Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza

Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

ROZPRAWA DOKTORSKA

dyscyplina naukowa matematyka

Zbiory niezależne i dominujące w grafach zawierające zbiór liści

Mateusz Pirga

Promotor

dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

Rzeszów 2026

Spis treści

Wstęp

Niezależność jest klasycznym pojęciem w teorii grafów i od wielu dekad stanowi przedmiot intensywnych badań. Niech $G = (V, E)$ będzie dowolnym grafem. Podzbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem niezależnym* grafu G, jeżeli dowolne dwa wierzchołki należące do S nie są sąsiednie. Moc największego zbioru niezależnego nazywana jest *liczbą niezależności* grafu G i oznaczana symbolem $\alpha(G)$.

Pojęcie zbioru niezależnego pojawiło się po raz pierwszy w pracy C. Berge'a [12] jako *zbiór stabilny*, a następnie badania były prowadzone między innymi w powiązaniu z problemami dotyczącymi kolorowania grafów, zależności pomiędzy liczbą niezależności a liczbą chromatyczną oraz w związku z hipotezą dotyczącą grafów doskonałych.

Chociaż początki badań nad zbiorami niezależnymi datuje się na lata sześćdziesiąte XX wieku, to pierwsze problemy, które obecnie można powiązać ze zbiorami niezależnymi pojawiły się znacznie wcześniej i wywodzą się z zagadnień szachowych, takich jak klasyczny problem ośmiu królowych. Znane problemy szachowe dotyczące rozmieszczania figur na szachownicy są datowane na drugą połowę XIX wieku i pojawiły się w pracach C. F. de Jaenisha [23], a następnie W. W. R. Balla [1]. Modelując niektóre, opisane problemy szachowe przy pomocy grafu, ich rozwiązanie można sprowadzić do wyznaczenia zbioru niezależnego lub liczby niezależności.

Każdy graf posiada zbiór niezależny, w szczególności zbiorem niezależnym jest zbiór pusty oraz każdy jednoelementowy podzbiór zbioru wierzchołków, więc naturalnym kierunkiem badań stały się problemy dotyczące zliczania zbiorów niezależnych. Pierwsze problemy dotyczące zliczania zbiorów niezależnych pojawiły się około 1960 roku, kiedy P. Erdős i L. Moser postawili pytanie o największą liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w n-wierzchołkowych grafach oraz o charakteryzację grafów ekstremalnych mających największą liczbę takich zbiorów. Problem został szybko rozwiązany ponieważ P. Erdős, a następnie J. W. Moon i L. Moser w [44], udzielili odpowiedzi na oba pytania.

W latach 80-tych H. S. Wilf w [67] wyznaczył największą liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w n-wierzchołkowych drzewach, podając skomplikowany algebraiczny dowód. Następnie B. E. Sagan w [57] podał nowy, elegancki dowód grafowy i scharakteryzował drzewa ekstremalne. Od czasu tych pionierskich prac pojawiło się wiele artykułów dotyczących zliczania maksymalnych zbiorów niezależnych w różnych klasach grafów. W szczególności dużo uwagi poświęcono drzewom i grafom z małą liczbą cykli. Między innymi M. J. Jou i G. J. Chang w [18] wyznaczyli liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w grafach z co najwyżej jednym cyklem. G. C. Ying i in. rozważali maksymalne zbiory niezależne w grafach z co najwyżej r cyklami [76]. Zliczanie różnego rodzaju zbiorów niezależnych jest nadal aktualne, a przegląd literatury pokazuje duże zainteresowanie tą tematyką. Warto wskazać wybrane prace tylko z ostatnich lat. Y. Tian i Y. Tu w [64] wyznaczyli najmniejszą liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w grafach n-wierzchołkowych w zależności od liczby niezależności $\alpha(G)$. C. Palmer i B. Patkós w [48] badali największą liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w grafach z ograniczoną liczbą wierzchołkowo rozłącznych trójkątów. D.S. Malyshev i D. S. Taletskii w [39] rozważali liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w drzewach z ustaloną liczbą liści.

Problemy zliczania zbiorów niezależnych zyskały szerokie zainteresowanie, gdy w 1982 roku H. Prodinger i R. F. Tichy opublikowali artykuł [54], w którym wskazali związek pomiędzy liczbą wszystkich zbiorów niezależnych w ścieżkach a liczbami Fibonacciego oraz między liczbą wszystkich zbiorów niezależnych w cyklach a liczbami Lucasa. Ta prosta obserwacja zainicjowała intensywne dalsze badania dotyczące zliczania zbiorów niezależnych.

Zainteresowanie tematyką zliczania zbiorów niezależnych zostało wzmocnione przez R. E. Merrifielda i H. E. Simmonsa, którzy w [41] wprowadzili liczbę zbiorów niezależnych do kombinatoryki chemicznej. Literatura dotycząca zliczania zbiorów niezależnych jest obszerna, a przegląd aktualnych prac wskazuje, że problem ten pozostaje nadal aktualny.

