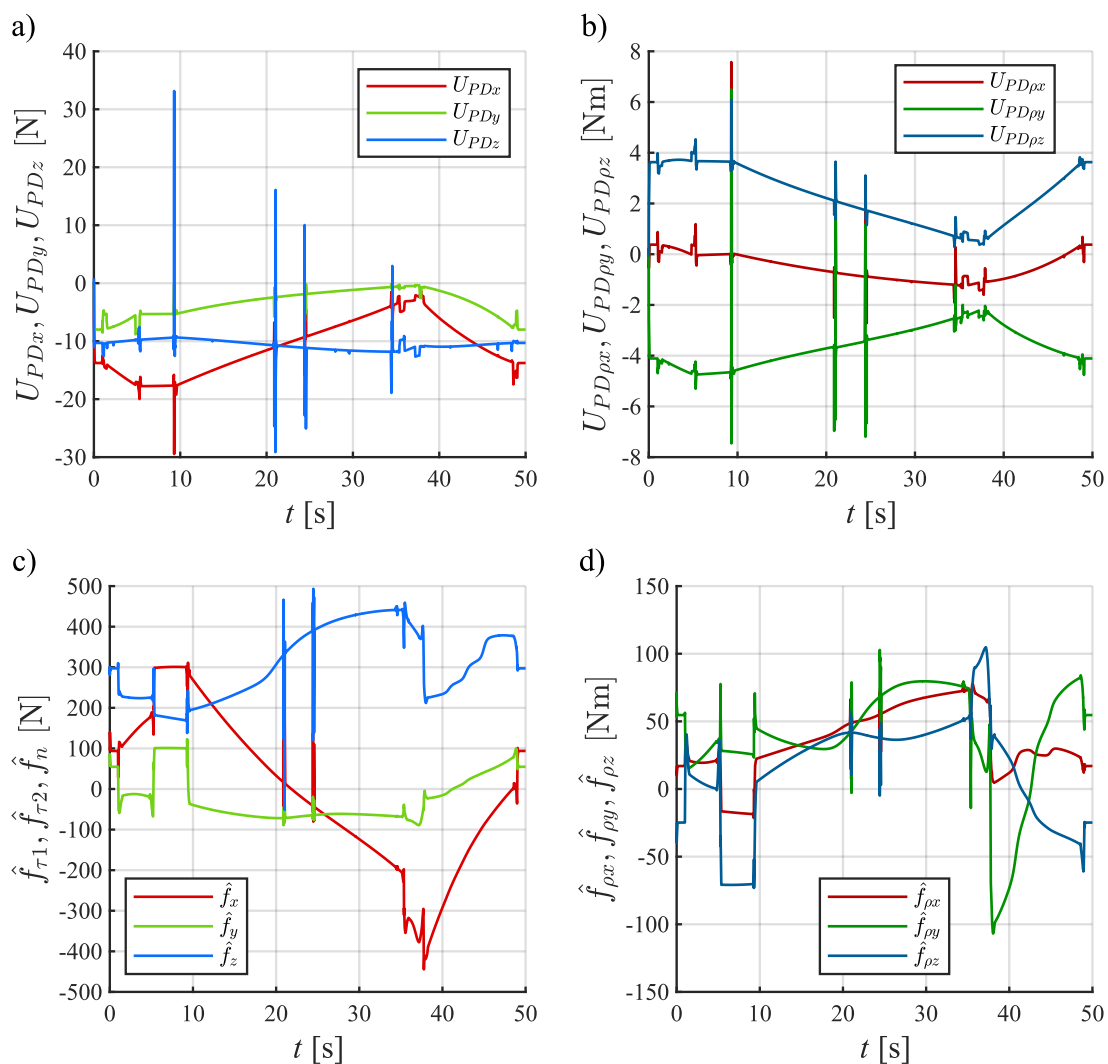


Rys. 7.8. Schemat symulacji sterowania pozycyjno-siłowego robotem ABB IRB2400 z uwzględnieniem niepewności więzów

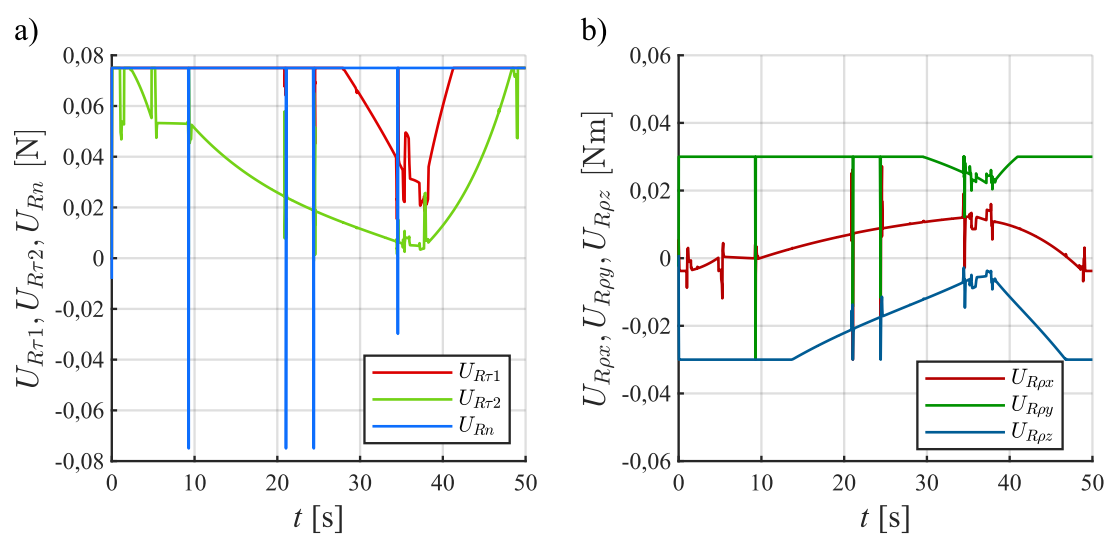
Wyniki przeprowadzonej symulacji zaprezentowano na wykresach. Wykres całkowitego sygnału sterowania w przestrzeni zadaniowej pokazano na rys. 7.9, a na rys. 7.10, rys. 7.11 i rys. 7.12 pokazano sygnały składowych elementów układu sterowania. Widoczne zaburzenia sygnałów w postaci gwałtownych zmian wartości występują w momentach zmian prędkości robota oraz w chwilach wystąpienia zaburzeń powierzchni detalu, tj. około 21. i 25. sekundy.



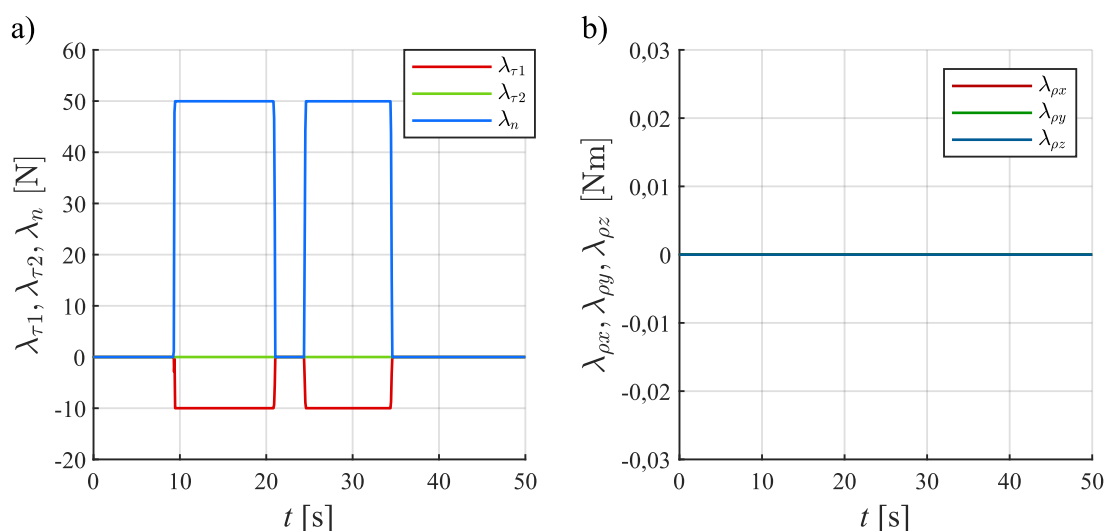
Rys. 7.9. Sygnały sterowania całkowitego dotyczące: a) położenia, b) orientacji



Rys. 7.10. Sygnały sterowania: a) sterowanie PD położeniem, b) sterowanie PD orientacją, c) sterowanie kompensacyjne położeniem, d) sterowanie kompensacyjne orientacją

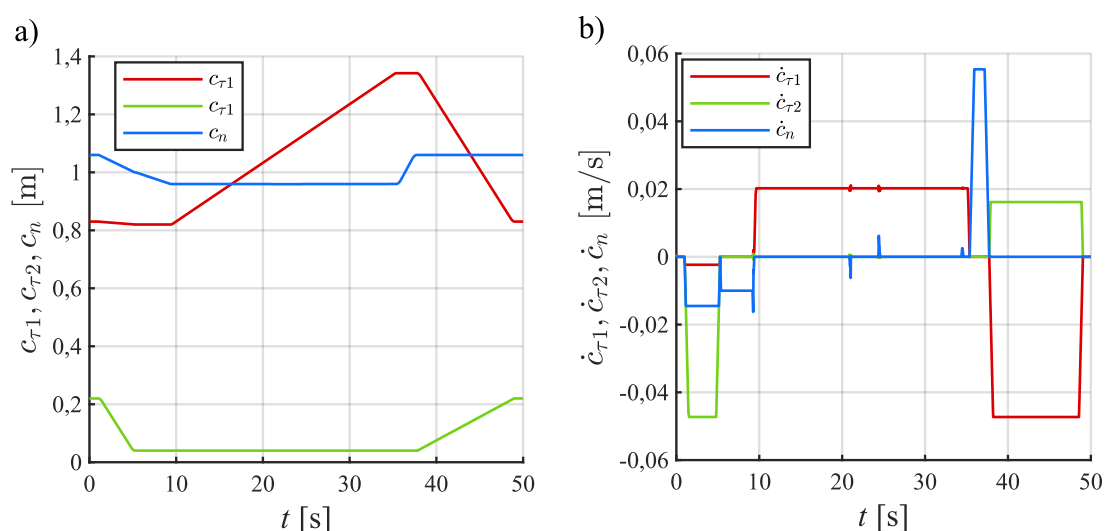


Rys. 7.11. Sygnały sterowania: a) sterowanie odporne położeniem, b) sterowanie odporne orientacją

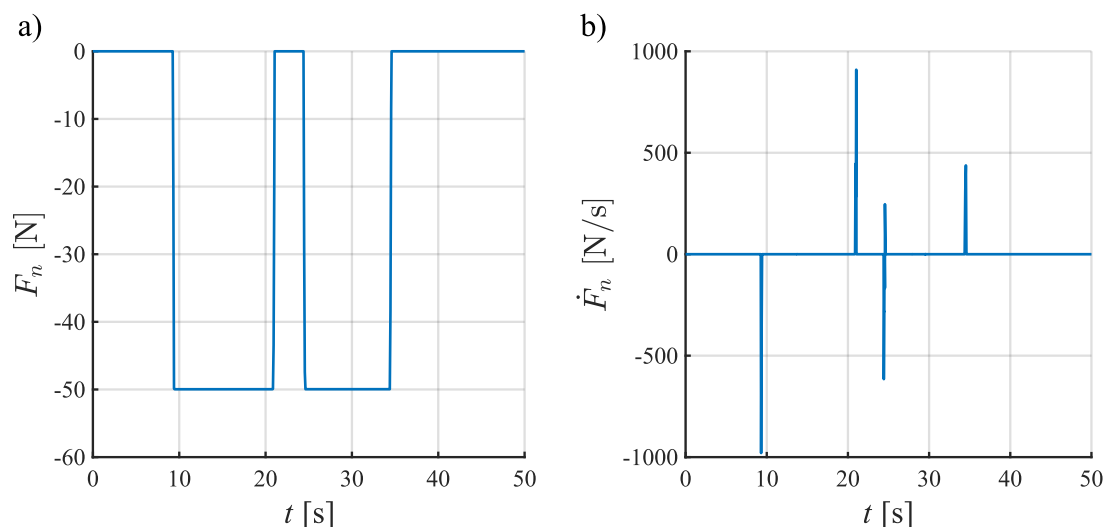


Rys. 7.12. Sygnały sterowania: a) sterowanie kompensujące wpływ sił interakcji, b) sterowanie kompensujące wpływ momentów interakcji

Z sygnałów składowych sterowania największy udział mają sygnały funkcji aproksymującej nieliniowości obiektu. Zauważalny jest wpływ sygnału sił interakcji na sygnał całkowity sterowania. Porównując sygnał sterowania całkowitego (rys. 7.9a) z sygnałami sterowania PD (rys. 7.10a) i sygnałem sterowania kompensacyjnego (rys. 7.10c) można zauważyć, że sygnał siły nacisku  $\lambda_n$  (rys. 7.12a) obniża wartość sygnału sterowania na kierunku osi  $z$  (rys. 7.10 a), zaś sygnał będący wynikiem siły tarcia (rys. 7.12a) zwiększa wartość sygnału sterowania położeniem na kierunku osi  $x$  w czasie trwania interakcji z powierzchnią kontaktu (rys. 7.10a). Jest to najlepiej widoczne w momencie, w którym wartość zadanej siły nacisku spada do 0, czyli między 34. a 35. sekundą symulacji. Zrealizowaną trajektorię pozycyjną pokazano na rys. 7.13, a przebiegi wartości siły i jej pochodnej pokazano na rys. 7.14. Natomiast na rys. 7.15 i rys. 7.16 pokazano zrealizowany w symulacji tor ruchu.

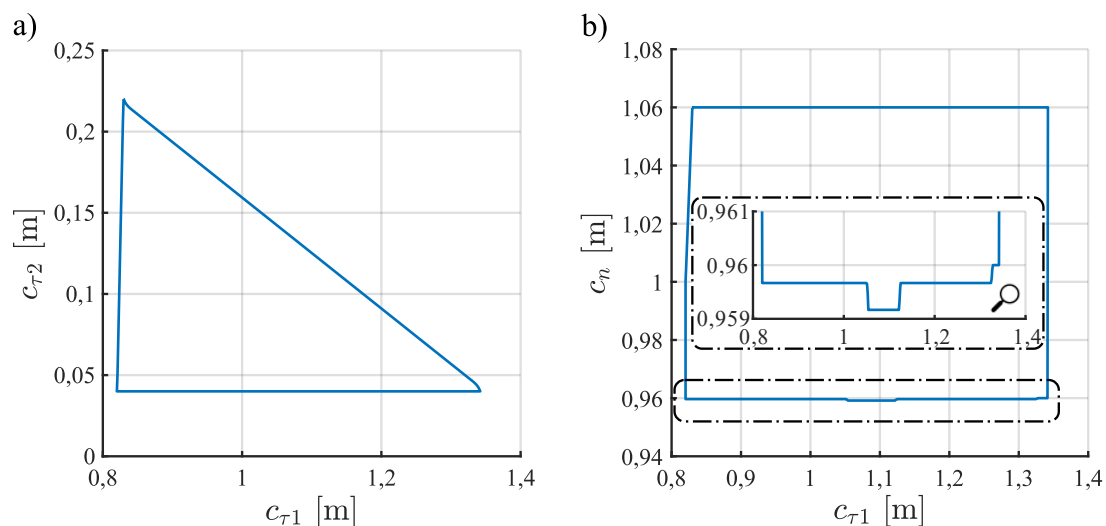


Rys. 7.13. Zrealizowana trajektoria pozycji: a) współrzędne punktu T, b) składowe prędkości punktu T

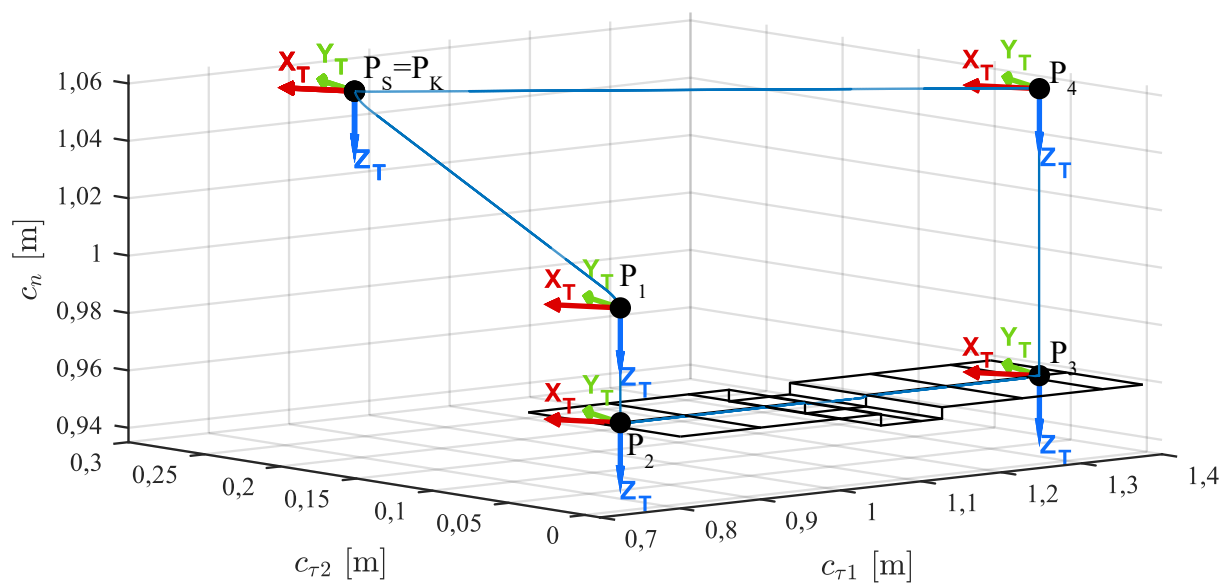


Rys. 7.14. Wartości zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

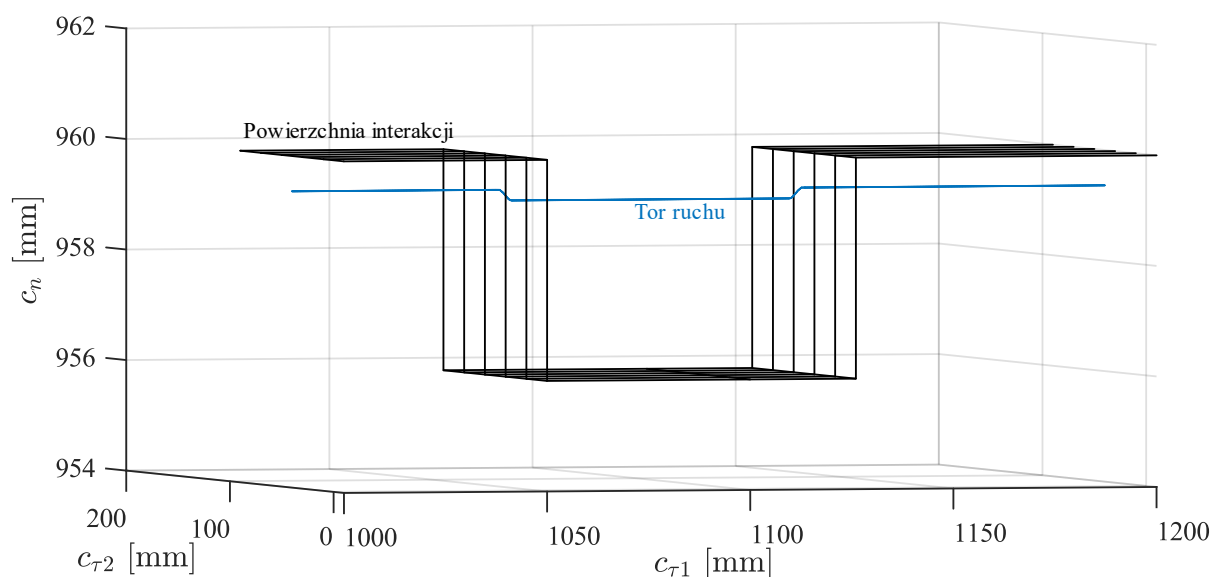
Powierzchnia interakcji znajduje się na wysokości 0,96 m względem układu bazowego  $x_{BYBZB}$ . Układ sterowania w celu realizacji sterowania siłą ustawia punkt charakterystyczny narzędzia poniżej tej powierzchni, co można odczytać z wykresu toru ruchu na rys. 7.15b. Na wykresie można zauważyć miejsce zaburzenia więzów geometrycznych, gdzie wartość współrzędnej  $c_n$  maleje, następnie wraca do poprzedniej wartości, gdy narzędzie natrafia na powierzchnię  $\Pi_1$ . W momencie, gdy wartość siły zadanej spada do 0 [N], układ sterowania podnosi narzędzie na zadaną wysokość nominalną.



Rys. 7.15. Zrealizowany tor ruchu punktu T: a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$

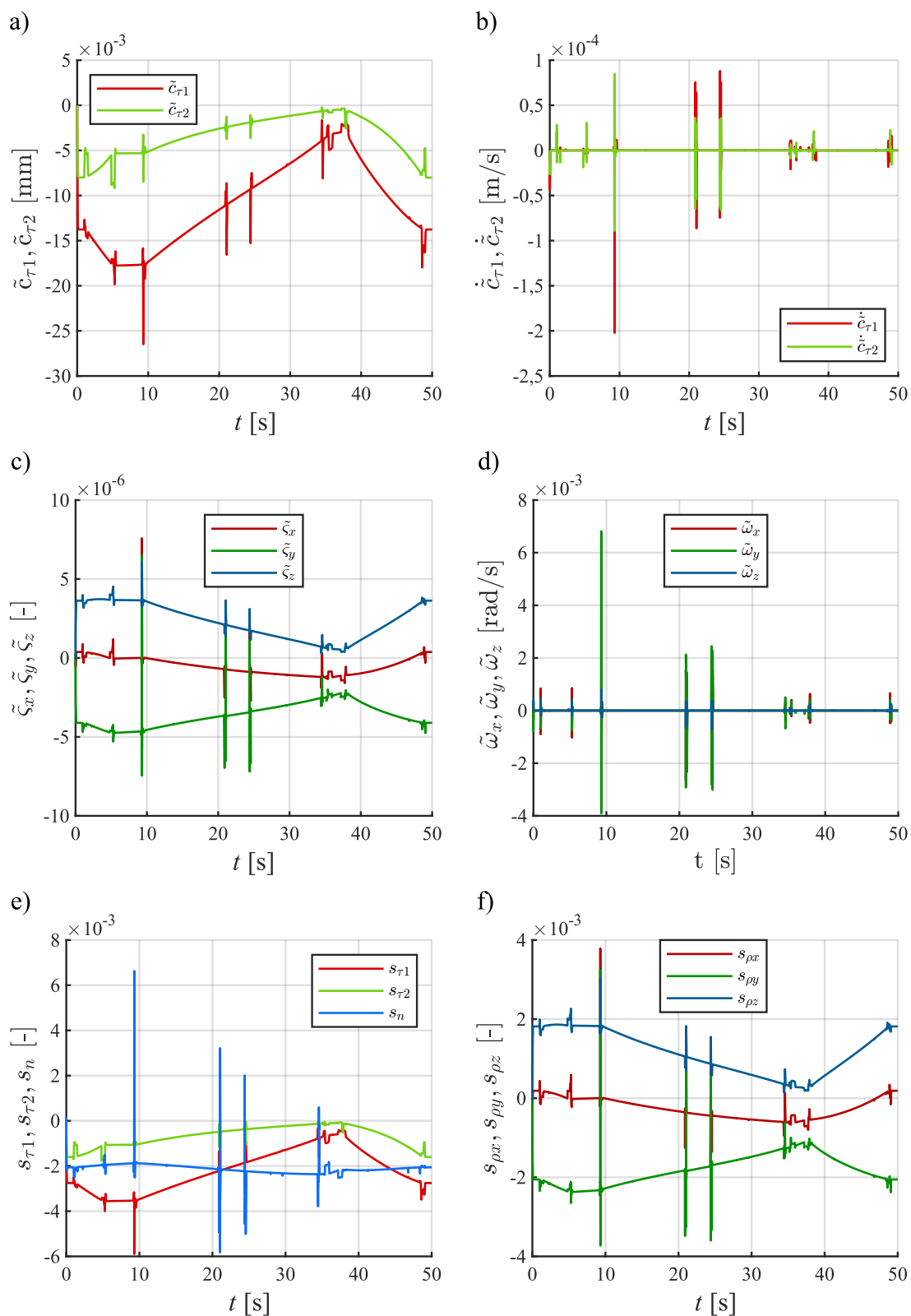


Rys. 7.16. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$



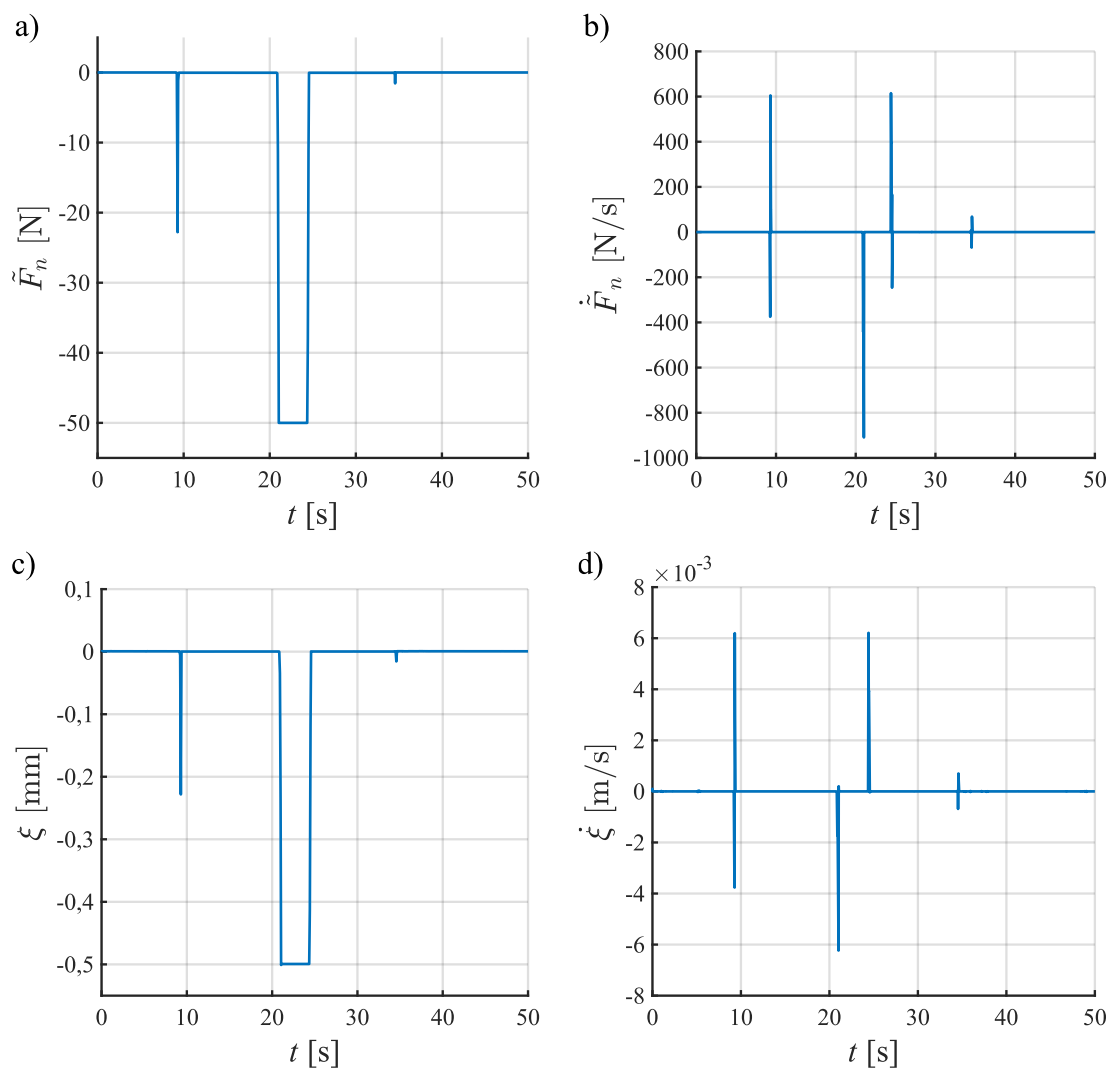
Rys. 7.17. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu  $T$  w miejscu deformacji powierzchni

Na rys. 7.18 i rys. 7.19 pokazano sygnały błędów sterowania. Największe wartości sygnałów błędów osiągają w momentach zmian prędkości ruchu oraz zmian siły nacisku narzędzia na powierzchnię interakcji. Dotyczy to zarówno sygnałów błędów pozycji jak i orientacji. Na rys. 7.19c można zauważyć, że przy współczynniku  $w_{\xi} = 100000$  układ sterowania pozwala na maksymalne odchylenie od nominalnej ścieżki o 0,5 mm. Błąd realizacji sterowania siłą osiąga wartość równą wartości zadanej. Zaburzenie geometrii powierzchni kontaktu wynosi 4 mm, czyli narzędzie nie wchodzi w interakcję z powierzchnią profilu  $\Pi_1$ . Takie działanie układu sterowania pozwala realizować kontrolę siły i zapobiec zbyt dużemu odejściu narzędzia od nominalnej ścieżki, ponieważ sterowanie siłowe jest równoważone przez człon  $w_{\xi\zeta}$ .

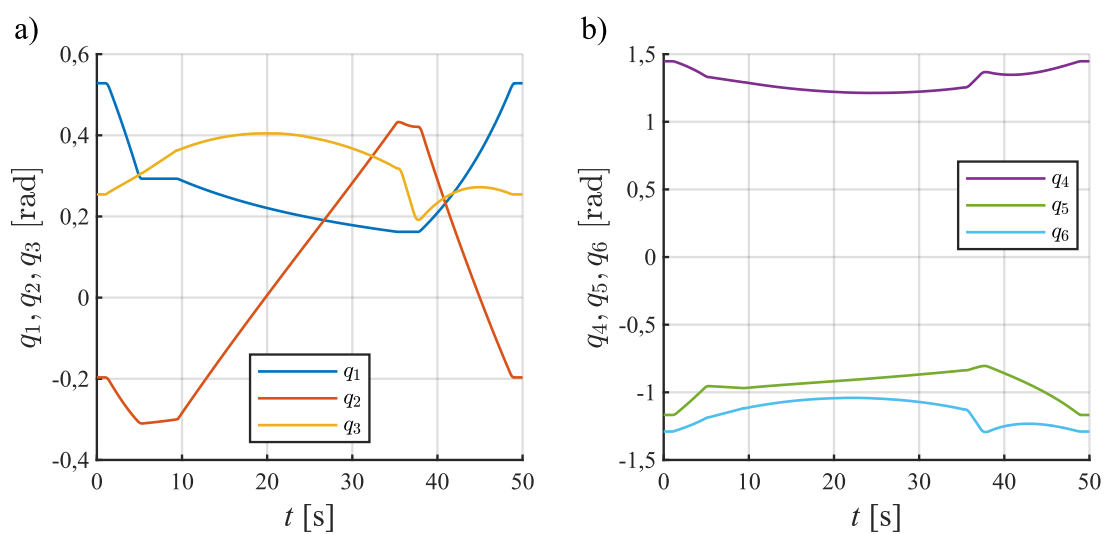


Rys. 7.18. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych, c) błędy orientacji, d) błędy prędkości kątowych, e) błędy uogólnione przemieszczeń, f) błędy uogólnione orientacji

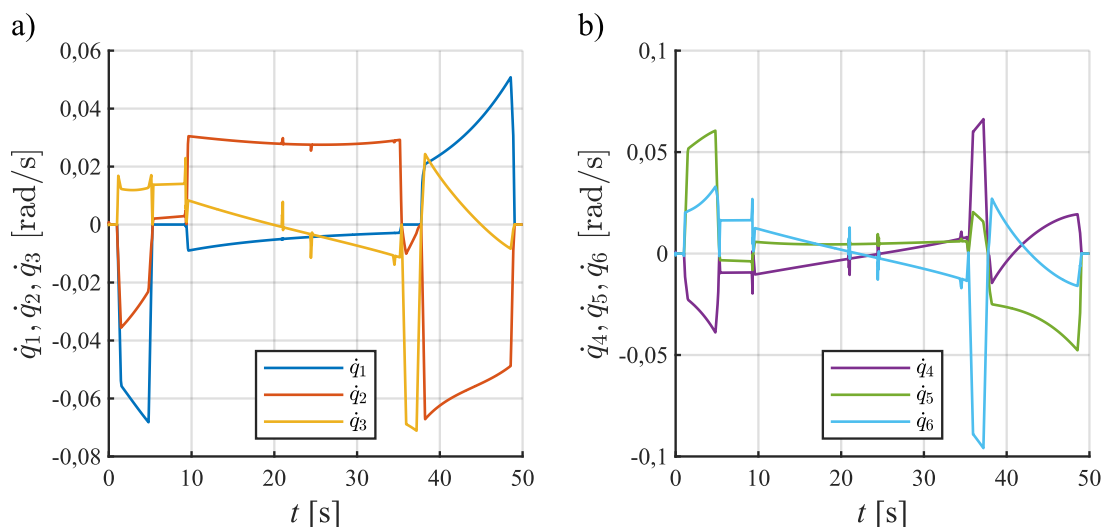




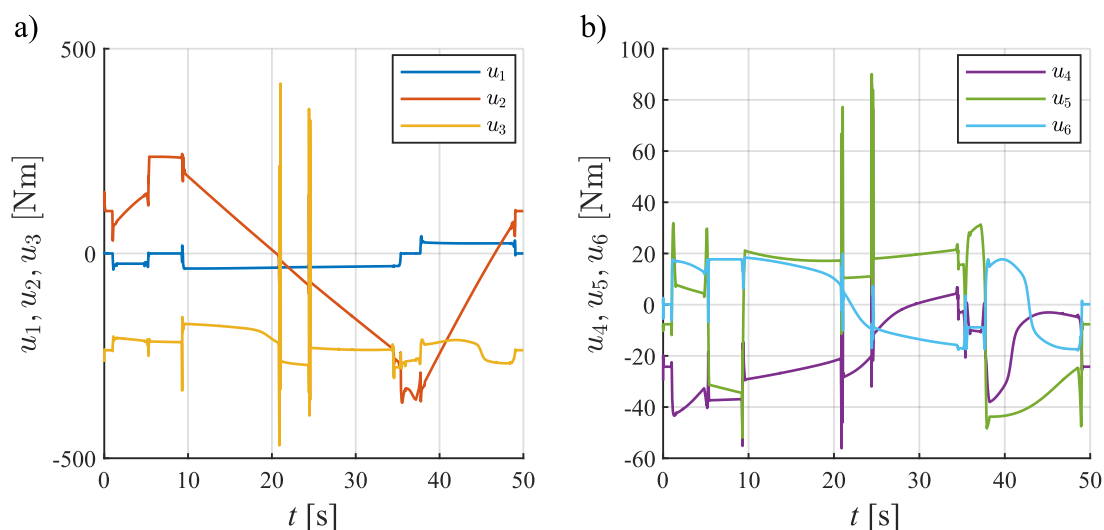
Rys. 7.19. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej, c) odchylenie punktu charakterystycznego narzędzia od założonych więzów powierzchni interakcji, d) pochodna tego odchylenia



Rys. 7.20. Pozycje kątowe ruchu robota w przestrzeni konfiguracyjnej: a) pozycje członów 1-3, b) pozycje członów 4-6

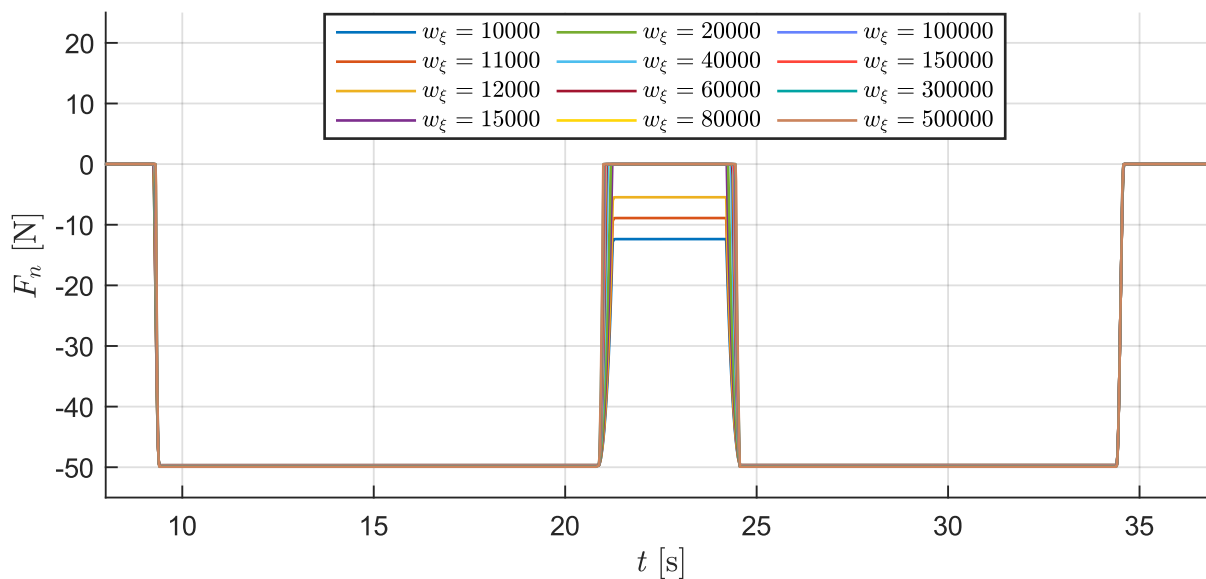


Rys. 7.21. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości członów 1-3, b) prędkości członów 4-6

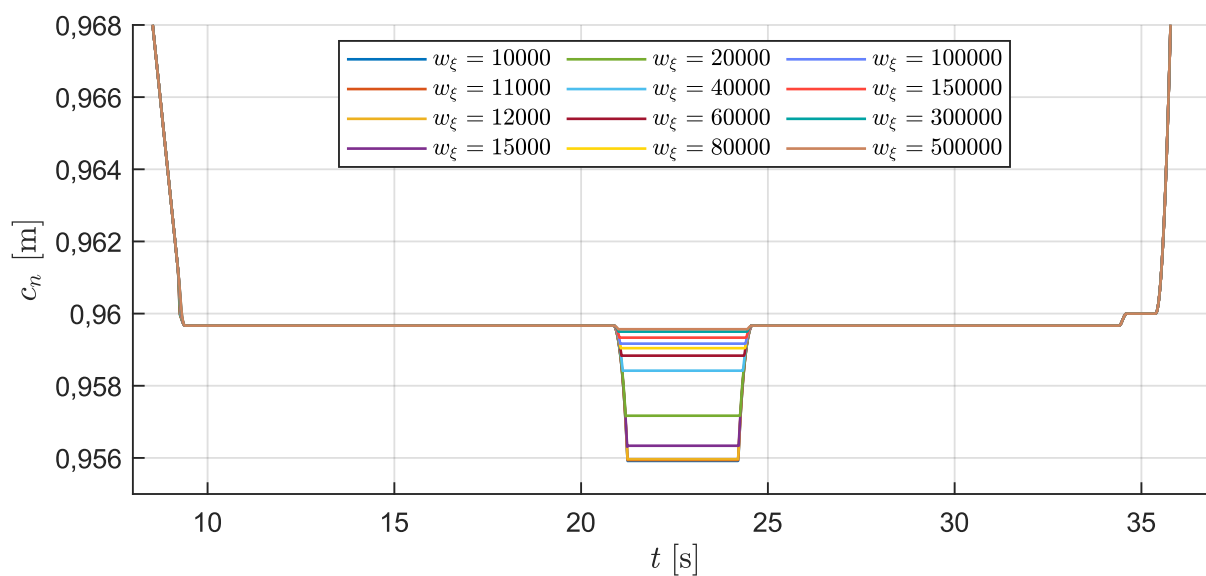


Rys. 7.22. Momenty napędowe: a) członów 1-3, b) członów 4-6

Przebiegi kinematycznych parametrów ruchu w przestrzeni konfiguracyjnej zrealizowane przez robota pokazano na rys. 7.20 i rys. 7.21. Zadana trajektoria angażuje wszystkie napędy robota. Sygnał sterowania członami w przestrzeni konfiguracyjnej przedstawiono na rys. 7.22. Największe wartości osiąga sterowanie osiami 2 i 3, co wynika z kompensacji znaczącej masy ramienia. Na wykresie można również zauważyć gwałtowne zmiany wartości wywołane przez zaburzenia geometrii powierzchni kontaktu nie tylko w przypadku sterowania członami 2 i 3, ale również członami kiści robota, czyli osiami 4, 5 i 6. Na rys. 7.23 i rys. 7.24 przedstawiono jak zmiana współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$  wpływa na zachowanie się układu sterowania na kierunku normalnym. Im większa jego wartość, tym mniejsze jest odchylenie narzędzia od trajektorii nominalnej. Układ sterowania silniej reaguje na błąd pozycji niż na błąd siły. Powyżej wartości  $w_\xi = 12000$  narzędzie nie osiąga powierzchni  $\Pi_1$  i unosi się nad nią w miejscu zaburzenia powierzchni interakcji.



Rys. 7.23. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$  na realizację zadanej siły

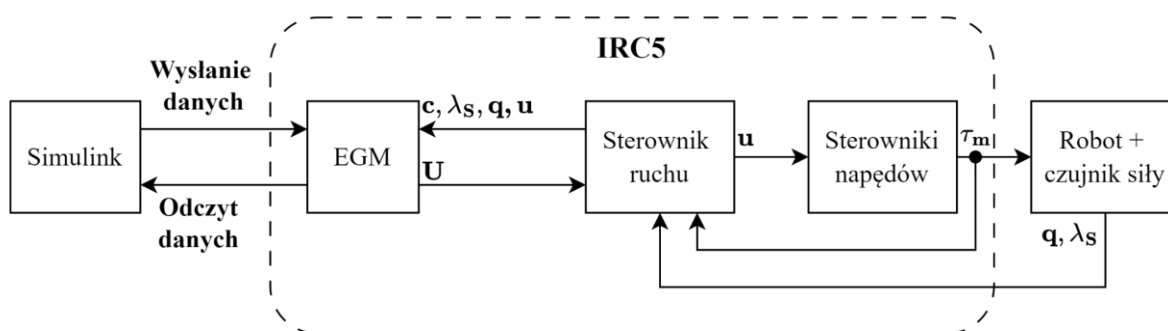


Rys. 7.24. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$  na realizację zadanej pozycji efektora końcowego

Nie przeszkadza to realizować zadania utrzymania zadanej siły w miejscach, gdzie faktyczne ustawienie powierzchni interakcji pokrywa się z zadaną pozycją, pod warunkiem, że zakładana sztywność powierzchni interakcji jest poprawnie zidentyfikowana.

## 8. Badania eksperymentalne

Przetestowane w toku badań symulacyjnych rozwiązanie poddano weryfikacji na rzeczywistym stanowisku badawczym do zrobotyzowanej obróbki mechanicznej. Platformę badawczą skonfigurowano do sterowania robotem IRB 2400 w przestrzeni zadaniowej, zdefiniowanej w układzie bazowym robota.



Rys. 8.1. Diagram platformy badawczej

W *EGM* ustawiono sterowanie położeniem wzdłuż osi  $x$ ,  $y$  i  $z$ , blokując zmiany orientacji. Kontroler robota utrzymuje orientację robota, obecną w chwili aktywacji sterowania przez *EGM*. Diagram na rys. 8.1 przedstawia działanie platformy badawczej, gdzie *EGM* działa w trybie sterowania pozycją. W tym trybie sygnał sterowania w przestrzeni zadaniowej  $\mathbf{U}$  jest przekazywany do jednostki sterowania ruchem, która generuje sygnał  $\mathbf{u}$  sterownia osiami dla sterowników napędów, które zasilają napędy elektryczne robota, tak aby wygenerowały odpowiedni moment napędowy  $\tau_m$ . Do interfejsu *EGM* przekazywane są informacje zwrotne o bieżącej pozycji punktu charakterystycznego narzędzia, sygnał z czujnika siły, pozycja złączy robota, wektor momentów napędowych członów robota  $\mathbf{u}$  za przekładnią napędu. Następnie dane są wysłane do SIMULINKA. Sygnały z czujnika siły zostały zapisane jako wektor  $\lambda_s$  w postaci:

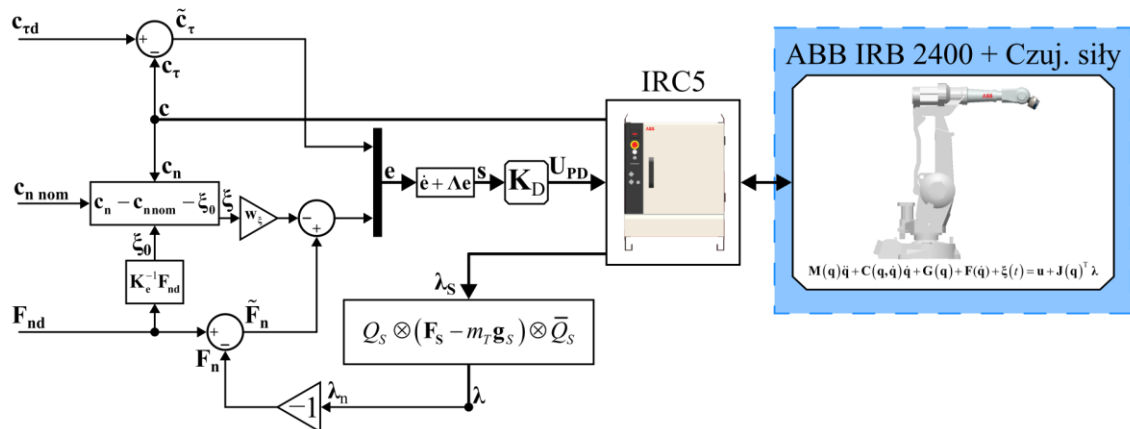
$$\lambda_s = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \boldsymbol{\tau}_s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6, \quad (8.1)$$

który zawiera wektor sił  $\mathbf{F}_s \in \mathbb{R}^3$  i wektor momentów  $\boldsymbol{\tau}_s \in \mathbb{R}^3$ , które są wyrażone względem układu odniesienia związanego z czujnikiem. Czujnik siły jest zamocowany na flanszy efektora końcowego robota, zaś narzędzia robota są montowane do powierzchni tego czujnika. Dlatego w celu pomiaru sił interakcji konieczna jest kompensacja siły ciężkości narzędzia. Ostatecznie wektor sił interakcji jest wyliczany na podstawie zależności (8.2). Wektor momentów sił interakcji wymaga skompensowania nie tylko wpływu siły ciężkości pochodzącej od narzędzia, ale również wpływu sił interakcji, ponieważ punkt styku narzędzia z otoczeniem nie znajduje się w punkcie początkowym układu odniesienia związanego z czujnikiem, lecz jest przesunięty względem niego. W prezentowanym przypadku przyjęto, że punkt styku będzie się znajdował w punkcie TCP robota, oznaczonym w pracy jako punkt  $T$ .

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{\tau 1} \\ \lambda_{\tau 2} \\ \lambda_n \\ \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_S \otimes F_s \otimes \bar{Q}_S - m_T \mathbf{g} \\ Q_S \otimes \mathbf{r}_s \otimes \bar{Q}_S - (Q_S \otimes \mathbf{r}_T^S \otimes \bar{Q}_S) \times [\lambda_{\tau 1} \quad \lambda_{\tau 2} \quad \lambda_n]^T - (Q_S \otimes \mathbf{r}_{S_T}^S \otimes \bar{Q}_S) \times m_T \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (8.2)$$

gdzie  $\mathbf{r}_T^S$  to wektor promień od początku układu odniesienia związanego z czujnikiem do charakterystycznego punktu narzędzia TCP,  $\mathbf{r}_{S_T}^S$  to wektor promień od początku układu odniesienia związanego z czujnikiem do środka masy narzędzia,  $Q_S$  to kwaternion orientacji układu czujnika siły względem układu bazowego,  $\mathbf{g}_s$  to wektor funkcji przyspieszenia ziemskiego w układzie czujnika siły,  $m_T$  to masa narzędzia.

Schemat blokowy układu zastosowanego w badaniach eksperymentalnych weryfikujących działanie algorytmu sterowania przedstawiono na rys. 8.2. Kompensacja zjawisk dynamicznych wynikających z efektów bezwładnościowych oraz wpływu sił grawitacji i oporów ruchu realizowana jest z zastosowaniem kontrolera IRC5. Pozostałe człony prawa sterowania są realizowane za pomocą zewnętrznego układu sterowania.



Rys. 8.2. Schemat weryfikacji sterowania pozycyjno-siłowego robotem ABB IRB2400 z uwzględnieniem niepewności więzów

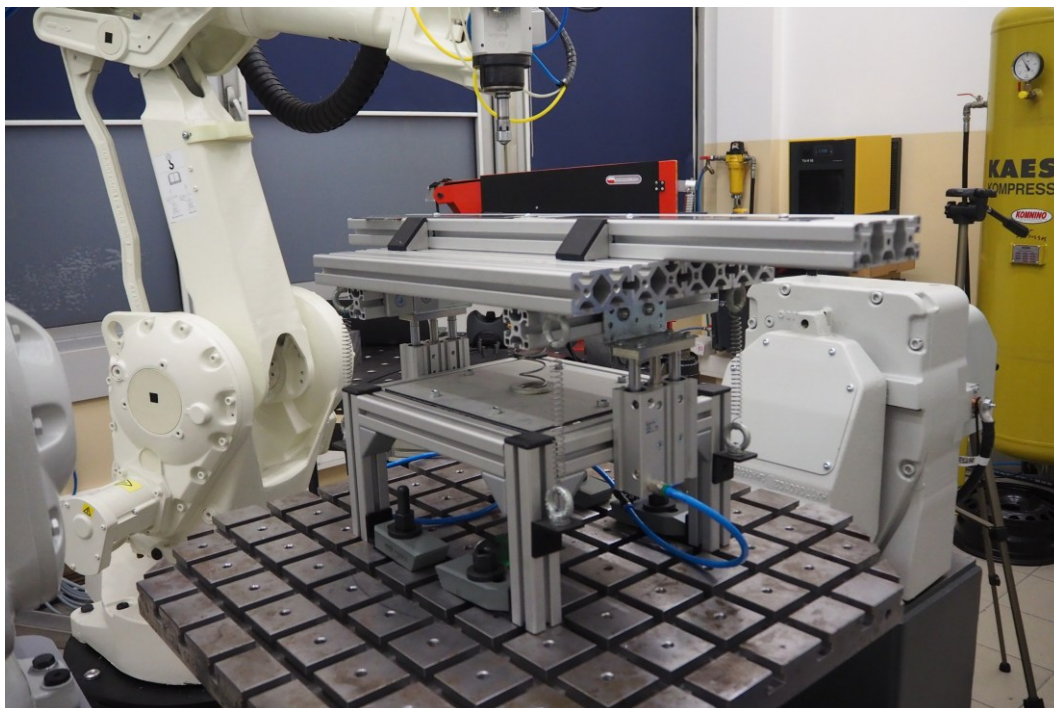
W kolejnych podrozdziałach przedstawiono wyniki eksperymentów przeprowadzonych na rzeczywistym stanowisku badawczym.

## 8.1. Test nr 1 – sterowanie pozycyjno-siłowe z uwzględnieniem niepewności więzów

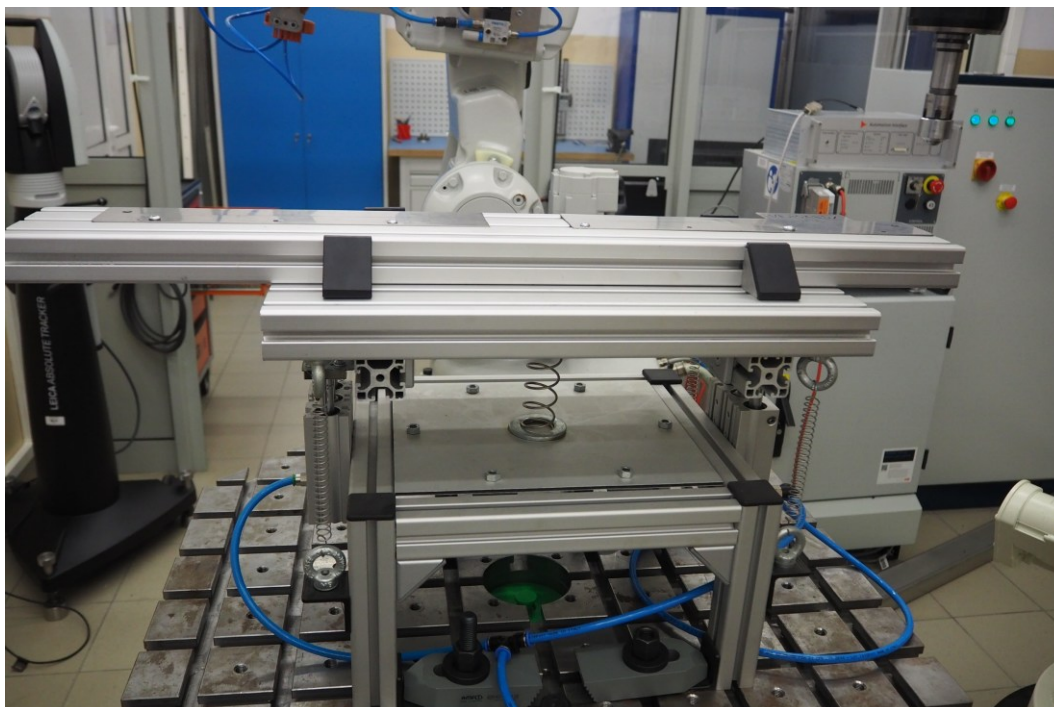
W pierwszym teście do stanowiska dodano urządzenie pozwalające regulować podatność otoczenia, widoczne na rys. 8.3. Składa się ono z ruchomej płyty zbudowanej z aluminiowych profili konstrukcyjnych, przykręconej do dwóch siłowników pneumatycznych. Regulacja ciśnienia zasilającego siłowniki pozwala dostosowywać sztywność całego układu. Do powierzchni płyty zamocowano detal wchodzący w interakcję z narzędziem robota. Dzięki temu rozwiązaniu zmniejszono ryzyko uszkodzenia robota, gdyby doszło do nieoczekiwanego

zachowania, spowodowanego np. błędami programistycznymi w układzie sterowania. Błat urządzenia może wykonywać ruchy w zakresie do 200 mm pod wpływem nacisku, co daje czas na reakcję operatora przeprowadzającego eksperyment, w przypadku zauważenia niewłaściwego działania. Jednocześnie takie podejście pozwala testować algorytm sterowania w przypadku różnych współczynników sztywności środowiska.

a)



b)



Rys. 8.3. Urządzenie do regulacji podatności otoczenia: a) widok konstrukcji, b) widok powierzchni interakcji

Jako narzędzie robota zastosowano kulę transportową o średnicy 10 mm z trzpieniem gwintowanym, zamocowaną w uchwycie wrzeciona. Jako charakterystyczny punkt efektora końcowego (TCP) wybrano punkt znajdujący się na przecięciu osi wrzeciona z powierzchnią półsfery tworzącej powierzchnię części kuli transportowej wystającej z obudowy. W tabeli 8.1 zamieszczono współrzędne punktów do generowania trajektorii, które odpowiadają punktom użytym w symulacji. Skorygowano tylko współrzędną  $c_{n\ nom}$ , czyli wysokość powierzchni interakcji względem układu bazowego.