Oprócz zliczania wszystkich zbiorów niezależnych lub maksymalnych zbiorów niezależnych pojawiły się prace w których zliczane były szczególne zbiory niezależne, między innymi zawierające zbiór liści [75], niezawierające żadnego liścia [33] oraz uogólnione zbiory niezależne [37, 58, 59]. Wynikało to między innymi z faktu, że dla niektórych klas grafów liczba zbiorów niezależnych wyraża się za pomocą liczb typu Fibonacciego, czyli liczb zdefiniowanych za pomocą liniowych, jednorodnych równań rekurencyjnych o stałych współczynnikach. Takie interpretacje grafowe pozwalają badać własności tych ciągów liczbowych przy użyciu metod teorii grafów.

W literaturze zbiory niezależne często rozważane są z dodatkowym warunkiem dominowania jako *niezależne zbiory dominujące*. Pojęcie niezależnych zbiorów dominujących pojawiło się w 1962 roku w pracach C. Berge'a [12] oraz O. Ore'a [47], gdzie zbiory te nazywane były *jądrami grafu*. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem dominującym*, jeżeli każdy wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ ma co najmniej jednego sąsiada w D. W literaturze istnieje wiele wariantów i uogólnień zbiorów dominujących, co prowadzi do rozważań różnych rodzajów niezależnych zbiorów dominujących. Należy jednak zaznaczyć, że nie zawsze możliwe jest połączenie niezależności z danym wariantem dominowania, gdyż pojęcia te mogą się wzajemnie wykluczać. W wielu przypadkach połączenie warunku niezależności z pewnym wariantem dominowania, o ile jest możliwe, jest bardziej interesujące niż klasyczne niezależne dominowanie, ponieważ pojawia się problem istnienia takich zbiorów.

W niniejszej rozprawie rozważane będą zbiory niezależne i pewne warianty zbiorów dominujących zawierających zbiór liści jako podzbiór.

Jednym z rodzajów zbiorów niezależnych, które zawierają zbiór liści jako podzbiór są niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące. Zbiory $(1, 2)$-dominujące oraz niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące wprowadzili w 2008 S. T. Hedetniemi i in. w [30] jako osłabienie znanych zbiorów 2-dominujących i niezależnych zbiorów 2-dominujących. Zbiory 2-dominujące są szczególnym przypadkiem zbiorów wielokrotnie dominujących wprowadzonych przez J. Finka i M. S. Jacobsona w 1985 roku w [26]. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest zbiorem 2-dominującym, jeżeli każdy wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ ma co najmniej dwóch sąsiadów w zbiorze D. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest zbiorem $(1, 2)$-dominującym, jeżeli dla każdego wierzchołka $x \in V(G) \setminus D$ istnieją w zbiorze D dwa różne wierzchołki u, v takie, że x jest sąsiedni z u, natomiast $d_G(x, v) \leqslant 2$. Definicja $(1, 2)$-dominowania uogólnia pojęcie zbioru dominującego i osłabia warunek 2-dominowania.

W niniejszej rozprawie rozważane będą zbiory niezależne zawierające zbiór liści, niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące, maksymalne zbiory k-niezależne zawierające zbiór liści i zbiory 2-dominujące. Wszystkie rozważane zbiory zawierają zbiór liści jako podzbiór.

Rozprawa składa się z pięciu rozdziałów. Zawiera również wykaz oznaczeń, podsumowanie w którym określone są dalsze kierunki badań i bibliografię.

W rozdziale pierwszym podane są podstawowe definicje i oznaczenia, natomiast pozostałe pojęcia wprowadzane są w kolejnych rozdziałach bezpośrednio przed ich wykorzystaniem.

Rozdział drugi jest wprowadzeniem do tematyki rozprawy. W rozdziale została określona motywacja dotycząca wyboru tematyki, przedstawione cele rozprawy oraz wybrane rezultaty dotyczące liczby zbiorów niezależnych w różnych klasach grafów, takich jak drzewa, grafy jednocyklowe i dwucyklowe.

Ponieważ zbiory niezależne zawierające zbiór liści były zliczane w literaturze w drzewach i grafach jednocyklowych, w rozdziale trzecim rozważana jest liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w szczególnych grafach dwucyklowych zawierających dokładnie jedną ósemkę jako podgraf indukowany. Podana została najmniejsza i największa wartość liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści. Ponadto zostały scharakteryzowane grafy ekstremalne z najmniejszą i największą liczbą takich zbiorów. Uzyskanie wyników wymagało opisania przekształceń grafu G w graf G' takich, że liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści nie maleje oraz wyznaczenia dokładnej wartości liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w szczególnej podrodzinie grafów dwucyklowych.