Tabela 8.1. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu

Pozycja	Współrzędna położenia [m]	Współrzędna orientacji -
$P_S, P_K$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,83 \\ 0,22 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n\ nom} = 1,06$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_1$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,820 \\ 0,039 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n\ nom} = 1$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_2$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 0,820 \\ 0,039 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n\ nom} = 0,9601$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_3$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,342 \\ 0,046 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n\ nom} = 0,9601$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$
$P_4$	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,342 \\ 0,046 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n\ nom} = 1,06$	$\mathbf{c}_{\rho d} = \begin{bmatrix} -0,0007 \\ 0,3059 \\ 0,9521 \\ 0 \end{bmatrix}$

W tabeli 8.2 zamieszczono pozostałe parametry potrzebne do wygenerowania trajektorii: przyspieszenie i czasy przejść pomiędzy punktami trajektorii pozycji. Umieszczono tam również wartości i czasy przejść dla przebiegu wartości siły zadanej. Parametry układu sterowania zastosowane podczas testu zamieszczone zostały w tabeli 8.3.

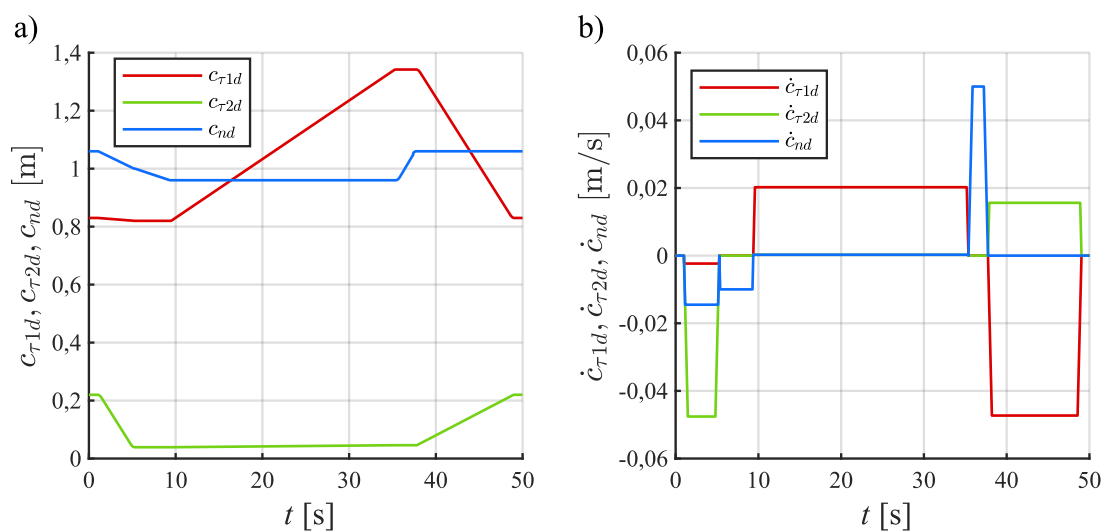
Tabela 8.2. Parametry zadanej trajektorii

Ścieżka	Przyspieszenie	Czas	Siła	Czas
$P_s$		$t_f = 1 \text{ s}$	$F_{nd} = 0$	$t_f = 9 \text{ s}$
$P_s \rightarrow P_1$	$a = 0,1 \text{ m/s}^2$	$t_f = 4,28 \text{ s}$	$F_{nd} = 0 \rightarrow -50 \text{ N}$	$t_f = 0,2 \text{ s}$
$P_1 \rightarrow P_2$		$t_f = 4,1 \text{ s}$		
$P_2 \rightarrow P_3$		$t_f = 26 \text{ s}$	$F_{nd} = -50 \text{ N}$	$t_f = 25 \text{ s}$
$P_3 \rightarrow P_4$		$t_f = 2,36 \text{ s}$	$F_{nd} = -50 \text{ N} \rightarrow 0$	$t_f = 0,2 \text{ s}$
$P_4 \rightarrow P_K$		$t_f = 11,3 \text{ s}$		

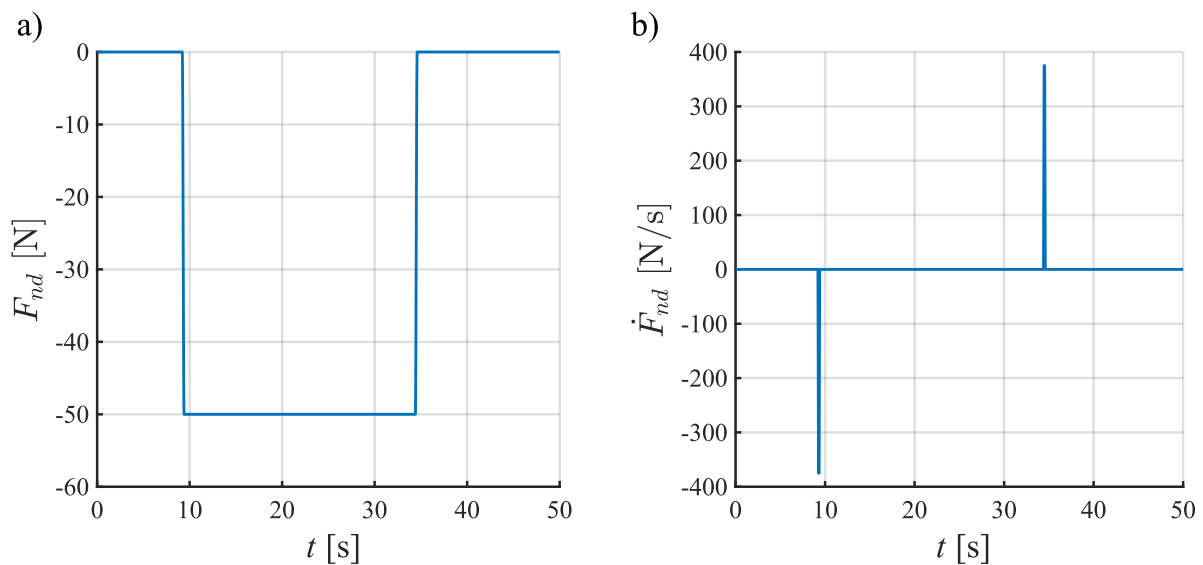
Tabela 8.3. Parametry układu sterowania

Parametr	Wartość
$K_{D\tau 1}$	20
$K_{D\tau 2}$	20
$K_{Dn}$	8
$\Lambda_{D\tau 1}$	5
$\Lambda_{D\tau 2}$	5
$\Lambda_{Dn}$	6,25
$w_\xi$	100000
$K_e$	150000

Na rys. 8.4 przedstawiono przebiegi czasowe zadanych współrzędnych pozycji oraz ich pochodnych, które stanowią rzuty wektora prędkości zadanej na osie układu odniesienia. Na rys. 8.5 zamieszczono przebiegi czasowe zadanej siły oraz jej pochodnej.

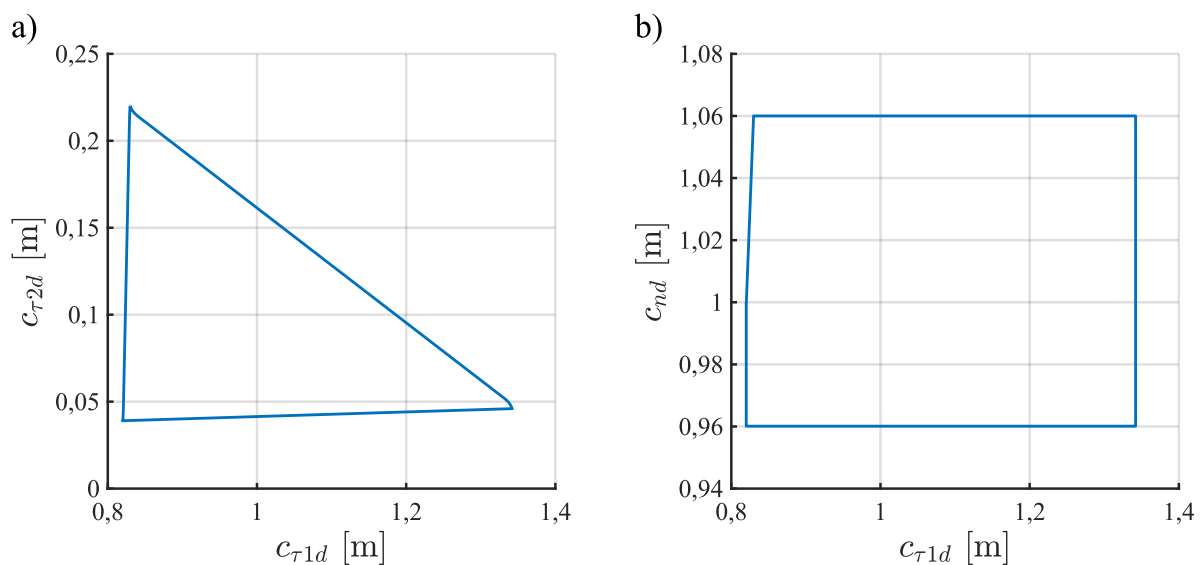
Rys. 8.4 Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu  $T$ , b) składowe prędkości punktu  $T$



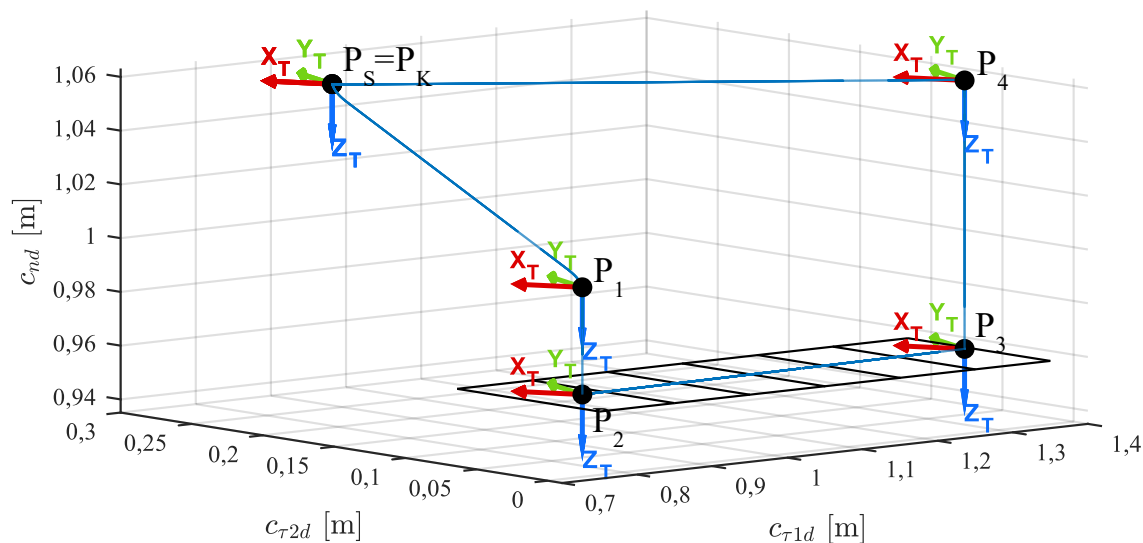


Rys. 8.5. Zadana wartość: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

Rys. 8.6 przedstawia rzuty zadanego toru ruchu na płaszczyzny  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$  oraz  $c_{\tau 1}$   $c_n$ , zaś rys. 8.7 prezentuje widok toru w przestrzeni trójwymiarowej. W granicznych punktach toru zaznaczono ustawienie układu odniesienia  $x_T y_T z_T$  związanego z punktem TCP. Na rysunku zaznaczono również kształt zadanej powierzchni interakcji.

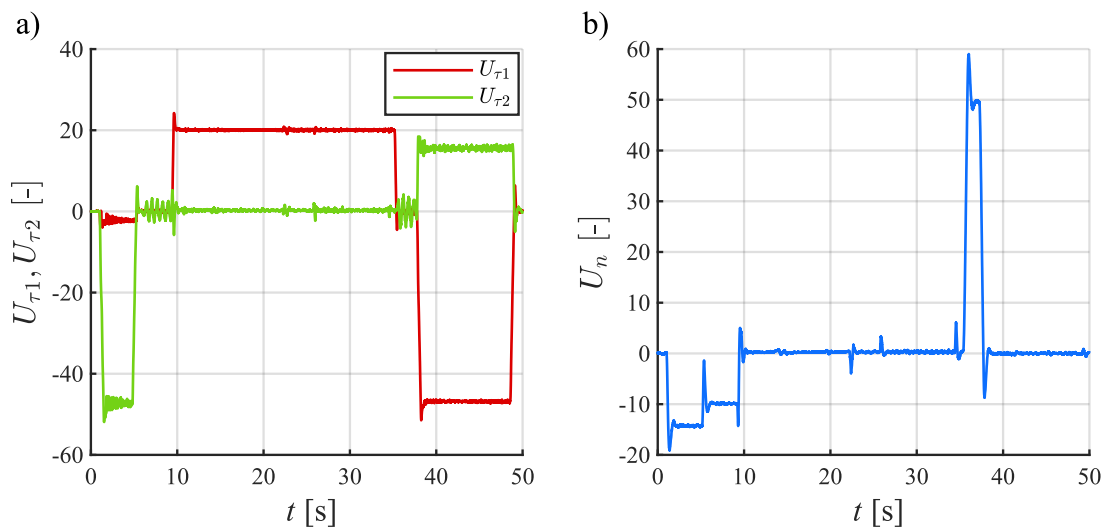


Rys. 8.6. Zadany tor ruchu punktu T: a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$



Rys. 8.7. Zadany tor ruchu punktu  $T$

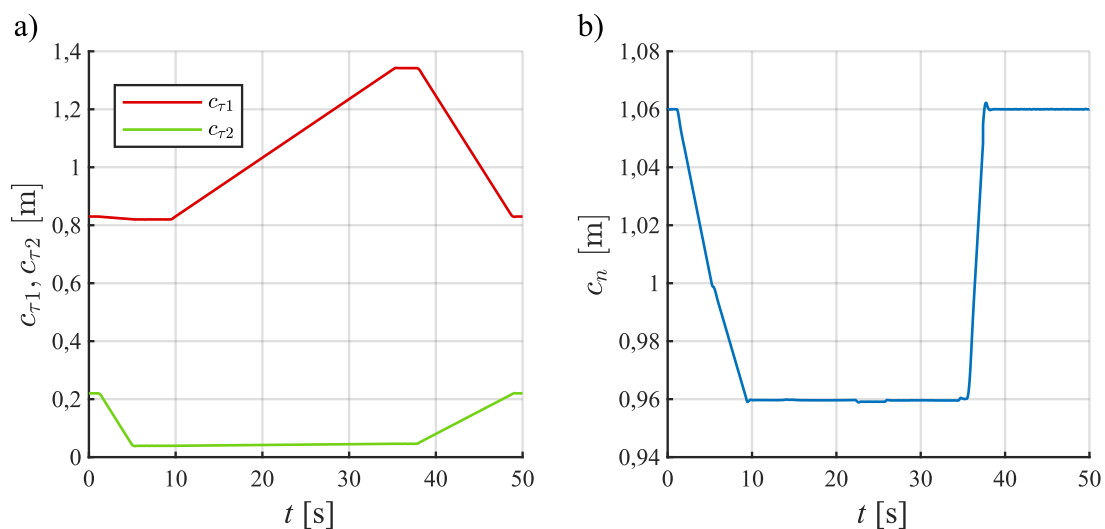
Sygnal sterowania w przestrzeni zadaniowej przedstawiony na rys. 8.8 składa się ze sterowania na kierunkach osi stycznych oraz sterowania wzdłuż osi normalnej. Na wykresach można zauważyć krótkotrwałe wzrosty sygnału w chwilach zmian prędkości punktu TCP robota. Zauważalne są też piki sygnału około 23. sekundy spowodowane zaburzeniami geometrii powierzchni interakcji.



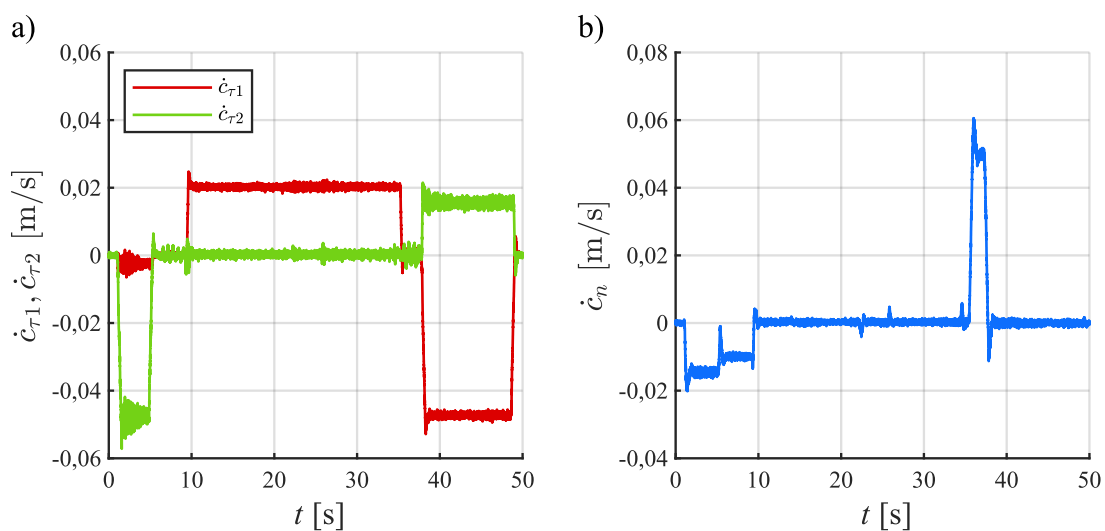
Rys. 8.8. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach osi  $xy$  b) na kierunku osi  $z$

Na rys. 8.9 zamieszczono wykresy rzeczywistych przebiegów czasowych współrzędnych pozycji punktu  $T$  robota. Na rys. 8.9b przedstawiającym wykres zmiany wartości współrzędnej na kierunku normalnym można zauważyć moment kontaktu z powierzchnią interakcji (około 9. sekundy) oraz reakcję na zaburzenia geometrii (od 23. sekundy do 26. sekundy). Zostało to wyraźniej pokazane na powiększaniu fragmentu toru ruchu w płaszczyźnie  $c_{\tau 1} c_n$ , na rys. 8.12b.

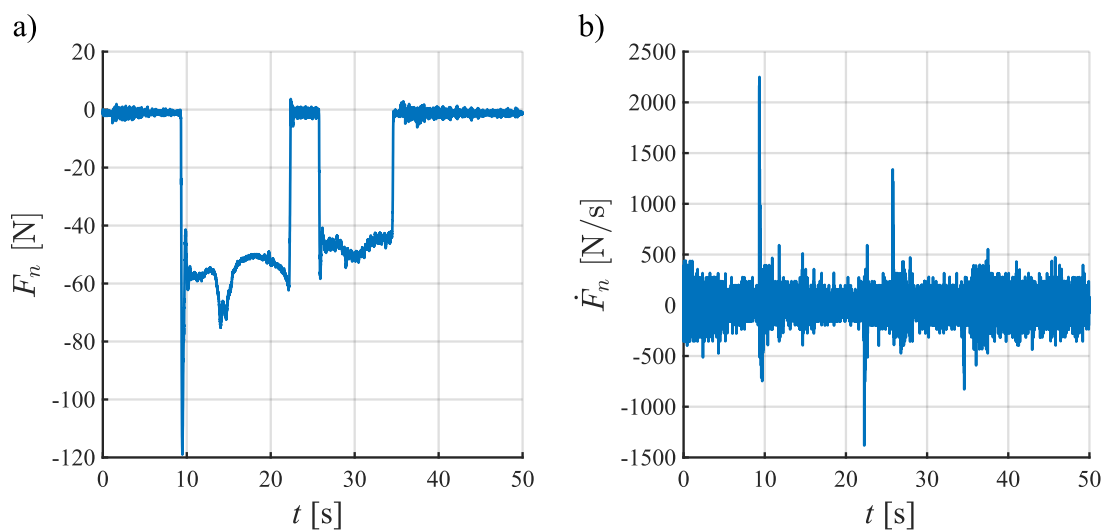
Na rys. 8.10 zaprezentowano zarejestrowane wartości składowe wektora prędkości, natomiast na rys. 8.11 pokazano zarejestrowany przebieg sygnału siły normalnej oraz jej pochodnej. Można zauważyć, jak nieregularność powierzchni wpływa na zmiany siły nacisku.



Rys. 8.9. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu T: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

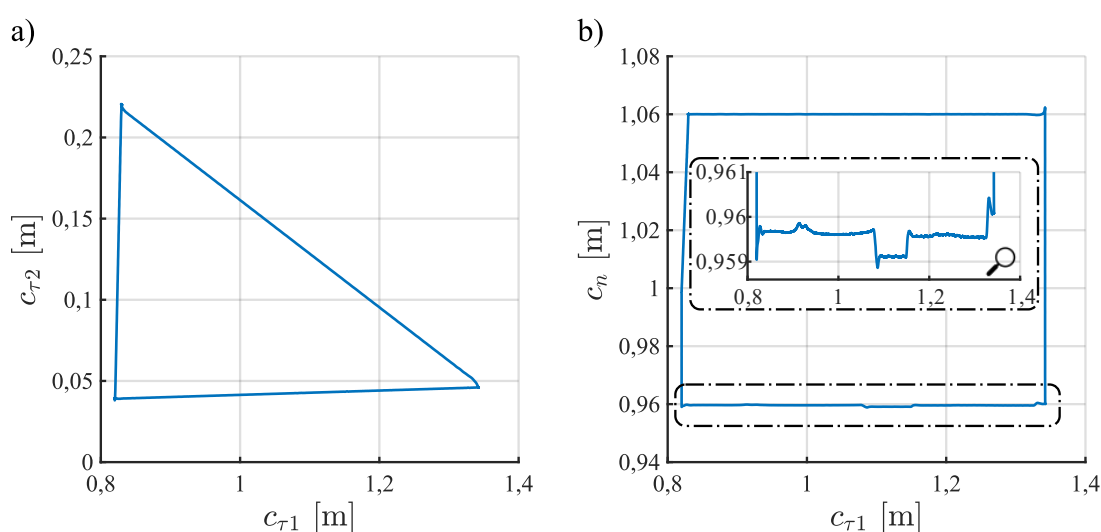


Rys. 8.10. Wykres przebiegu prędkości punktu T w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym



Rys. 8.11. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

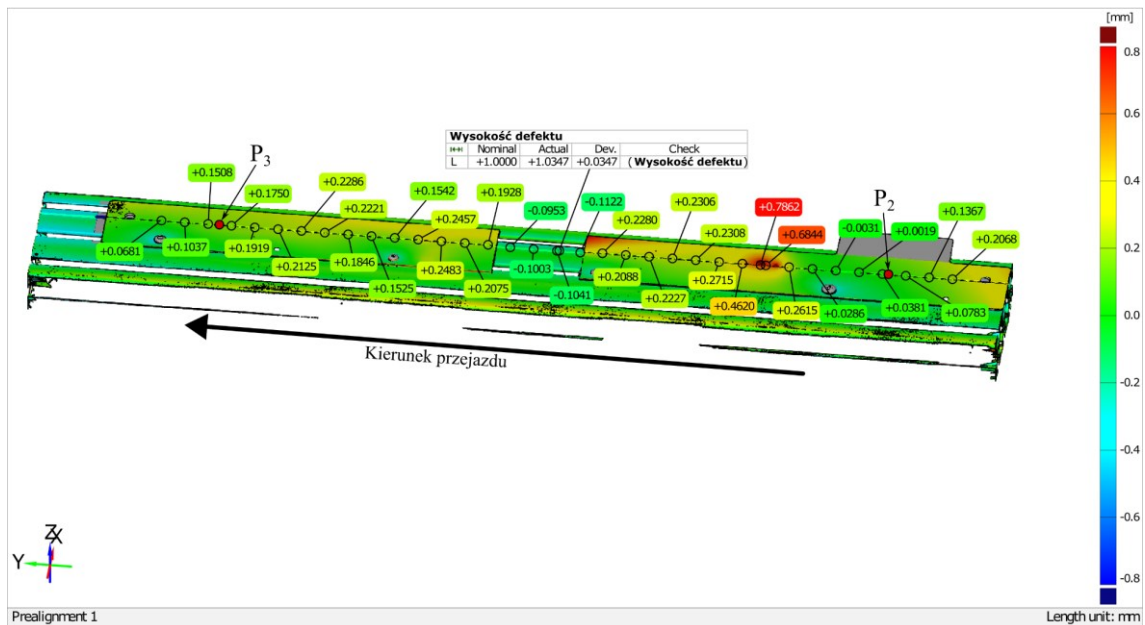
Algorytm sterowania ogranicza odchylenie od zadanej ścieżki, więc gdy sygnał siły odbiega od zadanej wartości, robot zmienia pozycję na kierunku normalnym tylko do pewnego stopnia. Dokładniej pokazano to na wykresach porównawczych przebiegów sił i współrzędnej normalnej dla różnych wartości współczynnika kooperacji (rys. 8.23 i rys. 8.24). W dalszej części przedstawiono wykresy zrealizowanego toru ruchu – rys. 8.12. Analizując wykres toru ruchu i zrealizowanej trajektorii siły można dostrzec miejsca, w których występują zaburzenia powierzchni interakcji. Zaburzenia te zostały zmierzone metodą skanowania trójwymiarowego przy użyciu skanera ATOS Core 135. Skaner pracuje w technologii niebieskiego światła strukturalnego i umożliwia skanowanie obszaru o wymiarach 135 mm na 100 mm. Rozdzielczość matrycy skanera wynosi 5 milionów pikseli. Wyniki pomiaru przedstawiono na raporcie metrologicznym na rys. 8.13.



Rys. 8.12. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$

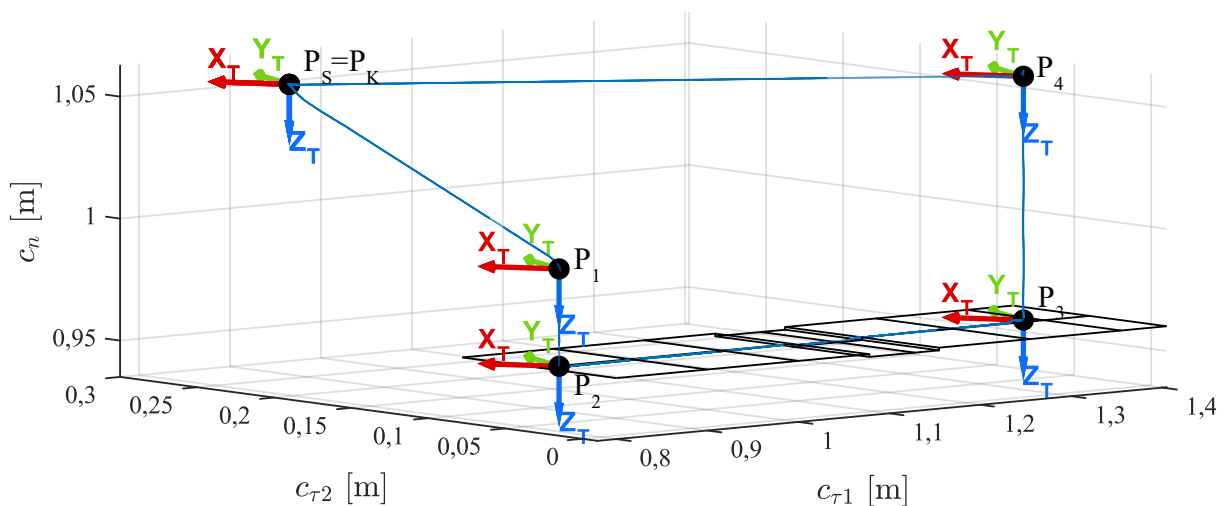
Raport przedstawia wyniki pomiaru wysokości defektu w miejscu rozsunienia stalowych płaskowników, odchyłki kształtu rzeczywistej powierzchni interakcji w przekroju znajdującym się na ścieżce przejazdu narzędzia oraz kolorową mapę odwzorowującą odchylenia zeskanowanych powierzchni do nominalnego kształtu modelu CAD. W rzeczywistości wysokość defektu okazała się większa o 34,7  $\mu\text{m}$  względem zakładanej wartości. Na powiększeniu zrealizowanego toru ruchu (rys. 8.12b) można zauważyć, że w miejscu, gdzie  $c_{\tau 1}$  ma wartość pomiędzy 0,9-1 m, narzędzie odchyła się w dodatnim kierunku normalnym do powierzchni interakcji. Wynika to z zaburzenia geometrii w postaci wypukłości powierzchni stalowego płaskownika, które w najwyższym punkcie osiąga wartość 0,7862 mm względem powierzchni nominalnej CAD, co ujawnia pomiar oznaczony na rys. 8.13. Miejsce tego defektu wskazuje czerwony obszar znajdujący się na ścieżce przejazdu narzędzia robota. Siła zarejestrowana w tym miejscu osiąga wartość 70 N, ponieważ przy współczynniku kooperacji  $w_{\xi}$  wynoszącym 100000 układ sterowania nie pozwala na większe odchylenie narzędzia od zakładanych więzów, co powoduje wzrost siły interakcji na kierunku normalnym.

## Odchyłki kształtu powierzchni interakcji



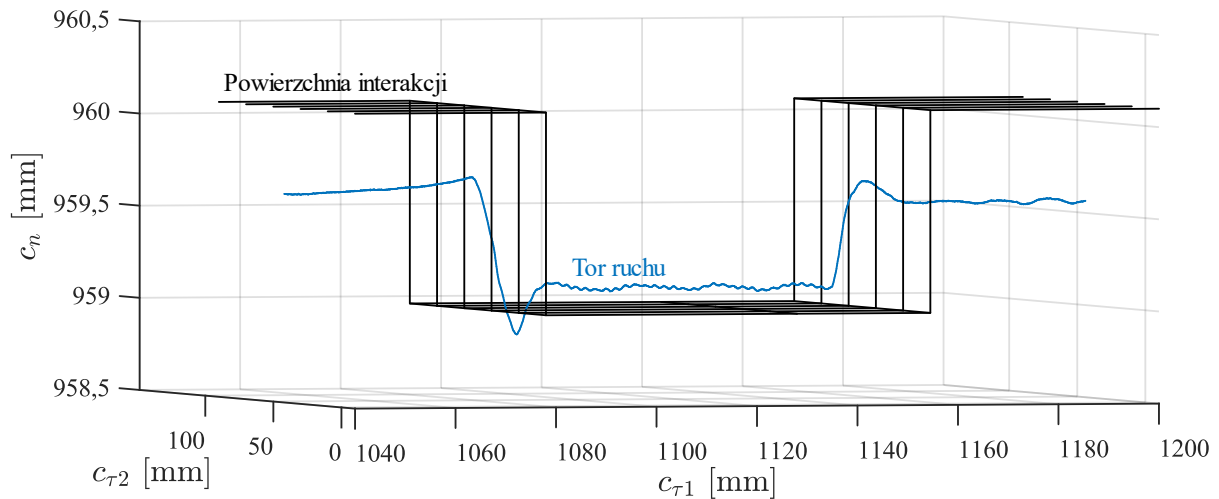
Rys. 8.13. Raport metrologiczny pomiaru powierzchni interakcji detalu wykorzystanego w eksperymencie

Na rys. 8.14 pokazano zrealizowany tor ruchu narzędzia. Na wykresie zamieszczono punkty graniczne toru ruchu oraz rzeczywistą orientację układu współrzędnych  $x_T y_T z_T$  związanego z narzędziem robota. Dodatkowo zaznaczono na nim przybliżony kształt rzeczywistej powierzchni interakcji.

Rys. 8.14. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$ 

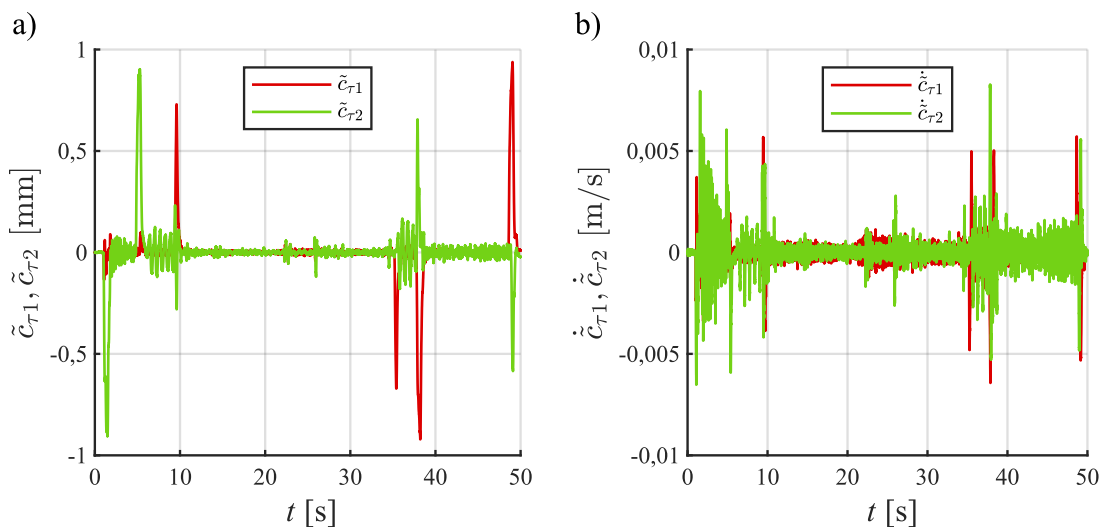
Rys. 8.15 przedstawia powiększenie wykresu zrealizowanego toru ruchu w miejscu, w którym rozsunięto płaskownik. Można na nim zauważyć, że narzędzie na chwilę weszło w kontakt z powierzchnią aluminiowego profilu znajdującego się pod płaskownikiem, po czym

ruch narzędzia ustabilizował się nad tą powierzchnią. Potwierdza to też przebieg wartości siły (rys. 8.11a), która w miejscu tego zaburzenia spada do wartości 0 N. Kiedy narzędzie weszło w interakcję z krawędzią po drugiej stronie przerwy nastąpiło chwilowe przeregulowanie, o którym świadczy wzrost wysokości narzędzia nad powierzchnią interakcji, w miejscu, gdzie narzędzie zaczyna stykać się z drugim płaskownikiem. Po chwili ruch narzędzia stabilizuje się.

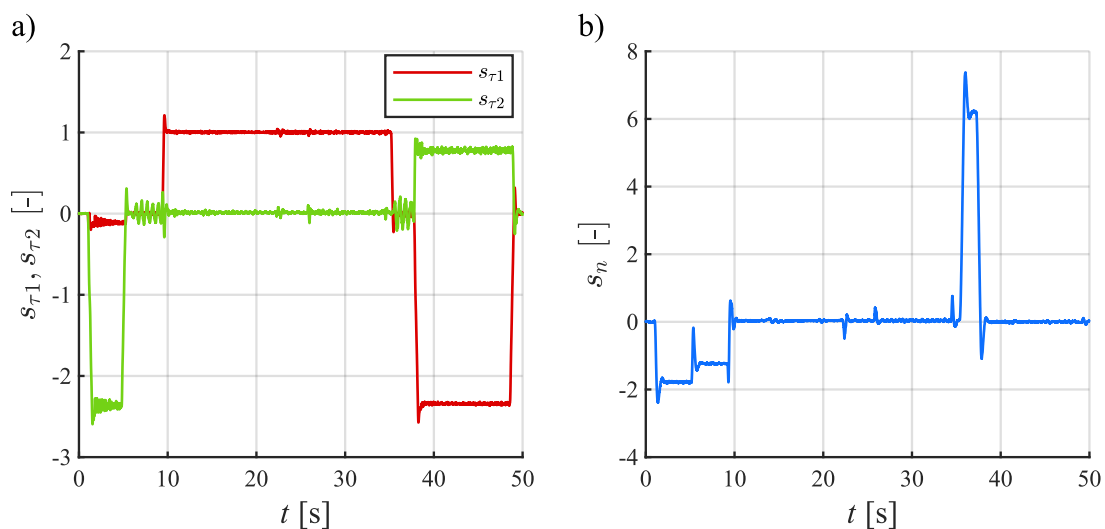


Rys. 8.15. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu  $T$  w miejscu deformacji powierzchni

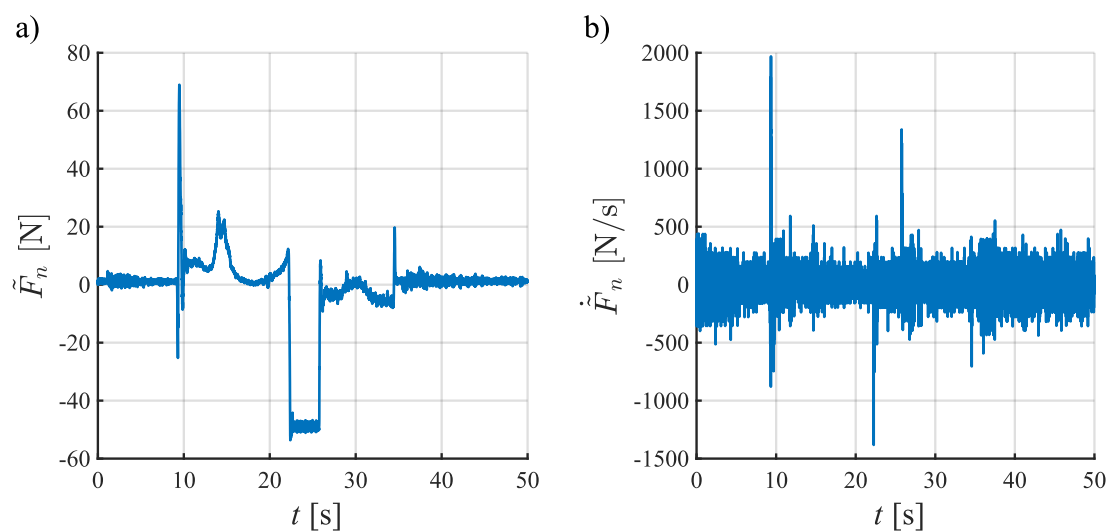
Na rys. 8.16 przedstawiono wykresy błędów realizacji trajektorii na kierunkach stycznych, zaś na rys. 8.17 pokazano sygnały błędów uogólnionych, które kształtują sygnał sterowania PD. Natomiast rys. 8.18 przedstawia błędy realizacji trajektorii siły na kierunku normalnym. Na rys. 8.19 przedstawiono sygnały odchylenia narzędzia od zakładanych więzów, czyli od teoretycznej powierzchni interakcji oraz pochodną tego sygnału. Sygnały te korygują wpływ sygnału błędu siły na sterowanie na kierunku normalnym.



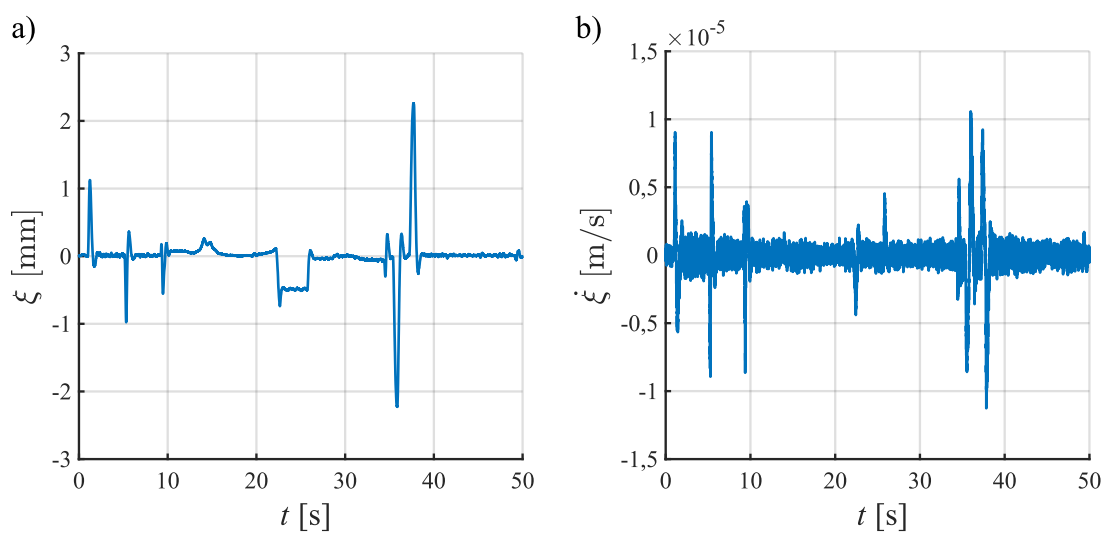
Rys. 8.16. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych



Rys. 8.17. Sygnały błędów uogólnionych a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

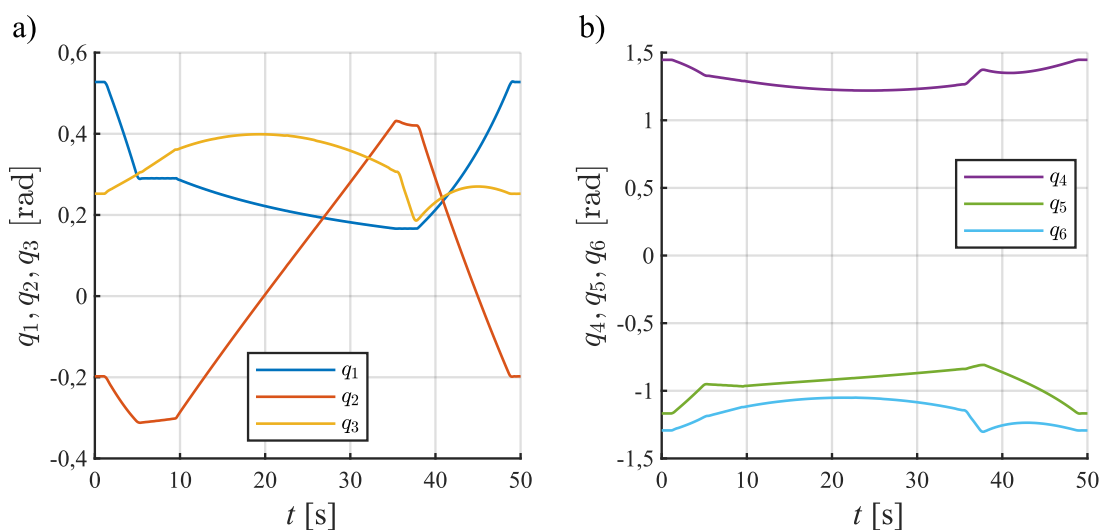


Rys. 8.18. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej

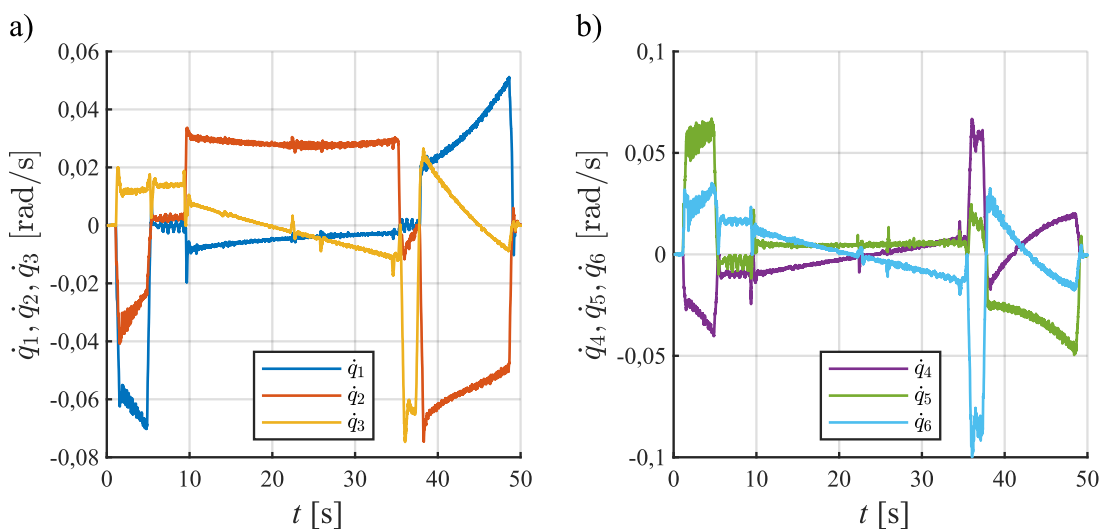


Rys. 8.19. Sygnały: a) odchylenie punktu  $T$  (od założonych więzów powierzchni interakcji), b) pochodna tego odchylenia

W dalszej części zaprezentowano zarejestrowane przebiegi współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej. Na rys. 8.20 pokazano wartości pozycji kątowych poszczególnych członów robota, a na rys. 8.21 ich prędkości kątowe.



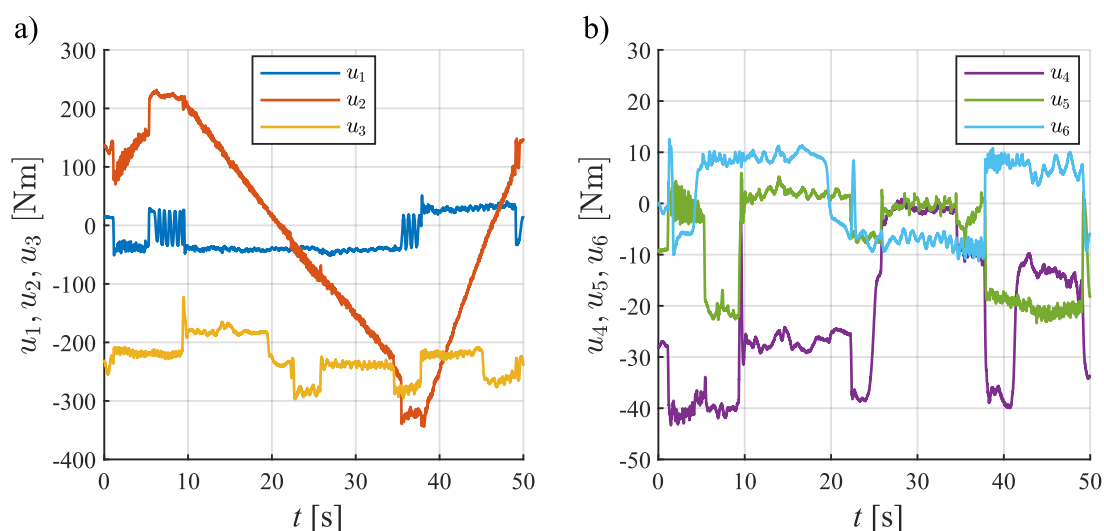
Rys. 8.20. Kąty obrotu członów robota: a) kąty obrotów członów 1-3, b) kąty obrotów członów 4-6



Rys. 8.21. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości kątowe członów 1-3, b) prędkości kątowe członów 4-6

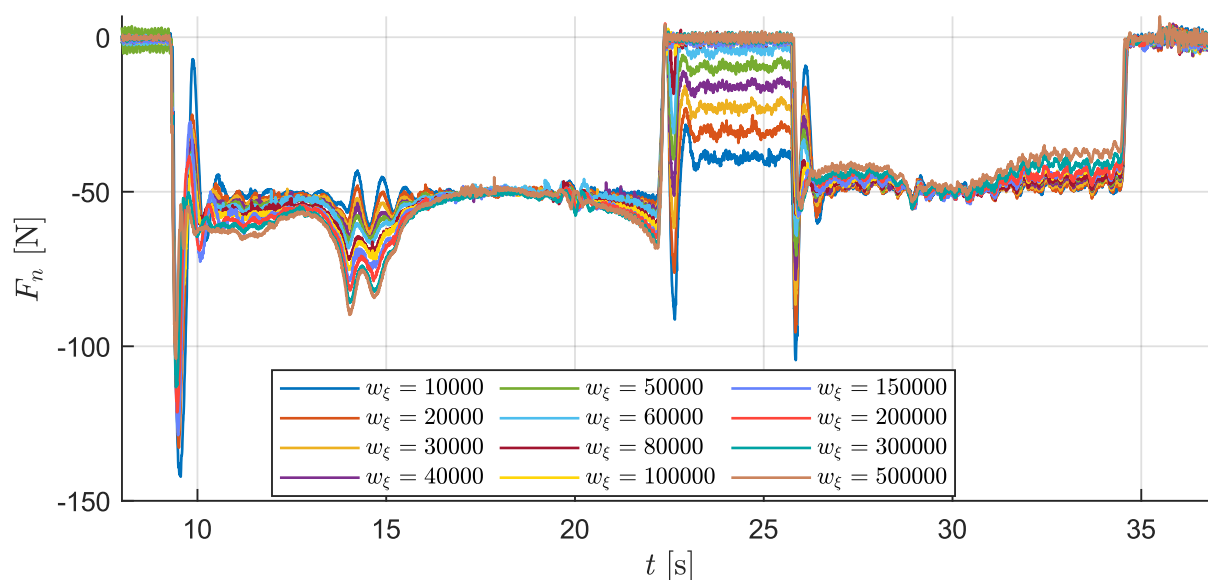
Momenty napędowe członów jakie były potrzebne do realizacji zadania przez robota pokazano na rys. 8.22. Porównując je z przebiegami uzyskanymi w symulacji na rys. 7.22 można zauważyć, że te mają podobny kształt i zbliżone wartości. Miejsce największego zaburzenia geometrii powierzchni interakcji, czyli przerwa pomiędzy płaskownikami jest widoczna w przebiegach momentów napędowych w postaci nagłych skoków wartości momentu. Najlepiej widać to w przebiegach czasowych momentów napędzających człony 3, 4 i 5.



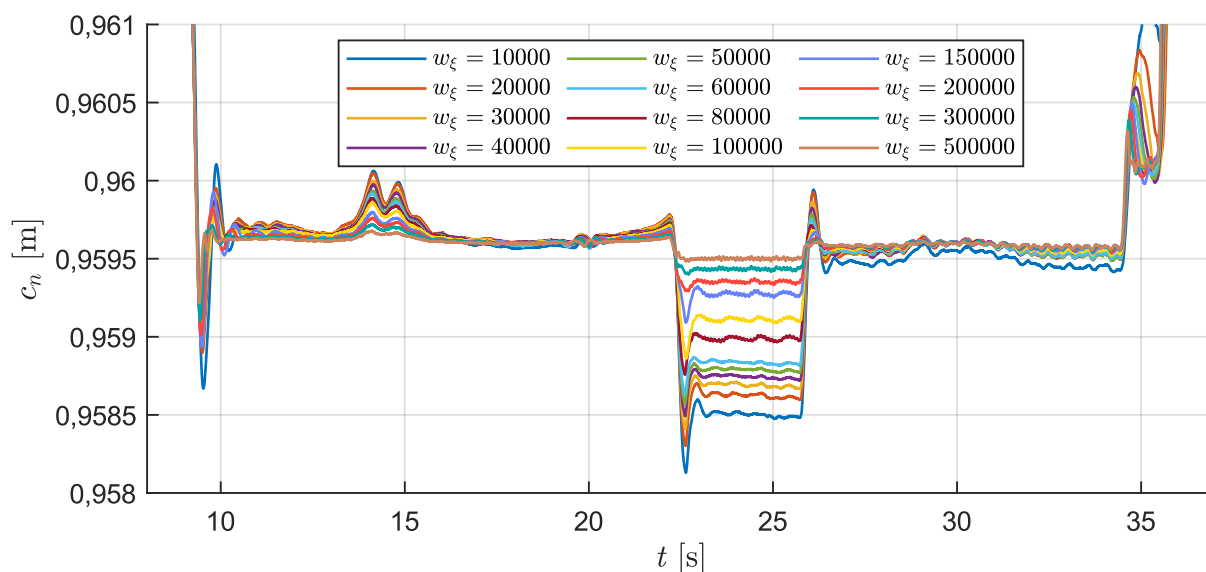


Rys. 8.22. Sygnały momentów napędowych a) członów 1-3, b) członów 4-6

Istotę działania zastosowanego algorytmu sterowania najlepiej oddają wykresy na rys. 8.23 i rys. 8.24. Na rys. 8.24 można zauważyć, że im mniejsza wartość współczynnika wzmocnienia kooperacji tym narzędzie bardziej oddala się od założonej powierzchni interakcji w przypadku braku kontaktu z powierzchnią, zaś sygnał siły nacisku utrzymuje się bliżej wartości zadanej (rys. 8.23). Wraz ze wzrostem wartości współczynnika wzmocnienia kooperacji maleje znaczenie utrzymania zadanej wartości siły, kosztem utrzymania zadanej ścieżki ruchu, nawet pomimo braku kontaktu z powierzchnią interakcji. Powyżej wartości  $w_\xi$  wynoszącej 60 000 w miejscu rozsunięcia płaskowników narzędzie traci kontakt z powierzchnią detalu i wartość siły normalnej wynosi wówczas 0 N.



Rys. 8.23. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$  na realizację zadanej siły



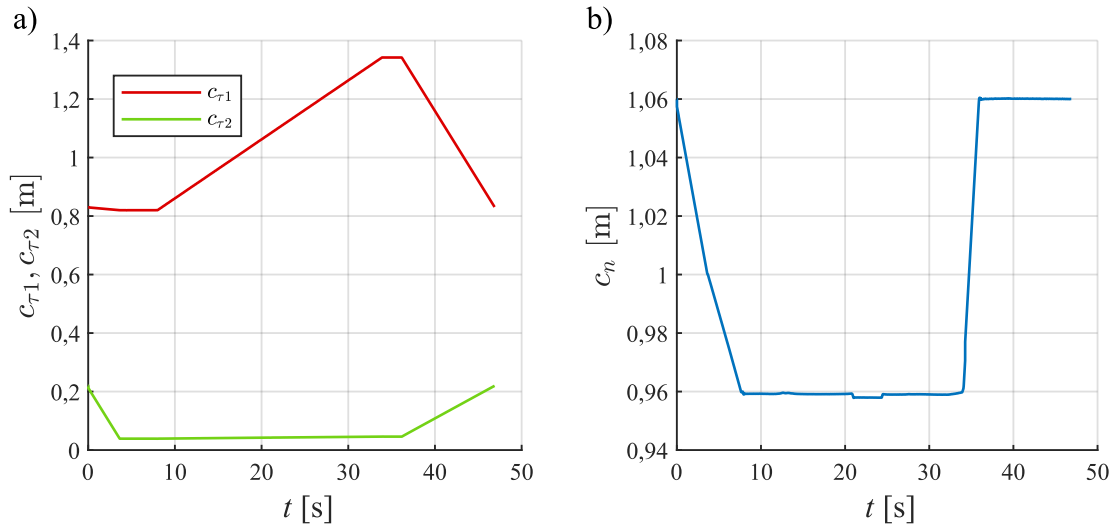
Rys. 8.24. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji  $w_\xi$  na realizację zadanej pozycji efektora końcowego

Tak samo jak w badaniach symulacyjnych, w procesie realizacji całej trajektorii zadanej, za sterowanie na kierunku normalnym był odpowiedzialny układ sterowania oparty o kooperacyjną strategię sterowania. Zarówno na odcinku, na którym występowała interakcja z otoczeniem, jak i na odcinku podejścia do powierzchni i odejścia od niej. Strategia ta, w przeciwieństwie do klasycznego sterowania hybrydowego pozycyjno-siłowego, nie wymaga stosowania macierzy przełączeń, która aktywuje sterowanie siłą i deaktywuje sterowanie pozycją na wybranych odcinkach toru ruchu.

## 8.2. Test nr 2 – klasyczne sterowanie pozycyjno-siłowe

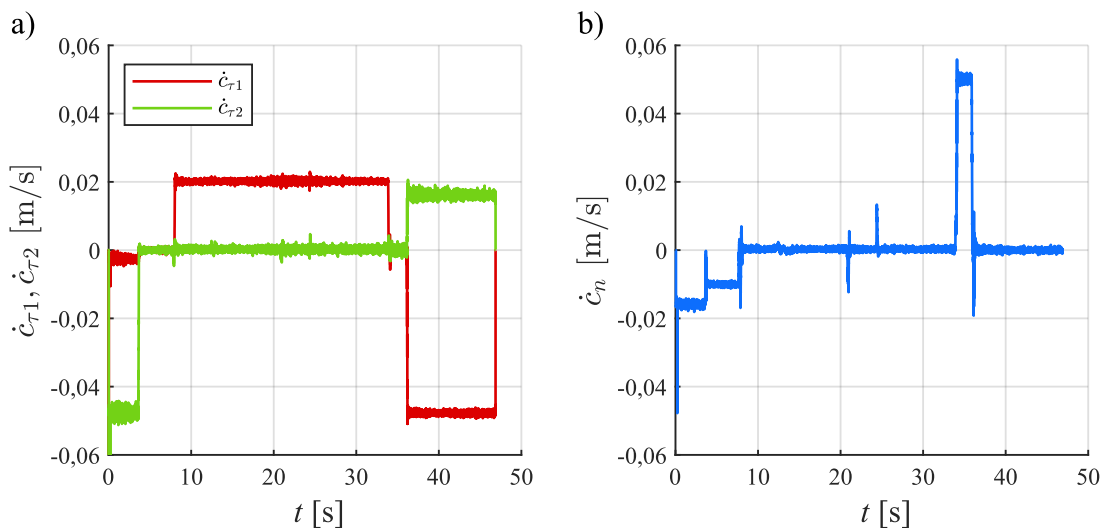
W celu porównania działania opracowanego algorytmu sterowania do działania klasycznego sterowania pozycyjno-siłowego przeprowadzono test, polegający na wykorzystaniu wbudowanego w kontrolerze robota ABB systemu sterowania siłą, a konkretnie strategii sterowania siłą nacisku. W eksperymencie wykorzystano stanowisko z poprzedniego testu i zaprogramowano ścieżkę ruchu pomiędzy punktami o takich samych współrzędnych jak w poprzednim teście, które zostały zamieszczone w tabeli 8.1. W programie robota zadane parametry trajektorii ruchu to, oprócz współrzędnych punktów ścieżki, również maksymalna prędkość liniowa punktu  $T$  oraz pozycja i orientacja układu odniesienia związanego z punktem  $T$  względem układu  $x_7y_7z_7$ . Instrukcja w języku RAPID wymagają podania parametru określającego dokładność, z jaką dany punkt ścieżki ma zostać osiągnięty. Parametr ten jest określany jako promień trójwymiarowej hipersfery o środku w punkcie ścieżki. W tym eksperymencie przyjęto, że każdy z punktów ma zostać osiągnięty z najwyższą możliwą precyzją, a po osiągnięciu każdego punktu ruch robota ma zostać zatrzymany, tak jak to było w przypadku generatora użytego w poprzednim eksperymencie. Do zaprogramowania układu sterowania siłą wymagane jest podzielenie ścieżki ruchu robota na 3 etapy: etapu dojazdu do powierzchni interakcji, etapu aktywnej kontroli siły i etapu odjazdu. Trajektoria siły zadanej jest generowana na podstawie siły zadanej  $F_d$  oraz parametru określającego kierunek, wzdłuż którego sterowanie siłą ma być realizowane. Na etapie dojazdu do powierzchni interakcji

należy podać również dokładność siły, która musi być osiągnięta, aby robot przeszedł do kolejnego ruchu. Parametr ten jest określony jako procent siły zadanej. W dodatku do pracy zamieszczono wypis z programu formie pseudokodu, który dokładnie opisuje jego działanie. Zrealizowany ruch punktu  $T$  robota został przedstawiony na rys. 8.25.

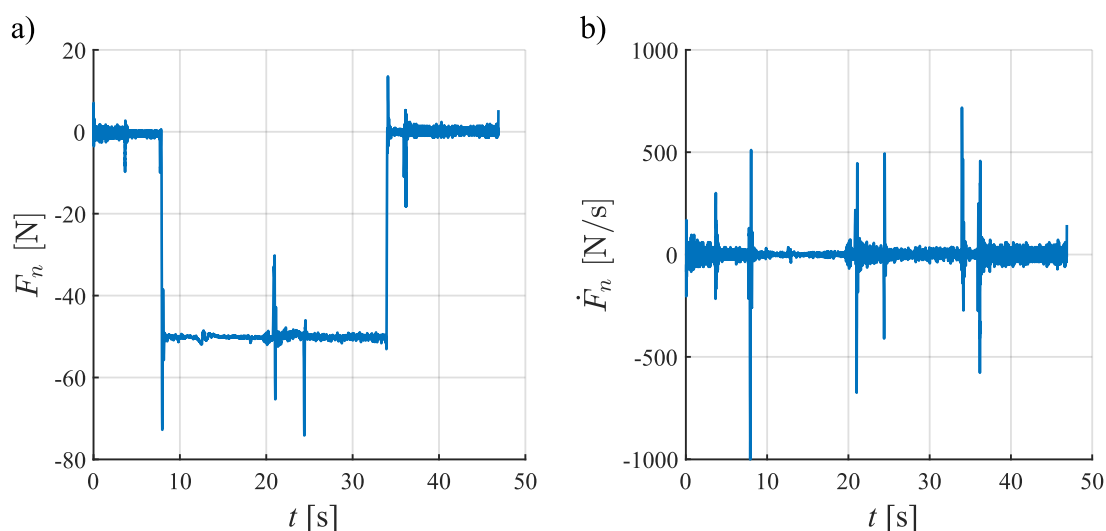


Rys. 8.25. Przebiegi współrzędnych położenia punktu  $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

Przebiegi prędkości ruchu punktu  $T$  zaprezentowano na rys. 8.26, natomiast na rys. 8.27 pokazano przebiegi zrealizowanej siły. Podobnie jak w przypadku testu nr 1 widać reakcję robota na zaburzenie geometrii powierzchni interakcji. Na rys. 8.26b można zauważyć gwałtowne skoki prędkości narzędzia na kierunku normalnym w czasie pomiędzy 21. i 25. sekundą, czyli w momencie, gdy narzędzie robota znajdowało się na początku i końcu defektu powierzchni.

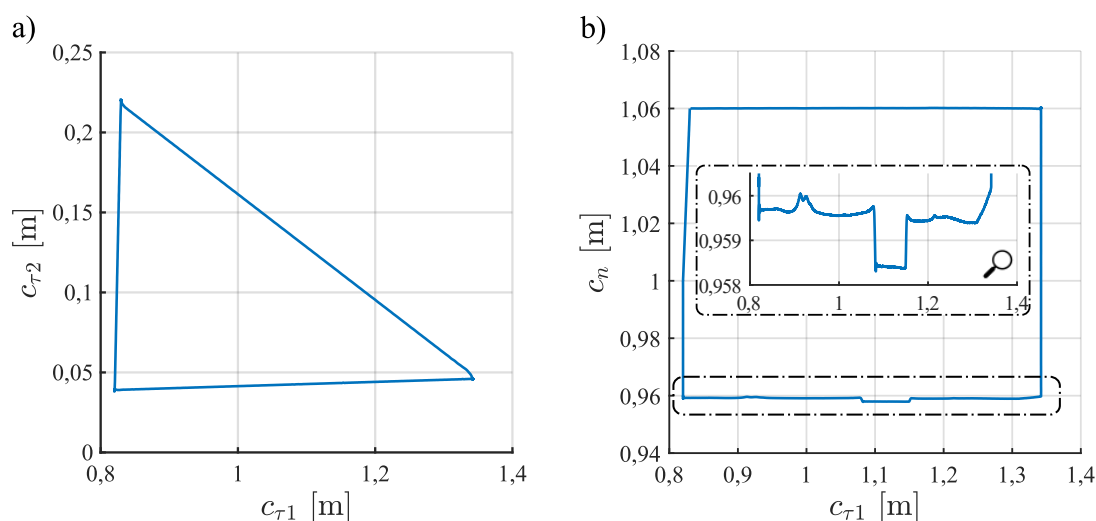


Rys. 8.26. Wykres przebiegu prędkości punktu  $T$  w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

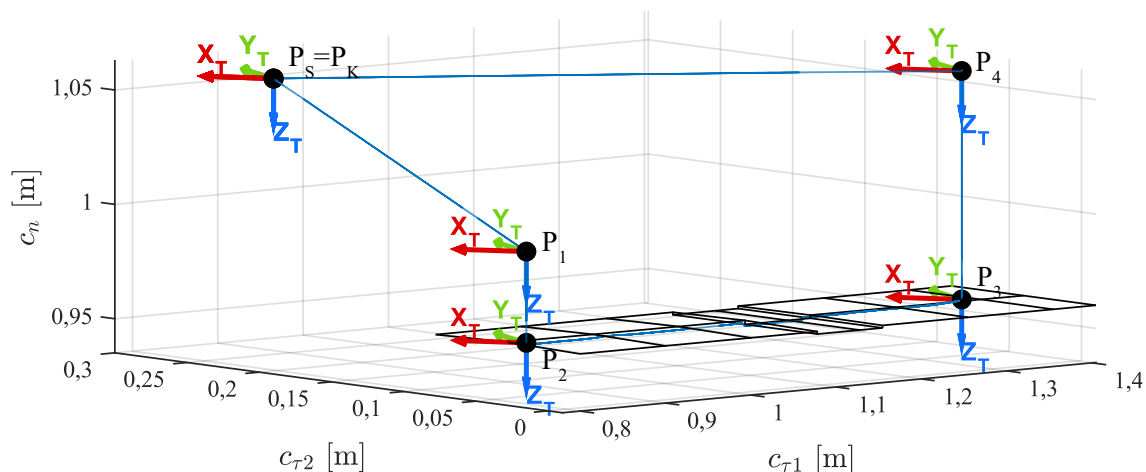


Rys. 8.27. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

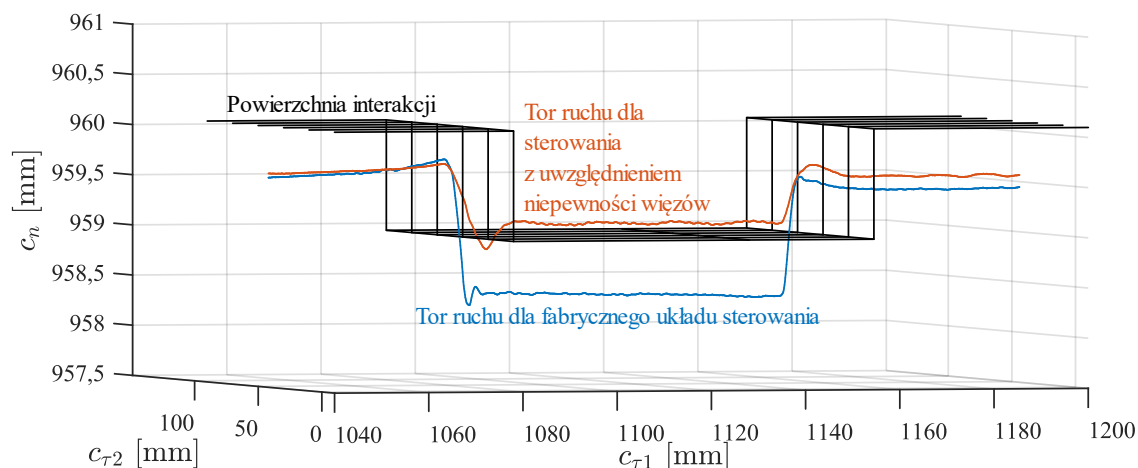
Jeszcze łatwiej można dostrzec występujące w tym obszarze zmiany wartości zmierzonej siły nacisku (rys. 8.27a). Gwałtowne zmiany siły pojawiają się również w czasie około 9. sekundy, gdy dochodzi do kontaktu narzędzia z powierzchnią stalowego płaskownika. Należy w tym miejscu zauważyć, że w przeciwieństwie do testowanego w poprzednim eksperymencie układu sterownia, wbudowany układ sterowania siłą dąży to utrzymania zadanej siły interakcji bez względu na zaburzenia geometrii powierzchni interakcji. Na rys. 8.28 przedstawiono rzuty toru ruchu narzędzia robota na płaszczyzny  $c_{t1}c_{t2}$  i  $c_{t1}c_n$ , natomiast trójwymiarową reprezentację toru ruchu punktu  $T$  narzędzia pokazano na rys. 8.29. Na rys. 8.30 pokazano tor ruchu punktu  $T$  w powiększeniu, w miejscu defektu płaszczyzny interakcji. Na wykresie dodano do porównania tor ruchu zrealizowanego w teście nr 1. Ponieważ układ sterowania siłą utrzymuje zadaną wartość, to tor ruchu na kierunku normalnym zmienia się odwzorowując kształt geometryczny powierzchni interakcji (rys. 8.29).



Rys. 8.28. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{t1} c_n$



Rys. 8.29. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$

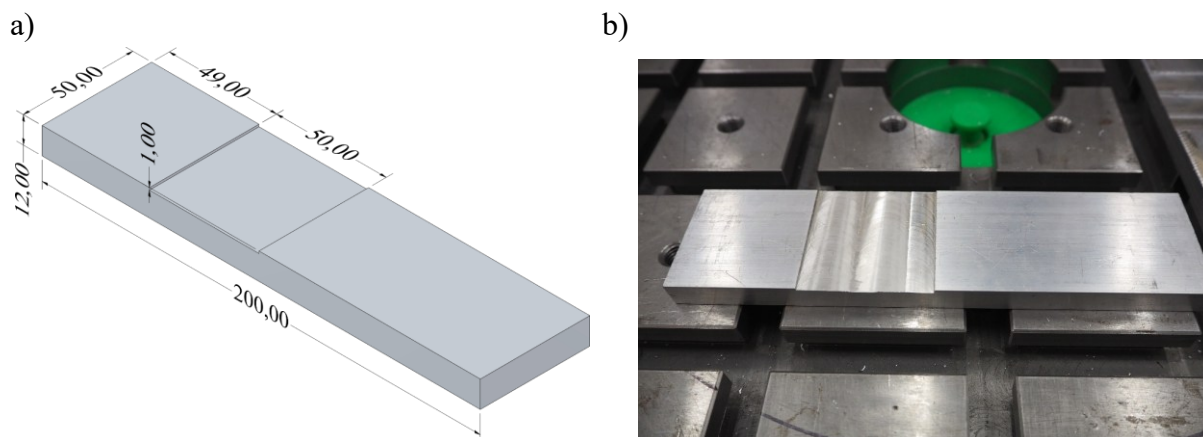


Rys. 8.30. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu  $T$  w miejscu deformacji powierzchni

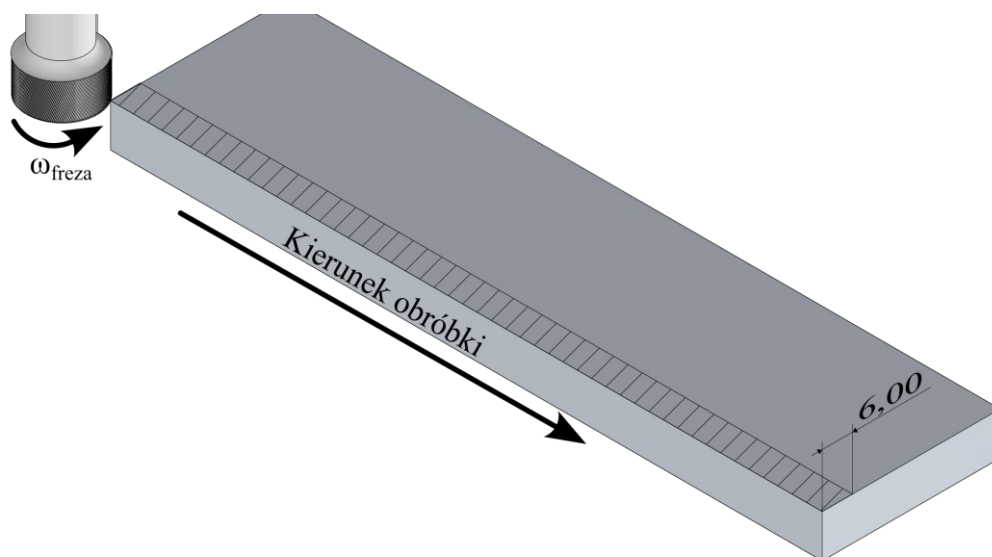
Zauważmy, że wypukłość na powierzchni płaskownika wymusza podniesienie narzędzia (rys. 8.28b). Takie zachowanie w przypadku opisywanego układu sterowania pozycyjno-siłowego uwzględniającego niepewności więzów geometrycznych jest kontrowane przez wirtualną siłę wyliczaną na podstawie odchylenia narzędzia od zakładanych więzów geometrycznych, co dobrze pokazuje porównanie do zachowania fabrycznego układu sterowania pozycyjno-siłowego w miejscu defektu detalu (rys. 8.30). W przypadku sterowania fabrycznego narzędzie wchodzi w interakcję z otoczeniem w miejscu rozsunięcia płaskowników, osiągając zadaną siłę i utrzymując ją na całej szerokości rozsunięcia. Gdy narzędzie osiąga krawędź drugiego płaskownika to dochodzi do zderzenia, które w przypadku dużych deformacji może doprowadzić do uszkodzenia narzędzia. Układ sterowania pozycyjno-siłowego uwzględniającego niepewności więzów pozwala ograniczyć odchylenie narzędzia w kontakcie z obrabianą powierzchnią detalu do zakładanego zakresu zmienności, przez dobór wartości współczynnika kooperacji.

### 8.3. Test nr 3 – implementacja algorytmu sterowania w zrobotyzowanym frezowaniu

Ostatnim eksperymentem, jaki przeprowadzono, było zastosowanie sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów do operacji frezowania. W tym celu przygotowano detal w formie aluminiowego płaskownika, przedstawionego na rys. 8.31, o wymiarach 50x12x200 mm. W płaskowniku wykonano nacięcie o głębokości 1 mm, które stanowi defekt powierzchni interakcji.



Rys. 8.31. Detal przygotowany do frezowania: a) model CAD, b) fotografia detalu przed obróbką



Rys. 8.32. Schemat eksperymentu

Eksperyment polega na wykonaniu operacji frezowania aluminiowego płaskownika. Jako narzędzie zastosowano czołowy frez składany, trójpłytkowy o średnicy 20 mm do frezowania czołowego. Zadaniem robota jest utrzymanie kontaktu z detalem w czasie obróbki z zadaną siłą 5 N, przy czym narzędzie nie powinno zagłębić się w materiał w miejscu defektu. Na rys. 8.32 zaprezentowano schemat eksperymentu, na którym pokazano, że narzędzie operuje na szerokości 6 mm od krawędzi bocznej materiału.

Zakładane więzy geometryczne przyjęto na powierzchni aluminiowego płaskownika. Zależność (8.3) przedstawia macierz wektorów współrzędnych wierzchołków powierzchni interakcji związanej z aluminiowym płaskownikiem:

$$\Pi = \left[ \begin{bmatrix} 1,05 \\ 0,086 \\ 0,55625 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,086 \\ 0,55625 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,136 \\ 0,55625 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1,05 \\ 0,136 \\ 0,55625 \end{bmatrix} \right]. \quad (8.3)$$

Współrzędne punktów do generowania trajektorii zamieszczono w tabeli 8.4. W tabeli 8.5 zamieszczono pozostałe parametry potrzebne do wygenerowania trajektorii: przyspieszenie i czasy przejść pomiędzy punktami trajektorii ruchu oraz wartości siły zadanej i czasy przejść pomiędzy wartościami siły zadanej. Parametry układu sterowania zastosowane w badaniach eksperymentalnych zamieszczono w tabeli 8.6.

Tabela 8.4. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu

Pozycja	Współrzędna położenia [m]	Współrzędna orientacji
P <sub>1</sub>	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,08 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,6$	$\mathbf{c}_{pd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2588 \\ 0,9659 \\ 0 \end{bmatrix}$
P <sub>2</sub>	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,092 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,556$	$\mathbf{c}_{pd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2588 \\ 0,9659 \\ 0 \end{bmatrix}$
P <sub>3</sub>	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,092 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,556$	$\mathbf{c}_{pd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2588 \\ 0,9659 \\ 0 \end{bmatrix}$
P <sub>4</sub>	$\mathbf{c}_{\tau d} = \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,08 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}_{n \text{ nom}} = 0,6$	$\mathbf{c}_{pd} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2588 \\ 0,9659 \\ 0 \end{bmatrix}$

Tabela 8.5. Parametry zadanej trajektorii

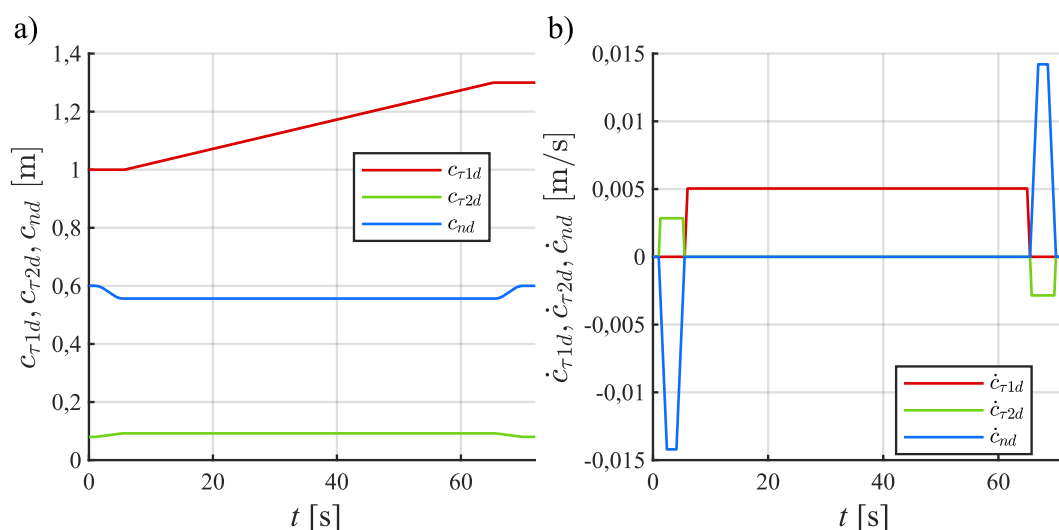
Ścieżka	Przyspieszenie	Czas	Siła	Czas
P <sub>1</sub>	$a = 0,1 \text{ m/s}^2$	$t_f = 1 \text{ s}$	$F_{nd} = 0$	$t_f = 5,28 \text{ s}$
P <sub>1</sub> → P <sub>2</sub>		$t_f = 4,5 \text{ s}$	$F_{nd} = 0 \rightarrow -5 \text{ N}$	$t_f = 1 \text{ s}$
P <sub>2</sub> → P <sub>3</sub>		$t_f = 60 \text{ s}$	$F_{nd} = -5 \text{ N}$	$t_f = 58 \text{ s}$
P <sub>3</sub> → P <sub>4</sub>		$t_f = 4,5 \text{ s}$	$F_{nd} = -5 \text{ N} \rightarrow 0$	$t_f = 1 \text{ s}$

Tabela 8.6. Parametry układu sterowania

Parametr	Wartość
$K_{D\tau 1}$	20
$K_{D\tau 2}$	20
$K_{Dn}$	5
$\Lambda_{D\tau 1}$	5
$\Lambda_{D\tau 2}$	5
$\Lambda_{Dn}$	10
$w_{\xi}$	100000
$K_e$	30000

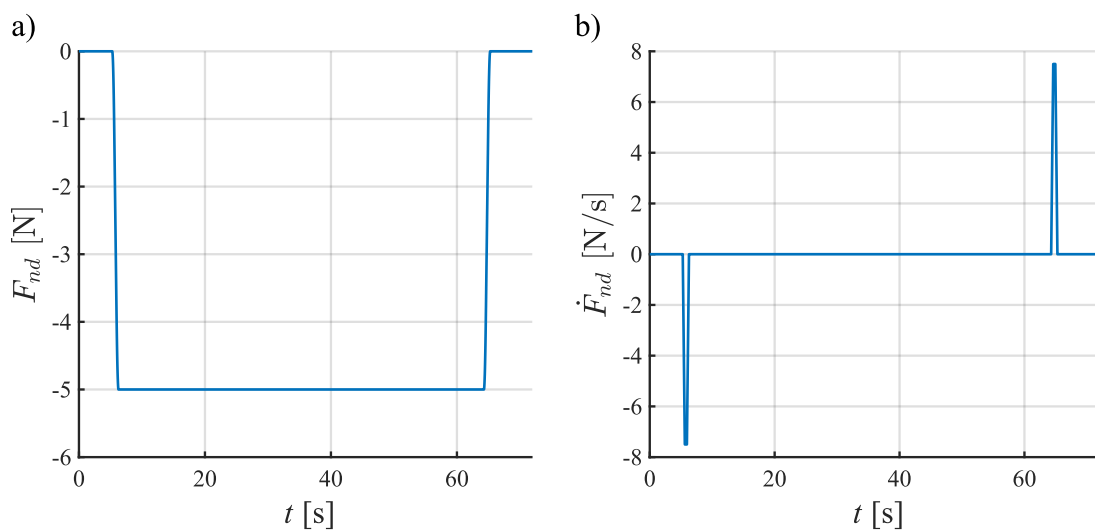
Na rys. 8.33 przedstawiona została zadana trajektoria ruchu, natomiast na rys. 8.34 pokazano trajektorię siły. Zadany tor ruchu w widoku trójwymiarowym został przedstawiony na rys. 8.35, zaś na rys. 8.36 pokazano rzuty toru ruchu na płaszczyznach  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$  i  $c_{\tau 1}$   $c_n$ . Ruch robota zaczyna się w punkcie P<sub>1</sub> i kończy w punkcie P<sub>4</sub>. Trajektorię podzielono na 3 etapy:

- I. Dojazd na wysokość powierzchni interakcji z punktu P<sub>1</sub> do punktu P<sub>2</sub>.
- II. Przejazd obróbczy z punktu P<sub>2</sub>, którego pozycje ustalono 50 mm przed krótszą krawędzią boczną detalu, do punktu P<sub>3</sub> znajdującego się 50 mm za krawędzią boczną po drugiej stronie detalu.
- III. Odjazd do pozycji bezpiecznej w punkcie P<sub>4</sub> z punktu P<sub>3</sub>.

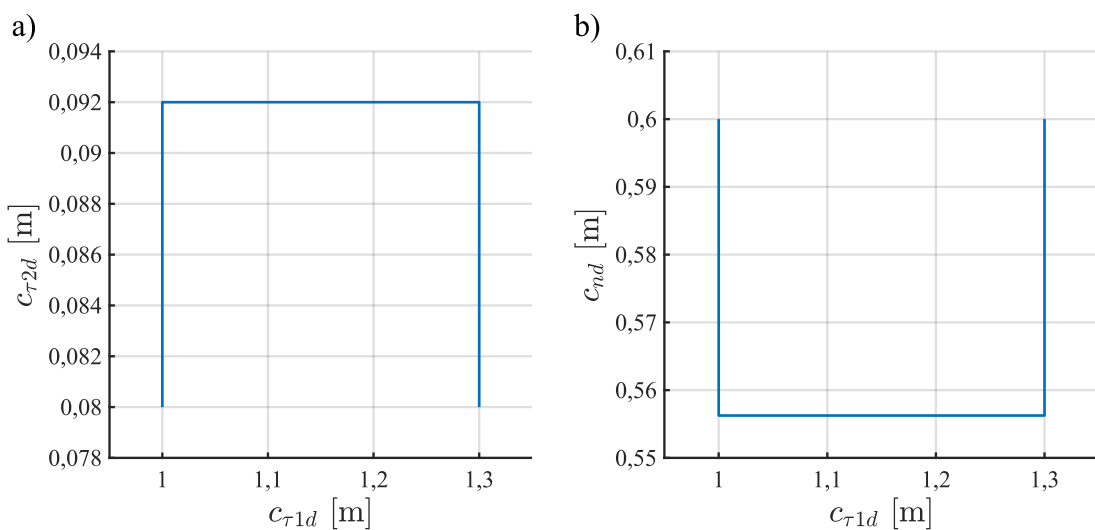


Rys. 8.33 Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu T, b) składowe prędkości punku T

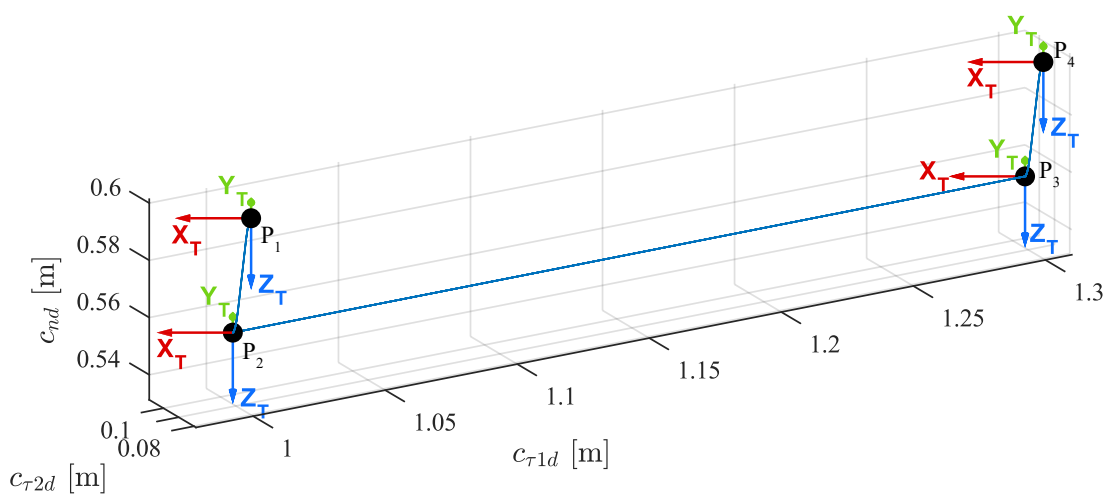




Rys. 8.34. Wartość zadanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

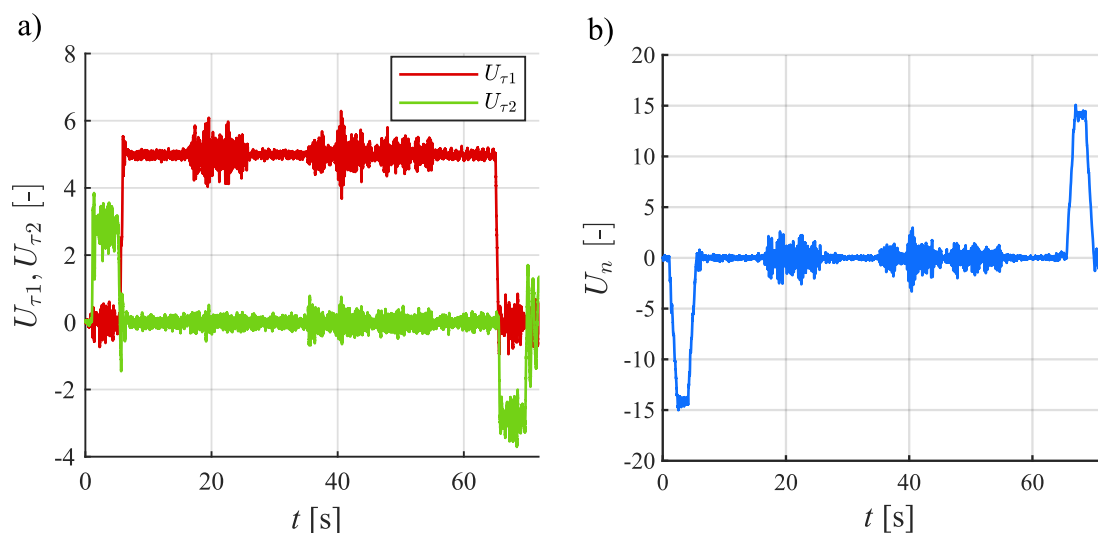


Rys. 8.35. Zadany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$

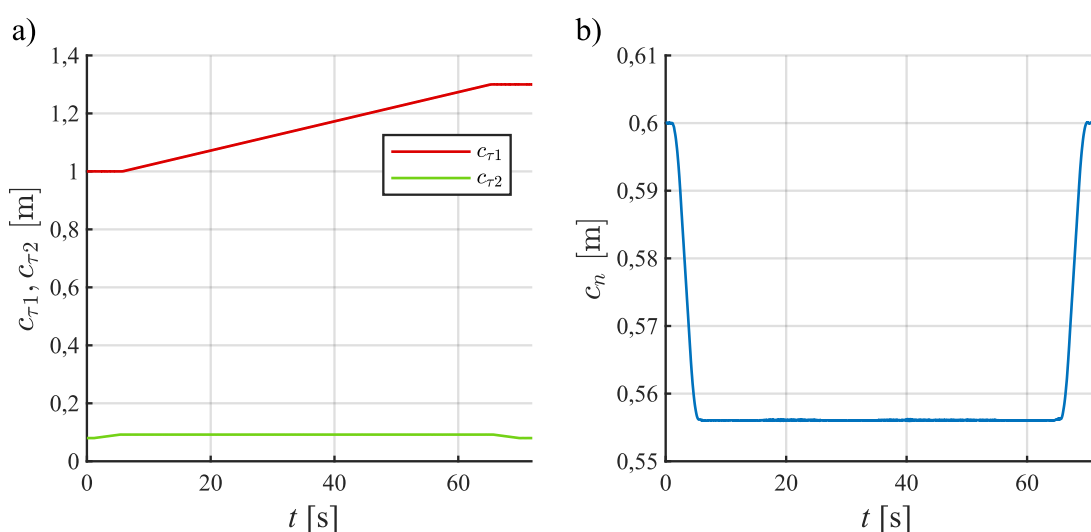


Rys. 8.36. Zadany tor ruchu punktu  $T$

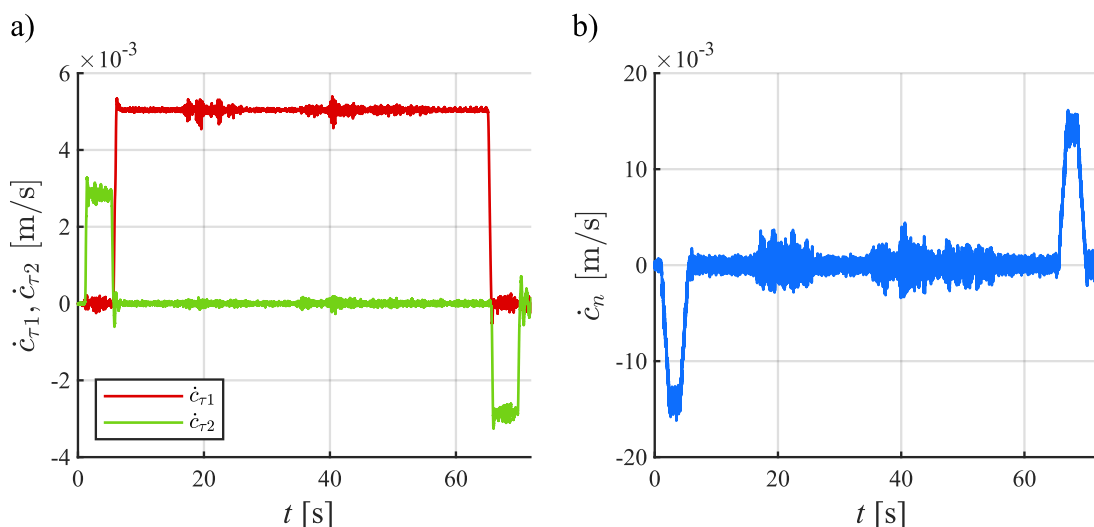
Narzędzie rozpoczyna ruch obróbczy przed detalem, gdzie nie zachodzi interakcja i kończy go również poza powierzchnią detalu. Zadana siła interakcji jest również aktywowana przed wejściem w kontakt z powierzchnią detalu i deaktywowana już po wyjechaniu poza obszar detalu. Na rys. 8.38 przedstawiono sygnały sterowania całkowitego, na których widać miejsca zwiększonych zaburzeń sygnału, powodowanych przez drgania narzędzia skrawającego. Narzędzie wchodzi w interakcję z detalem około 14. sekundy testu, po 25 s narzędzie traci kontakt z powierzchnią detalu w miejscu deformacji więzów geometrycznych, po czym odzyskuje kontakt około 34. sekundy. Obróbka kończy się wyjazdem narzędzia z detalu po około 55 s eksperymentu. Rzeczywistą trajektorię osiągniętą przez narzędzie robota pokazano na wykresach współrzędnych punktu  $T$  (rys. 8.38) oraz prędkości punktu  $T$  (rys. 8.39). Na rys. 8.40 przedstawiono zrealizowaną trajektorię siły. Na wykresie rzeczywistej siły interakcji (rys. 8.40a) można zauważyć, że w miejscach interakcji z powierzchnią detalu siła nacisku osiąga zadaną wartość 5 N.



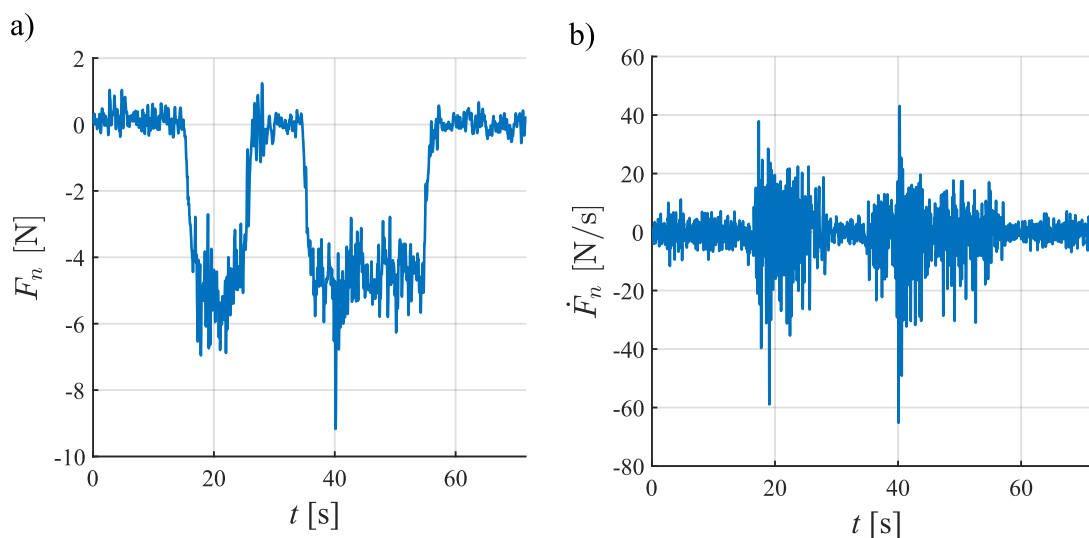
Rys. 8.37. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach stycznych b) na kierunku normalnym



Rys. 8.38. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu  $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

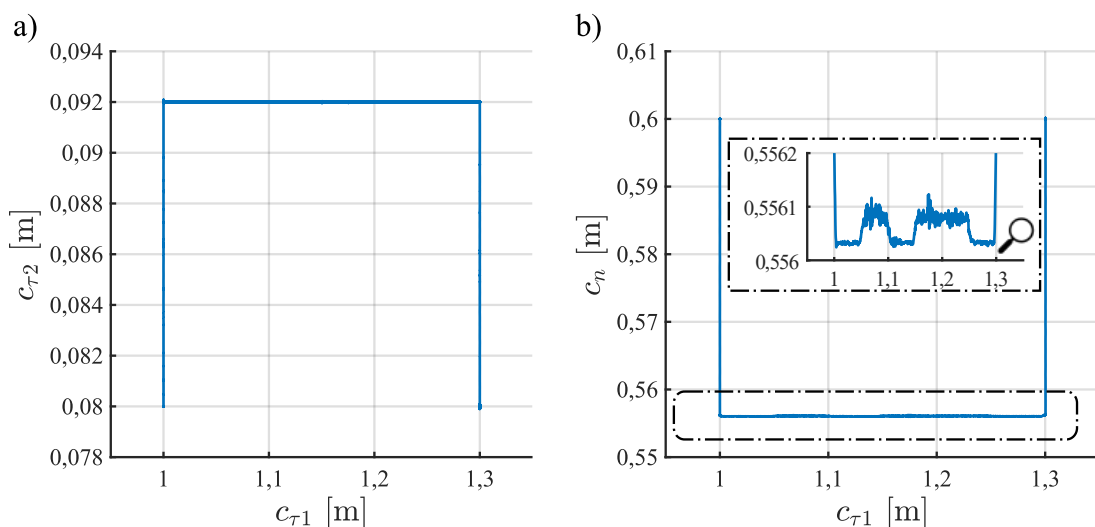


Rys. 8.39. Wykres przebiegu prędkości punktu  $T$  w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

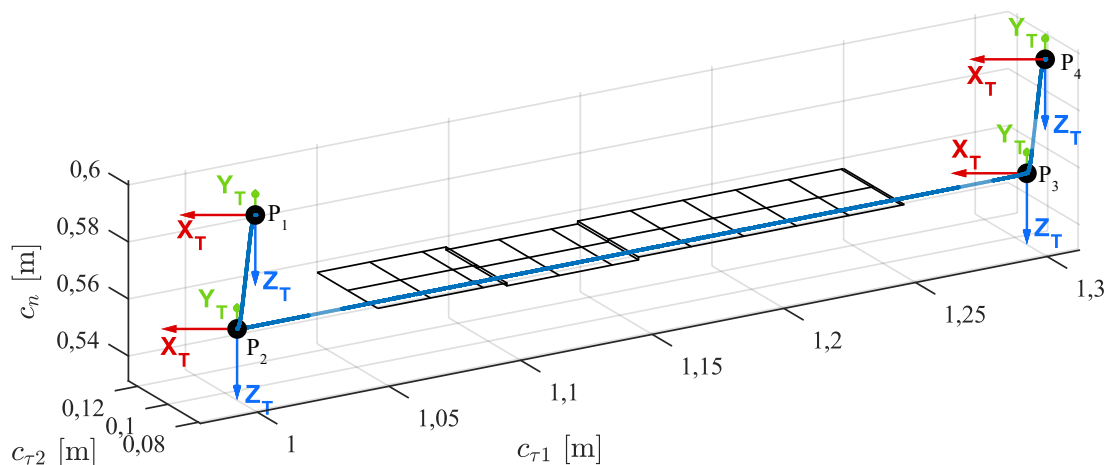


Rys. 8.40. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

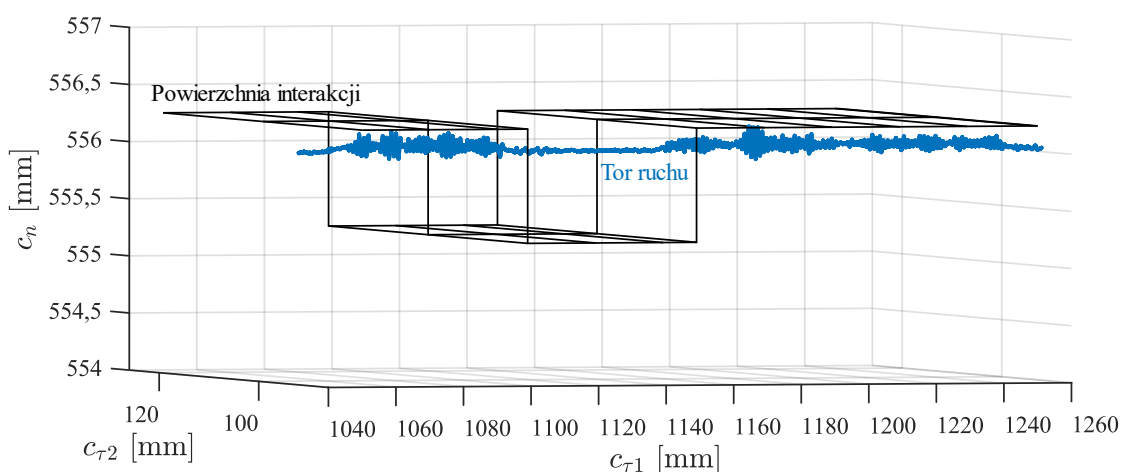
W dalszej części zaprezentowano wykresy zrealizowanego toru ruchu. Na rys. 8.41 pokazano zrealizowany tor ruchu punktu  $T$  w płaszczyźnie  $c_{t1} c_{t2}$  i w płaszczyźnie  $c_{t1} c_n$  z powiększeniem obszaru na wysokości powierzchni interakcji, co pozwala lepiej zobrazować zachowanie się narzędzia w tym kluczowym dla tego eksperymentu obszarze. Na rys. 8.42 pokazany został rzeczywisty tor ruchu narzędzia robota w widoku trójwymiarowym. Zaznaczono na nim również orientację układu odniesienia związanego z narzędziem oraz kształt powierzchni interakcji. Na powiększeniach obszaru toru ruchu w miejscu interakcji z detalem (rys. 8.41b i rys. 8.43) można zauważyć, że narzędzie wchodząc w kontakt z materiałem znajduje się niżej względem zakładanych więzów geometrycznych. Jest to maksymalne odchylenie od zadanej pozycji na kierunku normalnym, wynikające z wartości współczynnika  $w_\xi$ . W miejscach interakcji z detalem układ sterowania ustawia pozycję narzędzia na wysokości gwarantującej osiągnięcie zadanej wartości siły interakcji. Natomiast w miejscu deformacji powierzchni interakcji narzędzie nie zagłębia się bardziej niż pozwala mu na to wirtualna siła interakcji.



Rys. 8.41. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1}$   $c_n$



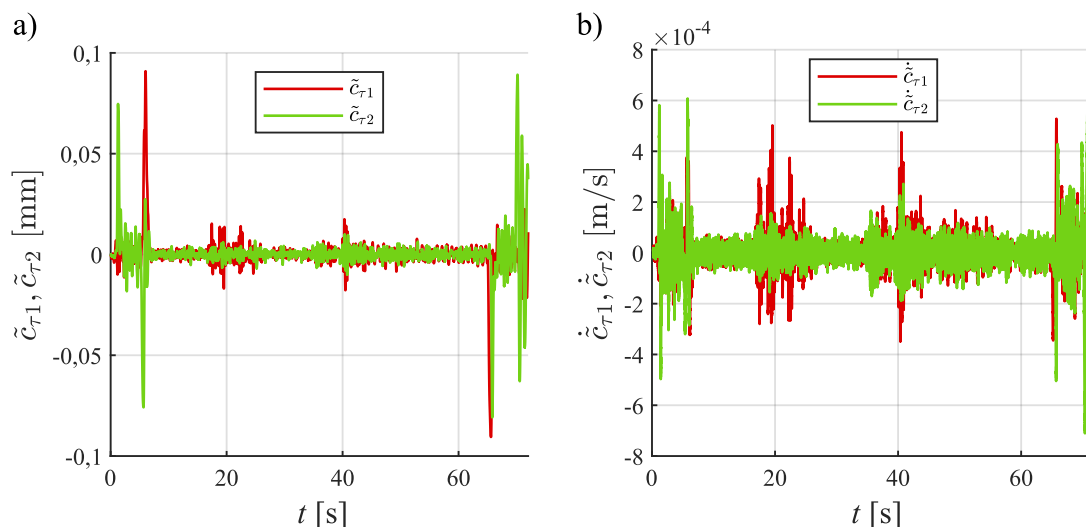
Rys. 8.42. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$



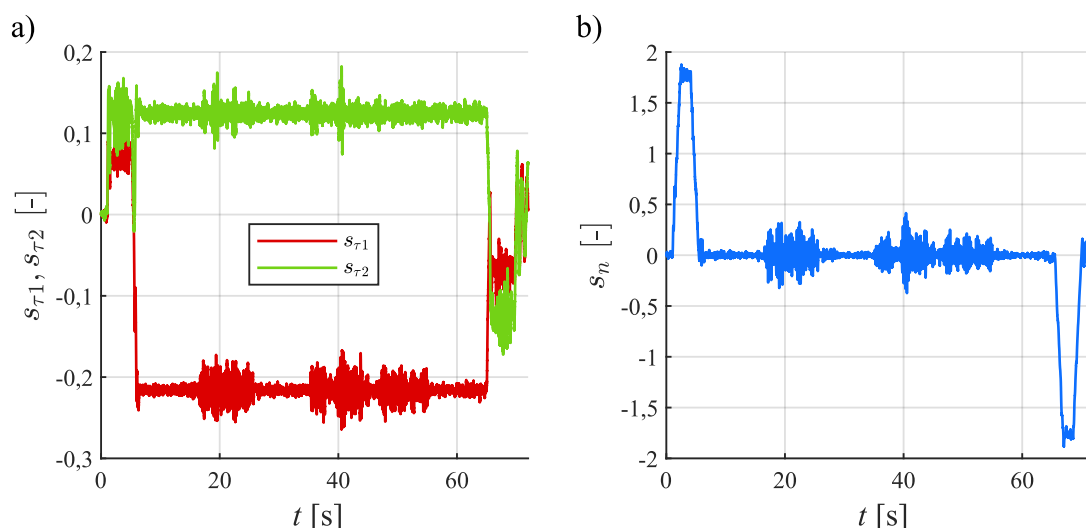
Rys. 8.43. Powiększenie zadanego toru ruchu punktu  $T$  w miejscu interakcji z powierzchnią detalu

Rys. 8.44 przedstawia błędy realizacji trajektorii przez układ sterowania na kierunkach stycznych. Widać na nim, że układ dąży do minimalizacji błędu. W dynamicznych stanach przejściowych, takich jak ruszanie i zmiana kierunku ruchu, błąd pozycjonowania nie

przekracza 0,1 mm. Na rys. 8.45 pokazano sygnał błędu uogólnionego, który kształtuje sygnał sterowania PD.

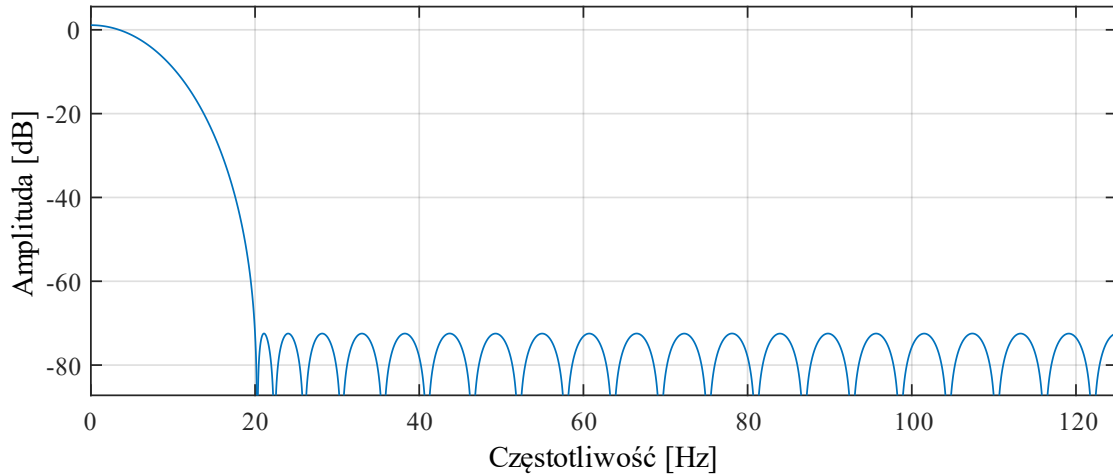


Rys. 8.44. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych

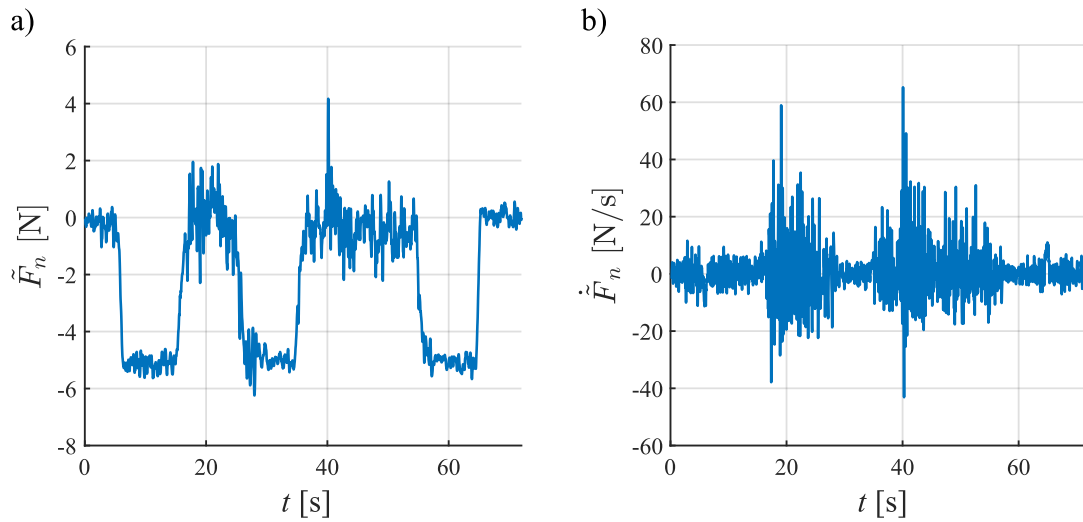


Rys. 8.45. Sygnały błędów uogólnionych: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

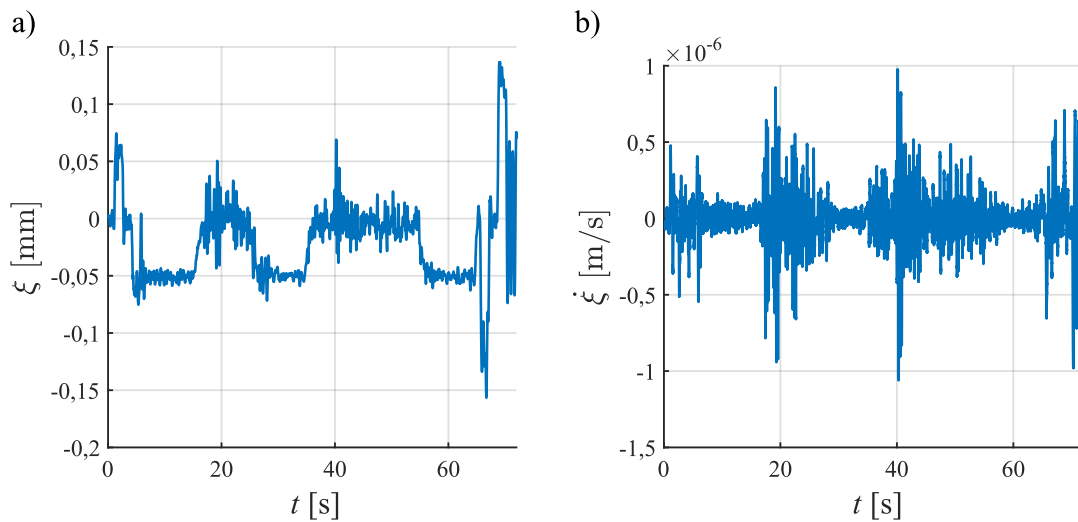
Sygnał sił interakcji został poddany filtracji z uwagi na drgania powodowane przez narzędzie. Dobrany został cyfrowy filtr dolnoprzepustowy o skończonej odpowiedzi impulsowej o rzędzie 42. Częstotliwość graniczną filtra dobrano na podstawie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowej sygnału z czujnika siły, zarejestrowanego podczas testów dotyczących doboru narzędzi i parametrów obróbki dla detalu z aluminium. Charakterystykę amplitudowo-częstotliwościową filtra przedstawiono na rys. 8.46. Częstotliwość graniczna filtra wynosi 20 Hz. Błąd realizacji zadanej siły pokazano na rys. 8.47, zaś na rys. 8.48 przedstawiono sygnały odchylenia narzędzia od założonych więzów, czyli od powierzchni interakcji oraz jego pochodną. Sygnały błędów jasno wskazują na skuteczność opisywanego układu sterowania. W miejscu interakcji błąd realizacji siły oraz sygnał odchylenia narzędzia od założonych więzów geometrycznych maleją osiągając wartość zero.



Rys. 8.46. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa zastosowanego filtra dolnoprzepustowego



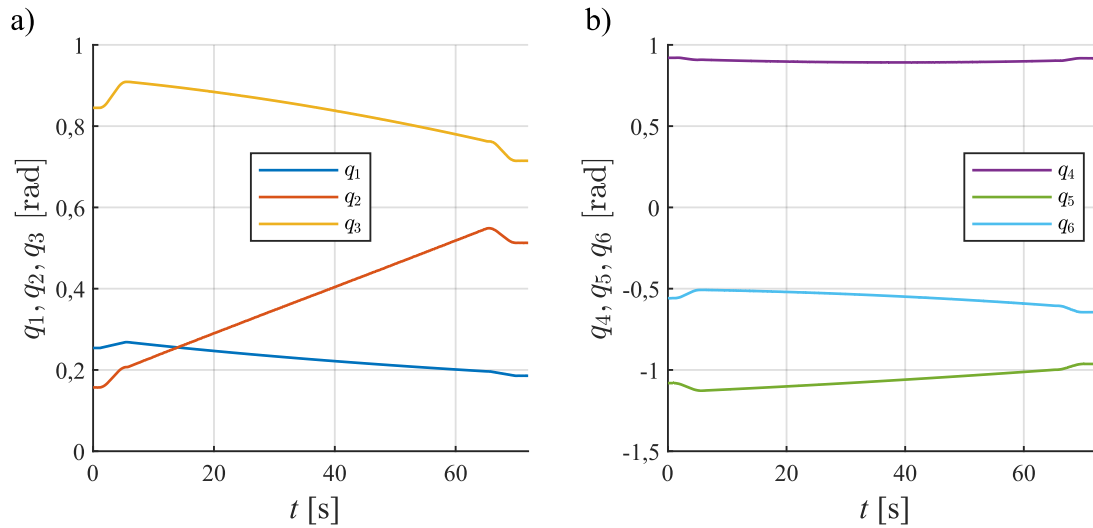
Rys. 8.47. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej



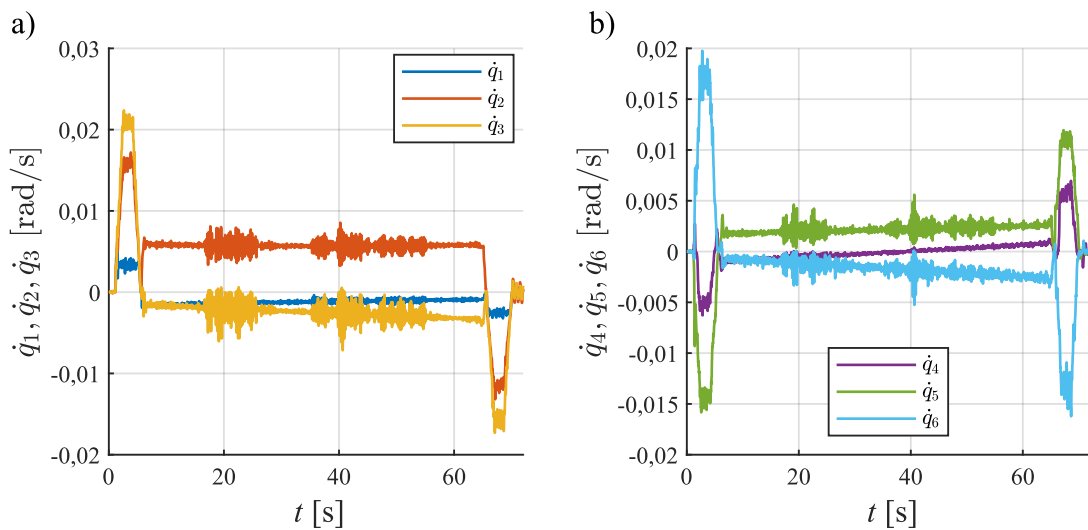
Rys. 8.48. Sygnały: a) odchylenie punktu  $T$  od założonej powierzchni interakcji, b) pochodna tego odchylenia

W dalszej części zaprezentowano zarejestrowane przebiegi współrzędnych w przestrzeni konfiguracyjnej. Na rys. 8.49 pokazano wartości pozycji kątowych poszczególnych członów robota, a prędkości kątowe zamieszczono na rys. 8.50. Natomiast na rys. 8.51 przedstawiono

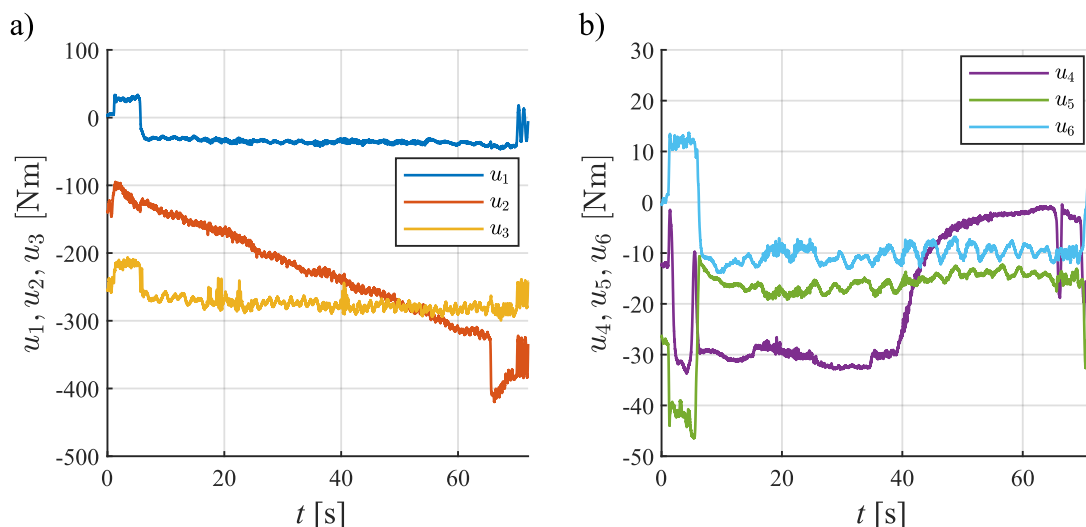
sygnały momentów napędowych członów robota. Drgania powodowane przez obróbkę są widoczne szczególnie na wykresach prędkości kątowych członów (rys. 8.50), na których można wyraźnie zauważyć chwile, gdy zachodzi interakcja robota z detalem. Zmiany momentu pod wpływem siły interakcji są mniej zauważalne, z uwagi na niewielkie wartości tej siły. Największy wpływ siły interakcji można zauważyć na przebiegu momentu członu 3. i 4.



Rys. 8.49. Kąty obrotu członów robota: a) kąty obrotów członów 1-3, b) kąty obrotów członów 4-6

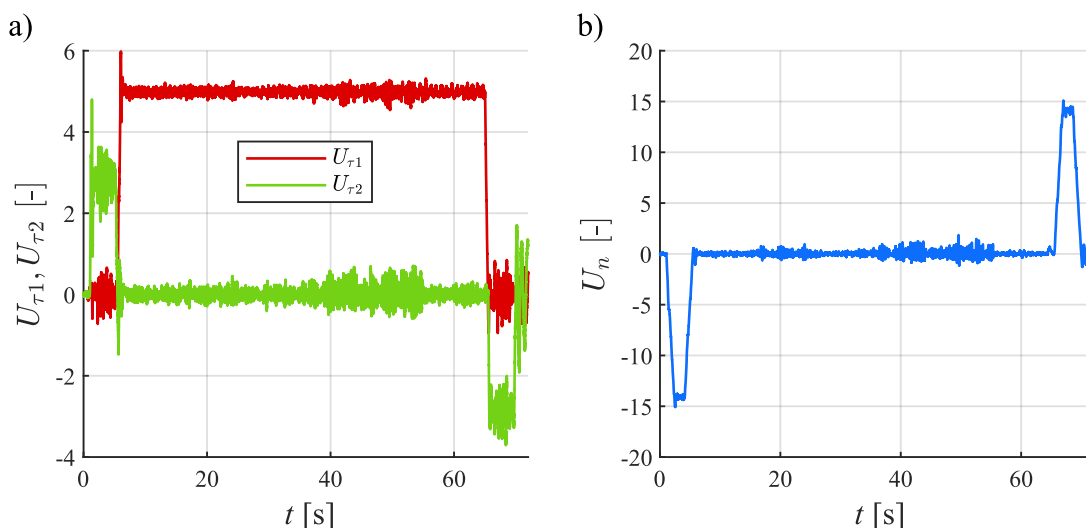


Rys. 8.50. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości kątowe członów 1-3, b) prędkości kątowe członów 4-6



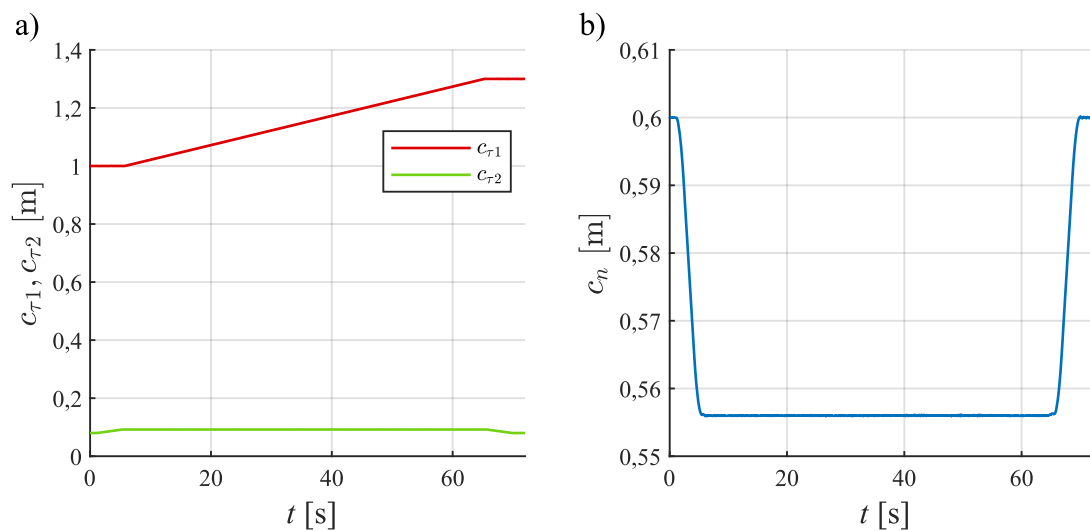
Rys. 8.51. Momenty napędowe: a) członów 1-3, b) członów 4-6

W drugim etapie badań ponownie wykonano przejazd po już obróbianej powierzchni, lecz zmniejszono wartość współczynnika  $w_{\xi}$  do 50000, w celu sprawdzenia zachowania układu sterowania w przypadku większej różnicy pomiędzy zakładanymi a rzeczywistymi więzami. Zmniejszenie współczynnika  $w_{\xi}$  pozwala na większe odchylenie narzędzia. Na rys. 8.52 przedstawiono przebiegi sygnałów sterowania, których drgania powodowane przez obróbkę są mniejsze niż przy poprzednim badaniu (rys. 8.37). Na kolejnych rysunkach zaprezentowano trajektorię ruchu (rys. 8.53 i rys. 8.54) oraz trajektorię siły (rys. 8.55). Przebieg siły pokazuje, że narzędzie utrzymywało kontakt z powierzchnią detalu, jednak siła nie osiągnęła zadanej wartości.

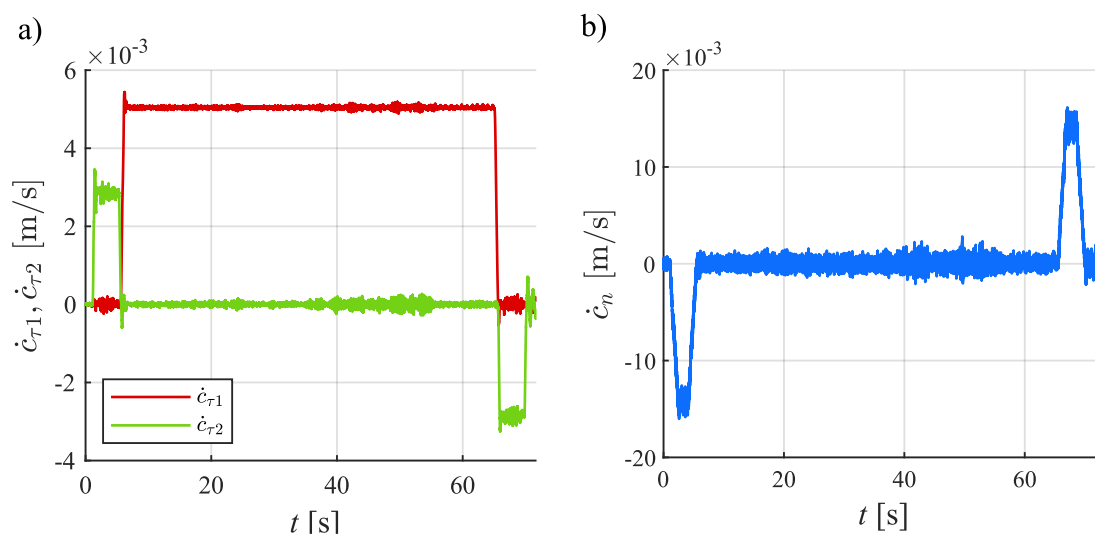


Rys. 8.52. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach osi xy b) na kierunku osi z

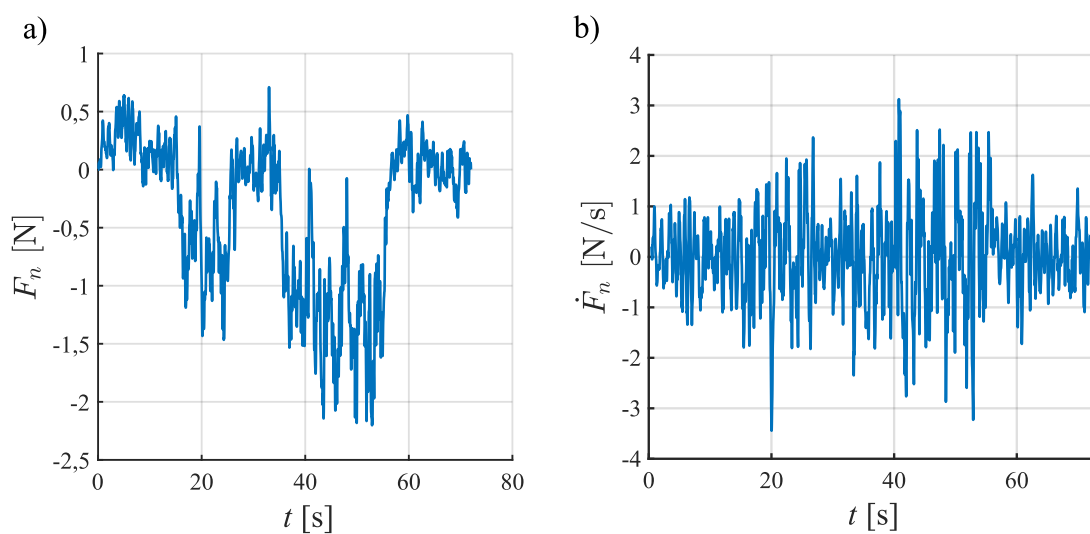




Rys. 8.53. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu  $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

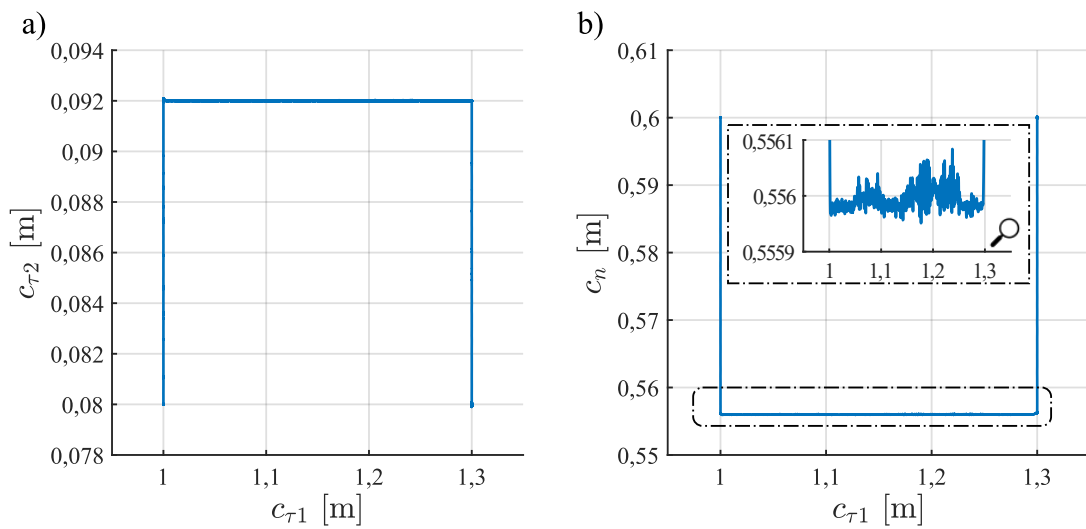


Rys. 8.54. Wykres przebiegu prędkości punktu  $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym

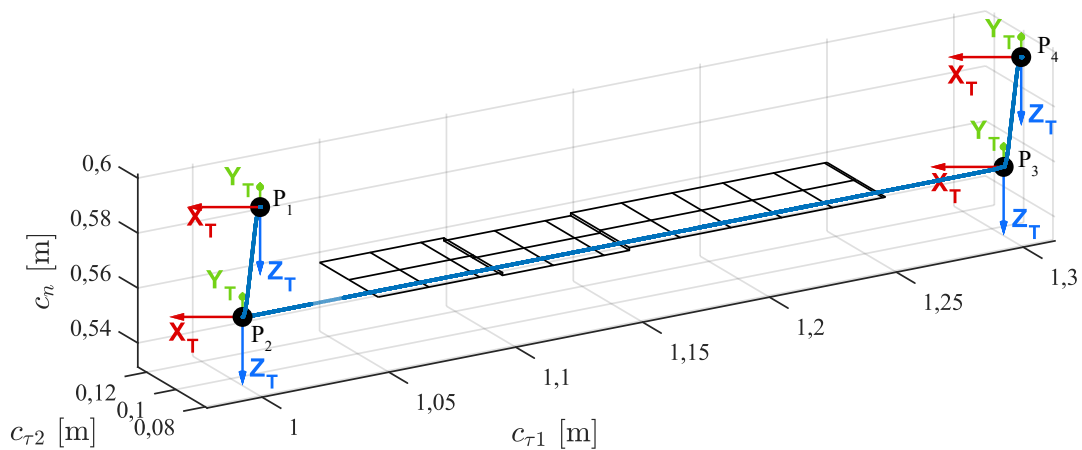


Rys. 8.55. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku

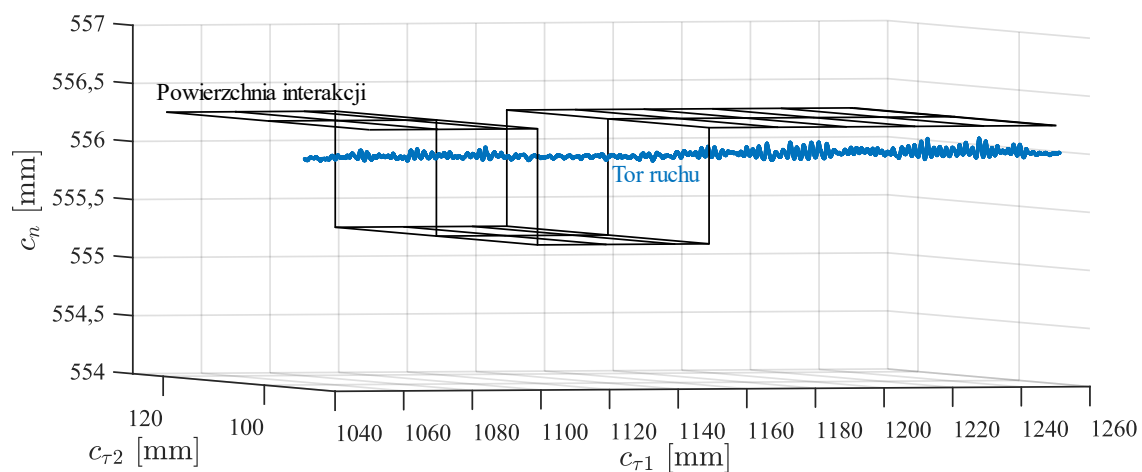
Na rys. 8.56 zamieszczono wykresy rzutów zrealizowanego toru ruchu na płaszczyzny  $c_{\tau 1} c_{\tau 2}$  oraz  $c_{\tau 1} c_n$ . Natomiast na rys. 8.57 zamieszczono wykres zrealizowanego toru ruchu w widoku trójwymiarowym i jego powiększenie na rys. 8.58. Można zauważyć, że narzędzie znajduje się głębiej względem zakładanych więzów w porównaniu do poprzedniego badania (rys. 8.41b i rys. 8.43), co potwierdza także porównanie wykresów odchylenia narzędzia w pierwszym badaniu (rys. 8.48a) i drugim badaniu (rys. 8.61a). Na rys. 8.59 pokazano wykresy sygnałów błędów realizacji trajektorii zadanej, na których podobnie jak w poprzednim badaniu widać krótkotrwałe impulsy występujące w stanach dynamicznych, które nie przekraczają wartości 0,1 mm. Układ sterowania dąży do minimalizacji sygnałów błęd.



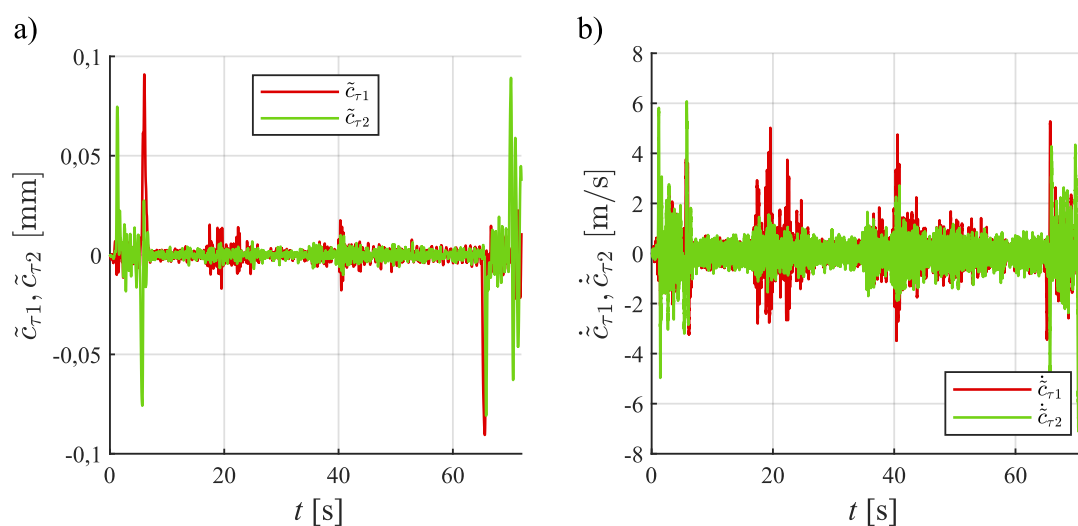
Rys. 8.56. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$ : a) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1} c_{\tau 2}$ , b) w płaszczyźnie  $c_{\tau 1} c_n$



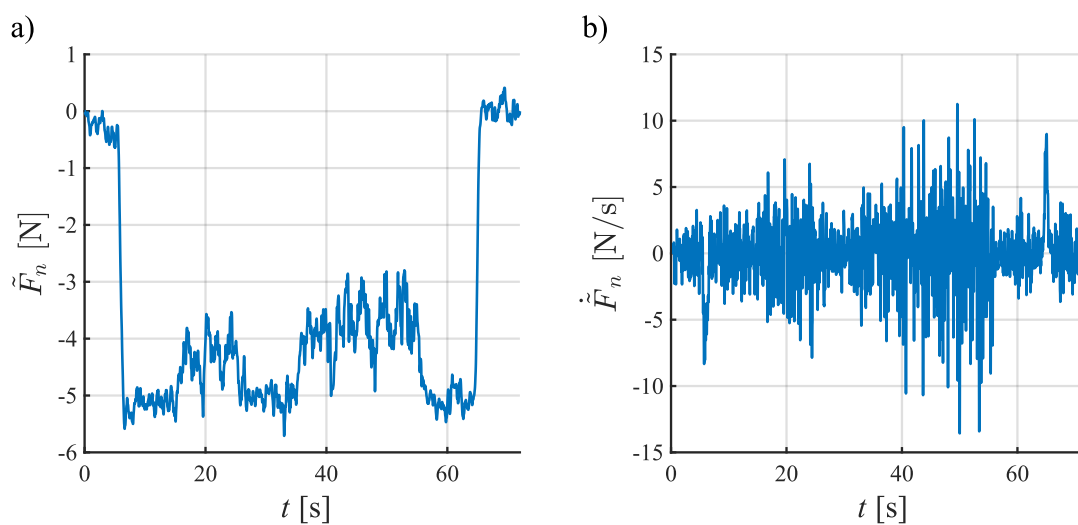
Rys. 8.57. Zrealizowany tor ruchu punktu  $T$



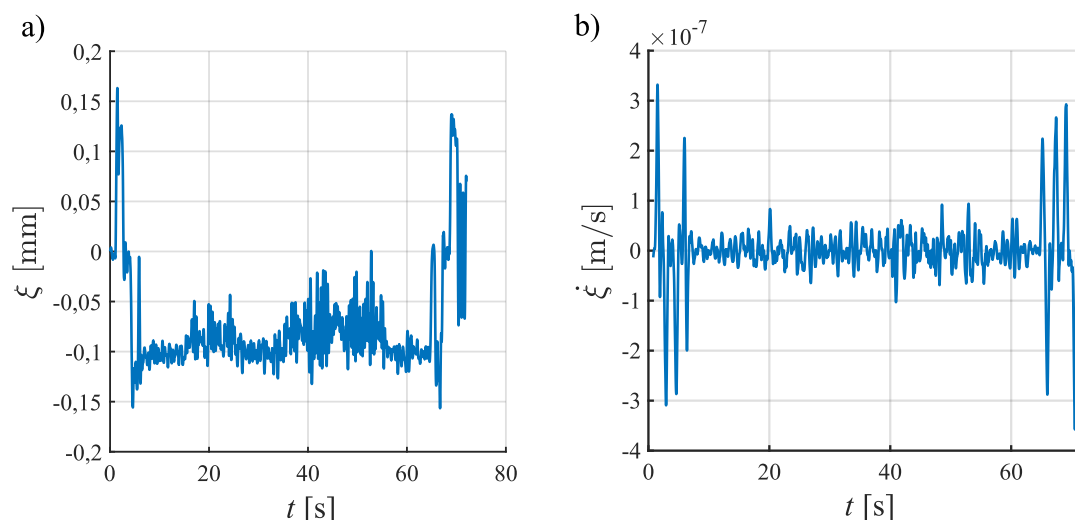
Rys. 8.58. Powiększenie zadanego toru ruchu punktu  $T$  w miejscu interakcji z powierzchnią detalu



Rys. 8.59. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych



Rys. 8.60. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej



Rys. 8.61. Sygnały: a) odchylenie punktu TCP (od założonych więzów powierzchni interakcji), b) pochodna tego odchylenia

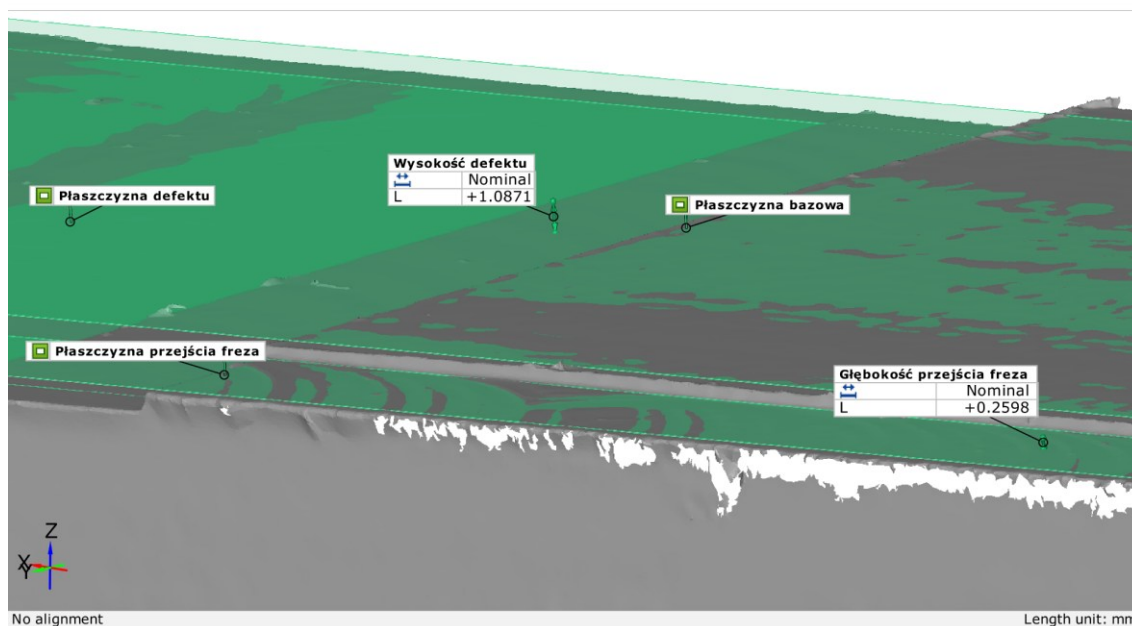
Siła interakcji jest niewielka (rys. 8.55a), ponieważ błąd sterowania siłą (rys. 8.60) jest kompensowany przez wirtualną siłę wyliczaną na podstawie deformacji zakładanych więzów geometrycznych. Natomiast cel sterowania został osiągnięty, narzędzie pozostawało w interakcji z detalem, jeżeli niedokładność rzeczywistych więzów nie przekraczała pewnej wartości. Wartość tę można zmieniać przez dobór wartości współczynnika  $w_{\xi}$ .

W celu sprawdzenia wymiarów uzyskanych po obróbce wykonano skanowanie trójwymiarowe detalu przy użyciu skanera ATOS Core 135.

Generated with ATOS Professional V7.5 SR2

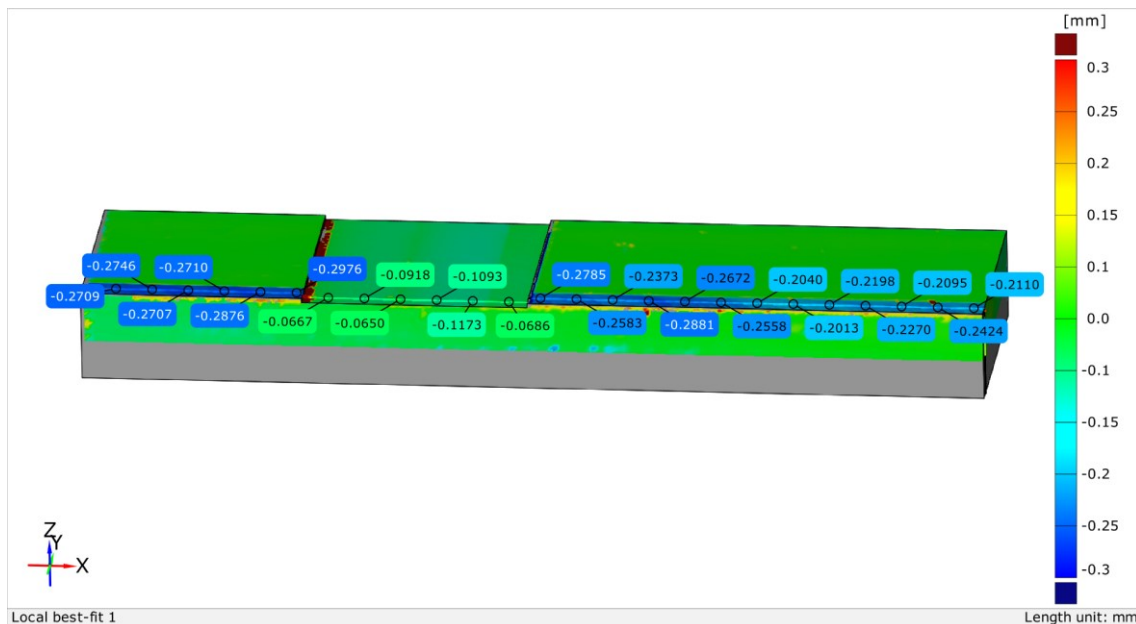


Widok ogólny



Rys. 8.62. Raport metrologiczny pomiaru istotnych powierzchni detalu po obróbce

## Odchyłki kształtu powierzchni interakcji



Rys. 8.63. Raport metrologiczny powierzchni detalu względem modelu CAD

W raporcie przedstawionym na rys. 8.62 znajdują się wyniki pomiarów wysokości defektu oraz głębokości rowka uzyskanych po dwóch przejściach narzędzia. Pomiary uzyskano dopasowując płaszczyzny do zeskanowanych powierzchni. Płaszczyzna bazowa została dopasowana do górnej powierzchni detalu, płaszczyzna defektu do powierzchni w miejscu wgłębienia pełniącego rolę defektu powierzchni, zaś płaszczyznę przejścia freza dopasowano do powierzchni w miejscu rowka powstałego po obróbce. Płaszczyzny zostały dopasowane metodą najlepszego dopasowania w oparciu o funkcję Gaussa. Odległości obu płaszczyzn od płaszczyzny bazowej zdefiniowano jako odległość średnią, ponieważ dopasowane płaszczyzny nie są względem siebie idealnie równoległe. Średnia głębokość rowka wyniosła 0,2598 mm. Na rys. 8.63 przedstawiono raport metrologiczny porównujący skan detalu z modelem CAD, pokazanym na rys. 8.31a. W raporcie zamieszczono zestawienie pomiarów głębokości rowka po obróbce wzdłuż linii przejścia narzędzia.

W zaprezentowanym teście pokazano wykorzystanie opisywanego układu sterowania do realizacji operacji frezowania detalu ze stopu aluminium. Test wykazał, że układ sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów można zastosować w procesach obróbkowych i pozwala on na kompensację niepewności określenia rzeczywistych więzów geometrycznych sterując siłą interakcji robota z detalem przy zachowaniu kontroli nad ruchem robota.

## 9. Wnioski

W pracy przedstawiono proces implementacji układu sterowania pozycyjno-siłowego, będącego odpowiedzią na żywotne problemy trwające robotyzację procesów obróbki mechanicznej. W toku prac prowadzonych w zespole zajmującym się opracowywaniem technologii zrobotyzowanej obróbki mechanicznej dla przemysłu lotniczego i samochodowego, zidentyfikowano braki w dostępnych na rynku rozwiązaniach, co było impulsem do podjęcia prób znalezienia rozwiązania, które pozwoli je wyeliminować.

W tym celu przeprowadzono analizę stanu wiedzy na temat układów sterowania siłą, stosowanych w robotach przemysłowych. Zbudowano stanowisko badawcze umożliwiające przeprowadzenie testów układów sterowania w warunkach przemysłowych. Na potrzeby przeprowadzenia badań symulacyjnych opracowano model matematyczny kinematyki i dynamiki robota ABB IRB 2400 i określono wartości parametrów tego modelu. Uzyskany model posłużył do syntezy układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów i utworzenia cyfrowego bliźniaka stanowiska badawczego. Wykonane zostały testy symulacyjne, podczas których sprawdzono zachowanie robota podczas interakcji z elementami środowiska i potwierdzono skuteczność działania zaprojektowanego układu sterowania.

Następnie przeprowadzono serię badań eksperymentalnych weryfikujących poprawność przyjętych założeń. W pierwszym teście odtworzono w rzeczywistości eksperyment symulacyjny, który pozwolił przetestować w bezpiecznych warunkach działanie zaprojektowanego układu sterowania. Urządzenie pozwalające ustawiać podatność środowiska oraz kula transportowa jako narzędzie pozwoliły ochronić robota w przypadku uderzenia narzędzie o elementy środowiska. Sprawdzono jak niepewności geometrii więzów wpływają na ruch robota przy różnych wartościach współczynnika  $w_{\xi}$ . Eksperyment potwierdził poprawność działania układu sterowania. Narzędzie utrzymywało kontakt z otoczeniem zadaną siłą, jeżeli rzeczywiste i zakładane więzy geometryczne pokrywały się ze sobą. W przypadku braku zgodności więzów układ sterowania korygował pozycję narzędzia, aby utrzymać zadaną siłę interakcji, lecz tylko w ograniczonym zakresie, który jest skorelowany z wartością wspomnianego współczynnika  $w_{\xi}$ . W drugim eksperymencie, w celu porównania, przeprowadzony został test działania wbudowanego w kontrolerze robota układu sterowania siłą, który reprezentuje klasyczny algorytm hybrydowego sterowania pozycyjno-siłowego. Układ ten wymaga aktywacji kontroli siły w bliskim otoczeniu powierzchni interakcji. Aktywacja następuje w momencie wykrycia siły kontaktu o wartości ustawianej jako procent siły zadanej. Wbudowany układ sterowania w przeciwieństwie do układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów utrzymuje zadaną siłę interakcji nie zważając na kształt powierzchni interakcji. Ponadto dodatkową zaletą zaprojektowanego układu sterowania jest to, że nie ma konieczności stosowania macierzy przełączeń pomiędzy sterowaniem pozycją i siłą. Dojazd do pozycji w otoczeniu powierzchni interakcji może być zrealizowany przy zadanej sile o wartości 0 i aktywowane przez zmianę wartości siły zadanej, gdy robot znajdzie się odpowiednio blisko powierzchni kontaktu. Natomiast klasyczna metoda hybrydowego sterowania pozycyjno-siłowego wymaga, aby przełączać układ sterowania między strategią realizacji zadanej siły albo pozycji. Mechanizm ten można zaimplementować w zaprojektowanym układzie sterowania, lecz nie jest on konieczny.

W ostatnim eksperymencie pokazano, że układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów można zaimplementować do operacji zrobotyzowanego frezowania. W tym celu wykorzystano detal o zaburzonym kształcie geometrycznym. Założeniem eksperymentu było sprawdzenie czy robot utrzyma kontakt z detalem podczas procesu frezowania, jednocześnie nie wpadając w wycięcie stanowiące zaburzenie względem zakładanych więzów geometrycznych powierzchni interakcji. Zakładane więzy geometryczne ustalono na powierzchni detalu, co sprawiło, że przy sterowaniu pozycyjnym narzędzie poruszałoby się nie wchodząc w interakcję z detalem, wskutek czego nie wykonano by operacji frezowania. Wyniki eksperymentu potwierdziły, że układ sterowania skompensował wysokość narzędzia względem rzeczywistej powierzchni detalu utrzymując zadaną siłę interakcji. Ponowny przejazd po już obrobionej powierzchni udowodnił, że przy większych odchyleniach od zakładanych więzów geometrycznych, robot jest w stanie osiągnąć kontakt z powierzchnią interakcji a ustawiając odpowiednią wartość  $w_x$  można regulować szerokość strefy kontaktu z powierzchnią interakcji w procesie frezowania. Cały eksperyment udowodnił, że istnieje możliwość wykorzystania zaprojektowanego układu sterowania w aplikacjach zrobotyzowanej obróbki w celu kompensacji niepewności geometrii detalu, a jego przewagą nad klasycznym podejściem do sterowania siłą jest możliwość płynnego ograniczenia strefy odchylenia narzędzia od zakładanych więzów geometrycznych.

Reasumując cel pracy został zrealizowany. Algorytm sterowania opracowany oparciu o hybrydowe sterownię pozycja-siła zapewnia utrzymanie siły kontaktu w interakcji z obrabianym detalem o ile nie wymaga to nadmiernego odejścia od zadanej ścieżki ruchu. Ponadto układ sterowania steruje siłą interakcji w ograniczonym obszarze wyznaczonym względem nominalnej pozycji powierzchni kontaktu i umożliwia ustalenie wpływu składowych strategii sterowania.

## 10. Kierunki dalszych badań

Potwierdzona skuteczność prezentowanego układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów zachęca, żeby podjąć pracę nad przeniesieniem tego rozwiązania z informatycznego środowiska badawczego jakim jest pakiet MATLAB/SIMULINK na platformę sprzętową kontrolera robota, aby umożliwić użytkowanie go w warunkach normalnej produkcji. W tym celu dalsze prace zostaną ukierunkowane na:

1. Zaprojektowanie biblioteki oprogramowania działającego w środowisku kontrolera robota, która umożliwi napisanie programu, który będzie odpowiadał za sterowanie interakcją robota zgodne z prezentowanym podejściem dla różnych produkowanych detali.
2. Opracowanie łatwej i bezpiecznej procedury identyfikacji sztywności elementów środowiska, która może zostać wykonana przez operatora robota, bez konieczności znajomości modelu matematycznego interakcji robota z otoczeniem.
3. Udoskonalenie metody filtracji zakłóceń sygnału z czujnika siły pochodzących od wirującego narzędzia w czasie obróbki. Zamiast tradycyjnego filtra dolnoprzepustowego, lepiej byłoby zidentyfikować jak najwięcej zjawisk wpływających na pomiar siły, związanych z ruchem wirującej masy wrzeciona oraz z drganiami powodowanymi przez uderzanie krawędzi skrawających narzędzi o materiał.
4. Opracowanie preprocesora do oprogramowania CAM, który umożliwiłby projektowanie zrobotyzowanej obróbki z wykorzystaniem układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów w środowisku wirtualnym i przeniesienie gotowego programu na kontroler robota.
5. Badania nad wykorzystaniem układu sterowania pozycyjno-siłowego z uwzględnieniem niepewności więzów dla wielorobotowych aplikacji wykonujących ruch skoordynowany.

Proponowane kierunki badań wpisują się w interdyscyplinarne podejście do sterowania robotami przemysłowymi, łącząc ze sobą elementy automatyki, robotyki i nowoczesnego podejścia do projektowania procesów wytwarzania. Takie podejście pozwoli szerzej zastosować zaprojektowany algorytm sterowania w przemyśle.



## Bibliografia

- [1] R. Sekhar, P. Shah, i I. Iswanto, „Robotics in Industry 4.0: A Bibliometric Analysis (2011-2022)”, *Journal of Robotics and Control (JRC)*, t. 3, nr 5, s. 583–613, wrz. 2022, doi: 10.18196/JRC.V3I5.15453.
- [2] Nestor Maslej i in., „The AI Index 2023 Annual Report”, AI Index Steering Committee, Institute for Human-Centered AI, Stanford University, Stanford, CA, kwi. 2023. Dostęp: 24 maj 2024. [Online]. Dostępne na: [https://aiindex.stanford.edu/wp-content/uploads/2023/04/HAI\\_AI-Index-Report\\_2023.pdf](https://aiindex.stanford.edu/wp-content/uploads/2023/04/HAI_AI-Index-Report_2023.pdf)
- [3] M. H. Ang i G. B. Andeen, „Specifying and Achieving Passive Compliance Based on Manipulator Structure”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, t. 11, nr 4, s. 504–515, 1995, doi: 10.1109/70.406934.
- [4] M. R. Cutkosky i P. K. Wright, „Active Control of a Compliant Wrist in Manufacturing Tasks”, *Journal of Engineering for Industry*, t. 108, nr 1, s. 36–43, luty 1986, doi: 10.1115/1.3187038.
- [5] N. Ciblak i H. Lipkin, „New properties of the remote center of compliance”, *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, t. 2, s. 921–926, 1997, doi: 10.1109/ROBOT.1997.614252.
- [6] J. L. Nevins i D. E. Whitney, „Assembly research”, *Automatica*, t. 16, nr 6, s. 595–613, lis. 1980, doi: 10.1016/0005-1098(80)90003-5.
- [7] D. E. Whitney, „Quasi-Static Assembly of Compliantly Supported Rigid Parts”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 104, nr 1, s. 65–77, mar. 1982, doi: 10.1115/1.3149634.
- [8] H. Huang, Z. M. Gong, X. Q. Chen, i L. Zhou, „Robotic grinding and polishing for turbine-vane overhaul”, *Journal of Materials Processing Technology*, t. 127, nr 2, s. 140–145, wrz. 2002, doi: 10.1016/S0924-0136(02)00114-0.
- [9] M. A. Elbestawi, „Force Measurement”, w *Measurement, instrumentation, and sensors handbook. Spatial, mechanical, thermal, and radiation measurement*, 2. wyd., J. G. Webster i H. Eren, Red., Boca Raton: CRC Press, 2014, s. 41.1-41.18. Dostęp: 7 marzec 2024. [Online]. Dostępne na: <https://doi.org/10.1201/b15474>
- [10] B. Shimano i B. Roth, „On Force Sensing Information and Its Use in Controlling Manipulators”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 10, nr 11, s. 119–126, sty. 1977, doi: 10.1016/S1474-6670(17)66591-1.
- [11] H. Van Brussel, I. H. Belien, i I. H. Thielemans, „Force sensing for advanced robot control”, *Robotics*, t. 2, nr 2, s. 139–148, cze. 1986, doi: 10.1016/0167-8493(86)90050-1.
- [12] J. Lee, „Apply force/torque sensors to robotic applications”, *Robotics*, t. 3, nr 2, s. 189–194, cze. 1987, doi: 10.1016/0167-8493(87)90007-6.

- [13] N. Nakazawa, I. Kim, H. Inooka, i R. Ikeura, „Force control of a robot gripper based on human grasping schemes”, *Control Engineering Practice*, t. 9, nr 7, s. 735–742, lip. 2001, doi: 10.1016/S0967-0661(01)00038-7.
- [14] A. Wahrburg, J. Börs, K. D. Listmann, F. Dai, B. Matthias, i H. Ding, „Motor-Current-Based Estimation of Cartesian Contact Forces and Torques for Robotic Manipulators and Its Application to Force Control”, *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, t. 15, nr 2, s. 879–886, kwi. 2018, doi: 10.1109/TASE.2017.2691136.
- [15] T. Murakami, F. Yu, i K. Ohnishi, „Torque Sensorless Control in Multidegree-of-Freedom Manipulator”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, t. 40, nr 2, s. 259–265, 1993, doi: 10.1109/41.222648.
- [16] Y. Dong, T. Ren, K. Hu, D. Wu, i K. Chen, „Contact force detection and control for robotic polishing based on joint torque sensors”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, t. 107, nr 5–6, s. 2745–2756, mar. 2020, doi: 10.1007/S00170-020-05162-8/FIGURES/11.
- [17] D. Stokić i M. Vukobratović, „Historical perspectives and state of the art in joint force sensory feedback control of manipulation robots”, *Robotica*, t. 11, nr 2, s. 149–157, mar. 1993, doi: 10.1017/S0263574700019251.
- [18] A. Stolt, M. Linderöth, A. Robertsson, i R. Johansson, „Force controlled robotic assembly without a force sensor”, w *2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Paul, MN, USA: IEEE, maj 2012, s. 1538–1543. doi: 10.1109/ICRA.2012.6224837.
- [19] S. Katsura, Y. Matsumoto, i K. Ohnishi, „Modeling of force sensing and validation of disturbance observer for force control”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, t. 54, nr 1, s. 530–538, luty 2007, doi: 10.1109/TIE.2006.885459.
- [20] C. Ott i Y. Nakamura, „Base force/torque sensing for position based Cartesian impedance control”, w *2009 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, St. Louis, MO, USA: IEEE, paź. 2009, s. 3244–3250. doi: 10.1109/IROS.2009.5354136.
- [21] C. Ott i Y. Nakamura, „Admittance Control using a Base Force/Torque Sensor”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 42, nr 16, s. 467–472, sty. 2009, doi: 10.3182/20090909-4-JP-2010.00080.
- [22] L. Roveda, N. Pedrocchi, F. Vicentini, i L. Molinari Tosatti, „Industrial compliant robot bases in interaction tasks: a force tracking algorithm with coupled dynamics compensation”, *Robotica*, t. 35, nr 8, s. 1732–1746, sie. 2017, doi: 10.1017/S0263574716000461.
- [23] H. Gattringer, A. Müller, i P. Hoermandinger, „Design and Calibration of Robot Base Force/Torque Sensors and Their Application to Non-Collocated Admittance Control for Automated Tool Changing”, *Sensors 2021, Vol. 21, Page 2895*, t. 21, nr 9, s. 2895, kwi. 2021, doi: 10.3390/S21092895.

- [24] K. Ma, X. Wang, i D. Shen, „Design and Experiment of Robotic Belt Grinding System with Constant Grinding Force”, w *2018 25th International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice*, Stuttgart, Germany: IEEE, lis. 2018. doi: 10.1109/M2VIP.2018.8600899.
- [25] N. Hogan, „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part I—Theory”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 107, nr 1, s. 1–7, mar. 1985, doi: 10.1115/1.3140702.
- [26] N. Hogan, „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part II—Implementation”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 107, nr 1, s. 8–16, mar. 1985, doi: 10.1115/1.3140713.
- [27] N. Hogan, „Impedance Control: An Approach to Manipulation: Part III—Applications”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 107, nr 1, s. 17–24, mar. 1985, doi: 10.1115/1.3140701.
- [28] D. E. Whitney, „Historical perspective and state of the art in robot force control”, w *Proceedings. 1985 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, St. Louis, MO, USA: IEEE, mar. 1985, s. 262–268. doi: 10.1109/ROBOT.1985.1087266.
- [29] N. Hogan, „Impedance control of industrial robots”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, t. 1, nr 1, s. 97–113, sty. 1984, doi: 10.1016/0736-5845(84)90084-X.
- [30] H. Kazerooni, T. B. Sheridan, i P. K. Houpt, „Robust Compliant Motion for Manipulators, Part I: The Fundamental Concepts of Compliant Motion”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 2, nr 2, s. 83–92, 1986, doi: 10.1109/JRA.1986.1087045.
- [31] H. Kazerooni, P. K. Houpt, i T. B. Sheridan, „Robust Compliant Motion for Manipulators, Part II: Design Method”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 2, nr 2, s. 93–105, 1986, doi: 10.1109/JRA.1986.1087047.
- [32] H. Seraji, „Adaptive admittance control: an approach to explicit force control in compliant motion”, w *Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, San Diego, CA, USA: IEEE, maj 1994, s. 2705–2710. doi: 10.1109/ROBOT.1994.350927.
- [33] C. Ott, R. Mukherjee, i Y. Nakamura, „Unified impedance and admittance control”, w *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Anchorage, AK, USA: IEEE, maj 2010, s. 554–561. doi: 10.1109/ROBOT.2010.5509861.
- [34] S. Jung, „Admittance Force Tracking Control for Position-Controlled Robot Manipulators Under Unknown Environment”, w *2020 20th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, Busan, Korea (South): IEEE, paź. 2020, s. 219–224. doi: 10.23919/ICCAS50221.2020.9268417.
- [35] J. K. Salisbury, „Active stiffness control of a manipulator in cartesian coordinates”, w *1980 19th IEEE Conference on Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes*, Albuquerque, NM, USA: IEEE, grudz. 1980, s. 95–100. doi: 10.1109/CDC.1980.272026.

- [36] M. T. Mason, „Compliance and Force Control for Computer Controlled Manipulators”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, t. 11, nr 6, s. 418–432, 1981, doi: 10.1109/TSMC.1981.4308708.
- [37] M. H. Raibert i J. J. Craig, „Hybrid Position/Force Control of Manipulators”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 103, nr 2, s. 126–133, cze. 1981, doi: 10.1115/1.3139652.
- [38] J. J. Craig i M. H. Raibert, „A systematic method of hybrid position/force control of a manipulator”, w *COMPSAC 79. Proceedings. Computer Software and The IEEE Computer Society's Third International Applications Conference, 1979.*, Chicago, IL: IEEE, 1979, s. 446–451. doi: 10.1109/CMPSAC.1979.762539.
- [39] S. Chiaverini i L. Sciavicco, „The Parallel Approach to Force/Position Control of Robotic Manipulators”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, t. 9, nr 4, s. 361–373, 1993, doi: 10.1109/70.246048.
- [40] H. Kazerooni, „Contact Instability of the Direct Drive Robot when Constrained by a Rigid Environment”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, t. 35, nr 6, s. 710–714, 1990, doi: 10.1109/9.53550.
- [41] L. Villani, B. Siciliano, i C. Canudas de Wit, „Regulation of Force and Position for a Robot Manipulator in Contact with a Compliant Environment”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 30, nr 20, s. 333–338, wrz. 1997, doi: 10.1016/S1474-6670(17)44285-6.
- [42] D. E. Whitney, „Force Feedback Control of Manipulator Fine Motions”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, t. 99, nr 2, s. 91–97, cze. 1977, doi: 10.1115/1.3427095.
- [43] J. L. Nevins i D. E. Whitney, „The Force Vector Assembler Concept”, w *On Theory and Practice of Robots and Manipulators*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1972, s. 273–288. doi: 10.1007/978-3-662-40393-8\_19.
- [44] M. Vukobratović, V. Potkonjak, i V. Matijevic, „Soft and Elastodynamic Contacts”, w *Dynamics of Robots with Contact Tasks*, w Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering, no. 26. , Springer Dordrecht, 2003.
- [45] M. Vukobratović, „How to Control Robots Interacting with Dynamic Environment”, *Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications*, t. 19, nr 2, s. 119–152, cze. 1997, doi: <https://doi.org/10.1023/A:1007974811131>.
- [46] J. Lončarić, „Normal Forms of Stiffness and Compliance Matrices”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 3, nr 6, s. 567–572, 1987, doi: 10.1109/JRA.1987.1087148.
- [47] H. Bruyninckx i J. De Schutter, „Specification of force-controlled actions in the «Task frame formalism» - A synthesis”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, t. 12, nr 4, s. 581–589, 1996, doi: 10.1109/70.508440.
- [48] L. Sciavicco i B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators*. w Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. London: Springer London, 2000. doi: 10.1007/978-1-4471-0449-0.

- [49] K. Tchoń, A. Mazur, I. Dulęba, i R. Hossa, *Manipulatory i roboty mobilne: modele, planowanie ruchu, sterowanie*, nr 0. Wrocław: Wydawnictwo PLJ, 2000.
- [50] K. Kozłowski, P. Dutkiewicz, i W. Wróblewski, *Modelowanie i sterowanie robotów*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2003.
- [51] M. W. Spong, S. Hutchinson, i M. Vidyasagar, *Robot Modeling and Control*, 2. wyd. John Wiley & Sons, Ltd, 2020.
- [52] J. J. Craig, *Introduction to robotics : mechanics and control*, 4. wyd. Pearson, 2021.
- [53] M. Ruderman, F. Hoffmann, i T. Bertram, „Modeling and identification of elastic robot joints with hysteresis and backlash”, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, t. 56, nr 10, s. 3840–3847, 2009, doi: 10.1109/TIE.2009.2015752.
- [54] R. M. Iñigo i J. S. Morton, „Simulation of the Dynamics of an Industrial Robot”, *IEEE Transactions on Education*, t. 34, nr 1, s. 89–99, 1991, doi: 10.1109/13.79887.
- [55] A. Jain i G. Rodriguez, „Recursive dynamics for geared robot manipulators”, w *29th IEEE Conference on Decision and Control*, Honolulu, HI, USA: IEEE, 1990, s. 1983–1988 t.3. doi: 10.1109/CDC.1990.203972.
- [56] P. Chedmail, Y. Aoustin, i C. Chevallereau, „Modelling and control of flexible robots”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 32, nr 8, s. 1595–1619, grudz. 1991, doi: 10.1002/NME.1620320806.
- [57] S. Yu i M. A. Elbestawi, „Modelling and dynamic analysis of a two-link manipulator with both joint and link flexibilities”, *Journal of Sound and Vibration*, t. 179, nr 5, s. 839–854, luty 1995, doi: 10.1006/JSVI.1995.0056.
- [58] A. Klimchik i A. Pashkevich, „Robotic manipulators with double encoders: accuracy improvement based on advanced stiffness modeling and intelligent control”, *IFAC-PapersOnLine*, t. 51, nr 11, s. 740–745, 2018, doi: 10.1016/j.ifacol.2018.08.407.
- [59] K. Kamali, A. Joubair, I. A. Bonev, i P. Bigras, „Elasto-geometrical calibration of an industrial robot under multidirectional external loads using a laser tracker”, w *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, Stockholm: IEEE, maj 2016, s. 4320–4327. doi: 10.1109/ICRA.2016.7487630.
- [60] S. D. Eppinger i W. P. Seering, „Understanding bandwidth limitations in robot force control”, w *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Raleigh, NC, USA: Proceedings. 1987 IEEE International Conference on Robotics and Automation, mar. 1987, s. 904–909. doi: 10.1109/ROBOT.1987.1087932.
- [61] G. Niemeyer, C. Preusche, i G. Hirzinger, „Teleroobotics”, w *Springer Handbook of Robotics*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2008, s. 741–757. doi: 10.1007/978-3-540-30301-5\_32.
- [62] S. Chiaverini i L. Sciavicco, „Force/Position Control of Manipulators in Task Space with Dominance in Force”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 21, nr 16, s. 137–143, paź. 1988, doi: 10.1016/S1474-6670(17)54600-5.

- [63] J. D. Lane, „Evaluation of a remote center compliance device”, *Assembly Automation*, t. 1, nr 1, s. 36–46, sty. 1980, doi: 10.1108/eb004135.
- [64] O. Khatib, „A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators: The Operational Space Formulation”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 3, nr 1, s. 43–53, 1987, doi: 10.1109/JRA.1987.1087068.
- [65] D. A. Lawrence, „Impedance control stability properties in common implementations”, Philadelphia, PA, USA: IEEE, 1988, s. 1185–1190. doi: 10.1109/ROBOT.1988.12222.
- [66] J. De Schutter i H. Van Brussel, „Compliant Robot Motion II. A Control Approach Based on External Control Loops”, *The International Journal of Robotics Research*, t. 7, nr 4, s. 18–33, sie. 1988, doi: 10.1177/027836498800700402.
- [67] R. J. Anderson i M. W. Spong, „Hybrid Impedance Control of Robotic Manipulators”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 4, nr 5, s. 549–556, 1988, doi: 10.1109/56.20440.
- [68] S. Jung i J. W. Lee, „Hybrid Impedance Force Tracking Control of a Robot Manipulator under Non-model Dynamics and Nonlinear Uncertainties”, w *2022 13th Asian Control Conference (ASCC)*, IEEE, maj 2022, s. 1108–1113. doi: 10.23919/ASCC56756.2022.9828122.
- [69] C. Ott, *Cartesian Impedance Control of Redundant and Flexible-Joint Robots*. w Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Berlin, Heidelberg, 2008. Dostęp: 9 maj 2024. [Online]. Dostępne na: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-69255-3>
- [70] K. Kronander i A. Billard, „Stability Considerations for Variable Impedance Control”, *IEEE Transactions on Robotics*, t. 32, nr 5, s. 1298–1305, paź. 2016, doi: 10.1109/TRO.2016.2593492.
- [71] J. Pliego-Jiménez i M. A. Arteaga-Pérez, „Adaptive position/force control for robot manipulators in contact with a rigid surface with uncertain parameters”, *European Journal of Control*, t. 22, s. 1–12, mar. 2015, doi: 10.1016/J.EJCON.2015.01.003.
- [72] Y. Li i S. S. Ge, „Impedance learning for robots interacting with unknown environments”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, t. 22, nr 4, s. 1422–1432, 2014, doi: 10.1109/TCST.2013.2286194.
- [73] M. H. Hamedani, H. Sadeghian, M. Zekri, F. Sheikholeslam, i M. Keshmiri, „Intelligent Impedance Control using Wavelet Neural Network for dynamic contact force tracking in unknown varying environments”, *Control Engineering Practice*, t. 113, s. 104840, sie. 2021, doi: 10.1016/J.CONENGPRAC.2021.104840.
- [74] H. Zhang i R. P. Paul, „Hybrid control of robot manipulators”, w *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, mar. 1985, s. 605–607. doi: 10.1109/ROBOT.1985.1087304.
- [75] H. Seraji, „Adaptive force and position control of manipulators”, *Journal of Robotic Systems*, t. 4, nr 4, s. 551–578, sie. 1987, doi: 10.1002/ROB.4620040406.

- [76] P. Gierlak, „Hybrid position/force control in robotised machining”, *Solid State Phenomena*, t. 210, s. 192–199, 2014, doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/SSP.210.192>.
- [77] N. Kumar i M. Rani, „Neural network-based hybrid force/position control of constrained reconfigurable manipulators”, *Neurocomputing*, t. 420, s. 1–14, sty. 2021, doi: 10.1016/J.NEUCOM.2020.09.009.
- [78] A. Karamali Ravandi, E. Khanmirza, i K. Daneshjou, „Hybrid force/position control of robotic arms manipulating in uncertain environments based on adaptive fuzzy sliding mode control”, *Applied Soft Computing*, t. 70, s. 864–874, wrz. 2018, doi: 10.1016/J.ASOC.2018.05.048.
- [79] Z. Wang, L. Zou, X. Su, G. Luo, R. Li, i Y. Huang, „Hybrid force/position control in workspace of robotic manipulator in uncertain environments based on adaptive fuzzy control”, *Robotics and Autonomous Systems*, t. 145, s. 103870, lis. 2021, doi: 10.1016/J.ROBOT.2021.103870.
- [80] H. Chaudhary, V. Panwar, N. Sukavanum, i R. Prasad, „Fuzzy PD+I based Hybrid force/position control of an Industrial Robot Manipulator”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 47, nr 1, s. 429–436, sty. 2014, doi: 10.3182/20140313-3-IN-3024.00062.
- [81] D. Jeon i M. Tomizuka, „Learning hybrid force and position control of robot manipulators”, w *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Publ by IEEE, 1992, s. 1455–1460. doi: 10.1109/ROBOT.1992.220146.
- [82] T. Yoshikawa i A. Sudou, „Dynamic Hybrid Position/Force Control of Robot Manipulators—On-Line Estimation of Unknown Constraint”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, t. 9, nr 2, s. 220–226, 1993, doi: 10.1109/70.238286.
- [83] V. Perdereau i M. Drouin, „A new scheme for hybrid force-position control”, *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, t. 187, s. 150–159, 1993, doi: 10.1007/BFB0031441.
- [84] Y. Li, K. Liu, i X. Qu, „Dynamic hybrid position/force control of a flexible manipulator”, *Advances in Modeling and Analysis C*, t. 55, nr 1–2, s. 35–43, 2000, doi: 10.1109/ROBOT.1993.291914.
- [85] M. Madani i M. Moallem, „Hybrid position/force control of a flexible parallel manipulator”, *Journal of the Franklin Institute*, t. 348, nr 6, s. 999–1012, sie. 2011, doi: 10.1016/J.JFRANKLIN.2011.03.005.
- [86] W. Gueaieb, F. Karray, i S. Al-Sharhan, „A robust hybrid intelligent position/force control scheme for cooperative manipulators”, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, t. 12, nr 2, s. 109–125, kwi. 2007, doi: 10.1109/TMECH.2007.892820.
- [87] M. Rani, N. Kumar, i H. P. Singh, „Motion/force control scheme for electrically driven cooperative multiple mobile manipulators”, *Control Engineering Practice*, t. 88, s. 52–64, lip. 2019, doi: 10.1016/J.CONENGPRAC.2019.04.005.

- [88] M. Rani i N. Kumar, „A New Hybrid Position/Force Control Scheme for Coordinated Multiple Mobile Manipulators”, *Arabian Journal for Science and Engineering*, t. 44, nr 3, s. 2399–2411, mar. 2019, doi: 10.1007/S13369-018-3544-0/METRICS.
- [89] M. C. Yip i D. B. Camarillo, „Model-Less Hybrid Position/Force Control: A Minimalist Approach for Continuum Manipulators in Unknown, Constrained Environments”, *IEEE Robotics and Automation Letters*, t. 1, nr 2, s. 844–851, lip. 2016, doi: 10.1109/LRA.2016.2526062.
- [90] R. Li, N. D. Vuong, C. M. Chew, i C. W. Lim, „Improving Force Control using Zero Coupling Impedance Criterion in Series Manipulator Systems”, *IFAC Proceedings Volumes*, t. 46, nr 5, s. 549–554, sty. 2013, doi: 10.3182/20130410-3-CN-2034.00090.
- [91] S. Joo i F. Miyazaki, „Development of variable RCC and its application”, *IEEE International Conference on Intelligent Robots and Systems*, t. 2, s. 1326–1332, 1998, doi: 10.1109/IROS.1998.727483.
- [92] A. E. K. Mohammad, J. Hong, i D. Wang, „Design of a force-controlled end-effector with low-inertia effect for robotic polishing using macro-mini robot approach”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, t. 49, s. 54–65, luty 2018, doi: 10.1016/J.RCIM.2017.05.011.
- [93] A. Sharon, N. Hogan, i D. E. Hardt, „High bandwidth force regulation and inertia reduction using a macro/micro manipulator system”, w *Proceedings. 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, kwi. 1988, s. 126–132. doi: 10.1109/robot.1988.12036.
- [94] J. Li i in., „A high-bandwidth end-effector with active force control for robotic polishing”, *IEEE Access*, t. 8, s. 169122–169135, 2020, doi: 10.1109/ACCESS.2020.3022930.
- [95] G. Zhang, G. Yang, Y. Deng, C. Chen, R. Zhu, i K. Yang, „Modeling and force control of a pneumoelectric end-effector for robotic continuous contact operations”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, t. 121, nr 1–2, s. 1219–1234, lip. 2022, doi: 10.1007/S00170-022-09413-8/FIGURES/29.
- [96] Y. Chen, J. Zhao, i Y. Jin, „An improved rational Bezier model for pneumatic constant force control device of robotic polishing with hysteretic nonlinearity”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, t. 123, nr 1–2, s. 665–674, lis. 2022, doi: 10.1007/S00170-022-10193-4/FIGURES/9.
- [97] R. Zhu i in., „Hybrid orientation/force control for robotic polishing with a 2R1T force-controlled end-effector”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, t. 121, s. 2279–2290, lip. 2022, doi: 10.1007/S00170-022-09407-6/FIGURES/17.
- [98] C.-Y. Chen, J. Dai, G. Yang, C. Wang, Y. Li, i L. Chen, „Sensor-based force decouple controller design of macro–mini manipulator”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, t. 79, s. 102415, luty 2023, doi: 10.1016/j.rcim.2022.102415.



- [99] S. Heshmati-Alamdari, A. Nikou, K. J. Kyriakopoulos, i D. V. Dimarogonas, „A Robust Force Control Approach for Underwater Vehicle Manipulator Systems”, *IFAC-PapersOnLine*, t. 50, nr 1, s. 11197–11202, lip. 2017, doi: 10.1016/J.IFACOL.2017.08.1245.
- [100] S. Heshmati-Alamdari, C. P. Bechlioulis, G. C. Karras, i K. J. Kyriakopoulos, „Decentralized Impedance Control for Cooperative Manipulation of Multiple Underwater Vehicle Manipulator Systems under Lean Communication”, w *2018 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicle Workshop (AUV)*, Porto, Portugal: IEEE, lis. 2018. doi: 10.1109/AUV.2018.8729687.
- [101] M. Fumagalli, R. Naldi, A. Macchelli, R. Carloni, S. Stramigioli, i L. Marconi, „Modeling and control of a flying robot for contact inspection”, w *2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, Vilamoura-Algarve, Portugal: IEEE, paź. 2012, s. 3532–3537. doi: 10.1109/IROS.2012.6385917.
- [102] A. Burghardt, K. Kurc, M. Muszyńska, i D. Szybicki, „Zrobotyzowane stanowisko z kontrolą siły”, *Modelowanie Inżynierskie*, nr T. 22, nr 53, s. 30–36, 2014.
- [103] P. Gierlak, „Analiza więzów manipulatora w zadaniu zrobotyzowanej obróbki mechanicznej dyfuzora”, *Advances in Mechanical and Materials Engineering*, t. 33, nr 293 (3), s. 199–212, paź. 2016, doi: 10.7862/RM.2016.16.
- [104] A. Burghardt, D. Szybicki, K. Kurc, i M. Muszyńska, „Optimization of process parameters of edge robotic deburring with force control”, *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, t. 21, nr 4, s. 987–995, grudz. 2016, doi: 10.1515/IJAME-2016-0060.
- [105] A. Burghardt, D. Szybicki, K. Kurc, M. Muszyńska, i J. Mucha, „Experimental Study of Inconel 718 Surface Treatment by Edge Robotic Deburring with Force Control”, *Strength of Materials*, t. 49, nr 4, s. 594–604, lip. 2017, doi: 10.1007/S11223-017-9903-3.
- [106] A. Burghardt, D. Szybicki, K. Kurc, P. Obal, i M. Muszyńska, „Dobór parametrów systemu zrobotyzowanego z układem kontroli siły”, *Modelowanie Inżynierskie*, t. T. 37, nr 68, 2018.
- [107] A. Burghardt, D. Szybicki, P. Gierlak, K. Kurc, i M. Muszyńska, „Robotic Grinding Process of Turboprop Engine Compressor Blades with Active Selection of Contact Force”, *Tehnički vjesnik*, t. 29, nr 1, s. 15–22, luty 2022, doi: 10.17559/TV-20190710141137.
- [108] P. Gierlak, A. Burghardt, D. Szybicki, i K. Kurc, „Eliminating the inertial forces effects on the measurement of robot interaction force”, *Lecture Notes in Electrical Engineering*, t. 548, s. 67–76, 2019, doi: 10.1007/978-3-030-11187-8\_6/FIGURES/7.
- [109] D. Szybicki, *Zastosowanie idei cyfrowych bliźniaków w projektowaniu oraz programowaniu stacji zrobotyzowanych*. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2023.
- [110] „Application manual Force Control RobotWare 6.13”. ABB ROBOTICS, 2021.

- [111] „KUKA System Technology, ForceTorqueControl 3.0”. KUKA Roboter GmbH, Augsburg, 2013.
- [112] „Force Sensor OPERATOR’S MANUAL”, *FANUC Robot series R-30+B/R-30+B Mate*, nr B-83424EN/02, 2017.
- [113] P. Gierlak, *Synteza ruchu robota manipulacyjnego z uwzględnieniem interakcji z otoczeniem*. Rzeszów: Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, 2018.
- [114] P. Obal i P. Gierlak, „EGM Toolbox—Interface for Controlling ABB Robots in Simulink”, *Sensors 2021, Vol. 21, Page 7463*, t. 21, nr 22, s. 7463, lis. 2021, doi: 10.3390/S21227463.
- [115] H. Olsson, K. J. Åström, C. Canudas De Wit, M. Gäfvert, i P. Lischinsky, „Friction Models and Friction Compensation”, *European Journal of Control*, t. 4, nr 3, s. 176–195, sty. 1998, doi: 10.1016/S0947-3580(98)70113-X.
- [116] E. del Sol, P. Pagala, R. King, i M. Ferre, „External force estimation for telerobotics without force sensor”, *Advances in Intelligent Systems and Computing*, t. 253, s. 631–644, 2014, doi: 10.1007/978-3-319-03653-3\_45/COVER.
- [117] M. Indri, I. Lazzero, A. Antoniazza, i A. M. Bottero, „Friction modeling and identification for industrial manipulators”, w *2013 IEEE 18th Conference on Emerging Technologies & Factory Automation (ETFA)*, Cagliari, Italy: IEEE, wrz. 2013, s. 1–8. doi: 10.1109/ETFA.2013.6647958.
- [118] P. Obal, A. Burghardt, K. Kurc, D. Szybicki, i P. Gierlak, „Monitoring the Parameters of Industrial Robots”, w *Methods and Techniques of Signal Processing in Physical Measurements*, t. 548, R. Hanus, D. Mazur, i C. Kreischer, Red., w *Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol. 548. , Cham: Springer International Publishing, 2019, s. 230–238. doi: 10.1007/978-3-030-11187-8\_19.
- [119] A. C. Bittencourt i S. Gunnarsson, „Static friction in a robot joint-modeling and identification of load and temperature effects”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, t. 134, nr 5, wrz. 2012, doi: 10.1115/1.4006589/395008.
- [120] S. Sarabandi i F. Thomas, „Accurate Computation of Quaternions from Rotation Matrices”, w *Advances in Robot Kinematics 2018*, t. 8, J. Lenarcic i V. Parenti-Castelli, Red., w *Springer Proceedings in Advanced Robotics*, vol. 8. , Cham: Springer International Publishing, 2019, s. 39–46. doi: 10.1007/978-3-319-93188-3\_5.
- [121] S. Sarabandi i F. Thomas, „A Survey on the Computation of Quaternions From Rotation Matrices”, *Journal of Mechanisms and Robotics*, t. 11, nr 2, s. 021006, kwi. 2019, doi: 10.1115/1.4041889.
- [122] A. De Luca i B. Siciliano, „Motion and force control”, w *Theory of Robot Control*, C. C. De Wit, B. Siciliano, i G. Bastin, Red., w *Communications and Control Engineering*. , London: Springer London, 1996, s. 141–175. doi: 10.1007/978-1-4471-1501-4\_4.

- [123] J. S. C. Yuan, „Closed-Loop Manipulator Control Using Quaternion Feedback”, *IEEE Journal on Robotics and Automation*, t. 4, nr 4, s. 434–440, 1988, doi: 10.1109/56.809.
- [124] B. P. Ickes, „A new method for performing digital control system attitude computations using quaternions”, *AIAA Journal*, t. 8, nr 1, s. 13–17, sty. 1970, doi: 10.2514/3.5598.
- [125] R. Campa i K. Camarillo, „Unit Quaternions: A Mathematical Tool for Modeling, Path Planning and Control of Robot Manipulators”, w *Robot Manipulators*, M. Ceccarelli, Red., InTech, 2008. doi: 10.5772/6197.

## Dodatek

### Część A. Program robota

Wypis 1. Wypis programu sterowania siłą w formie pseudokodu

```
// Definicje danych narzędzia i obciążenia
Zdefiniuj narzędzie tSphere z następującymi parametrami:
Narzędzie porusza się z robotem (TRUE)
Pozycja TCP:  $[x_T, y_T, z_T]$ 
Orientacja TCP:  $[c_{\rho 1}, c_{\rho 2}, c_{\rho 3}, c_{\rho 4}]$  (kwaternion)
Masa narzędzia:  $m_T$ 
Środek masy:  $[x_{ST}, y_{ST}, z_{ST}]$ 
Masowy moment bezwładności:  $[I_{Txx}, I_{Tyy}, I_{Tzz}]$ 

// Procedura porównania trajektorii FC
Procedura CompareFCPressPath():

// Pomiar masy narzędzia
Wykonaj kalibrację FCCalib dla narzędzia tSphere;

// Ruch do pozycji początkowej z użyciem trajektorii złączowej (MoveJ)
Wykonaj ruch instrukcją (MoveJ) do punktu  $P_s$  z prędkością 50 [mm/s], zatrzymując się precyzyjnie, przy użyciu narzędzia tSphere oraz obiektu w przestrzeni roboczej wobjBase;

// Rozpoczęcie ruchu z kontrolą siły w osi Z (FCPressLStart)
Rozpocznij ruch instrukcją FCPressLStart do punktu  $P_2$  z prędkością 10[mm/s], zaczynając od 50% zadanej siły 50 [N] w osi Z, przy użyciu narzędzia tSphere w przestrzeni roboczej wobjBase;

// Kontynuacja ruchu z kontrolą siły (FCPressL)
Kontynuuj ruch instrukcją FCPressL do punktu  $P_3$  z prędkością 20 [mm/s], wymuszając siłę 50 N, zakończ ruchem precyzyjnym, używając narzędzia tSphere w przestrzeni roboczej wobjBase;

// Zakończenie ruchu z kontrolą siły (FCPressEnd)
Zakończ ruch instrukcją FCPressEnd w punkcie  $P_4$ , z prędkością 50 [mm/s], deaktywując funkcję kontroli siły (DeactOnly), używając narzędzia tSphere oraz w przestrzeni roboczej wobjBase;

// Ruch do pozycji końcowej z użyciem trajektorii liniowej (MoveL)
Wykonaj ruch instrukcją MoveL do punktu  $P_k$  z prędkością 50 [mm/s], zatrzymując się precyzyjnie, przy użyciu narzędzia tSphere oraz obiektu w przestrzeni roboczej wobjBase;

Koniec procedury
```

## Część B. Elementy kinematyki robota

Przyspieszenia kątowe członów robota ABB IRB 2400 w układzie związanym z danym członem:

$$\mathbf{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{\varepsilon}_2 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 c_{q_2} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 s_{q_2} \\ -\ddot{q}_1 s_{q_2} - \dot{q}_1 \dot{q}_2 c_{q_2} \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{\varepsilon}_3 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 c_{q_3} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 s_{q_3} \\ -\ddot{q}_1 s_{q_3} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{\varepsilon}_4 = \begin{bmatrix} -\left(s_{q_1} s_{q_4} + c_{q_1} c_{q_4} s_{q_3}\right) \sigma_2 - \left(c_{q_1} s_{q_4} - c_{q_4} s_{q_1} s_{q_3}\right) \sigma_1 - c_{q_3} c_{q_4} \sigma_3 \\ c_{q_3} s_{q_4} \sigma_3 - \left(c_{q_1} c_{q_4} + s_{q_1} s_{q_3} s_{q_4}\right) \sigma_1 - \left(c_{q_4} s_{q_1} - c_{q_1} s_{q_3} s_{q_4}\right) \sigma_2 \\ \ddot{q}_4 - \ddot{q}_1 s_{q_3} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \ddot{q}_3 c_{q_1} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 s_{q_1} + \ddot{q}_4 c_{q_3} s_{q_1} - \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{q_1} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_1} c_{q_3} \\ \sigma_2 &= \ddot{q}_3 s_{q_1} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_1} - \ddot{q}_4 c_{q_1} c_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} s_{q_1} + \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_1} s_{q_3} \\ \sigma_3 &= \ddot{q}_4 s_{q_3} - \ddot{q}_1 + \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_3} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\mathbf{\varepsilon}_5 = \begin{bmatrix} \ddot{q}_3 c_{q_5} s_{q_4} - \dot{q}_4 \dot{q}_5 c_{q_5} - \ddot{q}_4 s_{q_5} + \ddot{q}_1 s_{q_3} s_{q_5} - \dot{q}_3 \dot{q}_5 s_{q_4} s_{q_5} - \ddot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} + \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_4} c_{q_5} \\ \dot{q}_4 \dot{q}_5 s_{q_5} - \ddot{q}_4 c_{q_5} + \ddot{q}_1 c_{q_5} s_{q_3} - \ddot{q}_3 s_{q_4} s_{q_5} - \dot{q}_1 \dot{q}_5 s_{q_3} s_{q_5} + \ddot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} c_{q_5} \\ (-\dot{q}_1 \dot{q}_3) s_{q_3} s_{q_4} + \ddot{q}_1 s_{q_4} c_{q_3} + (-\dot{q}_3 \dot{q}_4) s_{q_4} \\ + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} s_{q_5} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_5} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} c_{q_5} s_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \\ - \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_4} s_{q_5} - \dot{q}_3 \dot{q}_5 c_{q_5} s_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5} - \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} \\ + (\dot{q}_1 \dot{q}_4) c_{q_3} c_{q_4} + \ddot{q}_3 c_{q_4} + \ddot{q}_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{\varepsilon}_6 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sin(q_6) + \sigma_2 \cos(q_6) \\ c_{q_6} \sigma_2 - s_{q_6} \sigma_1 - \dot{q}_6 (c_{q_6} \sigma_3 + s_{q_6} \sigma_4) \\ \ddot{q}_6 + \sigma_5 c_{q_5} + \sigma_6 s_{q_5} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= q_3 c_{q_5} s_{q_4} - q_4 q_5 c_{q_5} - \dot{q}_4 s_{q_5} + \dot{q}_1 s_{q_3} s_{q_5} - \dot{q}_1 \dot{q}_5 s_{q_4} s_{q_5} - \ddot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} + \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_4} c_{q_5} \\
&\quad + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} s_{q_5} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_5} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} c_{q_5} s_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_5} \\
\sigma_2 &= \ddot{q}_5 + \ddot{q}_3 c_{q_4} - \dot{q}_3 \dot{q}_4 s_{q_4} + \ddot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 s_{q_3} s_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} c_{q_4} \\
\sigma_3 &= c_{q_5} (\dot{q}_3 s_{q_4} - \dot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4}) - s_{q_5} (\dot{q}_4 - \dot{q}_1 s_{q_3}) \\
\sigma_4 &= \dot{q}_5 + \dot{q}_3 c_{q_4} + \dot{q}_1 c_{q_3} s_{q_4} \\
\sigma_5 &= \ddot{q}_4 - \ddot{q}_1 s_{q_3} - \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_3} + \dot{q}_3 \dot{q}_5 s_{q_4} - \dot{q}_1 \dot{q}_5 c_{q_3} c_{q_4} \\
\sigma_6 &= (-\dot{q}_4 \dot{q}_5) + \ddot{q}_3 s_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_5 s_{q_3} - \ddot{q}_1 c_{q_3} c_{q_4} + \dot{q}_3 \dot{q}_4 c_{q_4} + \dot{q}_1 \dot{q}_3 c_{q_4} s_{q_3} + \dot{q}_1 \dot{q}_4 c_{q_3} s_{q_4}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Przyspieszenia środków mas członów robota:

$$\mathbf{a}_{S1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A.9}$$

$$a_{S2} = \begin{bmatrix} (x_{S2} (c_{q_2}^2 - 1) - a_1 s_{q_2} - c_{q_2} s_{q_2} y_{S2}) \dot{q}_1^2 - x_{S2} \dot{q}_2^2 - y_{S2} \ddot{q}_2 \\ (-y_{S2} c_{q_2}^2 - a_1 c_{q_2} - \frac{1}{2} x_{S2} \sin(2q_2)) \dot{q}_1^2 - y_{S2} \dot{q}_2^2 + x_{S2} \ddot{q}_2 \\ (2c_{q_2} x_{S2} - 2s_{q_2} y_{S2}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (a_1 + c_{q_2} y_{S2} + s_{q_2} x_{S2}) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
a_{S3} &= \begin{bmatrix} (x_{S3} (\sigma_3 - \frac{1}{2}) - a_1 s_{q_3} - \frac{1}{2} a_2 (\cos(q_2 - q_3) - \cos(q_2 + q_3)) - \frac{1}{2} y_{S3} \sin(2q_3)) \dot{q}_1^2 - \\ (-\frac{1}{2} x_{S3} \sin(2q_3) - a_1 c_{q_3} - \frac{1}{2} a_2 (\sin(q_2 - q_3) + \sin(q_2 + q_3)) - y_{S3} (\sigma_3 + \frac{1}{2})) \dot{q}_1^2 + \\ (2a_2 c_{q_2}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (2c_{q_3} x_{S3} - 2s_{q_3} y_{S3}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\ \sigma_2 \dot{q}_2^2 + \sigma_1 \ddot{q}_2 - x_{S3} \dot{q}_3^2 - y_{S3} \ddot{q}_3 \\ \sigma_1 \dot{q}_2^2 + \sigma_2 \ddot{q}_2 - y_{S3} \dot{q}_3^2 + x_{S3} \ddot{q}_3 \\ (a_1 + a_2 s_{q_2} + c_{q_3} y_{S3} + s_{q_3} x_{S3}) \ddot{q}_1 \end{bmatrix} \\
\end{aligned} \tag{A.11}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -a_2 \sin(q_2 - q_3) \\
\sigma_2 &= a_2 \cos(q_2 - q_3) \\
\sigma_3 &= \frac{1}{2} \cos(2q_3)
\end{aligned} \tag{A.12}$$

$$a_{S_4} = \left[ \begin{aligned} & \sigma_1 \dot{q}_1^2 - 2a_2 c_{q_2} s_{q_4} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \sigma_2 \dot{q}_1 \dot{q}_3 - a_3 c_{q_4} \dot{q}_3^2 - \sigma_3 \ddot{q}_1 - (c_{q_4} d_4 + c_{q_4} z_{S_4}) \ddot{q}_3 - \\ & \sigma_4 \dot{q}_1^2 - 2a_2 c_{q_2} c_{q_4} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \sigma_5 \dot{q}_1 \dot{q}_3 + a_3 s_{q_4} \dot{q}_3^2 - \sigma_6 \ddot{q}_1 + (d_4 s_{q_4} + s_{q_4} z_{S_4}) \ddot{q}_3 + \\ & \left( -\frac{1}{2} a_3 \sin(2q_3) - a_1 c_{q_3} - d_4 c_{q_3}^2 - c_{q_3}^2 z_{S_4} - a_2 c_{q_3} s_{q_2} \right) \dot{q}_1^2 + \\ & a_2 (c_{q_2} c_{q_3} c_{q_4} + c_{q_4} s_{q_2} s_{q_3}) \dot{q}_2^2 + a_2 (c_{q_2} c_{q_4} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_2}) \ddot{q}_2 \Big] \\ & a_2 (c_{q_2} c_{q_3} s_{q_4} + s_{q_2} s_{q_3} s_{q_4}) \dot{q}_2^2 - a_2 (c_{q_2} s_{q_3} s_{q_4} - c_{q_3} s_{q_2} s_{q_4}) \ddot{q}_2 \\ & a_2 (c_{q_2} s_{q_3} - c_{q_3} s_{q_2}) \dot{q}_2^2 + a_2 (c_{q_2} c_{q_3} + s_{q_2} s_{q_3}) \ddot{q}_2 - (d_4 + z_{S_4}) \dot{q}_3^2 + a_3 \ddot{q}_3 \Big] \end{aligned} \right] \quad (A.13)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_3 (c_{q_3}^2 c_{q_4} - c_{q_4}) - a_1 c_{q_4} s_{q_3} - a_2 c_{q_4} s_{q_2} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_3} z_{S_4} - d_4 c_{q_3} c_{q_4} s_{q_3} \\ \sigma_2 &= 2d_4 s_{q_3} s_{q_4} - 2a_3 c_{q_3} s_{q_4} + 2s_{q_3} s_{q_4} z_{S_4} \\ \sigma_3 &= a_1 s_{q_4} + c_{q_3} d_4 s_{q_4} + a_2 s_{q_2} s_{q_4} + a_3 s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_4} z_{S_4} \\ \sigma_4 &= a_3 (s_{q_4} - c_{q_3}^2 s_{q_4}) + a_1 s_{q_3} s_{q_4} + d_4 c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} + a_2 s_{q_2} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} z_{S_4} \\ \sigma_5 &= 2d_4 c_{q_4} s_{q_3} - 2a_3 c_{q_3} c_{q_4} + 2c_{q_4} s_{q_3} z_{S_4} \\ \sigma_6 &= a_1 c_{q_4} + c_{q_3} c_{q_4} d_4 + a_2 c_{q_4} s_{q_2} + a_3 c_{q_4} s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} z_{S_4} \end{aligned} \quad (A.14)$$

$$a_{S_5} = \left[ \begin{aligned} & \sigma_1 \dot{q}_1^2 + (2a_2 c_{q_2} c_{q_5} s_{q_4}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (2a_3 c_{q_3} c_{q_5} s_{q_4} - 2c_{q_5} d_4 s_{q_3} s_{q_4}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \sigma_2 \ddot{q}_1 + \\ & \sigma_5 \dot{q}_1^2 + (-2a_2 c_{q_2} s_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (2d_4 s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - 2a_3 c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 - \sigma_6 \ddot{q}_1 - \\ & \sigma_9 \dot{q}_1^2 + (2a_2 c_{q_2} c_{q_4}) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + (2a_3 c_{q_3} c_{q_4} - 2c_{q_4} d_4 s_{q_3}) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \sigma_{10} \ddot{q}_1 - \\ & \sigma_3 \dot{q}_2^2 - \sigma_4 \ddot{q}_2 + (d_4 s_{q_5} + a_3 c_{q_4} c_{q_5}) \dot{q}_3^2 + (c_{q_4} c_{q_5} d_4 - a_3 s_{q_5}) \ddot{q}_3 \\ & \sigma_7 \dot{q}_2^2 - \sigma_8 \ddot{q}_2 + (c_{q_5} d_4 - a_3 c_{q_4} s_{q_5}) \dot{q}_3^2 + (-a_3 c_{q_5} - c_{q_4} d_4 s_{q_5}) \ddot{q}_3 \\ & \sigma_{11} \dot{q}_2^2 + \sigma_{12} \ddot{q}_2 + (-a_3 s_{q_4}) \dot{q}_3^2 + (-d_4 s_{q_4}) \ddot{q}_3 \end{aligned} \right] \quad (A.15)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= d_4 (s_{q_5} c_{q_3}^2 + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} c_{q_3}) + a_2 (c_{q_3} s_{q_2} s_{q_5} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_2} s_{q_3}) + \\ & a_3 (-c_{q_4} c_{q_5} c_{q_3}^2 + s_{q_3} s_{q_5} c_{q_3} + c_{q_4} c_{q_5}) + a_1 (c_{q_3} s_{q_5} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3}), \\ \sigma_2 &= a_1 c_{q_5} s_{q_4} + a_2 c_{q_5} s_{q_2} s_{q_4} + a_3 c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} c_{q_5} d_4 s_{q_4}, \\ \sigma_3 &= a_2 (c_{q_3} s_{q_2} s_{q_5} - c_{q_2} s_{q_3} s_{q_5} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_2} s_{q_3} + c_{q_2} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}), \\ \sigma_4 &= a_2 (c_{q_2} c_{q_3} s_{q_5} + s_{q_2} s_{q_3} s_{q_5} + c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_2}), \\ \sigma_5 &= d_4 (c_{q_3}^2 c_{q_5} - c_{q_3} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}) + a_2 (c_{q_3} c_{q_5} s_{q_2} - c_{q_4} s_{q_2} s_{q_3} s_{q_5}) + \\ & a_3 (c_{q_4} s_{q_5} c_{q_3}^2 + c_{q_5} s_{q_3} c_{q_3} - c_{q_4} s_{q_5}) + a_1 (c_{q_3} c_{q_5} - c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}), \\ \sigma_6 &= a_1 s_{q_4} s_{q_5} + c_{q_3} d_4 s_{q_4} s_{q_5} + a_2 s_{q_2} s_{q_4} s_{q_5} + a_3 s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5}, \end{aligned} \quad (A.16)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_7 &= a_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right), \\
\sigma_8 &= a_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \right), \\
\sigma_9 &= -a_3 \left( \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{s}_{q4} \right) - a_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q3} d_4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - a_2 \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4}, \\
\sigma_{10} &= a_1 \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} d_4 + a_2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} + a_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3}, \\
\sigma_{11} &= a_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right), \\
\sigma_{12} &= a_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \right).
\end{aligned}$$

$$\mathbf{a}_{S_6} = \begin{bmatrix} a_{S6x} \\ a_{S6y} \\ a_{S6z} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
a_{S6x} &= \left( a_3 \left( \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \right) - \right. \\
&\quad z_{S6} \left( -\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} - 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} \right) + a_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \right) + d_4 \left( \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \right) + \\
&\quad a_2 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \sigma_2 \right) \dot{q}_1^2 + \left( a_2 \left( 2\mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
&\quad \left( a_3 \left( 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) - d_4 \left( 2\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right) - \right. \\
&\quad \left. z_{S6} \left( 2\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\
&\quad \left( z_{S6} \left( -2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \right) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_4 - z_{S6} \left( 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
&\quad \left. 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \left( z_{S6} \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + d_4 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) + a_2 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \right) + a_3 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right) + a_1 \sigma_6 \right) \ddot{q}_1 - a_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \sigma_2 \right) \dot{q}_2^2 - a_2 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
&\quad \left. \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \right) \ddot{q}_2 + \\
&\quad \left( z_{S6} \left( -\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) - a_3 \sigma_3 + \mathbf{c}_{q6} d_4 \mathbf{s}_{q5} \right) \dot{q}_3^2 - \\
&\quad z_{S6} \left( 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - 2\mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \left( 2\mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} z_{S6} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_5 + \\
&\quad \left( z_{S6} \sigma_4 - d_4 \sigma_3 - a_3 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) \ddot{q}_3 - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} z_{S6} \dot{q}_4^2 + \\
&\quad 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} z_{S6} \dot{q}_4 \dot{q}_5 + \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} z_{S6} \ddot{q}_4 + \mathbf{c}_{q6} z_{S6} \ddot{q}_5
\end{aligned} \quad (\text{A.18})$$



$$\begin{aligned}
a_{S6y} = & \left( -a_3 \left( c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} + c_{q3} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) - \right. \\
& -a_1 \left( c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) - z_{S6} \left( s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} + \right. \\
& s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 + 2s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 - s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5} - s_{q5} s_{q6} c_{q5} \left. \right) - \\
& d_4 \left( c_{q3}^2 s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) - a_2 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& \sigma_1 \left. \right) \dot{q}_1^2 + \left( a_2 \left( 2c_{q2} c_{q4} c_{q6} - 2c_{q2} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left( a_3 \left( 2c_{q3} c_{q4} c_{q6} - 2c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - \right. \\
& d_4 \left( 2c_{q4} c_{q6} s_{q3} - 2c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - z_{S6} \left( 2c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q5} - 2c_{q5}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q6} + \right. \\
& 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + z_{S6} \left( 2c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 - 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - \right. \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q6} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_4 - z_{S6} \left( 2c_{q5} c_{q6} s_{q3} + 2c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \\
& \left( d_4 \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) z_{S6} \left( c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + \right. \\
& a_2 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q2} - c_{q5} s_{q2} s_{q4} s_{q6} \right) + a_3 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) + a_1 \sigma_4 \left. \right) \ddot{q}_1 - \\
& a_2 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + \right. \\
& c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + \sigma_1 \left. \right) \dot{q}_2^2 + a_2 \left( c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} \left. \right) \ddot{q}_2 + \\
& \left( z_{S6} \left( c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} - c_{q5} s_{q5} s_{q6} \right) - a_3 \sigma_5 - d_4 s_{q5} s_{q6} \right) \dot{q}_3^2 + \\
& z_{S6} \left( 2s_{q4} s_{q6} - 2c_{q5}^2 s_{q4} s_{q6} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + 2c_{q6} s_{q4} s_{q5} z_{S6} \dot{q}_3 \dot{q}_5 + \left( a_3 s_{q5} s_{q6} - d_4 \sigma_5 - z_{S6} \sigma_6 \right) \ddot{q}_3 + \\
& c_{q5} s_{q5} s_{q6} z_{S6} \dot{q}_4^2 + 2c_{q5} c_{q6} z_{S6} \dot{q}_4 \dot{q}_5 + c_{q6} s_{q5} z_{S6} \ddot{q}_4 - s_{q6} z_{S6} \ddot{q}_5
\end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
a_{S6z} = & \left( -d_4 \left( c_{q3}^2 c_{q5} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) - a_2 \left( c_{q3} c_{q5} s_{q2} - c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} \right) + z_{S6} \left( -c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + \right. \right. \\
& c_{q3}^2 c_{q4}^2 - c_{q3}^2 c_{q5}^2 + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + c_{q5}^2 - 1 \left. \right) - a_3 \left( c_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q5} s_{q3} c_{q3} - c_{q4} s_{q5} \right) - \\
& a_1 \left( c_{q3} c_{q5} - c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) \dot{q}_1^2 + \left( 2a_2 c_{q2} s_{q4} s_{q5} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left( -z_{S6} \left( -2c_{q3} c_{q4} s_{q4} c_{q5}^2 + \right. \right. \\
& 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q5} + 2c_{q3} c_{q4} s_{q4} \left. \right) + 2a_3 c_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2d_4 s_{q3} s_{q4} s_{q5} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \\
& \left( -z_{S6} \left( 2s_{q3} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2s_{q3} \right) \right) \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \left( -2c_{q3} s_{q4} z_{S6} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \\
& \left( a_1 s_{q4} s_{q5} + c_{q3} d_4 s_{q4} s_{q5} + a_2 s_{q2} s_{q4} s_{q5} + a_3 s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) \ddot{q}_1 + \\
& \left( a_2 \left( c_{q2} c_{q5} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} + c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right) \right) \dot{q}_2^2 + \\
& \left( a_2 \left( c_{q2} c_{q3} c_{q5} + c_{q5} s_{q2} s_{q3} - c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} + c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} \right) \right) \ddot{q}_2 + \\
& \left( -c_{q5} d_4 - z_{S6} \left( -c_{q4}^2 c_{q5}^2 + c_{q4}^2 + c_{q5}^2 \right) + a_3 c_{q4} s_{q5} \right) \dot{q}_3^2 + \\
& \left( 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} z_{S6} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \left( -2c_{q4} z_{S6} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_5 + \\
& \left( a_3 c_{q5} + c_{q4} d_4 s_{q5} \right) \ddot{q}_3 + \left( z_{S6} \left( c_{q5}^2 - 1 \right) \right) \dot{q}_4^2 + \left( -z_{S6} \right) \dot{q}_5^2
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} \\
\sigma_2 &= c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \\
\sigma_3 &= s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} \\
\sigma_4 &= c_{q4} c_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6} \\
\sigma_5 &= c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} \\
\sigma_6 &= c_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\mathbf{a}_{ST} = \begin{bmatrix} a_{STx} \\ a_{STy} \\ a_{STz} \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
a_{STx} &= \left( a_3 \left( c_{q3}^2 s_{q4} s_{q6} - s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) - (d_7 + z_{cT}) \sigma_2 \right. \\
&\quad + a_1 \left( c_{q3} c_{q6} s_{q5} - s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \right) + x_{cT} \left( c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \right. \\
&\quad c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6}^2 - c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2 s_{q4} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2 c_{q3}^2 c_{q6}^2 + \\
&\quad c_{q3}^2 - 2 s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + 2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q6} - c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q6}^2 - 1 \Big) - \\
&\quad y_{cT} \sigma_3 + d_4 \left( c_{q3}^2 c_{q6} s_{q5} - c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \right) + a_2 \left( c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} - \right. \\
&\quad s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \Big) \dot{q}_1^2 + a_2 \left( 2 c_{q2} c_{q4} s_{q6} + 2 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
&\quad \left( y_{cT} \left( -4 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 + 2 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} + 2 c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} + 2 s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6}^2 + \right. \right. \\
&\quad 2 c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q6} - 2 s_{q3} s_{q5} c_{q4} + 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - 2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} \Big) + \\
&\quad x_{cT} \left( -4 c_{q3} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} - 2 c_{q3} s_{q4} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2 c_{q3} s_{q4} c_{q4} c_{q6}^2 + 2 s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4} c_{q6} + \right. \\
&\quad 2 c_{q3} s_{q4} c_{q4} + 2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 + 2 c_{q3} s_{q6} c_{q5} c_{q6} \Big) + a_3 \left( 2 c_{q3} c_{q4} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) - \\
&\quad d_4 \left( 2 c_{q4} s_{q3} s_{q6} + 2 c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) - (d_7 + z_{cT}) \sigma_5 \Big) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left( (d_7 + z_{cT}) \left( 2 c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q5} - \right. \right. \\
&\quad 2 c_{q3} c_{q4} c_{q6} c_{q5}^2 + 2 c_{q3} c_{q4} c_{q6} + x_{cT} \left( 2 s_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 - 2 s_{q3} c_{q6}^2 - \right. \\
&\quad 2 c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} + 2 s_{q3} \Big) - y_{cT} \left( 2 s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + \right. \\
&\quad 2 c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 - 2 s_{q3} s_{q6} c_{q6} \Big) \Big) \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \left( y_{cT} \left( 2 c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - 2 s_{q3} s_{q5} + 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} + \right. \right. \\
&\quad 2 c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 \Big) - x_{cT} \left( 2 c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} - 2 c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q6} \right) \Big) \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \\
&\quad - (d_7 + z_{cT}) \left( 2 c_{q5} s_{q3} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) \Big) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \left( x_{cT} 2 c_{q5} s_{q3} + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \\
&\quad \left( y_{cT} \left( c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right) + (d_7 + z_{cT}) \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} - s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) + \right. \\
&\quad d_4 \left( c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) + a_2 \left( c_{q4} s_{q2} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q4} \right) + \\
&\quad \left. a_3 \left( c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) + a_1 \left( c_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) \right) \ddot{q}_1 -
\end{aligned} \tag{A.23}$$

$$\begin{aligned}
& a_2 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} + \right. \\
& s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \left. \right) \dot{q}_2^2 - \\
& a_2 \left( c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q6} - c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q5} + \right. \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} \left. \right) \ddot{q}_2 + \\
& \left( (d_7 + z_{cT}) \left( -c_{q5} c_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 + s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q4} + c_{q5} c_{q6} s_{q5} \right) + y_{cT} \sigma_6 + \right. \\
& x_{cT} \left( -c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q4}^2 c_{q6}^2 + c_{q4}^2 + 2s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 1 \right) - \\
& a_3 \left( s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + d_4 c_{q6} s_{q5} \left. \right) \dot{q}_3^2 + \left( -(d_7 + z_{cT}) \left( 2c_{q6} s_{q4} - 2c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} \right) - \right. \\
& x_{cT} \left( 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + 2c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} \right) - y_{cT} \left( 2c_{q4} c_{q6}^2 s_{q5} - 2c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) \left. \right) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \\
& \left( y_{cT} \left( 2c_{q5} s_{q4} c_{q6}^2 + 2c_{q4} s_{q6} c_{q6} - 2c_{q5} s_{q4} \right) - x_{cT} \left( 2c_{q4} c_{q6}^2 - 2c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} \right) + \right. \\
& 2d_7 s_{q4} s_{q5} s_{q6} + 2s_{q4} s_{q5} s_{q6} z_{cT} \left. \right) \dot{q}_3 \dot{q}_5 - \left( 2s_{q4} s_{q5} x_{cT} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + z_{cT} \left( c_{q4} c_{q6} - \right. \\
& c_{q5} s_{q4} s_{q6} \left. \right) - d_4 \left( s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + d_7 \left( c_{q4} c_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - a_3 c_{q6} s_{q5} - \\
& s_{q4} s_{q5} y_{cT} \left. \right) \ddot{q}_3 - \left( x_{cT} \left( c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q6}^2 + 1 \right) + y_{cT} \left( \frac{1}{2} s_{2q_6} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} \right) + \right. \\
& c_{q5} c_{q6} s_{q5} z_{cT} + c_{q5} c_{q6} d_7 s_{q5} \left. \right) \dot{q}_4^2 + \left( y_{cT} \left( 2s_{q5} - 2c_{q6}^2 s_{q5} \right) + 2c_{q5} d_7 s_{q6} + \right. \\
& 2c_{q5} s_{q6} z_{cT} - 2c_{q6} s_{q5} s_{q6} x_{cT} \left. \right) \dot{q}_4 \dot{q}_5 - 2c_{q5} x_{cT} \dot{q}_4 \dot{q}_6 + \left( d_7 s_{q5} s_{q6} - c_{q5} y_{cT} + \right. \\
& s_{q5} s_{q6} z_{cT} \left. \right) \ddot{q}_4 + \left( \frac{1}{2} y_{cT} s_{2q_6} - c_{q6}^2 x_{cT} \right) \dot{q}_5^2 + \left( c_{q6} d_7 + c_{q6} z_{cT} \right) \ddot{q}_5 - \\
& x_{cT} \dot{q}_6^2 - y_{cT} \ddot{q}_6 \\
& a_{STy} = \left( -y_{cT} \left( c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 - 2s_{q4} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} + \right. \right. \\
& c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q3}^2 c_{q5}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q6}^2 + c_{q3}^2 - 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + \\
& 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q6} - c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q5}^2 + c_{q6}^2 \left. \right) - a_3 \left( c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} + \right. \\
& c_{q3} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q6} \left. \right) - a_1 \left( c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) - x_{cT} \sigma_3 - \\
& (d_7 + z_{cT}) \sigma_1 - d_4 \left( c_{q3}^2 s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) - a_2 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} + \right. \\
& c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} \left. \right) \dot{q}_1^2 + a_2 \left( 2c_{q2} c_{q4} c_{q6} - 2c_{q2} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\
& \left( y_{cT} \left( 4c_{q3} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + 2c_{q3} s_{q4} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2c_{q3} s_{q4} c_{q4} c_{q5}^2 + 2c_{q3} s_{q4} c_{q4} c_{q6}^2 - \right. \right. \\
& 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4} c_{q6} - 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 - 2c_{q3} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q5} \left. \right) + \\
& a_3 \left( 2c_{q3} c_{q4} c_{q6} - 2c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - d_4 \left( 2c_{q4} c_{q6} s_{q3} - 2c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - (d_7 + z_{cT}) \sigma_4 \\
& + x_{cT} \left( -4c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 + 2c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} + 2c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} + 2s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6}^2 + \right. \\
& 2c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q6} + 2c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - 2c_{q3} c_{q5} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 +
\end{aligned} \tag{A.24}$$

$$\begin{aligned}
& \left( (d_7 + z_{cT}) (2c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 - 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - 2c_{q3} c_{q4} s_{q6}) - x_{cT} (2s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + \right. \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + 2c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 - 2s_{q3} s_{q6} c_{q6} - 2c_{q3} s_{q4} s_{q5}) + \\
& y_{cT} (-2s_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + 2s_{q3} c_{q5}^2 - 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} + 2s_{q3} c_{q6}^2 + \\
& 2c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6}) \dot{q}_1 \dot{q}_4 + \left( x_{cT} (2c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} + 2c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q6} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2) - \right. \\
& (d_7 - z_{cT}) (2c_{q5} c_{q6} s_{q3} + 2c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5}) - y_{cT} (2c_{q3} s_{q4} - 2c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} + \\
& 2c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q6}) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + y_{cT} (2c_{q5} s_{q3} + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5}) \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \\
& \left( d_4 (c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6}) - (d_7 - z_{cT}) (c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}) - \right. \\
& x_{cT} (c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5}) + a_2 (c_{q4} c_{q6} s_{q2} - c_{q5} s_{q2} s_{q4} s_{q6}) + a_3 (c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6}) + \\
& a_1 (c_{q4} c_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6}) \ddot{q}_1 + \left( -a_2 (c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6}) \dot{q}_2^2 + \left( a_2 (c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - \right. \\
& c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} + s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6}) \ddot{q}_2 + \\
& \left. (-y_{cT} (-c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q4}^2 c_{q5}^2 - c_{q4}^2 c_{q6}^2 + 2s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q5}^2 + 1) + \right. \\
& (d_7 + z_{cT}) (c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} - c_{q5} s_{q5} s_{q6}) + x_{cT} \sigma_6 - a_3 (c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6}) - \\
& d_4 s_{q5} s_{q6}) \dot{q}_3^2 + \left( y_{cT} (c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} + 2c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - 2c_{q5} s_{q4} s_{q5}) + \right. \\
& (d_7 + z_{cT}) (2s_{q4} s_{q6} - 2c_{q5}^2 s_{q4} s_{q6}) + x_{cT} (-2c_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} + 2c_{q4} s_{q5}) \dot{q}_3 \dot{q}_4 + \\
& \left. (-y_{cT} (-2c_{q4} c_{q6}^2 + 2c_{q5} s_{q4} s_{q6} c_{q6} + 2c_{q4}) + x_{cT} (2c_{q5} s_{q4} c_{q6}^2 + 2c_{q4} s_{q6} c_{q6}) + 2c_{q6} d_7 s_{q4} s_{q5} + \right. \\
& 2c_{q6} s_{q4} s_{q5} z_{cT}) \dot{q}_3 \dot{q}_5 - 2s_{q4} s_{q5} y_{cT} \dot{q}_3 \dot{q}_6 + (a_3 s_{q5} s_{q6} - d_4 c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} - \\
& (d_7 + z_{cT}) (c_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4}) + s_{q4} s_{q5} x_{cT}) \ddot{q}_3 - \left( y_{cT} (-c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q5}^2 + c_{q6}^2) - \right. \\
& x_{cT} (\frac{1}{2} s_{2q_6} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} + c_{q5} d_7 s_{q5} s_{q6} + c_{q5} s_{q5} s_{q6} z_{cT}) \dot{q}_4^2 + (2d_7 c_{q5} c_{q6} - 2c_{q6}^2 s_{q5} x_{cT} + \\
& 2c_{q5} c_{q6} z_{cT} + 2c_{q6} s_{q5} s_{q6} y_{cT}) \dot{q}_4 \dot{q}_5 - 2c_{q5} y_{cT} \dot{q}_4 \dot{q}_6 + (c_{q5} x_{cT} + c_{q6} d_7 s_{q5} + c_{q6} s_{q5} z_{cT}) \ddot{q}_4 + \\
& \left. (\frac{1}{2} x_{cT} s_{2q_6} + y_{cT} (c_{q6}^2 - 1)) \dot{q}_5^2 - d_7 s_{q6} - s_{q6} z_{cT} \ddot{q}_5 - y_{cT} \dot{q}_6^2 + x_{cT} \ddot{q}_6 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{STz} = & \left( -x_{cT} \sigma_2 - y_{cT} \sigma_1 - d_4 \left( c_{q3}^2 c_{q5} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) + (d_7 + z_{cT}) \left( -c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 \right. \right. \\
& + c_{q3}^2 c_{q4}^2 - c_{q3}^2 c_{q5}^2 + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + c_{q5}^2 - 1 \left. \right) - a_2 \left( c_{q3} c_{q5} s_{q2} - c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} \right) - \\
& a_3 \left( c_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q5} s_{q3} c_{q3} - c_{q4} s_{q5} \right) - a_1 \left( c_{q3} c_{q5} - c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) \dot{q}_1^2 + \\
& \left( 2a_2 c_{q2} s_{q4} s_{q5} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \left( -x_{cT} \left( 2c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + 2c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q5} + \right. \right. \\
& 2c_{q6} s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 - 2c_{q6} s_{q3} s_{q4} - 2c_{q3} s_{q5} s_{q6} \left. \right) + y_{cT} \left( -2c_{q3} c_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 + \right. \\
& 2c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q4} c_{q5} + 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q6} s_{q5} - 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} \left. \right) - \\
& (d_7 + z_{cT}) \left( -2c_{q3} c_{q4} s_{q4} c_{q5}^2 + 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q5} + 2c_{q3} c_{q4} s_{q4} + 2a_3 c_{q3} s_{q4} s_{q5} - \right. \\
& 2d_4 s_{q3} s_{q4} s_{q5} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_3 + \left( x_{cT} \left( 2c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} \right) - \right. \\
& (d_7 + z_{cT}) \left( 2s_{q3} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2s_{q3} \right) + \\
& y_{cT} \left( 2c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 s_{q6} - 2c_{q5} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) \dot{q}_1 \dot{q}_4 - \left( 2c_{q3} d_7 s_{q4} + \right. \\
& 2c_{q3} s_{q4} z_{cT} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_5 + \left( x_{cT} \left( 2c_{q3} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q6} s_{q3} s_{q5} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + y_{cT} \left( 2c_{q3} c_{q6} s_{q4} - \right. \right. \\
& 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \left. \right) \dot{q}_1 \dot{q}_6 + \left( y_{cT} \left( c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) - \right. \\
& x_{cT} \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} - s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) + a_1 s_{q4} s_{q5} + c_{q3} d_4 s_{q4} s_{q5} + a_2 s_{q2} s_{q4} s_{q5} + \\
& a_3 s_{q3} s_{q4} s_{q5} \left. \right) \ddot{q}_1 + a_2 \left( c_{q2} c_{q5} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} + c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right) \dot{q}_2^2 + \\
& a_2 \left( c_{q2} c_{q3} c_{q5} + c_{q5} s_{q2} s_{q3} - c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} + c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} \right) \ddot{q}_2 + \left( -c_{q5} d_4 + \right. \\
& x_{cT} \left( -c_{q5} c_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 + s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q4} + c_{q5} c_{q6} s_{q5} \right) + y_{cT} \left( c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} - \right. \\
& c_{q5} s_{q5} s_{q6} \left. \right) - (d_7 + z_{cT}) \left( -c_{q4}^2 c_{q5}^2 + c_{q4}^2 + c_{q5}^2 \right) + a_3 c_{q4} s_{q5} \dot{q}_3^2 + \\
& \left( x_{cT} \left( 2c_{q6} s_{q4} c_{q5}^2 + 2c_{q4} s_{q6} c_{q5} \right) - y_{cT} \left( 2c_{q5}^2 s_{q4} s_{q6} - 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + 2c_{q5} d_7 s_{q4} s_{q5} + \right. \\
& 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} z_{cT} \left. \right) \dot{q}_3 \dot{q}_4 - 2(d_7 + z_{cT}) c_{q4} \dot{q}_3 \dot{q}_5 + x_{cT} \left( 2c_{q4} s_{q6} + 2c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) + \\
& y_{cT} \left( \left( 2c_{q4} c_{q6} - 2c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) \dot{q}_3 \dot{q}_6 + \left( y_{cT} \left( c_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) - x_{cT} \left( c_{q4} c_{q6} - \right. \right. \right. \\
& c_{q5} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + a_3 c_{q5} + c_{q4} d_4 s_{q5} \left. \right) \ddot{q}_3 + (d_7 + z_{cT}) \left( c_{q5}^2 - 1 \right) - c_{q5} c_{q6} s_{q5} x_{cT} + \\
& c_{q5} s_{q5} s_{q6} y_{cT} \left. \right) \dot{q}_4^2 + \left( 2s_{q5} s_{q6} y_{cT} - 2c_{q6} s_{q5} x_{cT} \right) \dot{q}_4 \dot{q}_6 - \left( c_{q6} s_{q5} y_{cT} + s_{q5} s_{q6} x_{cT} \right) \ddot{q}_4 - \\
& (d_7 + z_{cT}) \dot{q}_5 + \left( 2c_{q6} y_{cT} + 2s_{q6} x_{cT} \right) \dot{q}_5 \dot{q}_6 + \left( s_{q6} y_{cT} - c_{q6} x_{cT} \right) \ddot{q}_5
\end{aligned} \tag{A.25}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} + c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} + s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5} + 2s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 - \\
&\quad s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5} - s_{q5} s_{q6} c_{q5} \\
\sigma_2 &= -c_{q6} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} + s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} - c_{q6} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} - 2c_{q6} s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \\
&\quad c_{q6} s_{q3} c_{q3} c_{q4} + s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q3} c_{q5} + c_{q6} s_{q5} c_{q5} \\
\sigma_3 &= s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6} + 2s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} + \\
&\quad s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} - 2s_{q6} c_{q3}^2 c_{q6} - 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} c_{q6}^2 + \\
&\quad s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} - s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + \frac{1}{2} s_{2q6} \\
\sigma_4 &= 2c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q5} - 2c_{q5}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \\
\sigma_5 &= 2c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + 2c_{q3} c_{q4}^2 s_{q5} s_{q6} + 2c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q4} + 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} \\
\sigma_6 &= s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + s_{q6} c_{q4}^2 c_{q6} + 2s_{q4} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q4} c_{q4} c_{q5} - s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

## Część C. Elementy dynamiki robota

Macierz M

$$\begin{aligned}
 M_{11} = & p_4 + p_1 c_{q2}^2 + p_5 (2 s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q3}^2 - 2 c_{q3}^2 s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q6} s_{q5} - \\
 & 2 c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + 2 c_{q3} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + 2 p_6 (c_{q4} c_{q5} s_{q6} + 2 c_{q6} s_{q4} - 2 c_{q3}^2 c_{q5} s_{q6} c_{q4} - \\
 & 2 c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} + 2 c_{q3} s_{q5} s_{q6}) + 2 p_7 (c_{q3}^2 c_{q4} s_{q5} + c_{q3} c_{q5} s_{q3} - 2 c_{q4} s_{q5}) + \\
 & p_{11} (c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q5} s_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6} s_{q4} s_{q5} - 2 c_{q3}^2 c_{q5} s_{q5} s_{q6} - \\
 & c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q3}^2 - 4 c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 - 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4}) + p_{12} (c_{q6}^2 + \\
 & c_{q4}^2 c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2 c_{q3}^2 c_{q6}^2 + c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q4}^2 c_{q3}^2 c_{q6}^2 - \\
 & 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5} s_{q3} + 2 c_{q6} s_{q5} s_{q6} s_{q3} c_{q3} s_{q4} - 2 c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} c_{q4} \\
 & - 2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) + p_{13} (c_{q3}^2 c_{q5}^2 - c_{q5}^2 + c_{q4}^2 c_{q3}^2 c_{q5}^2 - c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q5}) + \\
 & p_{14} (2 c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} + 4 c_{q4} c_{q6} s_{q6} c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q5} - s_{2q6} - 2 c_{q4}^2 c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} - \\
 & 2 c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} - 4 c_{q3}^2 c_{q6}^2 c_{q5} s_{q4} c_{q4} + 4 c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} c_{q3} s_{q4} + 4 c_{q3}^2 c_{q6} s_{q6}) + \\
 & 2 p_{15} (c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} + c_{q4}^2 c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} c_{q6} s_{q6} + c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} - \\
 & c_{q5} c_{q6} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + c_{q5}^2 c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q3}) + \\
 & 2 p_{16} (s_{q2} s_{q4} s_{q6} s_{q3} - 2 c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} - 2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3}) + \\
 & 2 p_{17} (c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + 2 c_{q4} s_{q2} s_{q6} c_{q5} s_{q3} + 2 c_{q6} s_{q2} s_{q4}) + \\
 & 2 p_{18} c_{q3} c_{q5} s_{q2} + 2 p_{19} s_{q2} s_{q3} + 2 p_{20} c_{q3} s_{q2} + 2 p_{21} (c_{q4} s_{q6} c_{q5} s_{q3} - \\
 & c_{q3}^2 c_{q6} s_{q5} + c_{q3} s_{q4} s_{q6} s_{q3} - c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q5} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) \\
 & + 2 p_{22} (c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3}^2 s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q3}) + 2 p_{23} s_{q4} s_{q6} s_{q3} + \\
 & 2 p_{24} (c_{q6} s_{q4} s_{q3} + c_{q2}) + 2 p_{25} (c_{q3}^2 c_{q5} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5}) + p_{27} s_{2q3} + p_{28} s_{q2} + \\
 & p_{29} c_{q3} + p_{30} c_{q3} + p_{31} s_{q3} + 2 p_{32} (c_{q3} c_{q5} - c_{q4} s_{q3} s_{q5}) - \\
 & 2 p_{33} (c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q4} + c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) - p_{34} c_{q3}^2 c_{q4}^2 + \\
 & p_{40} (s_{2q5} - 2 c_{q3}^2 c_{q5} s_{q5} - 2 c_{q3}^2 c_{q5} s_{q5} c_{q4}^2 - 4 c_{q5}^2 c_{q3} c_{q4} s_{q3}) + \\
 & 2 p_{41} (c_{q5} s_{q3} c_{q3} s_{q4} + 2 c_{q3}^2 s_{q4} s_{q5} c_{q4}) - 2 p_{42} c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} \\
 & + 2 p_{43} c_{q3} s_{q4} s_{q3} - 2 p_{48} c_{q3} c_{q4} s_{q3} - p_{49} s_{2q2}
 \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12} = M_{21} = & p_{45} c_{q2} - p_{46} s_{q2} - p_{16} (c_{q2} c_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q5} c_{q6}) - \\
 & p_{17} (c_{q2} c_{q4} c_{q6} + c_{q2} c_{q5} s_{q4} s_{q6}) - p_{18} c_{q2} s_{q4} s_{q5}
 \end{aligned} \tag{A.28}$$

$$\begin{aligned}
M_{13} = M_{31} = & p_5 \left( c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} - c_{q4} c_{q3} s_{q6} \right) - p_7 c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \\
& p_6 \left( c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} - c_{q6} c_{q4} c_{q3} \right) + p_{11} \left( c_{q5}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q5} - \right. \\
& 2 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q5} - s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 c_{q3} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - \\
& c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \left. \right) + p_{12} \left( c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q6} + c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q6} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 s_{q4} + c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q3} s_{q5} \left. \right) + p_{13} \left( c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 s_{q4} \right) + \\
& p_{14} \left( 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - 4 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 + c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - 2 c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q4} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + p_{15} \left( c_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2 c_{q3} s_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 - \right. \\
& c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} \left. \right) + \\
& p_{21} c_{q4} s_{q3} s_{q6} + p_{22} \left( c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) + p_{25} s_{q3} s_{q4} s_{q5} + \\
& p_{33} \left( c_{q3} c_{q5} + c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) + p_{34} c_{q4} c_{q3} s_{q4} + 2 p_{40} \left( c_{q5} s_{q3} s_{q4} + 2 c_{q5} c_{q4} c_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) + \\
& p_{41} \left( c_{q4} c_{q5} s_{q3} - c_{q3} s_{q5} + 2 c_{q3} c_{q4}^2 s_{q5} \right) + p_{50} c_{q3} - p_{44} s_{q3} - 2 p_{42} c_{q3} c_{q4}^2 + \\
& p_{43} c_{q4} s_{q3} + p_{48} s_{q4} s_{q3} - 2 p_{33} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}
\end{aligned} \tag{A.29}$$

$$\begin{aligned}
M_{14} = M_{41} = & p_5 \left( c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) - p_6 \left( c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) + \\
& p_7 c_{q4} s_{q3} s_{q5} + p_{11} \left( 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} - c_{q3} c_{q4} s_{q6} - 2 c_{q5} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2 c_{q5}^2 c_{q3} c_{q4} s_{q6} \right) + \\
& p_{12} \left( c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q3} + c_{q5}^2 c_{q6}^2 s_{q3} - c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) \\
& + p_{13} \left( c_{q5}^2 s_{q3} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q5} - c_{q6}^2 \right) + 2 p_{14} \left( 2 c_{q6} s_{q3} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5} - \right. \\
& 2 c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6} \left. \right) + p_{15} \left( c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} s_{q2} s_{q5} + \right. \\
& 2 c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q5}^2 c_{q3} c_{q4} c_{q6} \left. \right) + p_{16} \left( c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} - s_{q2} s_{q4} s_{q6} \right) - \\
& p_{17} \left( c_{q6} s_{q2} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} \right) + p_{21} \left( c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - \\
& p_{22} \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) + p_{23} \left( c_{q4} c_{q5} c_{q6} - s_{q4} s_{q6} \right) + \\
& p_{24} \left( c_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) + p_{25} c_{q3} c_{q4} s_{q5} + 2 p_{32} c_{q4} s_{q5} - p_{33} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \\
& p_{48} c_{q3} c_{q4} - p_{35} s_{q3} + 2 p_{40} \left( c_{q5}^2 c_{q3} c_{q4} - 2 c_{q5} s_{q3} s_{q5} \right) - \\
& p_{41} c_{q5} c_{q3} s_{q4} - p_{43} c_{q3} s_{q4}
\end{aligned} \tag{A.30}$$

$$\begin{aligned}
M_{15} = M_{51} = & p_6 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - p_5 s_{q3} s_{q4} c_{q6} s_{q5} + p_7 c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \\
& p_{11} \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} + 2 c_{q5} c_{q6} s_{q3} \right) + \\
& p_{12} \left( c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q6} c_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 s_{q5} \right) + \\
& p_{14} \left( c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} + 2 c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 \right) + \\
& p_{15} \left( c_{q5} s_{q2} s_{q4} - c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) - p_{21} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} - \\
& p_{16} s_{q2} s_{q4} s_{q5} c_{q6} + p_{17} s_{q2} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + \\
& + p_{22} c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - p_{23} c_{q6} s_{q4} s_{q5} + p_{24} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + p_{25} c_{q3} c_{q5} s_{q4} + \\
& p_{32} c_{q5} s_{q4} + p_{33} s_{q3} s_{q5} - p_{33} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + p_{36} c_{q3} s_{q4} + p_{41} \left( c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right)
\end{aligned} \tag{A.31}$$

$$\begin{aligned}
M_{16} = M_{61} = & p_5 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - p_6 \left( c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) + \\
& + p_{11} \left( c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} - s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} s_{q4} \right) + \\
& p_{15} \left( c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) + \\
& p_{16} \left( c_{q4} c_{q6} s_{q2} - p_{16} c_{q5} s_{q2} s_{q4} s_{q6} \right) - p_{17} \left( c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + c_{q4} s_{q2} s_{q6} \right) + \\
& p_{21} \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - p_{22} \left( c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) + \\
& p_{23} \left( c_{q4} c_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - p_{24} \left( c_{q5} c_{q6} s_{q4} + c_{q4} s_{q6} \right) - p_{37} \left( c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} \right)
\end{aligned} \tag{A.32}$$

$$M_{22} = p_{51} \tag{A.33}$$



$$\begin{aligned}
M_{23} = M_{32} = & p_{16} \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \right) + \\
& p_{17} \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) + \\
& p_{18} \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \right) + \\
& p_{19} \left( \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \right) + p_{20} \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \right)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
M_{24} = M_{42} = & p_{17} \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{s}_{q2-q3} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2-q3} \right) - p_{16} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{s}_{q2-q3} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q2-q3} \right) - \\
& p_{38} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q2-q3}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

$$\begin{aligned}
M_{25} = M_{52} = & p_{16} \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} - \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \right) + p_{17} \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + p_{18} \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \right)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

$$\begin{aligned}
M_{26} = M_{62} = & p_{16} \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q6} \right) + \\
& p_{17} \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \right)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

$$\begin{aligned}
M_{33} = & p_{47} + 2p_5 \left( \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \right) + 2p_6 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) - \\
& 2p_7 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + 2p_{11} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + \\
& p_{12} \left( 2\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4}^2 \right) + \\
& p_{13} \left( \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \right) + p_{14} \left( \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \left. 2\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \right) + 2p_{15} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) - \\
& 2p_{21} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + 2p_{22} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + 2p_{25} \mathbf{c}_{q5} + 2p_{33} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} + \\
& 2p_{40} \left( \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{s}_{2q5} \right) - 2p_{41} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + p_{42} \mathbf{s}_{2q4}
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$\begin{aligned}
M_{34} = M_{43} = & p_{11} \left( \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + p_{11} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \right) - p_{12} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) - p_{13} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + p_{14} \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q5} \right) \\
& + p_{15} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) - p_{21} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) + \\
& p_{22} \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \right) - p_{25} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - p_{33} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - 2p_{40} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} - \\
& p_{41} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - p_{43} \mathbf{c}_{q4} - p_{48} \mathbf{s}_{q4}
\end{aligned} \tag{A.39}$$

$$\begin{aligned}
M_{35} = M_{53} = & (-p_5) \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + p_6 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - p_7 \mathbf{s}_{q5} + p_{11} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + p_{12} \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \right) + p_{14} \left( \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} \right) + p_{15} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - p_{21} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \\
& p_{22} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + p_{25} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + p_{33} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} + p_{36} \mathbf{c}_{q4} - p_{41} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
M_{36} = M_{63} = & p_5 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + p_6 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + p_{11} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) + p_{15} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) - p_{21} \left( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + p_{22} \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) + p_{37} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}
\end{aligned} \tag{A.41}$$

$$\begin{aligned}
M_{44} = & p_{35} + 2p_{11} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + p_{12} \left( \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 \right) - p_{13} \mathbf{c}_{q5}^2 + \\
& p_{14} \left( \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{s}_{2q6} \right) + 2p_{15} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + p_{40} \mathbf{s}_{2q5}
\end{aligned} \tag{A.42}$$

$$M_{45} = M_{54} = p_{11} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - p_{12} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - p_{14} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q5} + p_{15} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - p_{33} \mathbf{s}_{q5} - p_{41} \mathbf{c}_{q5} \tag{A.43}$$

$$M_{46} = M_{64} = p_{11} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - p_{15} \left( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + 2\mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) \tag{A.44}$$

$$M_{55} = p_{36} + p_{14} s_{2q_6} - p_{12} c_{q_6}^2 \quad (\text{A.45})$$

$$M_{56} = M_{65} = p_{11} c_{q_6} + p_{15} s_{q_6} \quad (\text{A.46})$$

$$M_{66} = p_{37} \quad (\text{A.47})$$

Parametry:

$$p_1 = (I_{2xx} - I_{2yy} - m_2 x_{S2}^2 - a_2^2 (m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_T) + m_2 y_{S2}^2) \quad (\text{A.48})$$

$$p_2 = a_2^2 (m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_T) \quad (\text{A.49})$$

$$p_3 = 2a_1 m_2 y_{S2} \quad (\text{A.50})$$

$$p_4 = I_{2yy} + I_{1zz} + I_{3yy} + m_2 x_{S2}^2 + m_3 x_{S3}^2 + p_2 + m_T x_{cT}^2 + 2d_7 m_T z_{cT} + m_T z_{cT}^2 \quad (\text{A.51})$$

$$+ m_6 z_{S6}^2 + d_7^2 m_T + p_9 + p_{26} + I_{5xx} + I_{4zz} + I_{6yy} + I_{Tyy} - p_{32}$$

$$p_5 = a_3 m_T x_{cT} \quad (\text{A.52})$$

$$p_6 = a_3 m_T y_{cT} \quad (\text{A.53})$$

$$p_7 = a_3 d_7 m_T + a_3 m_6 z_{S6} + a_3 m_T z_{cT} \quad (\text{A.54})$$

$$p_9 = a_3^2 (m_4 + m_5 + m_6 + m_T) \quad (\text{A.55})$$

$$p_{10} = I_{5xx} + I_{4zz} + I_{6yy} + I_{Tyy} \quad (\text{A.56})$$

$$p_{11} = I_{6yz} + I_{Tyz} - d_7 m_T y_{cT} - m_T y_{cT} z_{cT} \quad (\text{A.57})$$

$$p_{12} = (-m_T) x_{cT}^2 + m_T y_{cT}^2 + I_{6xx} - I_{6yy} + I_{Txx} - I_{Tyy} \quad (\text{A.58})$$

$$p_{13} = m_T d_7^2 + 2m_T d_7 z_{cT} - m_T y_{cT}^2 + m_6 z_{S6}^2 + m_T z_{cT}^2 + I_{5xx} - I_{5yy} + I_{6yy} - I_{6zz} + I_{Tyy} - I_{Tzz} \quad (\text{A.59})$$

$$p_{14} = I_{6xy} + I_{Txy} - m_T x_{cT} y_{cT} \quad (\text{A.60})$$

$$p_{15} = I_{6xz} + I_{Txz} - d_7 m_T x_{cT} - m_T x_{cT} z_{cT} \quad (\text{A.61})$$

$$p_{16} = a_2 m_T x_{cT} \quad (\text{A.62})$$

$$p_{17} = a_2 m_T y_{cT} \quad (\text{A.63})$$

$$p_{18} = a_2 d_7 m_T + a_2 m_6 z_{S6} + a_2 m_T z_{cT} \quad (\text{A.64})$$

$$p_{19} = a_2 a_3 m_4 + a_2 a_3 m_5 + a_2 a_3 m_6 + a_2 a_3 m_T + a_2 m_3 x_{S3} \quad (\text{A.65})$$

$$p_{20} = a_2 d_4 m_4 + a_2 d_4 m_5 + a_2 d_4 m_6 + a_2 d_4 m_T + a_2 m_3 y_{S3} + a_2 m_4 z_{S4} \quad (\text{A.66})$$

$$p_{21} = d_4 m_T x_{cT} \quad (\text{A.67})$$

$$p_{22} = d_4 m_T y_{cT} \quad (\text{A.68})$$

$$p_{23} = a_1 m_T x_{cT} \quad (\text{A.69})$$

$$p_{24} = a_1 m_T y_{cT} \quad (\text{A.70})$$

$$p_{25} = d_4 d_7 m_T + d_4 m_6 z_{S6} + d_4 m_T z_{cT} \quad (\text{A.71})$$

$$p_{26} = a_1^2 (m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_T) \quad (\text{A.72})$$

$$p_{27} = a_3 d_4 (m_4 + m_5 + m_6 + m_T) + a_3 m_4 z_{S4} + m_3 x_{S3} y_{S3} - I_{3xy} \quad (\text{A.73})$$

$$p_{28} = 2a_1(a_2 m_3 + a_2 m_4 + a_2 m_5 + a_2 m_6 + a_2 m_T + m_2 x_{S2}) \quad (\text{A.74})$$

$$p_{29} = 2a_1(d_4 m_4 + d_4 m_5 + d_4 m_6 + d_4 m_T + m_3 y_{S3} + m_4 z_{S4}) \quad (\text{A.75})$$

$$p_{30} = I_{3xx} - I_{3yy} - I_{5xx} + I_{4yy} - I_{4zz} + I_{5zz} + p_{12} - m_3 x_{S3}^2 + m_4 z_{S4}^2 + m_3 y_{S3}^2 + 2d_4 m_4 z_{S4} - a_3^2(m_T + m_6 + m_5 + m_4) + d_4^2(m_T + m_6 + m_5 + m_4) \quad (\text{A.76})$$

$$p_{31} = 2a_1(a_3 m_4 + a_3 m_5 + a_3 m_6 + a_3 m_T + m_3 x_{S3}) \quad (\text{A.77})$$

$$p_{32} = a_1(d_7 m_T + m_6 z_{S6} + m_T z_{cT}) \quad (\text{A.78})$$

$$p_{33} = I_{5xz} - I_{6xy} - I_{7xy} + m_T x_{cT} y_{cT} \quad (\text{A.79})$$

$$p_{34} = m_T d_7^2 + 2m_T d_7 z_{cT} - m_T x_{cT}^2 + m_6 z_{S6}^2 + m_T z_{cT}^2 - I_{4xx} + I_{4yy} + I_{6xx} - I_{5yy} + I_{5zz} - I_{6zz} + I_{Txx} - I_{Tzz} \quad (\text{A.80})$$

$$p_{35} = (I_{5xx} + I_{4zz} + I_{6yy} + I_{7yy} + m_T z_{cT}^2 + m_6 z_{S6}^2 + d_7^2 m_T + m_T x_{cT}^2 + 2d_7 m_T z_{cT}) \quad (\text{A.81})$$

$$p_{36} = m_T d_7^2 + 2m_T d_7 z_{cT} + m_T y_{cT}^2 + m_6 z_{S6}^2 + m_T z_{cT}^2 + I_{6xx} + I_{5zz} + I_{Txx} \quad (\text{A.82})$$

$$p_{37} = m_T x_{cT}^2 + m_T y_{cT}^2 + I_{6zz} + I_{Tzz} \quad (\text{A.83})$$

$$p_{38} = a_2(d_7 m_T + m_6 z_{S6} + m_T z_{cT}) \quad (\text{A.84})$$

$$p_{39} = d_4^2(m_T + m_6 + m_5 + m_4) \quad (\text{A.85})$$

$$p_{40} = I_{5xy} \quad (\text{A.86})$$

$$p_{41} = I_{5yz} \quad (\text{A.87})$$

$$p_{42} = I_{4xy} \quad (\text{A.88})$$

$$p_{43} = I_{4yz} \quad (\text{A.89})$$

$$p_{44} = I_{3yz} \quad (\text{A.90})$$

$$p_{45} = I_{2xz} \quad (\text{A.91})$$

$$p_{46} = I_{2yz} \quad (\text{A.92})$$

$$p_{47} = m_T x_{cT}^2 + m_T y_{cT}^2 + I_{6zz} + I_{Tzz} + I_{4xx} + I_{3zz} + I_{5yy} + a_3^2(m_4 + m_5 + m_6 + m_T) + m_3 x_{S3}^2 + m_4 z_{S4}^2 + m_3 y_{S3}^2 + 2d_4 m_4 z_{S4} + d_4^2(m_T + m_6 + m_5 + m_4) \quad (\text{A.93})$$

$$p_{48} = I_{4xz} - I_{5xy} \quad (\text{A.94})$$

$$p_{49} = I_{2xy} - m_2 x_{S2} y_{S2} \quad (\text{A.95})$$

$$p_{50} = I_{3xz} + I_{4xy} \quad (\text{A.96})$$

$$p_{51} = a_2^2(m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_T) + I_{2zz} + m_2 x_{S2}^2 + m_2 y_{S2}^2 \quad (\text{A.97})$$

## Macierz C

$$\begin{aligned}
C_{11} = & \left( -\frac{1}{2} \dot{q}_2 s_{2q_2} \right) p_1 + \left( \dot{q}_3 (c_{q_6} s_{q_5} - \frac{1}{2} s_{2q_3} - s_{q_5} s_{q_6} + 2c_{q_3}^2 s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - 2c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_5} + \right. \\
& 2c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_4 (-c_{q_4} s_{q_6} c_{q_3}^2 + c_{q_4} s_{q_6} + c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4}) + \dot{q}_5 (c_{q_4} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + \\
& c_{q_3} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} - c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}) + \dot{q}_6 (c_{q_6} s_{q_4} + c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} + c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_4} + \\
& c_{q_3} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} + c_{q_3} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6}) \Big) p_5 + \left( \dot{q}_4 (2c_{q_4} c_{q_6} - c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6} - 2c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_6} + \right. \\
& 2c_{q_3}^2 c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_5 (4c_{q_3} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - 2s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + 4c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}) + \\
& \dot{q}_5 (2c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 + 2c_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} - c_{q_4} s_{q_5} s_{q_6}) + \dot{q}_6 - 2s_{q_4} s_{q_6} + c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + \\
& (2c_{q_3}^2 s_{q_4} s_{q_6} + 2c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - 2c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}) \Big) p_6 + \left( \dot{q}_3 (2c_{q_3}^2 c_{q_5} - c_{q_5} - \right. \\
& 2c_{q_3} c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5}) + \dot{q}_4 (2s_{q_4} s_{q_5} - c_{q_3}^2 s_{q_4} s_{q_5}) + \dot{q}_5 (c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} - c_{q_3} s_{q_3} s_{q_5} - 2c_{q_4} c_{q_5}) \Big) p_7 + \\
& \left( \dot{q}_5 (-s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 + \frac{1}{2} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 - \frac{1}{2} c_{q_6} s_{q_4} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} - 2s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_5}^2 + \right. \\
& s_{q_6} c_{q_3}^2 + 4s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3} + s_{q_6} c_{q_5}^2 - \frac{1}{2} s_{q_6}) + \dot{q}_6 (\frac{1}{2} c_{q_6} s_{q_5} c_{q_5} - \\
& \frac{1}{2} c_{q_6} s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5} + \frac{1}{2} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} - c_{q_6} s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_5} - 2c_{q_6} s_{q_3} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}^2 + \\
& \frac{1}{2} c_{q_6} s_{q_3} c_{q_3} c_{q_4} + s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5}) - \dot{q}_4 (c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - \\
& \frac{1}{2} c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_5} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} - 2c_{q_3} c_{q_5}^2 s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + \frac{1}{2} c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_5 (s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} - \\
& 4s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5}^2 - 2c_{q_6} s_{q_4} c_{q_3}^2 c_{q_5} + s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3} c_{q_4} + \\
& 2s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5}^2 + 2s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5} - \frac{1}{2} s_{q_6} c_{q_4} + c_{q_6} s_{q_4} c_{q_5}) \Big) p_{11} + \left( -\dot{q}_6 (c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_6} s_{q_6} - \right. \\
& c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} + 2c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_4} - c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_4} + c_{q_3}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6} s_{q_6} - 2c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_6} + \\
& c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6} s_{q_6} - 2c_{q_3} c_{q_6}^2 s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} + c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - 2c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} - \\
& c_{q_5}^2 c_{q_6} s_{q_6} + \frac{1}{2} s_{2q_6}) - \dot{q}_3 (c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} + \frac{1}{2} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} - 2c_{q_3} c_{q_6}^2 s_{q_3} - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_5} + \\
& c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + 2c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_5} - \\
& 2c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - 2c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_5 (s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_6} - \\
& s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_5} c_{q_6}^2 - s_{q_5} c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6}^2 - 2s_{q_3} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 + s_{q_3} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6}^2 + \\
& s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_6} + s_{q_5} c_{q_5} c_{q_6}^2) + \\
& \dot{q}_4 (-2s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6} - s_{q_4} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_6}^2 + s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_5} c_{q_6} - s_{q_4} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 + \\
& s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} + s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6}^2 + s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}) \Big) p_{12} + \left( \dot{q}_4 (\frac{1}{2} c_{q_3} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - \right. \\
& c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5}^2 s_{q_4}) - \dot{q}_5 (c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5} s_{q_5} + c_{q_3}^2 c_{q_5} s_{q_5} + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}^2 s_{q_3} - \frac{1}{2} c_{q_3} c_{q_4} s_{q_3} - \frac{1}{2} s_{2q_5}) - \\
& \dot{q}_3 (c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} s_{q_5} + c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_5}^2 s_{q_3} - \frac{1}{2} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_5}) \Big) p_{13} + \\
& \left( \dot{q}_4 (-4c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6}^2 + 2c_{q_3}^2 c_{q_5} c_{q_6}^2 + 2s_{q_4} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6} + \right. \\
& 2s_{q_3} s_{q_5} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6}^2 - 2s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6}) + \dot{q}_5 (2s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6} + \\
& 2s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_6}^2 + 2s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_5} c_{q_6} + 4s_{q_3} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6} - 2s_{q_3} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} + \\
& 2s_{q_3} s_{q_4} c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6}^2 - 2s_{q_5} s_{q_6} c_{q_5} c_{q_6}) + \dot{q}_3 (4s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + 4s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_6}^2 + \\
& 2s_{q_3} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6} + 4s_{q_3} s_{q_4} c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 + 2s_{q_3} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5}^2 c_{q_6} - 4s_{q_3} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_6} - \\
& 2s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - 2s_{q_4} s_{q_5} c_{q_6}^2) - \dot{q}_6 (2c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 - c_{q_3}^2 c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 - \\
& 4c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} s_{q_6} + 2c_{q_3}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 - c_{q_3}^2 c_{q_5}^2 - 4c_{q_3}^2 c_{q_6}^2 + 2c_{q_3}^2 - 2c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 + c_{q_5}^2 + \\
& 2c_{q_6}^2 - 4c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_3} s_{q_5} + 2c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_5} + 4c_{q_3} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - 1) \Big) p_{14} +
\end{aligned} \tag{A.98}$$

$$\begin{aligned}
& (-\dot{q}_6 (-3c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^3 s_{q5} + 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} s_{q5} s_{q6} + c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6} s_{q4} s_{q5} + \\
& c_{q3}^2 c_{q5} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q5} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_3 (-2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} + \\
& 2c_{q3}^2 c_{q5} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - 2c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6}) - \dot{q}_4 (2c_{q3}^2 c_{q4}^2 s_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q4}) - \\
& \dot{q}_5 (-2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 s_{q6} - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6}^2 s_{q6} + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6} + \\
& c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q4} s_{q6} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q6} + 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q6})) p_{15} + (-\dot{q}_2 (2c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q5} - c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) + \\
& \dot{q}_5 (2c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} - 2c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2}) + \dot{q}_3 (c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} - \\
& 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2}) + \dot{q}_4 (c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + 2c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4}) + \dot{q}_6 (c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} + \\
& 2c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6})) p_{16} (\dot{q}_2 (2c_{q2} c_{q6} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6}) + \dot{q}_4 (2c_{q4} c_{q6} s_{q2} - 2c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6}) + \dot{q}_6 (c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} - \\
& 2s_{q2} s_{q4} s_{q6} + 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3}) + \dot{q}_3 (2c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} - s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + \\
& \dot{q}_5 (c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q6} - 2c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6})) p_{17} + (c_{q2} c_{q3} c_{q5} \dot{q}_2 - c_{q3} \dot{q}_5 s_{q2} s_{q5} - \\
& c_{q5} \dot{q}_3 s_{q2} s_{q3}) p_{18} + (c_{q2} \dot{q}_2 s_{q3} + c_{q3} \dot{q}_3 s_{q2}) p_{19} + (c_{q2} c_{q3} \dot{q}_2 - \dot{q}_3 s_{q2} s_{q3}) p_{20} + \\
& (\dot{q}_3 (2c_{q3}^2 s_{q4} s_{q6} - s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} c_{q6} + 2c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q2} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q2}) - \dot{q}_5 (c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + \\
& c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5}) + \dot{q}_6 (s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 + c_{q4} s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q5} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} c_{q3} - \\
& c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 + c_{q4} c_{q6} s_{q3} c_{q5} + c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6}) + \dot{q}_4 (c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - \\
& c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4}) + \dot{q}_2 (c_{q2} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} - \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3}) p_{21} + (\dot{q}_3 (2c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} - c_{q4} c_{q5} s_{q6} - c_{q6} s_{q4} - 2c_{q3} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q6} + \dot{q}_6 (c_{q3}^2 c_{q6} s_{q5} - c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) + \dot{q}_5 (c_{q3}^2 c_{q5} s_{q6} - \\
& c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_4 (c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6})) p_{22} + (\dot{q}_3 c_{q3} s_{q4} s_{q6} + \dot{q}_4 c_{q4} s_{q3} s_{q6} + \\
& \dot{q}_6 c_{q6} s_{q3} s_{q4}) p_{23} + (c_{q3} c_{q6} \dot{q}_3 s_{q4} - \dot{q}_2 s_{q2} + c_{q4} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q3} - \dot{q}_6 s_{q3} s_{q4} s_{q6}) p_{24} + \\
& (-\dot{q}_5 (s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q4} c_{q5} s_{q3} c_{q3}) - \dot{q}_3 (2c_{q3}^2 c_{q4} s_{q5} + 2c_{q3} c_{q5} s_{q3} - c_{q4} s_{q5})) + \\
& \dot{q}_4 c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{25} + (\dot{q}_3 (2c_{q3}^2 - 1)) p_{27} + \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} p_{28} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q3} p_{29} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q3} p_{30} + \\
& \frac{1}{2} c_{q3} \dot{q}_3 p_{31} + (\dot{q}_4 s_{q3} s_{q4} s_{q5} - \dot{q}_5 (c_{q3} s_{q5} + c_{q4} c_{q5} s_{q3}) - \dot{q}_3 (c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5})) p_{32} + \\
& (-\dot{q}_4 (2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} - c_{q3}^2 c_{q5} + c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5}) + \dot{q}_5 (c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4})) + \\
& \dot{q}_3 (-2s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 + 2c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q4} c_{q3} + s_{q4} s_{q5})) p_{33} + (\dot{q}_4 s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} + \dot{q}_3 s_{q3} c_{q3} c_{q4}^2) p_{34} + \\
& (\dot{q}_4 (2c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} + 2s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5}^2) + \dot{q}_3 (-4c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5}^2 + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} + \\
& 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q5} + 2c_{q4} c_{q5}^2) + \dot{q}_5 (-2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 + c_{q3}^2 + \\
& 4s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + 2c_{q5}^2 - 1) p_{40} + (\dot{q}_4 (4s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q5} s_{q3} c_{q3} c_{q4}) + \\
& \dot{q}_5 (2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q4} - c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) - \dot{q}_3 (-2c_{q3}^2 c_{q5} s_{q4} + 4c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q4} s_{q5} + c_{q5} s_{q4})) p_{41} \\
& + (\dot{q}_4 (c_{q3}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2) + 2c_{q3} c_{q4} \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4}) p_{42} + (\dot{q}_3 (2c_{q3}^2 s_{q4} - s_{q4}) + \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} s_{q3}) p_{43} \\
& + (\dot{q}_3 (c_{q4} - 2c_{q3}^2 c_{q4}) + c_{q3} \dot{q}_4 s_{q3} s_{q4}) p_{48} + (\dot{q}_2 (1 - 2c_{q2}^2)) p_{49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{12} = & \left(-\frac{1}{2}\dot{q}_1 s_{2q_2}\right)p_1 + \left(\frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q_2} c_{q_4} s_{q_5} + \frac{1}{2}\dot{q}_5 c_{q_2} c_{q_5} s_{q_4}\right)p_{15} + \left(\dot{q}_2 (c_{q_5} c_{q_6} s_{q_2} + \right. \\
& c_{q_4} s_{q_2} s_{q_6}) - (\dot{q}_1 (2c_{q_2} c_{q_3} c_{q_6} s_{q_5} - c_{q_2} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} + 2c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}) + \\
& \dot{q}_5 (\frac{1}{2}c_{q_2} c_{q_6} s_{q_5} - \frac{1}{2}c_{q_2} c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5}) + \dot{q}_6 (\frac{1}{2}c_{q_2} c_{q_5} s_{q_6} - \frac{1}{2}c_{q_2} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_6}) + \\
& \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6})\left)p_{16} + (\dot{q}_1 (2c_{q_2} c_{q_6} s_{q_4} + c_{q_2} c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + 2c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}) + \right. \\
& (\dot{q}_2 (c_{q_4} c_{q_6} s_{q_2} + c_{q_5} s_{q_2} s_{q_4} s_{q_6}) - \dot{q}_4 c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_6} - \dot{q}_6 c_{q_2} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4} \\
& + \dot{q}_5 c_{q_2} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6})p_{17} + (\dot{q}_2 s_{q_2} s_{q_4} s_{q_5} - \frac{1}{2}\dot{q}_5 c_{q_2} c_{q_5} s_{q_4} - \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q_2} c_{q_4} s_{q_5} + \\
& \dot{q}_1 c_{q_2} c_{q_3} c_{q_5})p_{18} + (c_{q_2} \dot{q}_1 s_{q_3})p_{19} + (c_{q_2} c_{q_3} \dot{q}_1)p_{20} - \\
& (c_{q_2} c_{q_4} c_{q_6} s_{q_3} + c_{q_2} c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6} s_{q_3})\dot{q}_1 p_{21} - \dot{q}_1 s_{q_2} p_{24} + \frac{1}{2}c_{q_2} \dot{q}_1 p_{28} \\
& - \dot{q}_2 s_{q_2} p_{45} - c_{q_2} \dot{q}_2 p_{46} - (2c_{q_2}^2 - 1)\dot{q}_1 p_{49}
\end{aligned} \tag{A.99}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} = & (\dot{q}_1 (c_{q_6} s_{q_5} - \frac{1}{2}s_{2q_3} - s_{q_5} s_{q_6} + 2c_{q_3}^2 s_{q_5} s_{q_6} + c_{q_6} s_{q_3} s_{q_5} - 2c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_5} + \\
& 2c_{q_3} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_4 (\frac{1}{2}c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} - \frac{1}{2}c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} + \frac{1}{2}c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3}) + \dot{q}_3 (c_{q_4} s_{q_3} s_{q_6} + \\
& c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} + c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_4}) - \frac{1}{2}\dot{q}_5 c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} - \frac{1}{2}\dot{q}_6 c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}))p_5 \\
& (\dot{q}_1 (4c_{q_3} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - 2s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} + 4c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6}) + \dot{q}_3 (c_{q_4} c_{q_6} s_{q_3} - \\
& c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}))p_6 + (-\dot{q}_1 (-2c_{q_5} c_{q_3}^2 + 2c_{q_4} s_{q_3} s_{q_5} c_{q_3} + c_{q_5}) + \dot{q}_3 s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5})p_7 + \\
& (-\dot{q}_4 (c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 - c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4}^2 c_{q_5} + \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5}^2 - 2c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_6} - \\
& \frac{1}{2}c_{q_3} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 + \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + \frac{1}{2}3c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_5}) + \dot{q}_6 (c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4}^2 + \\
& c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5}^2 + \frac{1}{2}c_{q_3} c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_5} + \frac{1}{2}c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5}^2 - c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} - \\
& c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6}) - \dot{q}_3 (-2s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4}^2 c_{q_6} - s_{q_3} s_{q_4} c_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 + c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + \\
& s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5} - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_5}^2 + s_{q_3} s_{q_5} c_{q_6} + c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \\
& \dot{q}_1 (-4s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5}^2 + s_{q_6} c_{q_3}^2 c_{q_4} - 2c_{q_6} s_{q_4} c_{q_3}^2 c_{q_5} + s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5} + \\
& c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_3} c_{q_4} + 2s_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_3} c_{q_5} + 2s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5}^2 - \frac{1}{2}s_{q_6} c_{q_4} + c_{q_6} s_{q_4} c_{q_5}) - \\
& \dot{q}_5 (c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6} - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5}^2 - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 - s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_6} + \\
& \frac{1}{2}c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_4} + \frac{1}{2}c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6} + s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_5}))p_{11} + (\dot{q}_5 c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4}^2 c_{q_6} - \\
& \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 + s_{q_3} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 - \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_4} c_{q_6}^2) - \\
& (\dot{q}_6 (2c_{q_3} c_{q_5} c_{q_4}^2 c_{q_6}^2 - c_{q_3} c_{q_5} c_{q_4}^2 - s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4} c_{q_6}^2 - c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_6} + \\
& \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_5} c_{q_4} - c_{q_3} c_{q_5} c_{q_6}^2 + c_{q_5} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_6} + \frac{1}{2}c_{q_3} c_{q_5}) - \dot{q}_1 (\frac{1}{2}c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} - \\
& 2c_{q_3} c_{q_6}^2 s_{q_3} + c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_5} + c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} + c_{q_3} c_{q_5}^2 c_{q_6}^2 s_{q_3} + \\
& c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} + 2c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_5} - 2c_{q_3}^2 c_{q_6} s_{q_4} s_{q_5} s_{q_6} - \\
& 2c_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6}) + \dot{q}_4 (-c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_6}^2 + 2c_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - \frac{1}{2}\dot{q}_1 s_{q_3}) + \\
& \dot{q}_3 (2c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} c_{q_4}^2 c_{q_6} + s_{q_3} s_{q_4} c_{q_4} c_{q_6}^2 + c_{q_3} s_{q_5} s_{q_6} c_{q_4} c_{q_6} + c_{q_3} c_{q_5} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_6}^2 - \\
& c_{q_5} s_{q_3} s_{q_6} c_{q_6}))p_{12} + (\dot{q}_3 (c_{q_4} s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5}^2 + c_{q_3} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_5}) - \dot{q}_1 (s_{q_5} c_{q_3}^2 c_{q_4} c_{q_5} + \\
& s_{q_3} c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2 + s_{q_3} c_{q_3} c_{q_5}^2 - \frac{1}{2}s_{q_5} c_{q_4} c_{q_5}) + \dot{q}_5 (s_{q_3} s_{q_4} c_{q_5}^2 + c_{q_3} c_{q_4} s_{q_4} s_{q_5} c_{q_5} - \\
& \frac{1}{2}s_{q_3} s_{q_4}) + \dot{q}_4 (c_{q_3} c_{q_5}^2 - c_{q_3} c_{q_4}^2 c_{q_5}^2))p_{13} + (\dot{q}_5 (2c_{q_3} s_{q_5} c_{q_4}^2 c_{q_6}^2 + \\
& s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6}^2 + \frac{1}{2}s_{q_3} c_{q_4} c_{q_5} c_{q_6} - 2s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} c_{q_5}^2 c_{q_6} - \frac{1}{2}c_{q_3} s_{q_5} c_{q_6}^2) - \\
& \dot{q}_3 (2c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_3} - 4c_{q_4}^2 c_{q_5} c_{q_6}^2 s_{q_3} - c_{q_3} c_{q_4} c_{q_6} s_{q_5} + 3c_{q_4} c_{q_6} s_{q_3} s_{q_4} s_{q_6} +
\end{aligned} \tag{A.100}$$

$$\begin{aligned}
& 2c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q4}s_{q5}s_{q6}) + \dot{q}_1(4s_{q5}s_{q6}c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}c_{q6} + 4s_{q4}s_{q5}c_{q3}^2c_{q6}^2 + \\
& 2s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}^2c_{q6} + 4s_{q3}s_{q4}c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}^2 + 2s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q5}^2c_{q6} - \\
& 4s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q6} - 2s_{q5}s_{q6}c_{q4}c_{q5}c_{q6} - 2s_{q4}s_{q5}c_{q6}^2) + \dot{q}_4(\frac{1}{2}c_{q3}c_{q6}s_{q6} - \\
& \frac{1}{2}c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} + 3c_{q3}c_{q4}^2c_{q6}s_{q6} - 2c_{q3}c_{q5}^2c_{q6}s_{q6} + 2c_{q6}^2s_{q3}s_{q4}s_{q5} + \\
& 4c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}^2s_{q4} + c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q5}s_{q6}) - \dot{q}_6(\frac{3}{2}c_{q3}c_{q4}s_{q4} - c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q5} + \\
& \frac{1}{2}c_{q4}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 3c_{q3}c_{q4}c_{q6}^2s_{q4} + 2c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q6} - 4c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}s_{q6} + \\
& 2c_{q5}c_{q6}^2s_{q3}s_{q4}s_{q5}))p_{14} + (-\dot{q}_4(\frac{1}{2}c_{q4}c_{q6}s_{q3} - 2c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q5} - \\
& 2c_{q3}c_{q4}s_{q4}s_{q5}s_{q6} + 2c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}s_{q5}) - \dot{q}_3(c_{q3}c_{q6}s_{q4} + s_{q3}s_{q5}s_{q6} + \\
& c_{q3}c_{q5}^2c_{q6}s_{q4} - 2c_{q4}^2s_{q3}s_{q5}s_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q6} - 2c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5}) + \\
& \dot{q}_1(2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}^2c_{q6} - 2s_{q4}s_{q6}c_{q3}^2c_{q5} - 2s_{q3}s_{q5}s_{q6}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}^2 - \\
& 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6} + 2s_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q3}c_{q4} - 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q5}c_{q6} - c_{q4}c_{q5}^2c_{q6} + \\
& s_{q4}s_{q6}c_{q5}) + \dot{q}_6(-c_{q3}c_{q6}s_{q5}c_{q4}^2 + c_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q4}c_{q5} + \frac{1}{2}s_{q3}s_{q4}s_{q6}c_{q5}^2 + \\
& c_{q3}c_{q6}s_{q5}) + \dot{q}_5(c_{q4}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}s_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q6}s_{q4} + \\
& c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2c_{q6}s_{q4}))p_{15} + (\dot{q}_1(c_{q3}s_{q2}s_{q4}s_{q6} + 2c_{q6}s_{q2}s_{q3}s_{q5} \\
& - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2})p_{16} - (s_{q2}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q6})\dot{q}_1p_{17} - \\
& (c_{q5}\dot{q}_1s_{q2}s_{q3})p_{18} + (c_{q3}\dot{q}_1s_{q2})p_{19} + (-\dot{q}_1s_{q2}s_{q3})p_{20} + (\dot{q}_1(2c_{q3}^2s_{q4}s_{q6} - \\
& s_{q4}s_{q6} + c_{q4}c_{q5}c_{q6} + 2c_{q3}c_{q6}s_{q3}s_{q5} - 2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}c_{q6} - c_{q3}c_{q4}c_{q6}s_{q2} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q6} + \\
& c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2c_{q6}s_{q2}) + \dot{q}_3c_{q3}c_{q4}s_{q6} - \frac{1}{2}\dot{q}_4c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3} + \frac{1}{2}\dot{q}_5c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} + \\
& \dot{q}_6\frac{1}{2}c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q6})p_{21} + (\dot{q}_3(c_{q3}c_{q4}c_{q6} - c_{q3}c_{q5}s_{q4}s_{q6}) - \dot{q}_1(c_{q6}s_{q4} + c_{q4}c_{q5}s_{q6} - \\
& 2c_{q3}^2c_{q6}s_{q4} + 2c_{q3}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - \\
& 2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}s_{q6}))p_{22} + (c_{q3}\dot{q}_1s_{q4}s_{q6})p_{23} + (c_{q3}c_{q6}\dot{q}_1s_{q4})p_{24} - \dot{q}_1(2c_{q4}s_{q5}c_{q3}^2 + \\
& 2c_{q5}s_{q3}c_{q3} - c_{q4}s_{q5}) + \dot{q}_3c_{q3}s_{q4}s_{q5})p_{25} + (\dot{q}_1(2c_{q3}^2 - 1))p_{27} - \frac{1}{2}\dot{q}_1s_{q3}p_{29} - \\
& \frac{1}{2}\dot{q}_1s_{q3}p_{30} + \frac{1}{2}\dot{q}_1c_{q3}p_{31} - \dot{q}_1(c_{q5}s_{q3} + c_{q3}c_{q4}s_{q5})p_{32} + (\dot{q}_5(c_{q3}s_{q5}c_{q4}^2 + c_{q5}s_{q3}c_{q4}) + \\
& \dot{q}_1(-2s_{q4}s_{q5}c_{q3}^2 + 2c_{q4}c_{q5}s_{q3}s_{q4}c_{q3} + s_{q4}s_{q5}) + \dot{q}_3(2c_{q5}s_{q3}c_{q4}^2 + c_{q3}s_{q5}c_{q4} - c_{q5}s_{q3}) + \\
& 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}\dot{q}_4s_{q4}))p_{33} + (\dot{q}_1c_{q3}c_{q4}^2s_{q3} - \dot{q}_3c_{q4}s_{q3}s_{q4} - \dot{q}_4(\frac{1}{2}c_{q3} - c_{q3}c_{q4}^2))p_{34} + \\
& (-\frac{1}{2}\dot{q}_4c_{q3})p_{35} - \frac{1}{2}\dot{q}_5s_{q3}s_{q4}p_{36} - \dot{q}_6\frac{1}{2}(c_{q3}c_{q5} - c_{q4}s_{q3}s_{q5})p_{37} + (\dot{q}_32(c_{q3}c_{q5}s_{q4} - \\
& 4c_{q4}c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q5}) + \dot{q}_4(4c_{q3}s_{q5}c_{q4}^2c_{q5} - s_{q3}c_{q4}c_{q5}^2 + s_{q3}c_{q4}c_{q5} - 4c_{q3}s_{q5}c_{q5}) - \\
& \dot{q}_1(4c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}^2 - 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5} - 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q5} - 2c_{q4}c_{q5}^2) + \dot{q}_5(4c_{q3}c_{q4}s_{q4}c_{q5}^2 - \\
& 2c_{q3}c_{q4}s_{q4} - s_{q3}s_{q4}s_{q5}))p_{40} + (\dot{q}_3(-2s_{q3}s_{q5}c_{q4}^2 + c_{q3}c_{q5}c_{q4} + s_{q3}s_{q5}) - \dot{q}_5(c_{q4}s_{q3}s_{q5} - \\
& c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}) + \dot{q}_1(2c_{q5}s_{q4}c_{q3}^2 - 4c_{q4}s_{q3}s_{q4}s_{q5}c_{q3} - c_{q5}s_{q4}) - 2\dot{q}_4c_{q3}c_{q4}s_{q4}s_{q5})p_{41} + \\
& (2\dot{q}_3c_{q4}^2s_{q3} + 2\dot{q}_4c_{q3}c_{q4}s_{q4} + \dot{q}_12c_{q3}c_{q4}s_{q3}s_{q4})p_{42} + (c_{q3}c_{q4}\dot{q}_3 - \\
& \dot{q}_1(s_{q4} - 2c_{q3}^2s_{q4}))p_{43} - c_{q3}\dot{q}_3p_{44} + (\dot{q}_1(c_{q4} - 2c_{q3}^2c_{q4}) + c_{q3}\dot{q}_3s_{q4})p_{48} - \dot{q}_3s_{q3}p_{50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{14} = & \left( \dot{q}_3 \frac{1}{2} (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3}) - \dot{q}_6 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \right. \\
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4}) + \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4}) - \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_5 + \left( \dot{q}_1 (2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \right. \\
& 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_6 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3}) + \\
& \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_6 + \left( \dot{q}_4 (2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) - \right. \\
& \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}) + \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - \\
& \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - \\
& \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}) - \dot{q}_6 \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}) - \\
& \dot{q}_5 (2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) \left. \right) p_{11} + \\
& (-\dot{q}_5 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) - \\
& \dot{q}_6 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} \\
& - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6}) + \\
& \dot{q}_3 (2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2) + \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \\
& 2 \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \\
& \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}) \left. \right) p_{12} + \left( \frac{1}{2} \dot{q}_6 \mathbf{s}_{2q6} - \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} - \right. \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) - \dot{q}_5 (-\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}) + \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2) - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{13} + \left( \dot{q}_1 (2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - \right. \\
& 4 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}) - \\
& \dot{q}_4 (4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q5} - 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_3 \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \\
& 3 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} + \\
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_6 (2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 + 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q3}) - \dot{q}_5 (4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 3 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6}) \left. \right) p_{14} + (-\dot{q}_3 (2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \\
& 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3}) + \dot{q}_6 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4}) + \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - \\
& \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) + \dot{q}_5 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + 2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5}) - \\
& \dot{q}_1 (2 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 + 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \\
& \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}) + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{15} + \\
& (\dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4}) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4}) - \\
& \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q6}) + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_2 - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5}) \left. \right) p_{16} + \\
& (\dot{q}_1 (2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} - 2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) + \\
& \dot{q}_6 (\mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2}) - \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) \left. \right) p_{17} - \\
& \frac{1}{2} \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} p_{18} + (\dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4}) - \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) - \\
& \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4}) - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q5}) \left. \right) p_{21} + \\
& (\dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) +
\end{aligned}
\tag{A.101}$$



$$\begin{aligned}
& \dot{q}_6 (c_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}) + \dot{q}_5 c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} ) p_{22} + \\
& (\dot{q}_1 c_{q4} s_{q3} s_{q6} - \dot{q}_6 (c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6}) - c_{q4} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q5} - \dot{q}_4 (c_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4})) p_{23} + \\
& (\dot{q}_6 (\frac{1}{2} c_{q4} c_{q6} + \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6}) - \dot{q}_4 (s_{q4} s_{q6} - c_{q5} s_{q4} s_{q6}) + c_{q4} c_{q6} \dot{q}_1 s_{q3} + \\
& c_{q4} \dot{q}_5 s_{q5} s_{q6}) p_{24} + (\dot{q}_5 c_{q3} c_{q4} c_{q5} - \dot{q}_4 c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \dot{q}_1 c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{25} + (\frac{3}{2} \dot{q}_5 c_{q4} c_{q5} - \\
& 2 \dot{q}_4 s_{q4} s_{q5} + \dot{q}_1 s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{32} + (\dot{q}_1 (c_{q5} c_{q3}^2 - 2 c_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 - s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4}) - \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} s_{q5} + \\
& 2 \dot{q}_3 c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4}) p_{33} + (c_{q3}^2 c_{q4} \dot{q}_1 s_{q4} - \dot{q}_3 (\frac{1}{2} c_{q3} - c_{q3} c_{q4}^2)) p_{34} - \frac{1}{2} c_{q3} \dot{q}_3 p_{35} + \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} \dot{q}_5 p_{36} + \frac{1}{2} \dot{q}_6 c_{q3} s_{q4} s_{q5} p_{37} + (\dot{q}_1 (2 c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} + 2 s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5}^2) - \\
& \dot{q}_5 (4 s_{q3} c_{q5}^2 + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2 s_{q3}) + \dot{q}_3 (4 c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q5} - s_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + s_{q3} c_{q4} c_{q5} - \\
& 4 c_{q3} s_{q5} c_{q5}) - 2 c_{q3} c_{q5}^2 \dot{q}_4 s_{q4}) p_{40} + (\dot{q}_1 (4 s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2 s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q5} s_{q3} c_{q3} c_{q4}) - \\
& \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} c_{q5} - 2 \dot{q}_3 c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5}) p_{41} + \dot{q}_1 (c_{q3}^2 - 2 c_{q3}^2 c_{q4}^2) + 2 c_{q3} c_{q4} \dot{q}_3 s_{q4}) p_{42} + \\
& (c_{q3} c_{q4} \dot{q}_1 s_{q3} - c_{q3} c_{q4} \dot{q}_4) p_{43} + (c_{q3} \dot{q}_1 s_{q3} s_{q4} - c_{q3} \dot{q}_4 s_{q4}) p_{48} \\
C_{15} = & (\dot{q}_6 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q4} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q3} s_{q5} - c_{q5} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - \\
& \dot{q}_1 (c_{q3} c_{q5} c_{q6} - c_{q4} c_{q6} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3})) p_5 + \\
& (\dot{q}_1 (2 c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 + 2 c_{q5} s_{q6} c_{q3} - c_{q4} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_4 c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} \\
& + \dot{q}_5 c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + \dot{q}_6 c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5})) p_6 + (\dot{q}_1 (c_{q4} c_{q5} c_{q3}^2 - s_{q3} s_{q5} c_{q3} - 2 c_{q4} c_{q5}) + \\
& \dot{q}_4 c_{q4} c_{q5} s_{q3} - \dot{q}_5 s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_7 + (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} - s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 - \\
& \frac{1}{2} c_{q6} s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} - 2 s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 + s_{q6} c_{q3}^2 + 4 s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + \\
& c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} + s_{q6} c_{q5}^2 - \frac{1}{2} s_{q6}) - \dot{q}_3 (c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} - c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 - \\
& c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6} + \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} + \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5}) + \dot{q}_5 (2 c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}) - \dot{q}_4 (2 s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 + \\
& 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - s_{q3} s_{q6} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5}) + \frac{1}{2} \dot{q}_6 c_{q5} s_{q3} s_{q6}) p_{11} + \\
& (\dot{q}_4 (c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 - c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5}) + \\
& \dot{q}_3 (c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q6} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \\
& \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4} c_{q6}^2) - \dot{q}_6 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_5 (2 c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + \\
& c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6}) + \dot{q}_1 (s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6} - s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q5} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 - \\
& 2 s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q3} c_{q5} c_{q6} + s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6} + \\
& s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2)) p_{12} + (-\dot{q}_1 (s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} + s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} + s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 - \frac{1}{2} s_{q3} c_{q3} c_{q4} - \\
& \frac{1}{2} s_{2q5}) - \dot{q}_4 (-c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + s_{q3} s_{q5} c_{q5} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4}) + \dot{q}_3 (s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 + \\
& c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q5} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4})) p_{13} + (\dot{q}_3 (2 c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 + s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& \frac{1}{2} s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - 2 s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q5} c_{q6}^2) + \dot{q}_1 (2 s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + \\
& 2 s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6}^2 + 2 s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} + 4 s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} - \\
& 2 s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q6} + 2 s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - 2 s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6}) + \dot{q}_5 (c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} + \\
& 2 c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 s_{q5}) - \dot{q}_4 (4 c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - 4 s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - \\
& 3 c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q6}) - \dot{q}_6 (c_{q3} s_{q4} - 2 c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q6})) p_{14} +
\end{aligned} \tag{A.102}$$

$$\begin{aligned}
& (\dot{q}_4 (c_{q4} c_{q5} s_{q2} - c_{q6} s_{q3} + 2c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5}) - \dot{q}_5 (s_{q2} s_{q4} s_{q5} - s_{q3} s_{q5} s_{q6} + \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_1 (s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6}^2 - 2s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + \\
& c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6} + s_{q4} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q6} + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3} + 2c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q6}) + \dot{q}_3 (c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q4} + \\
& c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4}) + \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} s_{q4}) p_{15} + (\dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q5} - \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q4} s_{q5}) - \dot{q}_1 (2c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} - 2c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5}) - \dot{q}_4 c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q5} - \\
& \dot{q}_5 c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + \dot{q}_6 s_{q2} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) p_{16} + (\dot{q}_1 (c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q6} - 2c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + \\
& \dot{q}_2 c_{q2} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + c_{q4} \dot{q}_4 s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q5} \dot{q}_5 s_{q2} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} \dot{q}_6 s_{q2} s_{q4} s_{q5}) p_{17} - \\
& (\dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} s_{q4} - \dot{q}_1 c_{q3} s_{q2} s_{q5}) p_{18} + (-\dot{q}_1 (c_{q5} c_{q6} c_{q3}^2 - c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q3} + c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + \\
& 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5}) - c_{q3} c_{q4} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q5} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q4} + \frac{1}{2} c_{q6} \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4} s_{q5} + \\
& c_{q3} \dot{q}_6 s_{q4} s_{q5} s_{q6})) p_{21} + (\dot{q}_1 (c_{q3}^2 c_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + c_{q3} c_{q4} \dot{q}_4 s_{q5} s_{q6} + \\
& c_{q3} c_{q5} \dot{q}_5 s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q6} \dot{q}_6 s_{q4} s_{q5}) p_{22} + (\dot{q}_6 s_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q5} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q4} - c_{q4} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q5}) p_{23} + \\
& (\dot{q}_4 c_{q4} s_{q5} s_{q6} + \dot{q}_5 c_{q5} s_{q4} s_{q6} + \dot{q}_6 c_{q6} s_{q4} s_{q5}) p_{24} + (-\dot{q}_1 (s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q4} c_{q5} s_{q3} c_{q3}) - \\
& \dot{q}_5 c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} c_{q5}) p_{25} (\frac{3}{2} \dot{q}_4 c_{q4} c_{q5} - \dot{q}_1 (c_{q3} s_{q5} + c_{q4} c_{q5} s_{q3}) - \dot{q}_5 s_{q4} s_{q5}) p_{32} + \\
& (\dot{q}_1 (c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4}) + \dot{q}_3 (c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 + c_{q5} s_{q3} c_{q4}) + \\
& \dot{q}_5 (c_{q5} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q5})) p_{33} + \frac{1}{2} (c_{q3} c_{q4} \dot{q}_4 - \frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4}) p_{36} + \\
& (\dot{q}_6 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5})) p_{37} + (\dot{q}_4 (2s_{q3} - 4s_{q3} c_{q5}^2 - 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5}) + \\
& (\dot{q}_3 (4c_{q3} c_{q4} s_{q4} c_{q5}^2 - 2c_{q3} c_{q4} s_{q4} - s_{q3} s_{q4} s_{q5}) + \dot{q}_1 (c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 - \\
& 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 + c_{q3}^2 + 4s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + 2c_{q5}^2 - 1)) p_{40} + \\
& (-\dot{q}_1 (c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q4}) - \dot{q}_3 (c_{q4} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}) - \dot{q}_5 (s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5})) p_{41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{16} = & (\dot{q}_1 (c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} + c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + c_{q3} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) - \\
& \dot{q}_4 (\frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6}) - \dot{q}_6 (c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4}) - \\
& \dot{q}_3 c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + \dot{q}_5 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) p_5 + (\dot{q}_4 (s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) - \\
& \dot{q}_6 (c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6}) + \dot{q}_1 (2c_{q3}^2 s_{q4} s_{q6} - 2s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} c_{q6} + \\
& 2c_{q3} c_{q6} s_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}) + \dot{q}_5 c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_6 + (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} - \\
& \frac{1}{2} c_{q6} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} - c_{q6} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} - 2c_{q6} s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} c_{q3} c_{q4} + \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q3} c_{q5} + \frac{1}{2} c_{q6} s_{q5} c_{q5}) + (\dot{q}_3 (c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 + \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q5} + \frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 - c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} s_{q5} s_{q6}) - \\
& \dot{q}_6 (c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}) - \dot{q}_4 (\frac{3}{2} 3c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}) + \frac{1}{2} \dot{q}_5 c_{q5} s_{q3} s_{q6}) p_{11} + (\dot{q}_1 (-s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6} - \\
& 2s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} - s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + 2s_{q6} c_{q3}^2 c_{q6} - \\
& s_{q6} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + 2s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} c_{q6}^2 - s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} + \\
& s_{q3} s_{q6} c_{q4} c_{q5} + s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} - \frac{1}{2} s_{2q6}) - \dot{q}_5 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_4 (s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + \\
& c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 - s_{q3} s_{q6} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} - \dot{q}_3 (2c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 - c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 -
\end{aligned}
\tag{A.103}$$

$$\begin{aligned}
& s_{q3}s_{q5}c_{q4}c_{q6}^2 - c_{q3}s_{q4}s_{q6}c_{q4}c_{q6} + \frac{1}{2}s_{q3}s_{q5}c_{q4} - c_{q3}c_{q5}c_{q6}^2 + c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q6} + \\
& \frac{1}{2}c_{q3}c_{q5} \Big) p_{12} + \frac{1}{2}\dot{q}_4 s_{2q6} p_{13} + \Big( \dot{q}_1 \Big( 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + \\
& 4s_{q4}s_{q6}c_{q3}^2 c_{q4}c_{q5}c_{q6} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q3}^2 c_{q5}^2 + 4c_{q3}^2 c_{q6}^2 - 2c_{q3}^2 + \\
& 4s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}^2 - 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}c_{q5} - 4s_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q3}c_{q6} + 2c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \\
& c_{q5}^2 - 2c_{q6}^2 + 1 \Big) + \dot{q}_4 \Big( 2s_{q3}c_{q5}^2 - 4s_{q3}c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 4c_{q3}c_{q4}s_{q5}c_{q5}c_{q6}^2 + \\
& 2c_{q3}c_{q4}s_{q5}c_{q5} + 4s_{q3}c_{q6}^2 + 4c_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q6} - 2s_{q3} \Big) - \dot{q}_5 \Big( c_{q3}s_{q4} - \\
& 2c_{q3}c_{q6}^2 s_{q4} + c_{q6}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q6} \Big) - \dot{q}_3 \Big( \frac{3}{2}c_{q3}c_{q4}s_{q4} - c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q5} + \\
& \frac{1}{2}c_{q4}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 3c_{q3}c_{q4}c_{q6}^2 s_{q4} + 2c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q6} - 4c_{q3}c_{q4}^2 c_{q5}c_{q6}s_{q6} + \\
& 2c_{q5}c_{q6}^2 s_{q3}s_{q4}s_{q5} \Big) \Big) p_{14} + \Big( \dot{q}_1 \Big( 3s_{q5}c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}c_{q6}^3 - 2s_{q5}c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}c_{q6} - \\
& s_{q5}s_{q6}c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} - s_{q4}s_{q5}c_{q3}^2 c_{q4}c_{q6} - s_{q5}s_{q6}c_{q3}^2 c_{q5} - s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2 - \\
& s_{q3}s_{q4}c_{q3}c_{q5}c_{q6} + s_{q5}s_{q6}c_{q5} \Big) + \dot{q}_4 \Big( \frac{1}{2}c_{q3}c_{q4}s_{q6} - c_{q5}s_{q3}s_{q5}s_{q6} + \\
& \frac{1}{2}c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2 s_{q6} + c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q4} \Big) + \dot{q}_6 \Big( c_{q3}c_{q6}s_{q4} - s_{q3}s_{q5}s_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q6} \Big) + \\
& \dot{q}_3 \Big( c_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q4}c_{q5} - c_{q3}c_{q6}s_{q5}c_{q4}^2 + \frac{1}{2}s_{q3}s_{q4}s_{q6}c_{q5}^2 + c_{q3}c_{q6}s_{q5} \Big) \Big) p_{15} + \\
& \Big( \dot{q}_2 \Big( c_{q2}c_{q5}s_{q6} - c_{q2}c_{q5}s_{q4}s_{q6} \Big) - \dot{q}_4 \Big( c_{q6}s_{q2}s_{q4} + c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q6} \Big) - \\
& \dot{q}_6 \Big( c_{q4}s_{q2}s_{q6} + c_{q5}c_{q6}s_{q2}s_{q4} \Big) + \dot{q}_1 \Big( c_{q6}s_{q2}s_{q3}s_{q4} + 2c_{q3}s_{q2}s_{q5}s_{q6} + 2c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q3}s_{q6} \Big) + \\
& \dot{q}_5 s_{q2}s_{q4}s_{q5}s_{q6} \Big) p_{16} + \Big( \dot{q}_1 \Big( c_{q3}c_{q6}s_{q2}s_{q5} - 2s_{q2}s_{q4}s_{q6} + 2c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2}s_{q3} \Big) + \\
& \dot{q}_4 \Big( s_{q2}s_{q4}s_{q6} - c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2} \Big) - \dot{q}_6 \Big( c_{q4}c_{q6}s_{q2} - c_{q5}s_{q2}s_{q4}s_{q6} \Big) - \dot{q}_2 c_{q2}c_{q5}c_{q6}s_{q4} + \\
& \dot{q}_5 c_{q6}s_{q2}s_{q4}s_{q5} \Big) p_{17} + \Big( \dot{q}_1 \Big( s_{q5}s_{q6}c_{q3}^2 + c_{q4}s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q5} + c_{q6}s_{q3}s_{q4}c_{q3} - \\
& c_{q4}s_{q2}s_{q3}s_{q6}c_{q5}^2 + c_{q4}c_{q6}s_{q3}c_{q5} + c_{q4}s_{q2}s_{q3}s_{q6} \Big) - \dot{q}_4 \Big( c_{q3}c_{q6}s_{q4} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q6} \Big) - \\
& \dot{q}_6 \Big( c_{q3}c_{q4}s_{q6} + c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q4} \Big) + \dot{q}_3 c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + \dot{q}_5 c_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6} \Big) p_{21} + \\
& \Big( \dot{q}_1 \Big( c_{q3}^2 c_{q6}s_{q5} - c_{q3}s_{q3}s_{q4}s_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3} \Big) + \dot{q}_4 \Big( c_{q3}s_{q4}s_{q6} - c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6} \Big) - \\
& \dot{q}_6 \Big( c_{q3}c_{q4}c_{q6} - c_{q3}c_{q5}s_{q4}s_{q6} \Big) + \dot{q}_5 c_{q3}c_{q6}s_{q4}s_{q5} \Big) p_{22} + \Big( c_{q6}\dot{q}_1 s_{q3}s_{q4} - \\
& \dot{q}_6 \Big( c_{q4}s_{q6} + c_{q5}c_{q6}s_{q4} \Big) - \dot{q}_4 \Big( c_{q6}s_{q4} + c_{q4}c_{q5}s_{q6} \Big) + \dot{q}_5 s_{q4}s_{q5}s_{q6} \Big) p_{23} + \\
& \Big( \dot{q}_4 \Big( \frac{1}{2}c_{q4}c_{q6} + \frac{1}{2}s_{q4}s_{q6} - c_{q4}c_{q5}c_{q6} \Big) - \dot{q}_6 \Big( c_{q4}c_{q6} - c_{q5}s_{q4}s_{q6} \Big) + c_{q6}\dot{q}_5 s_{q4}s_{q5} - \\
& \dot{q}_1 s_{q3}s_{q4}s_{q6} \Big) p_{24} + \dot{q}_5 \Big( \frac{1}{2}s_{q3}s_{q5} - \frac{1}{2}c_{q3}c_{q4}c_{q5} \Big) - \\
& \dot{q}_3 \Big( \frac{1}{2}c_{q3}c_{q5} - c_{q4}s_{q3}s_{q5} \Big) + \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q3} s_{q4} s_{q5} \Big) p_{37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{21} = & \frac{1}{2}\dot{q}_1 s_{2q2} p_1 - \Big( \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q2} c_{q4} s_{q5} + \frac{1}{2}\dot{q}_5 c_{q2} c_{q5} s_{q4} \Big) p_{15} + \Big( \dot{q}_6 \Big( \frac{1}{2}c_{q2}c_{q5}s_{q6} - c_{q2}c_{q4}c_{q6} + \\
& \frac{1}{2}c_{q2}c_{q5}s_{q4}s_{q6} \Big) + \dot{q}_1 \Big( 2c_{q2}c_{q3}c_{q6}s_{q5} - c_{q2}s_{q3}s_{q4}s_{q6} + 2c_{q2}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3} \Big) + \\
& \dot{q}_4 \Big( c_{q2}s_{q4}s_{q6} - \frac{1}{2}c_{q2}c_{q4}c_{q5}c_{q6} \Big) + \dot{q}_5 \Big( \frac{1}{2}c_{q2}c_{q6}s_{q5} + \frac{1}{2}c_{q2}c_{q6}s_{q4}s_{q5} \Big) \Big) p_{16} + \\
& \Big( \dot{q}_4 c_{q2}c_{q6}s_{q4} - \dot{q}_1 \Big( 2c_{q2}c_{q6}s_{q4} + c_{q2}c_{q3}s_{q5}s_{q6} + 2c_{q2}c_{q4}c_{q5}s_{q3}s_{q6} \Big) + \\
& \dot{q}_6 c_{q2}c_{q4}s_{q6} \Big) p_{17} - \Big( \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q2} c_{q4} s_{q5} + \frac{1}{2}\dot{q}_5 c_{q2} c_{q5} s_{q4} + \dot{q}_1 c_{q2} c_{q3} c_{q5} \Big) p_{18} \\
& - \dot{q}_1 c_{q2} s_{q3} p_{19} - c_{q2}c_{q3}\dot{q}_1 p_{20} + \dot{q}_1 \Big( c_{q2}c_{q4}c_{q6}s_{q3} - c_{q2}c_{q4}c_{q5}^2 c_{q6}s_{q3} \Big) p_{21} + \\
& \dot{q}_1 s_{q2} p_{24} - \frac{1}{2}c_{q2}\dot{q}_1 p_{28} + \dot{q}_1 \Big( 2c_{q2}^2 - 1 \Big) p_{49}
\end{aligned} \tag{A.104}$$

$$C_{22} = 0 \tag{A.105}$$

$$\begin{aligned}
C_{23} = & \left( \dot{q}_5 \left( c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} + c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} \right) + \right. \\
& \dot{q}_4 \left( c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} + c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} \right) + \\
& \dot{q}_3 \left( c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q6} - c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q5} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} \left. \right) + \dot{q}_6 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} \left. \right) \left. \right) p_{16} + \left( \dot{q}_3 \left( c_{q3} c_{q5} - \right. \right. \\
& c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} - c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} - s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \left. \right) + \\
& \dot{q}_4 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q2} c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - \\
& \dot{q}_6 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} + s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} \left. \right) \left. \right) p_{17} + \left( -\dot{q}_3 \left( c_{q2} c_{q3} c_{q5} + c_{q5} s_{q2} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} \right) + \right. \\
& \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} + \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q3} s_{q2} s_{q5} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} + \right. \\
& c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} + \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} \left. \right) \left. \right) p_{18} - \dot{q}_3 \left( c_{q2} s_{q3} - c_{q3} s_{q2} \right) p_{19} - \dot{q}_3 \left( c_{q2} c_{q3} + s_{q2} s_{q3} \right) p_{20} + \\
& \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.106}$$

$$\begin{aligned}
C_{24} = & \left( -\frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q5} \right) p_{15} + \left( \dot{q}_3 \left( c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} + \right. \right. \\
& c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} \left. \right) - \dot{q}_4 \left( c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q6} - c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} + \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} s_{q5} \right) - \dot{q}_6 \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q2} - \right. \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} + \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + \\
& \dot{q}_1 \left( c_{q2} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) \left. \right) p_{16} + \left( \dot{q}_3 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q6} - \right. \right. \\
& c_{q2} c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \left. \right) - \dot{q}_4 \left( c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + \right. \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} \left. \right) - \dot{q}_6 \left( c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q4} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) + \\
& c_{q2} c_{q6} \dot{q}_1 s_{q4} \left. \right) p_{17} + \left( \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} \right) + \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} + \right. \right. \\
& \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \left. \right) - \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q5} \left. \right) p_{18} + \left( \dot{q}_4 \left( c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} \right) + \right. \\
& \left. \left( \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} \right) + \dot{q}_3 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) \right) \right) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.107}$$

$$\begin{aligned}
C_{25} = & \left( -\frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q5} s_{q4} \right) p_{15} + \left( \dot{q}_3 \left( c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} + \right. \right. \\
& c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q5} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} \left. \right) - \dot{q}_4 \left( c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} s_{q5} \right) + \dot{q}_6 \left( c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + \right. \\
& c_{q2} c_{q3} c_{q5} s_{q6} - \sigma_2 - c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q5} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q4} s_{q5} \left. \right) \left. \right) p_{16} + \left( \dot{q}_6 \left( c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q5} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} + s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_4 \left( c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) - \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} + \right. \\
& c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} + \frac{1}{2} c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} \left. \right) \left. \right) p_{17} + \\
& \left( \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q2} c_{q3} c_{q5} + c_{q5} s_{q2} s_{q3} - c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} + \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} \left. \right) - \dot{q}_3 \left( c_{q3} s_{q2} s_{q5} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} \left. \right) - \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q5} s_{q4} \left. \right) p_{18} + \left( \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} \right) \right) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.108}$$

$$\begin{aligned}
C_{26} = & \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q6} - c_{q2} c_{q4} c_{q6} + \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - \dot{q}_4 \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q2} - \right. \right. \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} + \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + \\
& \dot{q}_3 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - c_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_6 \left( c_{q3} s_{q2} s_{q4} s_{q6} - \right. \\
& c_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q5} + c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} - \\
& c_{q2} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - \right. \\
& c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q5} s_{q6} \left. \right) \Big) p_{16} + \left( \dot{q}_5 \left( c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} - \right. \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} + c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q5} \left. \right) - \dot{q}_4 \left( c_{q2} c_{q4} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q2} s_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q4} \left. \right) - \dot{q}_3 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - \right. \\
& c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} + s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \left. \right) - \\
& \dot{q}_6 \left( c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} + s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q6} \Big) p_{17}
\end{aligned} \tag{A.109}$$

$$\begin{aligned}
C_{31} = & \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} s_{2q3} - c_{q6} s_{q5} + s_{q5} s_{q6} - 2c_{q3}^2 s_{q5} s_{q6} - c_{q6} s_{q3} s_{q5} + 2c_{q3}^2 c_{q6} s_{q5} - \right. \right. \\
& 2c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) + \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \left. \right) - \dot{q}_6 \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \left. \right) \Big) p_5 + \left( \dot{q}_1 \left( 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 4c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - 4c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) + \right. \\
& \dot{q}_4 \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) + \dot{q}_6 \left( c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) - \\
& \dot{q}_5 c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \Big) p_6 + \left( \dot{q}_1 \left( 2c_{q4} s_{q3} s_{q5} c_{q3} - 2c_{q5} c_{q3}^2 + c_{q5} \right) - \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} s_{q5} - \right. \\
& \dot{q}_5 c_{q3} c_{q5} s_{q4} \Big) p_7 + \left( \dot{q}_6 \left( c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q4}^2 s_{q5} s_{q6} + \frac{1}{2} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q4} + \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q6} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} + \dot{q}_5 \left( c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 - \right. \\
& c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} + \frac{3}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} - \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} \left. \right) - \dot{q}_1 \left( s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} - 4s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5}^2 - 2c_{q6} s_{q4} c_{q3}^2 c_{q5} + \right. \\
& s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} c_{q4} + 2s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q5} + 2s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 - \\
& \frac{1}{2} s_{q6} c_{q4} + c_{q6} s_{q4} c_{q5} \left. \right) + \dot{q}_4 \left( c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5} - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \frac{3}{2} s_{q3} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 + \right. \\
& 2c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q6} - s_{q3} s_{q6} c_{q4} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \frac{3}{2} s_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6} + \frac{1}{2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} \left. \right) \Big) p_{11} + \\
& \left( \dot{q}_6 \left( c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 - 2c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6}^2 + c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q6} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} c_{q4} + \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} \left. \right) + \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 s_{q3} - 2c_{q3} c_{q6}^2 s_{q3} + \right. \\
& c_{q6} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5} + c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6}^2 s_{q3} + c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 s_{q3} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + \\
& 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \left. \right) + \\
& \dot{q}_4 \left( s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6}^2 + 2c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \right. \\
& c_{q3} c_{q6}^2 - s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q6} + \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \right. \\
& s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4} c_{q6}^2 - c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q6} \left. \right) \Big) p_{12} + \left( \dot{q}_4 \left( c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q5} - \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 \left. \right) + \dot{q}_1 \left( s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} + s_{q3} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 + s_{q3} c_{q3} c_{q5}^2 - \frac{1}{2} s_{q5} c_{q4} c_{q5} \right) + \\
& \dot{q}_5 \left( s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 + c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q5} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4} \right) \Big) p_{13} + \left( \dot{q}_5 \left( 2c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 - \right. \right. \\
& s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \frac{1}{2} s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} - \frac{3}{2} c_{q3} s_{q5} c_{q6}^2 + 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q6} \left. \right) - \\
& \dot{q}_1 \left( 4s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} + 4s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q6}^2 + 2s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + \right.
\end{aligned} \tag{A.110}$$

$$\begin{aligned}
& 4s_{q3}s_{q4}c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}^2 + 2s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q5}^2c_{q6} - 4s_{q3}s_{q6}c_{q3}c_{q6} - 2s_{q5}s_{q6}c_{q4}c_{q5}c_{q6} \\
& - 2s_{q4}s_{q5}c_{q6}^2) - \dot{q}_4 \left( \frac{7}{2}c_{q3}c_{q6}s_{q6} + \frac{1}{2}c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} - \right. \\
& 3c_{q3}c_{q4}^2c_{q6}s_{q6} - 2c_{q3}c_{q5}^2c_{q6}s_{q6} + 2c_{q6}^2s_{q3}s_{q4}s_{q5} - 4c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}^2s_{q4} + \\
& 3c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q5}s_{q6} \left. \right) - \dot{q}_6 \left( \frac{3}{2}c_{q3}c_{q4}s_{q4} - c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q5} + \frac{1}{2}c_{q4}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - \right. \\
& 3c_{q3}c_{q4}c_{q6}^2s_{q4} + 2c_{q3}c_{q5}c_{q6}s_{q6} - 4c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}s_{q6} + 2c_{q5}c_{q6}^2s_{q3}s_{q4}s_{q5} \left. \right) p_{14} + \\
& (\dot{q}_5 (c_{q3}c_{q5}s_{q6} - c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}s_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q6}s_{q4} + c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2c_{q6}s_{q4}) + \\
& \dot{q}_1 (2s_{q4}s_{q6}c_{q3}^2c_{q5} - 2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}^2c_{q6} + 2s_{q3}s_{q5}s_{q6}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}^2 + 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6} - \\
& 2s_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6}c_{q3}c_{q4} + 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q5}c_{q6} + c_{q4}c_{q5}^2c_{q6} - s_{q4}s_{q6}c_{q5}) - \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2}c_{q4}c_{q6}s_{q3} - \right. \\
& c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q6} + c_{q4}c_{q5}^2c_{q6}s_{q3} - 2c_{q3}c_{q4}s_{q4}s_{q5}s_{q6} + 2c_{q3}c_{q4}^2c_{q5}c_{q6}s_{q5} \left. \right) + \dot{q}_6 (s_{q3}s_{q4}s_{q6} - \\
& c_{q3}c_{q4}^2c_{q6}s_{q5} + \frac{1}{2}c_{q5}^2s_{q3}s_{q4}s_{q6} - c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q4}s_{q5}s_{q6} \left. \right) p_{15} + \\
& (\dot{q}_1 (2c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2} - c_{q3}s_{q2}s_{q4}s_{q6} - 2c_{q6}s_{q2}s_{q3}s_{q5})) p_{16} + \\
& (\dot{q}_1 (s_{q2}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q6})) p_{17} + \dot{q}_1 c_{q5}s_{q2}s_{q3} p_{18} - \dot{q}_1 c_{q3}s_{q2} p_{19} + \dot{q}_1 s_{q2}s_{q3} p_{20} + \\
& (\dot{q}_1 (s_{q4}s_{q6} - 2c_{q3}^2s_{q4}s_{q6} - c_{q4}c_{q5}c_{q6} - 2c_{q3}c_{q6}s_{q3}s_{q5} + 2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}c_{q6} + c_{q3}c_{q4}c_{q6}s_{q2} - \\
& c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q6} - c_{q3}c_{q4}c_{q5}^2c_{q6}s_{q2}) - \dot{q}_4 (s_{q3}s_{q4}s_{q6} - \frac{1}{2}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3}) + \dot{q}_6 (c_{q4}c_{q6}s_{q3} - \\
& \frac{1}{2}c_{q5}s_{q3}s_{q4}s_{q6}) - \dot{q}_5 c_{q6}s_{q3}s_{q4}s_{q5} \left. \right) p_{21} + (\dot{q}_1 (c_{q6}s_{q4} + c_{q4}c_{q5}s_{q6} - 2c_{q3}^2c_{q6}s_{q4} + \\
& 2c_{q3}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - 2c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}s_{q6}) - \dot{q}_4 (c_{q6}s_{q3}s_{q4} + c_{q4}c_{q5}s_{q3}s_{q6}) - \dot{q}_6 (c_{q4}s_{q3}s_{q6} + \\
& c_{q5}c_{q6}s_{q3}s_{q4}) + \dot{q}_5 s_{q3}s_{q4}s_{q5}s_{q6} \left. \right) p_{22} - \dot{q}_1 c_{q3}s_{q4}s_{q6} p_{23} - \dot{q}_1 c_{q3}c_{q6}s_{q4} p_{24} + \\
& (\dot{q}_1 (2c_{q4}s_{q5}c_{q3}^2 + 2c_{q5}s_{q3}c_{q3} - c_{q4}s_{q5}) + \dot{q}_4 c_{q4}s_{q3}s_{q5} + \dot{q}_5 c_{q5}s_{q3}s_{q4}) p_{25} - \\
& \dot{q}_1 (2c_{q3}^2 - 1) p_{27} + \frac{1}{2}\dot{q}_1 s_{q3} p_{29} + \frac{1}{2}\dot{q}_1 s_{q3} p_{30} - \frac{1}{2}c_{q3}\dot{q}_1 p_{31} + \dot{q}_1 (c_{q5}s_{q3} + c_{q3}c_{q4}s_{q5}) p_{32} + \\
& (-\dot{q}_5 (c_{q3}s_{q5} - c_{q3}c_{q4}^2s_{q5}) - \dot{q}_4 (s_{q3}s_{q4}s_{q5} - 2c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q4}) - \dot{q}_1 (2c_{q4}c_{q5}s_{q3}s_{q4}c_{q3} - \\
& 2s_{q4}s_{q5}c_{q3}^2 + s_{q4}s_{q5})) p_{33} + (-\dot{q}_4 (\frac{1}{2}c_{q3} - c_{q3}c_{q4}^2) - \dot{q}_1 c_{q3}c_{q4}^2s_{q3}) p_{34} + \frac{1}{2}c_{q3}\dot{q}_4 p_{35} + \\
& \frac{1}{2}\dot{q}_5 s_{q3}s_{q4} p_{36} + \dot{q}_6 (\frac{1}{2}c_{q3}c_{q5} - \frac{1}{2}c_{q4}s_{q3}s_{q5}) p_{37} + (\dot{q}_4 (4c_{q3}s_{q5}c_{q4}^2c_{q5} + s_{q3}c_{q4}c_{q5}^2 + \\
& s_{q3}c_{q4}c_{q5}) - \dot{q}_1 (2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q4}^2c_{q5} - 4c_{q3}^2c_{q4}c_{q5}^2 + 2s_{q3}s_{q5}c_{q3}c_{q5} + 2c_{q4}c_{q5}^2) - \\
& \dot{q}_5 (2c_{q3}c_{q4}s_{q4} - 4c_{q3}c_{q4}s_{q4}c_{q5}^2 + s_{q3}s_{q4}s_{q5})) p_{40} + (\dot{q}_5 (c_{q3}c_{q4}^2c_{q5} - c_{q3}c_{q5}) + \\
& \dot{q}_1 (c_{q5}s_{q4} - 2c_{q5}s_{q4}c_{q3}^2 + 4c_{q4}s_{q3}s_{q4}s_{q5}c_{q3}) - \dot{q}_4 (c_{q5}s_{q3}s_{q4} + 2c_{q3}c_{q4}s_{q4}s_{q5})) p_{41} + \\
& (2c_{q3}c_{q4}\dot{q}_4s_{q4} - 2c_{q3}c_{q4}\dot{q}_1s_{q3}s_{q4}) p_{42} + (\dot{q}_1 (s_{q4} - 2c_{q3}^2s_{q4}) - \dot{q}_4s_{q3}s_{q4}) p_{43} + \\
& (c_{q4}\dot{q}_4s_{q3} - \dot{q}_1 (c_{q4} - 2c_{q3}^2c_{q4})) p_{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{32} = & (\dot{q}_2 (c_{q2}s_{q3}s_{q4}s_{q6} - c_{q3}s_{q2}s_{q4}s_{q6} - c_{q6}s_{q2}s_{q3}s_{q5} - c_{q2}c_{q3}c_{q6}s_{q5} - \\
& c_{q2}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q3} + c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2}) - \dot{q}_6 c_{q2}c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6}) p_{16} + \\
& (\dot{q}_6 (\frac{1}{2}c_{q2}c_{q3}c_{q4}c_{q5}c_{q6} - \frac{1}{2}c_{q4}c_{q5}c_{q6}s_{q2}s_{q3}) - \dot{q}_5 (\frac{1}{2}s_{q3}s_{q5} - \frac{1}{2}c_{q4}s_{q2}s_{q3}s_{q5}s_{q6}) + \\
& \dot{q}_2 (c_{q2}c_{q6}s_{q3}s_{q4} - c_{q3}c_{q6}s_{q2}s_{q4} + c_{q2}c_{q3}s_{q5}s_{q6} + s_{q2}s_{q3}s_{q5}s_{q6} - c_{q3}c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q6}) + \\
& \frac{1}{2}\dot{q}_4 c_{q5}s_{q2}s_{q3}s_{q4}s_{q6}) p_{17} + (\dot{q}_5 (\frac{1}{2}c_{q2}c_{q4}s_{q3}s_{q5} + \frac{1}{2}c_{q2}c_{q3}c_{q4}c_{q5}) + \\
& \dot{q}_4 (c_{q2}c_{q5}s_{q3}s_{q4} + \frac{1}{2}s_{q2}s_{q3}s_{q4}s_{q5}) + \dot{q}_2 (c_{q2}c_{q3}c_{q5} + c_{q5}s_{q2}s_{q3} - c_{q2}c_{q4}s_{q3}s_{q5} + \\
& c_{q4}c_{q5}s_{q2}s_{q3})) p_{18} + \dot{q}_2 (c_{q2}s_{q3} - c_{q3}s_{q2}) p_{19} + \dot{q}_2 (c_{q2}c_{q3} + s_{q2}s_{q3}) p_{20} - \\
& \dot{q}_4 (\frac{1}{2}c_{q2}c_{q3}s_{q4}s_{q5} + \frac{1}{2}s_{q2}s_{q3}s_{q4}s_{q5}) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.111}$$

$$\begin{aligned}
C_{33} = & (\dot{q}_4(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}) + \dot{q}_6(\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q6}) + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}\dot{q}_5\mathbf{s}_{q5})p_5 + \\
& (\dot{q}_4(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_6(\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}) - 2\dot{q}_5\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6})p_6 + \\
& (\dot{q}_4\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\dot{q}_5)p_7 + (\dot{q}_5(2\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5} - \\
& 2\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_6(\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5}) - \dot{q}_4(\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5} - \\
& 2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}^2 + 2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}))p_{11} + (\dot{q}_5(\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6} - \\
& \mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2) + \dot{q}_4(2\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} - \\
& \mathbf{s}_{2q4}) + \dot{q}_6(\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6} + 2\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5} - \\
& \mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}))p_{12} + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2\dot{q}_4\mathbf{s}_{q4} - \dot{q}_5(\mathbf{s}_{2q5} - \mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}))p_{13} + (\dot{q}_5(2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6} - \\
& \mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}^2) - \dot{q}_4(\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 - 2\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} + \\
& \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_6(\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6}^2 - 2\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5}^2 - \\
& 2\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q4}^2))p_{14} + \dot{q}_6(\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2 - \mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}) + \\
& \dot{q}_5(2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5} + 2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6}) + \dot{q}_4(2\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2 - \\
& 2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4} - \mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}))p_{15} + (\dot{q}_6\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\dot{q}_5)p_{21} + \\
& (\mathbf{c}_{q5}\dot{q}_5\mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q6}\dot{q}_6\mathbf{s}_{q5})p_{22} - \dot{q}_5\mathbf{s}_{q5}p_{25} + \dot{q}_4(2\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q5}) + \dot{q}_5\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5})p_{33} + \\
& (\dot{q}_5(2\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q4}^2 - 4\mathbf{c}_{q5}^2 + 2) - 2\dot{q}_4\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5})p_{40} + \\
& (\dot{q}_4(\mathbf{s}_{q5} - 2\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{s}_{q5}) - \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\dot{q}_5\mathbf{s}_{q4})p_{41} + (\dot{q}_4(2\mathbf{c}_{q4}^2 - 1))p_{42}
\end{aligned} \tag{A.112}$$

$$\begin{aligned}
C_{34} = & (\dot{q}_1(\frac{1}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q3}) + \\
& \dot{q}_3(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}))p_5 + (\dot{q}_1(\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_3(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6} - \\
& 2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}))p_6 + (\dot{q}_3\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}\dot{q}_1\mathbf{s}_{q5})p_7 + (-\dot{q}_6(\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}) + \\
& \dot{q}_3(2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}^2 - 2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q5}) + \dot{q}_1(-\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q3}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5} + \frac{3}{2}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2 + 2\mathbf{c}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4} + \\
& \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{3}{2}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5})) - \\
& \dot{q}_4(2\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q6}) + 2\dot{q}_5\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6})p_{11} + \\
& (\dot{q}_1(\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + 2\mathbf{c}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6}) + \dot{q}_3(2\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2}\mathbf{s}_{2q4}) + \dot{q}_4(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6}) + \dot{q}_5(\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \frac{1}{2}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{c}_{q6}^2) - \dot{q}_6(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q5}))p_{12} + \\
& (\dot{q}_5(\frac{1}{2}\mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{s}_{q4}) - \dot{q}_1(\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q5}) - \dot{q}_4\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5} + \\
& \dot{q}_3\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{s}_{q4})p_{13} + (\dot{q}_5(\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_6(\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_3(\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 - 2\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} + \\
& \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6})) + \dot{q}_4(\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}\mathbf{c}_{q6}) - \dot{q}_1(\frac{7}{2}\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q6} + \\
& \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5} - 3\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}^2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q6}^2\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q5} - \\
& 4\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}^2\mathbf{s}_{q4} + 3\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q5}\mathbf{s}_{q6}))p_{14} + (\dot{q}_6(\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6} - \\
& \frac{1}{2}\mathbf{c}_{q5}^2\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} - 2\mathbf{c}_{q3}\mathbf{c}_{q5}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q5}) - \dot{q}_1(\frac{1}{2}\mathbf{c}_{q4}\mathbf{c}_{q6}\mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q5}\mathbf{s}_{q3}\mathbf{s}_{q4}\mathbf{s}_{q6} +
\end{aligned} \tag{A.113}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} ) - \\
& \dot{q}_4 ( \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} ) - \dot{q}_3 ( 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} - 2\mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) - \\
& \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{15} + + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_2 \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} p_{17} + \dot{q}_2 ( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{18} + \\
& ( \dot{q}_4 ( \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} ) - \dot{q}_1 ( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} ) - \dot{q}_6 ( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) + \\
& \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{21} + ( \dot{q}_4 ( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} ) + \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \\
& \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_{22} + ( \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q5} ) p_{25} + \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_1 ( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \\
& 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} ) - \dot{q}_3 ( \mathbf{c}_{q5} - 2\mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} ) p_{33} - \dot{q}_1 ( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 ) p_{34} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \dot{q}_1 p_{35} - \frac{1}{2} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} p_{36} \\
& + \frac{1}{2} \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} p_{37} + ( -\dot{q}_2 ( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{38} + ( \dot{q}_1 ( 4\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} + \\
& \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} ) - 2\dot{q}_4 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2\dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - 2\dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{40} + \\
& ( \dot{q}_3 ( \mathbf{s}_{q5} - 2\mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) + \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} ) p_{41} + ( \dot{q}_3 ( 2\mathbf{c}_{q4}^2 - 1 ) + \\
& 2\dot{q}_1 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} ) p_{42} + ( \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} - \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} ) p_{43} + ( \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_4 ) p_{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{35} = & \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} ) p_5 + \\
& ( \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - 2\dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_6 - ( \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} + \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + \\
& \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} ) p_7 + ( \dot{q}_3 ( 2\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - 2\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q6} ) + \\
& \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} + \\
& \frac{1}{2} 3\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} ) + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + 2\dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_{11} + \\
& ( \dot{q}_6 ( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} ) - \dot{q}_3 ( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} ) + \\
& \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} ) + \dot{q}_4 ( \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 ) + \dot{q}_5 ( 2\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} - \\
& \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) ) p_{12} + ( \dot{q}_4 ( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} ) - \dot{q}_3 ( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{2q5} - \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} ) + \\
& \dot{q}_1 ( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} ) ) p_{13} + ( \dot{q}_3 ( 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \\
& \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 ) - \dot{q}_1 ( 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 2\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} 3\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} ) - \\
& \dot{q}_4 ( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_6 ( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} ) - \\
& \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{14} + ( \dot{q}_3 ( 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 - \\
& \mathbf{c}_{q6} ) + \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \\
& 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} ) + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{15} - \\
& \dot{q}_2 ( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_{17} + \dot{q}_2 ( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} ) p_{18} + \\
& ( \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{21} + \\
& ( \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_{22} + ( \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \\
& \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} - \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q5} ) p_{25} + ( \dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \\
& \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{33} + ( \frac{1}{2} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} ) p_{36} + \frac{1}{2} \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} p_{37} + \\
& ( \dot{q}_1 ( 4\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_3 ( -2\mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4}^2 + 4\mathbf{c}_{q5}^2 - 2 ) + \\
& 2\dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{40} + ( -\dot{q}_1 ( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} ) - \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} - \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} ) p_{41}
\end{aligned} \tag{A.114}$$



$$\begin{aligned}
C_{36} = & \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) + \right. \\
& \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_6 \mathbf{s}_{q5} ) p_5 + \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4}) - \dot{q}_3 (\mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \right. \\
& 2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}) + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \dot{q}_6 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) p_6 + \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} ) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} ) - \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} ) ) p_{11} + \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} ) - \\
& \dot{q}_5 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} ) + \dot{q}_3 (\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} + 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} ) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) ) p_{12} + \\
& \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) + \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4}^2 - 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5}^2 ) - \\
& \dot{q}_5 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} ) - \dot{q}_1 (\frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \\
& 3 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) ) p_{14} + \\
& \left( \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 - \right. \\
& \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) + \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \\
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) + \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) ) p_{15} - \\
& \frac{1}{2} \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} p_{16} + \dot{q}_2 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} ) p_{17} + \\
& \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) + \dot{q}_6 (\mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} ) + \right. \\
& \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) ) p_{21} + \left( \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} ) + \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} ) p_{22} + \dot{q}_1 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} ) + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q5} + \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_5 \mathbf{s}_{q4} ) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.115}$$

$$\begin{aligned}
C_{41} = & \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} ) + \right. \\
& \dot{q}_6 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) p_5 + \\
& \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} ) - \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} ) ) p_6 + \left( \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_1 (2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) ) p_7 + \right. \\
& \left( \dot{q}_6 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} ) - \right. \\
& \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 - \\
& \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} ) - \\
& \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{3}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \\
& \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{3}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - \dot{q}_5 (2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \\
& 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) p_{11} + \left( \dot{q}_6 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) - \dot{q}_5 (\frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} ) - \\
& \dot{q}_3 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} ) - \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} -
\end{aligned} \tag{A.116}$$

$$\begin{aligned}
& s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6}^2 - s_{q4} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q6} + s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& s_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6} ) p_{12} + \left( \frac{1}{2} \dot{q}_6 s_{2q6} + \dot{q}_1 (c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5}^2 s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) + \right. \\
& \dot{q}_3 (c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 - c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q5}) - \dot{q}_5 (s_{q3} s_{q5} c_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} ) ) p_{13} + \\
& ( \dot{q}_1 (4 c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2 s_{q4} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} - 2 c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \\
& 2 s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + 2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q5} c_{q6} ) + \dot{q}_3 ( \frac{7}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q6} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - \\
& 3 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} + 2 c_{q6}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 4 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} + \\
& 3 c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} ) + \dot{q}_6 ( 2 s_{q3} c_{q5}^2 - 4 s_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 4 c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} + 4 s_{q3} c_{q6}^2 + 4 c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - 2 s_{q3} ) - \dot{q}_5 ( 4 c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + \\
& 3 c_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - 4 s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q6} ) p_{14} + ( \dot{q}_6 ( \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 - \\
& s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} ) + \dot{q}_1 ( 2 s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 + 2 s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& 2 s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} - s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 + s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6} ) + \\
& \dot{q}_3 ( c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} - 2 c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} ) + \\
& \dot{q}_5 ( 2 c_{q6} s_{q3} c_{q5}^2 + c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} c_{q5} - c_{q6} s_{q3} - c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} ) + \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q4} s_{q5} ) p_{15} + \\
& ( \dot{q}_2 ( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - c_{q2} s_{q4} s_{q6} ) - \dot{q}_1 ( c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + 2 c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} ) ) p_{16} + \\
& ( \dot{q}_1 ( 2 c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q4} c_{q6} s_{q2} ) - c_{q2} c_{q6} \dot{q}_2 s_{q4} ) p_{17} + \dot{q}_2 c_{q2} c_{q4} s_{q5} p_{18} + \\
& \dot{q}_3 ( s_{q3} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} ) + ( \dot{q}_1 ( c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q6} - c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - \\
& c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q5}^2 c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} ) ) p_{21} + \dot{q}_3 ( c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} ) - \\
& \dot{q}_1 ( c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q3} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} ) ) p_{22} - \dot{q}_1 c_{q4} s_{q3} s_{q6} p_{23} + \dot{q}_6 ( \frac{1}{2} c_{q4} c_{q6} - \\
& \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6} ) - \dot{q}_1 c_{q4} c_{q6} s_{q3} ) p_{24} - ( \dot{q}_3 c_{q4} s_{q3} s_{q5} + \dot{q}_1 c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5} ) p_{25} \\
& ( \frac{1}{2} \dot{q}_5 c_{q4} c_{q5} - \dot{q}_1 s_{q3} s_{q4} s_{q5} ) p_{32} + \dot{q}_1 ( 2 c_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 - c_{q5} c_{q3}^2 + s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} ) + \\
& \dot{q}_3 ( s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} ) - \dot{q}_5 c_{q3} c_{q5} s_{q4} ) p_{33} + ( \dot{q}_3 ( \frac{1}{2} c_{q3} - c_{q3} c_{q4}^2 ) - \\
& \dot{q}_1 c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} ) p_{34} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 c_{q3} p_{35} - \frac{1}{2} \dot{q}_5 c_{q3} c_{q4} p_{36} - \frac{1}{2} \dot{q}_6 c_{q3} s_{q4} s_{q5} p_{37} + \\
& ( -\dot{q}_3 ( 4 c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q5} + s_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + s_{q3} c_{q4} c_{q5} ) - \dot{q}_1 ( 2 c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} + \\
& 2 s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5}^2 ) - \dot{q}_5 ( 4 s_{q3} c_{q5}^2 + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2 s_{q3} ) ) p_{40} + ( \dot{q}_1 ( 2 s_{q5} c_{q3}^2 - \\
& 4 s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 - c_{q5} s_{q3} c_{q3} c_{q4} ) + ( \dot{q}_3 ( c_{q5} s_{q3} s_{q4} + 2 c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} ) + \dot{q}_5 c_{q3} s_{q4} s_{q5} p_{41} ) + \\
& ( \dot{q}_1 ( -c_{q3}^2 + 2 c_{q3}^2 c_{q4}^2 ) - 2 \dot{q}_3 c_{q3} c_{q4} s_{q4} ) p_{42} + ( \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4} - \dot{q}_1 c_{q3} c_{q4} s_{q3} ) p_{43} - \\
& ( c_{q4} \dot{q}_3 s_{q3} + \dot{q}_1 c_{q3} s_{q3} s_{q4} ) p_{48} \\
C_{42} = & \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q5} p_{15} + \left( \frac{1}{2} \dot{q}_6 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} - \dot{q}_1 ( c_{q2} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} ) - \right. \\
& \dot{q}_2 ( c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} + c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} ) ) p_{16} + \\
& ( -\dot{q}_2 ( c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q2} c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} - c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} ) - \\
& \dot{q}_1 c_{q2} c_{q6} s_{q4} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} \dot{q}_6 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} ) p_{17} + \\
& ( \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q5} - \dot{q}_3 ( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} + \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} ) - \dot{q}_5 ( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} ) ) p_{18} + \dot{q}_5 ( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4} ) - \dot{q}_2 ( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + \\
& s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} ) + \dot{q}_3 \frac{1}{2} ( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} ) ) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.117}$$

$$\begin{aligned}
C_{43} = & \left( \dot{q}_1 \left( -\frac{1}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \right) - \dot{q}_3 \left( c_{q4} s_{q6} + \right. \right. \\
& c_{q5} c_{q6} s_{q4} \left. \right) p_5 + \left( -\dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q6} s_{q4} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) - \dot{q}_3 \left( c_{q4} c_{q6} - 2 c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) \right) p_6 + \\
& \left( c_{q3} c_{q4} \dot{q}_1 s_{q5} - \dot{q}_3 s_{q4} s_{q5} \right) p_7 + \left( \dot{q}_6 \left( c_{q6} s_{q4} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} \right) + \dot{q}_3 \left( 2 c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q4} - \right. \right. \\
& 2 c_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 + c_{q6} s_{q5} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q4} c_{q6} s_{q5} - 2 c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \right) + \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \right. \\
& c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5} - \frac{3}{2} s_{q3} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 - 2 c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q6} + s_{q3} s_{q6} c_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \\
& \frac{3}{2} s_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} \left. \right) p_{11} + \left( \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6}^2 - c_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - \right. \right. \\
& 2 c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q3} c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} \left. \right) - \\
& \dot{q}_3 \left( 2 s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + s_{q4} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + s_{q4} c_{q4} c_{q6}^2 - s_{q6} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} s_{2q4} \right) - \\
& \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} s_{q4} c_{q5}^2 - s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q4} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + \frac{1}{2} s_{q4} c_{q6}^2 \right) - \\
& \dot{q}_6 \left( c_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q4} s_{q5} \right) p_{12} + \left( \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}^2 - \right. \right. \\
& c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q5} \left. \right) + \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} s_{q4} - c_{q5}^2 s_{q4} \right) - c_{q4} c_{q5}^2 \dot{q}_3 s_{q4} \left. \right) p_{13} + \left( \dot{q}_6 c_{q5} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + \right. \\
& c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} s_{q5} + \dot{q}_3 \left( c_{q5} c_{q6}^2 - 2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 + c_{q4} c_{q6} s_{q4} s_{q6} + \right. \\
& c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q6} \right) + \dot{q}_1 \left( \frac{7}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q6} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 3 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q6} - 2 c_{q3} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} + 2 c_{q6}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} - \\
& 4 c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} + 3 c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} \left. \right) p_{14} + \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} - \right. \right. \\
& c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} - 2 c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} s_{q6} + 2 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q5} \left. \right) - \\
& \dot{q}_5 \left( c_{q4} s_{q5} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} \right) + \dot{q}_3 \left( 2 c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} - 2 s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 + s_{q5} s_{q6} \right) + \\
& \dot{q}_6 \left( s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 + 2 c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q5} \right) p_{15} - \dot{q}_2 c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} p_{17} - \\
& \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} + \frac{1}{2} s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) p_{18} + \dot{q}_1 \left( s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} \right) p_{21} + \\
& \left( \dot{q}_1 \left( c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} \right) + c_{q5} c_{q6} \dot{q}_6 s_{q4} \right) p_{22} - c_{q4} \dot{q}_1 s_{q3} s_{q5} p_{25} + \\
& \left( \dot{q}_3 \left( c_{q5} - 2 c_{q4}^2 c_{q5} \right) + \dot{q}_1 \left( s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2 c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} \right) - \dot{q}_5 c_{q4} c_{q5} \right) p_{33} + \\
& \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} c_{q3} - c_{q3} c_{q4}^2 \right) p_{34} - \frac{1}{2} c_{q3} \dot{q}_1 p_{35} + \frac{1}{2} \dot{q}_5 s_{q4} p_{36} - \dot{q}_6 c_{q4} s_{q5} p_{37} + \\
& \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q5} + s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q5} \right) p_{38} - \left( \dot{q}_1 \left( 4 c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q5} + s_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \right. \right. \\
& s_{q3} c_{q4} c_{q5} \left. \right) + 2 c_{q5} \dot{q}_5 s_{q4} s_{q5} + 2 c_{q4} c_{q5} \dot{q}_3 s_{q4} s_{q5} \left. \right) p_{40} + \dot{q}_1 \left( c_{q5} s_{q3} s_{q4} + \right. \\
& 2 c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} \left. \right) - \dot{q}_3 \left( s_{q5} - 2 c_{q4}^2 s_{q5} \right) + \dot{q}_5 c_{q4} s_{q5} \left. \right) p_{41} - \left( \dot{q}_3 \left( 2 c_{q4}^2 - 1 \right) - \right. \\
& 2 \dot{q}_1 c_{q3} c_{q4} s_{q4} \left. \right) p_{42} + \left( \dot{q}_1 s_{q3} s_{q4} \right) p_{43} + \left( -c_{q4} \dot{q}_1 s_{q3} \right) p_{48}
\end{aligned} \tag{A.118}$$

$$\begin{aligned}
C_{44} = & \left( \dot{q}_6 c_{q5} c_{q6} s_{q5} - \dot{q}_5 \left( s_{q6} - 2 c_{q5}^2 s_{q6} \right) \right) p_{11} + c_{q5} c_{q6}^2 \dot{q}_5 s_{q5} - \dot{q}_6 \left( c_{q6} s_{q6} - \right. \\
& c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6} \left. \right) p_{12} + \left( c_{q5} \dot{q}_5 s_{q5} \right) p_{13} + \left( \dot{q}_6 \left( c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \frac{1}{2} c_{q5}^2 - 2 c_{q6}^2 + 1 \right) - \right. \\
& c_{q5} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q5} s_{q6} \left. \right) p_{14} + \left( \dot{q}_5 \left( c_{q6} - 2 c_{q5}^2 c_{q6} \right) + c_{q5} \dot{q}_6 s_{q5} s_{q6} \right) p_{15} + \dot{q}_5 \left( 2 c_{q5}^2 - 1 \right) p_{40}
\end{aligned} \tag{A.119}$$

$$\begin{aligned}
C_{45} = & (\dot{q}_4 (2c_{q5}^2 s_{q6} - s_{q6}) - \dot{q}_3 (c_{q4} c_{q6} s_{q5} - 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_1 (2s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 + \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - s_{q3} s_{q6} + \frac{3}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5}) - \dot{q}_5 c_{q6} s_{q5}) p_{11} + (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 \\
& - c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 - c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5}) + \\
& \dot{q}_6 (\frac{1}{2} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q5}) - \dot{q}_3 (\frac{1}{2} s_{q4} c_{q5}^2 - s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q4} s_{q6} c_{q5} c_{q6} + \frac{1}{2} s_{q4} c_{q6}^2) - \\
& \dot{q}_5 c_{q5} c_{q6} s_{q6} + \dot{q}_4 c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5}) p_{12} + \frac{1}{2} \dot{q}_4 \sin(2q_5) + \dot{q}_3 (\frac{1}{2} s_{q4} - c_{q5}^2 s_{q4}) - \\
& \dot{q}_1 (s_{q3} s_{q5} c_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4}) p_{13} - (\dot{q}_3 (c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q6}) + \\
& \dot{q}_1 (4c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + 3c_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - 4s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q6}) + \\
& \dot{q}_5 c_{q5} c_{q6}^2 - \dot{q}_6 c_{q6} s_{q5} s_{q6} + \dot{q}_4 c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) p_{14} + (\dot{q}_4 (2c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q6}) - \\
& (\dot{q}_1 (c_{q6} s_{q3} - 2c_{q6} s_{q3} c_{q5}^2 - c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} c_{q5} + c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_3 (c_{q4} s_{q5} s_{q6} + \\
& c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5}) + \dot{q}_6 (c_{q3}^2 c_{q6} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}) - \dot{q}_5 s_{q5} s_{q6}) p_{15} - \dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4}) p_{18} + \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} \dot{q}_1 p_{32} - (\dot{q}_5 c_{q5} + \dot{q}_3 c_{q4} c_{q5} + \dot{q}_1 c_{q3} c_{q5} s_{q4}) p_{33} + \\
& (\frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q4} - \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q3} c_{q4}) p_{36} + \dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4}) p_{38} \\
& (\dot{q}_4 (2c_{q5}^2 - 1) - \dot{q}_1 (4s_{q3} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2s_{q3}) + 2c_{q5} \dot{q}_3 s_{q4} s_{q5}) p_{40} + \\
& (\dot{q}_5 s_{q5} + c_{q4} \dot{q}_3 s_{q5} + c_{q3} \dot{q}_1 s_{q4} s_{q5}) p_{41}
\end{aligned} \tag{A.120}$$

$$\begin{aligned}
C_{46} = & \dot{q}_1 (\frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q6}) p_5 + (\dot{q}_3 (c_{q6} s_{q4} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4}) - \dot{q}_1 (c_{q3} c_{q4} c_{q6} + \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}) + \dot{q}_6 c_{q6} s_{q5} + \dot{q}_4 c_{q5} c_{q6} s_{q5}) p_{11} + \\
& (\dot{q}_1 (s_{q3} s_{q6} c_{q6} - s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q5}) + \\
& \dot{q}_5 (\frac{1}{2} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q5}) - \dot{q}_4 (\frac{1}{2} s_{2q6} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q6}) - \dot{q}_3 (c_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \\
& \frac{1}{2} c_{q4} s_{q5})) p_{12} + \dot{q}_1 s_{2q6} p_{13} + (\dot{q}_3 (c_{q5} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} s_{q5}) - \\
& \dot{q}_4 (2c_{q6}^2 - c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \frac{1}{2} c_{q5}^2 - 1) + \dot{q}_1 (2s_{q3} c_{q5} - 4s_{q3} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 4c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} + 4s_{q3} c_{q6}^2 + 4c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - 2s_{q3}) + \dot{q}_5 c_{q6} s_{q5} s_{q6}) p_{14} + \\
& (-\dot{q}_1 (s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} s_{q6}) + \dot{q}_6 (2c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 + s_{q5} s_{q6}) + \\
& \dot{q}_3 (2c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q5} - \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 + s_{q4} s_{q6}) + \dot{q}_5 (c_{q3}^2 c_{q6} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6}) - \\
& \dot{q}_4 c_{q5} s_{q5} s_{q6}) p_{15} + \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} p_{16} - \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} p_{17} + \\
& c_{q5} c_{q6} \dot{q}_3 s_{q4} p_{22} + \dot{q}_1 (\frac{1}{2} c_{q4} c_{q6} - \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6}) p_{24} - (\frac{1}{2} \dot{q}_3 c_{q4} s_{q5} + \frac{1}{2} \dot{q}_1 c_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.121}$$

$$\begin{aligned}
C_{51} = & \left( \dot{q}_1 (c_{q3} c_{q5} c_{q6} - c_{q4} c_{q6} s_{q5} - c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q3}) - \dot{q}_3 (c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} - \right. \\
& \left. \frac{1}{2} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) \right) p_5 + \left( \dot{q}_1 (c_{q4} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 - 2c_{q5} s_{q6} c_{q3}) + \right. \\
& c_{q3} \dot{q}_3 s_{q4} s_{q5} s_{q6}) p_6 + \left( \dot{q}_1 (2c_{q4} c_{q5} - c_{q4} c_{q5} c_{q3}^2 + s_{q3} s_{q5} c_{q3}) + \dot{q}_3 c_{q3} c_{q5} s_{q4}) p_7 + \right. \\
& \left( \dot{q}_1 (s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 - \frac{1}{2} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 + \frac{1}{2} c_{q6} s_{q4} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} + 2s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 - s_{q6} c_{q3}^2 - \right. \\
& 4s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5} - c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q3} - s_{q6} c_{q5}^2 + \frac{1}{2} s_{q6}) - \dot{q}_3 (-c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + \\
& c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5}^2 + c_{q3} s_{q4} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - \frac{1}{2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} + \frac{3}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6} - \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5}) + \dot{q}_6 (\frac{3}{2} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_4 (2s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 - s_{q3} s_{q6} + \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} + \frac{3}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5}) \right) p_{11} + \left( \dot{q}_6 (c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} + \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} - \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_4 (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5}) - \dot{q}_3 (c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 c_{q6} + \\
& \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4} c_{q6}^2 - c_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q6}) - \dot{q}_1 (s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6} + \\
& s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6} - s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q5} c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 - 2s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \\
& s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q3} c_{q5} c_{q6} + s_{q5} c_{q5} c_{q6}^2) p_{12} + \left( \dot{q}_1 (s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} + \right. \\
& s_{q5} c_{q3}^2 c_{q5} + s_{q3} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 - \frac{1}{2} s_{q3} c_{q3} c_{q4} - \frac{1}{2} s_{2q5}) + \dot{q}_4 (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + \\
& s_{q3} s_{q5} c_{q5}) - \dot{q}_3 (s_{q3} s_{q4} c_{q5}^2 + c_{q3} c_{q4} s_{q4} s_{q5} c_{q5} - \frac{1}{2} s_{q3} s_{q4}) p_{13} + \left( \dot{q}_3 (-2c_{q3} s_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 + \right. \\
& s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - \frac{1}{2} s_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + \frac{3}{2} c_{q3} s_{q5} c_{q6}^2 - 2s_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q6}) - \\
& \dot{q}_1 (2s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} + 2s_{q4} s_{q5} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q6}^2 + 2s_{q5} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q5} c_{q6} + \\
& 4s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} - 2s_{q3} s_{q6} c_{q3} c_{q4} c_{q6} + 2s_{q3} s_{q4} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 - 2s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6}) + \\
& \dot{q}_4 (4c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + 3c_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - 4s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q6} - \\
& \dot{q}_6 (c_{q3} s_{q4} - 2c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} + c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q6})) p_{14} + \\
& \left( \dot{q}_3 (c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q4} - c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5} + \right. \\
& 2c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4}) - \dot{q}_6 (c_{q5} c_{q6} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5}) + \dot{q}_1 (s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6}^2 - \\
& 2s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + 2c_{q5}^2 c_{q6} - c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q6} + \\
& s_{q4} s_{q6} c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + c_{q3}^2 c_{q6} + 2s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \\
& s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q3}) + \dot{q}_4 (c_{q6} s_{q3} - 2c_{q6} s_{q3} c_{q5}^2 - c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} c_{q5} + c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) + \\
& \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} s_{q4}) p_{15} + \left( \dot{q}_1 (2c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q2} - 2c_{q4} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5}) - \dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q5} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q6} s_{q4} s_{q5})) p_{16} + \left( \dot{q}_1 (2c_{q4} s_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q6} +) \right) p_{17} + \left( \dot{q}_2 c_{q2} c_{q5} s_{q4} + \right. \\
& \dot{q}_1 c_{q3} s_{q2} s_{q5}) p_{18} + \left( \dot{q}_1 (c_{q5} c_{q6} c_{q3}^2 - c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q3} + c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + \right. \\
& 2c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q5}) + \frac{1}{2} \dot{q}_3 c_{q6} s_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{21} + \left( \dot{q}_1 (c_{q3}^2 c_{q5} s_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6}) + \right. \\
& \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) p_{22} + \left( \dot{q}_1 (s_{q5} c_{q3}^2 + c_{q4} c_{q5} s_{q3} c_{q3}) - c_{q5} \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4}) p_{25} + \right. \\
& \left( \dot{q}_1 (c_{q3} s_{q5} + c_{q4} c_{q5} s_{q3}) - \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} \dot{q}_4 \right) p_{32} + \left( \dot{q}_3 (c_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4}^2 s_{q5}) + \right. \\
& \dot{q}_1 (c_{q3} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - c_{q3}^2 c_{q4} s_{q4} s_{q5}) + c_{q3} c_{q5} \dot{q}_4 s_{q4}) p_{33} + \left( \frac{1}{2} \dot{q}_4 c_{q3} c_{q4} - \frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q3} s_{q4} \right) p_{36} - \\
& \dot{q}_6 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5}) p_{37} + \left( \dot{q}_4 (4s_{q3} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2s_{q3}) + \right. \\
& \dot{q}_3 (s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 4c_{q3} c_{q4} s_{q4} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q4}) - \dot{q}_1 (4s_{q3} s_{q5} c_{q3} c_{q4} c_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q4}^2 c_{q5}^2 + \\
& c_{q3}^2 c_{q4}^2 - 2c_{q3}^2 c_{q5}^2 + c_{q3}^2 + 2c_{q5}^2 - 1) p_{40} + \left( \dot{q}_3 (c_{q3} c_{q5} - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5}) + \right. \\
& \dot{q}_1 (c_{q3} s_{q3} s_{q4} s_{q5} - 2c_{q3}^2 c_{q4} c_{q5} s_{q4}) - \dot{q}_4 c_{q3} s_{q4} s_{q5}) p_{41}
\end{aligned} \tag{A.122}$$

$$\begin{aligned}
C_{52} = & \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} p_{15} + \left( \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) - \right. \\
& \dot{q}_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \right) p_{16} + \\
& \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + \dot{q}_2 \left( \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) - \frac{1}{2} \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{17} + \\
& \left( -\dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \right) + \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \right) + \right. \\
& \dot{q}_2 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \right) + \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \left. \right) p_{18} - \\
& \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \right) p_{38}
\end{aligned} \tag{A.123}$$

$$\begin{aligned}
C_{53} = & \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) - \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) p_5 + \left( 2\dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_6 + \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_3 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q4} \right) p_7 + \dot{q}_3 \left( 2\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 - \right. \\
& 2\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{s}_{q6} \left. \right) + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} + \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \right. \\
& \left. \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \right) + \dot{q}_4 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) - \dot{q}_6 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_{11} + \\
& \left( \dot{q}_6 \left( -\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \right) + \dot{q}_3 \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \right. \right. \\
& \left. \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \right) + \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 \right) - \\
& \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} \right) \left. \right) p_{12} + \left( \dot{q}_4 \left( \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \right) + \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{2q5} - \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \right) - \right. \\
& \left. \dot{q}_1 \left( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right) \right) p_{13} + \\
& \left( \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - 2\mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} \right) + \dot{q}_1 \left( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \right. \\
& 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + 2\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& 2\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} \left. \right) - \dot{q}_6 \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \right) + \dot{q}_4 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{14} - \left( \dot{q}_3 \left( 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q4}^2 + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + 2\mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 - \right. \right. \\
& \left. \mathbf{c}_{q6} \right) + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \right. \right. \\
& 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \left. \right) - \dot{q}_4 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) + \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{15} + \\
& \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{17} - \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \right) p_{18} + \\
& \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_3 + \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) p_{21} + \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_6 \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{22} + \\
& \left( \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right) p_{25} + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} \right) + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \dot{q}_4 + \right. \\
& \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{33} - \left( \frac{1}{2} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q4} + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \right) p_{36} - \frac{1}{2} \dot{q}_6 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} p_{37} + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \right. \right. \\
& 4\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} \left. \right) + \dot{q}_3 \left( -2\mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4}^2 + 4\mathbf{c}_{q5}^2 - 2 \right) - \\
& 2\dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{40} + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \right) - \mathbf{c}_{q4} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q5} + \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \right) p_{41}
\end{aligned} \tag{A.124}$$

$$\begin{aligned}
C_{54} = & (\dot{q}_4 (s_{q6} - 2c_{q5}^2 s_{q6}) + \dot{q}_3 (c_{q4} c_{q6} s_{q5} - 2c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6}) + \dot{q}_1 2s_{q3} s_{q6} c_{q5}^2 + \\
& 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q5} - s_{q3} s_{q6} + \frac{3}{2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} s_{q5} - \dot{q}_6 c_{q5} s_{q6}) p_{11} + \\
& (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 + c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q6} - \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} s_{q5}) + \dot{q}_6 (\frac{1}{2} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q5}) + \dot{q}_3 (s_{q4} c_{q6}^2 - s_{q4} c_{q5}^2 c_{q6}^2 + \frac{1}{2} s_{q4} c_{q5}^2 + \\
& c_{q4} s_{q6} c_{q5} c_{q6}) - \dot{q}_4 c_{q5} c_{q6}^2 s_{q5}) p_{12} + (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 + s_{q3} s_{q5} c_{q5}) - \\
& \dot{q}_4 \sin(2q_5) - \dot{q}_3 (\frac{1}{2} s_{q4} - c_{q5}^2 s_{q4})) p_{13} + (\dot{q}_3 (c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q6}) + \\
& \dot{q}_1 (4c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + 3c_{q3} s_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - 4s_{q3} s_{q5} s_{q6} c_{q5} c_{q6} - c_{q3} c_{q4} s_{q6} c_{q6}) + \\
& \dot{q}_6 c_{q6} s_{q5} s_{q6} + \dot{q}_4 c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) p_{14} + \dot{q}_4 (c_{q6} - 2c_{q5}^2 c_{q6}) + \dot{q}_6 (2c_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 - \\
& c_{q6} c_{q3}^2 + c_{q6} c_{q5}) + \dot{q}_1 (c_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q6} s_{q3} c_{q5}^2 - c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5} c_{q5} + c_{q6} s_{q3}) + \\
& \dot{q}_3 (c_{q4} s_{q5} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5})) p_{15} + \dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4}) p_{18} - \\
& \dot{q}_1 c_{q4} c_{q5} p_{32} + (c_{q4} c_{q5} \dot{q}_3 + c_{q3} c_{q5} \dot{q}_1 s_{q4}) p_{33} + (\frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} \dot{q}_1 - \frac{1}{2} \dot{q}_3 s_{q4}) p_{36} - \\
& \dot{q}_2 (\frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} s_{q2} s_{q4}) p_{38} - (\dot{q}_4 (2c_{q5}^2 - 1) + \\
& \dot{q}_1 (4s_{q3} c_{q5}^2 + 2c_{q3} c_{q4} s_{q5} c_{q5} - 2s_{q3}) - 2 \dot{q}_3 c_{q5} s_{q4} s_{q5}) p_{40} - \\
& (c_{q4} \dot{q}_3 s_{q5} + c_{q3} \dot{q}_1 s_{q4} s_{q5}) p_{41}
\end{aligned} \tag{A.125}$$

$$C_{55} = \frac{1}{2} \dot{q}_6 s_{2q_6} p_{12} + \dot{q}_6 c_{2q_6} p_{14} \tag{A.126}$$

$$\begin{aligned}
C_{56} = & (\dot{q}_1 (\frac{3}{2} c_{q5} s_{q3} s_{q6} + c_{q3} c_{q4} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_6 s_{q6} - c_{q5} \dot{q}_4 s_{q6} - \dot{q}_3 s_{q4} s_{q5} s_{q6}) p_{11} + \\
& (\frac{1}{2} \dot{q}_5 s_{2q_6} - \dot{q}_1 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} + c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 + \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q5} s_{q6}) - \dot{q}_3 (\frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} - c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4}) + \dot{q}_4 (\frac{1}{2} s_{q5} - c_{q6}^2 s_{q5})) p_{12} + \\
& (\dot{q}_5 (2c_{q6}^2 - 1) - \dot{q}_3 (\frac{1}{2} c_{q4} - c_{q4} c_{q6}^2 + c_{q5} s_{q4} s_{q6} c_{q6}) - \dot{q}_1 (c_{q3} s_{q4} - 2c_{q3} c_{q6}^2 s_{q4} + \\
& c_{q6} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 2c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q6}) + \dot{q}_4 c_{q6} s_{q5} s_{q6}) p_{14} + (\dot{q}_4 (2c_{q6} c_{q3}^2 c_{q5}^2 - \\
& c_{q6} c_{q3}^2 + c_{q6} c_{q5}) + c_{q6} \dot{q}_6 - \dot{q}_1 (c_{q5} c_{q6} s_{q3} + c_{q3} c_{q4} c_{q6} s_{q5}) + \dot{q}_3 c_{q6} s_{q4} s_{q5}) p_{15} + \\
& \dot{q}_2 c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} p_{16} - \dot{q}_2 c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} p_{17} + c_{q4} c_{q6} \dot{q}_3 s_{q5} p_{22} - \\
& (\dot{q}_1 (\frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} - \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5}) + \frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} \dot{q}_3) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.127}$$

$$\begin{aligned}
C_{61} = & \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) - \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \right. \\
& \left. \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) \Big) p_5 - \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4}) + \dot{q}_1 (2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}) \Big) p_6 - \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) - \\
& \dot{q}_4 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}) + \\
& \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} - \right. \\
& 2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + \\
& \dot{q}_5 \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) \Big) p_{11} + \left( \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} + 2 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \\
& \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} - \\
& 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} - \\
& \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{2q6}) + \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \right. \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_4 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \dot{q}_3 (2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q4}^2 - \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 - \\
& \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q4} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} + \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5}) \Big) p_{12} - \frac{1}{2} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{2q6} p_{13} + \left( \dot{q}_1 (2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \right. \\
& 4 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - 4 \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3}^2 - \\
& 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \\
& \mathbf{c}_{q5}^2 + 2 \mathbf{c}_{q6}^2 - 1) - \left( \dot{q}_4 (2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \right. \\
& 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 + 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q3}) + \dot{q}_5 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} + \\
& \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_3 \left( \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \right. \\
& 3 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} - 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5}) \Big) p_{14} + \\
& \left( \dot{q}_1 (2 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - 3 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^3 + \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \right. \\
& \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} - \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}) + \\
& \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \right) - \dot{q}_3 (\mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} + \\
& \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6}) + \\
& \dot{q}_5 (\mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5}) \Big) p_{15} - \left( \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) + \right. \\
& \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6}) \Big) p_{16} - \\
& \left( \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q5} - 2 \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + 2 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3}) + \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{17} - \\
& \left( \dot{q}_1 (\mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{c}_{q3} - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5} + \right. \\
& \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6}) + \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6}) \Big) p_{21} + \left( \dot{q}_3 (\mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4}) - \right. \\
& \dot{q}_1 (\mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3}) \Big) p_{22} - \\
& \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} p_{23} + \left( \dot{q}_1 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) \right) p_{24} + \\
& \left( \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \right) - \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.128}$$



$$\begin{aligned}
C_{62} = & \left( \dot{q}_1 \left( c_{q2} c_{q4} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} s_{q4} s_{q6} \right) - \dot{q}_2 \left( c_{q6} s_{q2} s_{q3} s_{q4} - \right. \right. \\
& c_{q2} s_{q3} s_{q5} s_{q6} + c_{q3} s_{q2} s_{q5} s_{q6} + c_{q2} c_{q3} c_{q6} s_{q4} + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q6} + \\
& c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} + c_{q4} c_{q5} s_{q2} s_{q3} s_{q6} \left. \right) + c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \dot{q}_3 - \\
& \frac{1}{2} c_{q2} c_{q5} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q3} s_{q4} - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q4} c_{q6} \dot{q}_5 s_{q3} s_{q5} \left. \right) p_{16} + \\
& \dot{q}_2 \left( c_{q2} c_{q3} s_{q4} s_{q6} + c_{q2} c_{q6} s_{q3} s_{q5} - c_{q3} c_{q6} s_{q2} s_{q5} + s_{q2} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - \right. \\
& c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \left. \right) - \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} - \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \right) - \\
& \dot{q}_1 c_{q2} c_{q4} s_{q6} + \frac{1}{2} \dot{q}_4 c_{q2} c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} + \frac{1}{2} \dot{q}_5 c_{q2} c_{q4} c_{q6} s_{q3} s_{q5} \left. \right) p_{17}
\end{aligned} \tag{A.129}$$

$$\begin{aligned}
C_{63} = & \left( \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q4} c_{q6} - c_{q3} c_{q5} s_{q4} s_{q6} + \frac{1}{2} c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} \right) - \dot{q}_3 \left( c_{q6} s_{q4} + c_{q4} c_{q5} s_{q6} \right) \right) p_5 + \\
& \left( \dot{q}_3 \left( s_{q4} s_{q6} - 2 c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) - \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q4} s_{q6} + c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q4} \right) \right) p_6 + \\
& \left( \dot{q}_1 \left( -c_{q4} c_{q5} s_{q3} s_{q6} - c_{q3} c_{q4}^2 s_{q5} s_{q6} - \frac{1}{2} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q3} s_{q4} - c_{q3} c_{q4} c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} s_{q6} - \right. \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q4} s_{q5} \left. \right) + \dot{q}_3 \left( -c_{q5} c_{q6} s_{q5} c_{q4}^2 + s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q4} + c_{q5} c_{q6} s_{q5} \right) - \\
& \dot{q}_4 \left( c_{q6} s_{q4} - c_{q5}^2 c_{q6} s_{q4} \right) + \dot{q}_5 s_{q4} s_{q5} s_{q6} \left. \right) p_{11} + \left( \dot{q}_1 \left( 2 c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 c_{q6}^2 - c_{q3} c_{q5} c_{q4}^2 - \right. \right. \\
& s_{q3} s_{q5} c_{q4} c_{q6}^2 - c_{q3} s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q6} + \frac{1}{2} s_{q3} s_{q5} c_{q4} - c_{q3} c_{q5} c_{q6}^2 + c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} + \\
& \frac{1}{2} c_{q3} c_{q5} + \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} - c_{q5} c_{q6}^2 s_{q4} \right) - \dot{q}_3 \left( s_{q6} c_{q4}^2 c_{q5}^2 c_{q6} + s_{q6} c_{q4}^2 c_{q6} + \right. \\
& 2 s_{q4} c_{q4} c_{q5} c_{q6}^2 - s_{q4} c_{q4} c_{q5} - s_{q6} c_{q5}^2 c_{q6} + \dot{q}_4 \left( c_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 + c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} - \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q4} s_{q5} \left. \right) \left. \right) p_{12} + \left( \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} c_{q5} s_{q4} s_{q5} - c_{q5} s_{q4} s_{q5} c_{q6}^2 - c_{q4} s_{q5} s_{q6} c_{q6} \right) + \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} c_{q4}^2 c_{q5} - \right. \right. \\
& c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6}^2 - c_{q4}^2 c_{q6}^2 + \frac{1}{2} c_{q4}^2 + 2 s_{q4} s_{q6} c_{q4} c_{q5} c_{q6} + 2 c_{q5}^2 c_{q6}^2 - c_{q5}^2 \left. \right) + \\
& \dot{q}_5 \left( c_{q5} s_{q4} s_{q6} c_{q6} - c_{q4} c_{q6}^2 + \frac{1}{2} c_{q4} \right) + \dot{q}_1 \left( \frac{3}{2} c_{q3} c_{q4} s_{q4} - c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q5} + \right. \\
& \frac{1}{2} c_{q4} s_{q3} s_{q5} s_{q6} - 3 c_{q3} c_{q4} c_{q6}^2 s_{q4} + 2 c_{q3} c_{q5} c_{q6} s_{q6} - 4 c_{q3} c_{q4}^2 c_{q5} c_{q6} s_{q6} + \\
& 2 c_{q5} c_{q6}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q5} \left. \right) p_{14} + \left( \dot{q}_3 \left( c_{q5} s_{q5} s_{q6} c_{q4}^2 - c_{q6} s_{q4} s_{q5} c_{q4} + c_{q5} s_{q5} s_{q6} \right) - \right. \\
& \left( \dot{q}_1 \left( s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q3} c_{q4}^2 c_{q6} s_{q5} + \frac{1}{2} c_{q5}^2 s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q3} + \right. \right. \\
& c_{q3} c_{q4} c_{q5} s_{q4} s_{q5} s_{q6} \left. \right) + \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} s_{q4} s_{q6} c_{q5}^2 + 2 c_{q3} c_{q6} s_{q3} s_{q5} c_{q5} - s_{q4} s_{q6} \right) - \\
& \dot{q}_5 c_{q6} s_{q4} s_{q5} \left. \right) p_{15} + \frac{1}{2} \dot{q}_2 c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} p_{16} + \dot{q}_2 \left( \frac{1}{2} c_{q4} c_{q5} c_{q6} s_{q2} s_{q3} \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} c_{q2} c_{q3} c_{q4} c_{q5} c_{q6} \right) p_{17} + \left( -\dot{q}_1 \left( c_{q5} s_{q3} s_{q4} s_{q6} - c_{q4} c_{q6} s_{q3} \right) - \right. \\
& \dot{q}_3 s_{q5} s_{q6} \left. \right) p_{21} + \left( \dot{q}_1 \left( c_{q4} s_{q3} s_{q6} + c_{q5} c_{q6} s_{q3} s_{q4} \right) - c_{q6} \dot{q}_3 s_{q5} - c_{q5} c_{q6} \dot{q}_4 s_{q4} - \right. \\
& \dot{q}_5 c_{q4} c_{q6} s_{q5} \left. \right) p_{22} + \left( \dot{q}_4 c_{q4} s_{q5} - \dot{q}_1 \left( c_{q3} c_{q5} - c_{q4} s_{q3} s_{q5} \right) + \dot{q}_5 c_{q5} s_{q4} \right) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.130}$$

$$\begin{aligned}
C_{64} = & \left( -\dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} + \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) \right) p_5 + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} + \right. \right. \\
& \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \left. \right) - \dot{q}_3 \left( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q4} \right) + \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \\
& \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{11} + \left( \dot{q}_1 \left( \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \right. \\
& \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) - \dot{q}_5 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q5} \right) + \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{2q6} - \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} \right) + \\
& \dot{q}_3 \left( \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) \left. \right) p_{12} - \frac{1}{2} \dot{q}_1 \mathbf{s}_{2q6} p_{13} - \\
& \left( \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 - \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} \right) + \right. \\
& \dot{q}_4 \left( -\mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2 \mathbf{c}_{q6}^2 - 1 \right) - \dot{q}_1 \left( 2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 - 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q5}^2 \mathbf{c}_{q6}^2 - \right. \\
& 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} + 4 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 + 4 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} - 2 \mathbf{s}_{q3} \left. \right) - \\
& \dot{q}_5 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_{14} + \left( \dot{q}_5 \left( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 - 2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \right) + \right. \\
& \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5} + \right) + \\
& \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q5}^2 + 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{c}_{q5} - \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) + \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_{15} - \\
& \frac{1}{2} \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} p_{16} + \frac{1}{2} \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q4} p_{17} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q4} p_{22} - \\
& \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} - \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{24} + \left( \frac{1}{2} \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} + \frac{1}{2} \dot{q}_1 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \right) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.131}$$

$$\begin{aligned}
C_{65} = & \left( \dot{q}_4 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - \dot{q}_1 \left( \frac{3}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q6} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) + \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \right) p_{11} + \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \right. \right. \\
& \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) - \dot{q}_5 \mathbf{s}_{2q6} + \\
& \dot{q}_3 \left( \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} - \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} \right) - \dot{q}_4 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q5} - \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q5} \right) \left. \right) p_{12} + \\
& \left( -\dot{q}_5 \left( 2 \mathbf{c}_{q6}^2 - 1 \right) + \dot{q}_3 \left( -\mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6}^2 + \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q6} \mathbf{c}_{q6} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q4} \right) + \right. \\
& \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q3} \mathbf{s}_{q4} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q6}^2 \mathbf{s}_{q4} + \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} - 2 \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q6} \right) - \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_4 \mathbf{s}_{q5} \mathbf{s}_{q6} \left. \right) p_{14} + \\
& \left( \dot{q}_4 \left( \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 - 2 \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q3}^2 \mathbf{c}_{q5}^2 - \mathbf{c}_{q6} \mathbf{c}_{q5} \right) + \dot{q}_1 \left( \mathbf{c}_{q5} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} + \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} \right) - \right. \\
& \mathbf{c}_{q6} \dot{q}_3 \mathbf{s}_{q4} \mathbf{s}_{q5} \left. \right) p_{15} - \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} p_{16} + \dot{q}_2 \mathbf{c}_{q2} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} p_{17} - \\
& \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q6} \mathbf{s}_{q5} p_{22} + \left( \dot{q}_1 \left( \frac{1}{2} \mathbf{s}_{q3} \mathbf{s}_{q5} - \frac{1}{2} \mathbf{c}_{q3} \mathbf{c}_{q4} \mathbf{c}_{q5} \right) + \frac{1}{2} \dot{q}_3 \mathbf{c}_{q5} \mathbf{s}_{q4} \right) p_{37}
\end{aligned} \tag{A.132}$$

$$C_{66} = 0 \tag{A.133}$$

## Spis ilustracji

Rys. 2.1. Wkładanie cylindrycznego kołka do otworu .....	17
Rys. 2.2. Obracanie korbą za pomocą obrotowego uchwytu .....	18
Rys. 2.3. Strategia nieprzekraczania sił oporu .....	19
Rys. 2.4. Strategia utrzymania siły nacisku w interakcji z otoczeniem .....	20
Rys. 2.5. Strategia utrzymania siły nacisku w interakcji z otoczeniem .....	20
Rys. 3.1. Schemat działania strategii kontroli siły w robotach ABB a) <i>FC Pressure</i> , b) <i>FC SpeedChange</i> .....	27
Rys. 4.1. Stanowisko badawcze do zrobotyzowanej obróbki skrawaniem: a) schemat, b) zdjęcie stanowiska .....	31
Rys. 4.2. Blok interfejsu komunikacji z <i>EGM</i> .....	33
Rys. 5.1. Schemat manipulatora ABB IRB 2400 z układami współrzędnych, obranymi zgodnie ze zmodyfikowaną notacją Denavita-Hartenberga .....	37
Rys. 5.2. Schemat rozłożenia środków mas .....	50
Rys. 5.3. Schemat sił i momentów działających na <i>i</i> -ty człon robota .....	60
Rys. 5.4. a) Przebiegi kąta obrotu i prędkości kątowej 2. członu przy zadanej prędkości $\dot{q}_2^{\dagger} = 9,3 \text{ rad/s}$ , b) przebieg zarejestrowanego momentu napędowego 2. członu .....	68
Rys. 5.5. Porównanie wartości momentu tarcia uzyskanych eksperymentalnie z wartościami estymowanymi dla drugiego członu robota .....	69
Rys. 5.6. Dane wejściowe do symulacji: a) przebiegi zadanych kątów obrotu 1. członu, b) przebiegi zadanych prędkości kątowych 1. członu, c) przebiegi zadanych kątów obrotu 2. członu, d) przebiegi zadanych prędkości kątowych 2. członu, e) przebiegi zadanych kątów obrotu 3. członu, f) przebiegi zadanych prędkości kątowych 3. członu .....	70
Rys. 5.7. Dane wejściowe do symulacji: a) przebiegi zadanych kątów obrotu 4. członu, b) przebiegi zadanych prędkości kątowych 4. członu c) przebiegi zadanych kątów obrotu 5. członu, d) przebiegi zadanych prędkości kątowych 5. członu e) przebiegi zadanych kątów obrotu 6. członu, f) przebiegi zadanych prędkości kątowych 6. członu .....	71
Rys. 5.8. Porównanie przebiegów momentów z modelu i z rzeczywistego robota dla: a) 1. członu b) 2. członu c) 3. członu d) 4. członu e) 5. członu f) 6. członu .....	72
Rys. 6.1. Prezentacja działania strategii sterowania siłą z uwzględnieniem niepewności więzów rzeczywistej powierzchni .....	81
Rys. 7.1. Widok stanowiska badawczego a) w środowisku CAD, b) w środowisku SIMULINK .....	87
Rys. 7.2. Schemat symulacji układu sterowania .....	88

Rys. 7.3. Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu $T$ , b) składowe prędkości punktu $T$ .....	91
Rys. 7.4. Zadana wartość: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	91
Rys. 7.5. Zadany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1}$ $c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1}$ $c_n$ .....	91
Rys. 7.6. Zadany tor ruchu punktu $T$ .....	92
Rys. 7.7. Schematy: a) interakcji narzędzia z otoczeniem, b) rozmieszczenia płaszczyzn interakcji.....	94
Rys. 7.8. Schemat symulacji sterowania pozycyjno-siłowego robotem ABB IRB2400 z uwzględnieniem niepewności więzów .....	95
Rys. 7.9. Sygnały sterowania całkowitego dotyczące: a) położenia, b) orientacji.....	95
Rys. 7.10. Sygnały sterowania: a) sterowanie PD położeniem, b) sterowanie PD orientacją, c) sterowanie kompensacyjne położeniem, d) sterowanie kompensacyjne orientacją.....	96
Rys. 7.11. Sygnały sterowania: a) sterowanie odporne położeniem, b) sterowanie odporne orientacją .....	96
Rys. 7.12. Sygnały sterowania: a) sterowanie kompensujące wpływ sił interakcji, b) sterowanie kompensujące wpływ momentów interakcji .....	97
Rys. 7.13. Zrealizowana trajektoria pozycji: a) współrzędne punktu $T$ , b) składowe prędkości punktu $T$ .....	97
Rys. 7.14. Wartości zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku.....	98
Rys. 7.15. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1}$ $c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1}$ $c_n$ .....	98
Rys. 7.16. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ .....	99
Rys. 7.17. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu $T$ w miejscu deformacji powierzchni .....	99
Rys. 7.18. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych, c) błędy orientacji, d) błędy prędkości kątowych, e) błędy uogólnione przemieszczeń, f) błędy uogólnione orientacji.....	100
Rys. 7.19. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej, c) odchylenie punktu charakterystycznego narzędzia od założonych więzów powierzchni interakcji, d) pochodna tego odchylenia .....	101
Rys. 7.20. Pozycje kątowe ruchu robota w przestrzeni konfiguracyjnej: a) pozycje członów 1-3, b) pozycje członów 4-6 .....	101
Rys. 7.21. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości członów 1-3, b) prędkości członów 4-6.....	102
Rys. 7.22. Momenty napędowe: a) członów 1-3, b) członów 4-6 .....	102
Rys. 7.23. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji $w_\xi$ na realizację zadanej siły .....	103

Rys. 7.24. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji $w_z$ na realizację zadanej pozycji efektora końcowego .....	103
Rys. 8.1. Diagram platformy badawczej.....	104
Rys. 8.2. Schemat weryfikacji sterowania pozycyjno-siłowego robotem ABB IRB2400 z uwzględnieniem niepewności więzów .....	105
Rys. 8.3. Urządzenie do regulacji podatności otoczenia: a) widok konstrukcji, b) widok powierzchni interakcji .....	106
Rys. 8.4. Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu $T$ , b) składowe prędkości punktu $T$ .....	108
Rys. 8.5. Zadana wartość: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	109
Rys. 8.6. Zadany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	109
Rys. 8.7. Zadany tor ruchu punktu $T$ .....	110
Rys. 8.8. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach osi $xy$ b) na kierunku osi $z$ .....	110
Rys. 8.9. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	111
Rys. 8.10. Wykres przebiegu prędkości punktu $T$ w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	111
Rys. 8.11. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	111
Rys. 8.12. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	112
Rys. 8.13. Raport metrologiczny pomiaru powierzchni interakcji detalu wykorzystanego w eksperymencie .....	113
Rys. 8.14. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ .....	113
Rys. 8.15. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu $T$ w miejscu deformacji powierzchni .....	114
Rys. 8.16. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych .....	114
Rys. 8.17. Sygnały błędów uogólnionych a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	115
Rys. 8.18. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej .....	115
Rys. 8.19. Sygnały: a) odchylenie punktu $T$ (od założonych więzów powierzchni interakcji), b) pochodna tego odchylenia .....	115
Rys. 8.20. Kąty obrotu członów robota: a) kąty obrotów członów 1-3, b) kąty obrotów członów 4-6 .....	116
Rys. 8.21. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości kątowe członów 1-3, b) prędkości kątowe członów 4-6 .....	116

Rys. 8.22. Sygnały momentów napędowych a) członów 1-3, b) członów 4-6 .....	117
Rys. 8.23. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji $w_{\xi}$ na realizację zadanej siły .....	117
Rys. 8.24. Wpływ współczynnika wzmocnienia kooperacji $w_{\xi}$ na realizację zadanej pozycji efektora końcowego .....	118
Rys. 8.25. Przebiegi współrzędnych położenia punktu $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	119
Rys. 8.26. Wykres przebiegu prędkości punktu $T$ w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	119
Rys. 8.27. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	120
Rys. 8.28. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	120
Rys. 8.29. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ .....	121
Rys. 8.30. Powiększenie zrealizowanego toru ruchu punktu $T$ w miejscu deformacji powierzchni .....	121
Rys. 8.31. Detal przygotowany do frezowania: a) model CAD, b) fotografia detalu przed obróbką .....	122
Rys. 8.32. Schemat eksperymentu .....	122
Rys. 8.33 Zadana trajektoria ruchu: a) współrzędne punktu $T$ , b) składowe prędkości punktu $T$ .....	124
Rys. 8.34. Wartość zadanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	125
Rys. 8.35. Zadany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	125
Rys. 8.36. Zadany tor ruchu punktu $T$ .....	125
Rys. 8.37. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach stycznych b) na kierunku normalnym .....	126
Rys. 8.38. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	126
Rys. 8.39. Wykres przebiegu prędkości punktu $T$ w czasie: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	127
Rys. 8.40. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	127
Rys. 8.41. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	128
Rys. 8.42. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ .....	128
Rys. 8.43. Powiększenie zadanego toru ruchu punktu $T$ w miejscu interakcji z powierzchnią detalu .....	128

Rys. 8.44. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych.....	129
Rys. 8.45. Sygnały błędów uogólnionych: a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	129
Rys. 8.46. Charakterystyka amplitudowo-częstotliwościowa zastosowanego filtra dolnoprzepustowego.....	130
Rys. 8.47. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej .....	130
Rys. 8.48. Sygnały: a) odchylenie punktu $T$ od założonej powierzchni interakcji, b) pochodna tego odchylenia .....	130
Rys. 8.49. Kąty obrotu członów robota: a) kąty obrotów członów 1-3, b) kąty obrotów członów 4-6.....	131
Rys. 8.50. Prędkości kątowe członów robota: a) prędkości kątowe członów 1-3, b) prędkości kątowe członów 4-6 .....	131
Rys. 8.51. Momenty napędowe: a) członów 1-3, b) członów 4-6 .....	132
Rys. 8.52. Sygnały sterowania całkowitego: a) na kierunkach osi $xy$ b) na kierunku osi $z$ ....	132
Rys. 8.53. Rzeczywiste przebiegi współrzędnych położenia punktu $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	133
Rys. 8.54. Wykres przebiegu prędkości punktu $T$ : a) na kierunkach stycznych, b) na kierunku normalnym .....	133
Rys. 8.55. Wartość zrealizowanej: a) siły nacisku, b) pochodnej siły nacisku .....	133
Rys. 8.56. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ : a) w płaszczyźnie $c_{t1} c_{t2}$ , b) w płaszczyźnie $c_{t1} c_n$ .....	134
Rys. 8.57. Zrealizowany tor ruchu punktu $T$ .....	134
Rys. 8.58. Powiększenie zadanego toru ruchu punktu $T$ w miejscu interakcji z powierzchnią detalu .....	135
Rys. 8.59. Sygnały błędów: a) błędy przemieszczeń na kierunkach stycznych, b) błędy prędkości na kierunkach stycznych.....	135
Rys. 8.60. Sygnały błędów: a) błąd siły normalnej, b) pochodna błędu siły normalnej.....	135
Rys. 8.61. Sygnały: a) odchylenie punktu TCP (od założonych więzów powierzchni interakcji), b) pochodna tego odchylenia.....	136
Rys. 8.62. Raport metrologiczny pomiaru istotnych powierzchni detalu po obróbce .....	136
Rys. 8.63. Raport metrologiczny powierzchni detalu względem modelu CAD .....	137

## Spis tabel

Tabela 4.1. Wartości maksymalnych prędkości osi robota ABB IRB 2400 .....	31
Tabela 4.2. Dokładność robota określona według normy ISO 9283.....	31
Tabela 4.3. Parametry czujnika siły .....	32
Tabela 5.1. Parametry geometryczne manipulatora ABB IRB 2400 według zmodyfikowanej notacji Denavita-Hartenberga .....	37
Tabela 5.2. Parametry fizyczne manipulatora .....	65
Tabela 5.3. Parametry fizyczne wrzeciona .....	66
Tabela 5.4. Współczynniki modelu tarcia dla poszczególnych członów manipulatora .....	69
Tabela 7.1. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu.....	90
Tabela 7.2. Parametry zadanej trajektorii.....	90
Tabela 7.3. Parametry układu sterowania.....	92
Tabela 8.1. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu .....	107
Tabela 8.2. Parametry zadanej trajektorii.....	108
Tabela 8.3. Parametry układu sterowania .....	108
Tabela 8.4. Współrzędne zadanej trajektorii ruchu.....	123
Tabela 8.5. Parametry zadanej trajektorii.....	123
Tabela 8.6. Parametry układu sterowania .....	124