W rozdziale czwartym pokazane są związki liczb Padovana i uogólnionych liczb Padovana z liczbą zbiorów niezależnych. Korzystając z interpretacji grafowej liczb Padovana i Perrina dotyczącej liczby niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w ścieżkach i cyklach, został zdefiniowany wielomian Padovana grafu z wykorzystaniem kompozycji dwóch grafów. W konsekwencji zostały otrzymane nowe wzory dwumianowe dla liczb Padovana i liczb Perrina.

W literaturze zostało wprowadzonych i opisanych wiele różnych uogólnień zbiorów niezależnych. A. Meir i J. W. Moon w [40] podali uogólnienie zbiorów niezależnych w sensie odległościowym. Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $S \subseteq V(G)$ jest zbiorem k-niezależnym grafu G jeżeli dla dowolnych $x, y \in S$, gdzie $x \neq y$ zachodzi warunek $d_G(x,y) \geqslant k$. W rozprawie rozważany jest uogólniony ciąg Padovana i pokazane zostały zależności pomiędzy uogólnionymi liczbami Padovana a liczbą maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżkach. Ta interpretacja pozwoliła na uzyskanie wzoru dwumianowego dla uogólnionych liczb Padovana a następnie wykorzystując operację G-złączenia grafów zdefiniowany został uogólniony wielomian Padovana.

W rozdziale piątym rozważane są także podzbiory zbioru wierzchołków zawierające zbiór liści. Jednym z wariantów zbiorów dominujących zwierających zbiór liści są zbiory 2-dominujące, będące szczególnym przypadkiem zbiorów $(1,k)$-dominujących. Zbiory 2-dominujące i niezależne zbiory 2-dominujące są w literaturze szeroko opisane. Ponieważ każdy zbiór 3-dominujący jest zbiorem 2-dominującym, w rozprawie zostały wprowadzone właściwe zbiory 2-dominujące. Właściwe zbiory 2-dominujące zostały zdefiniowane w [6] aby odróżnić zbiory 2-dominujące od 3-dominujących. Nie każdy graf ma właściwy zbiór 2-dominujący. W rozprawie podana została pełna charakteryzacja grafów mających właściwy zbiór 2-dominujący. Ponadto została pokazana zależność pomiędzy parametrami właściwego 2-dominowania a parametrami 2-dominowania i 3-dominowania oraz zostało pokazane, że liczba właściwego 2-dominowania jest związana z istnieniem niezależnych zbiorów 2-dominujących.

Większość zamieszczonych w niniejszej rozprawie wyników jest opublikowana w poniższych artykułach.

(A) P. Bednarz, M. Pirga, *On Proper 2-Dominating Sets in Graphs*, Symmetry, 2024, 16(3), 296,

(B) M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch, *Some New Graph Interpretations of Padovan Numbers*, Symmetry, 2024, 16(11), 1493,

(C) U. Bednarz, M. Pirga, *(1,2)-PDS in graphs with the small number of vertices of large degrees*, Opuscula Math. 45, no. 1 (2025), 53-62,

(D) M. Pirga, M. Startek, I. Włoch, *Counting of independent sets including the set of leaves in graphs with two elementary cycles*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, 2025, vol. 25(4), 2025, 347-357.

W każdym z powyższych współautorskich artykułów udział autora rozprawy, zgodnie z oświadczeniami współautorów, wynosi co najmniej 50%.

Wszystkie zamieszczone w rozprawie rezultaty zostały przedstawione w formie referatów na międzynarodowych konferencjach z zakresu teorii grafów:

1. 32nd Workshop on Cycles and Colourings - Poprad (Słowacja), 8 - 13 IX 2024, tytuł referatu: *(1,2)-PDS in graphs with the small number of vertices of large degrees*,

2. Rzeszów Workshop on Graph Theory - Rzeszów, 23 - 27 VI 2025, tytuł referatu: *The number of independent sets including the set of leaves in graphs*,

3. 10th Cracow Conference on Graph Theory - Kraków, 22 - 26 IX 2025, tytuł referatu: *Perfect (1,2)-Dominating Sets in Graphs with a Few Large-Degree Vertices.*

Wyniki zawarte w niniejszej rozprawie nie wyczerpują przedstawionej tematyki, która może być nadal rozwijana. Dalsze kierunki badań wraz z wybranymi już uzyskanymi wynikami zostały przedstawione w podsumowaniu rozprawy.

Wykaz oznaczeń

$G = (V, E)$	-	graf prosty (graf)
$V(G)$	-	zbiór wierzchołków grafu G
$E(G)$	-	zbiór krawędzi grafu G
xy	-	krawędź xy incydentna z wierzchołkami x, y
$d_G(x)$	-	stopień wierzchołka x w grafie G
$\Delta(G)$	-	maksymalny stopień grafu G
$\delta(G)$	-	minimalny stopień grafu G
$N_G(x)$	-	sąsiedztwo otwarte wierzchołka x w grafie G
$N_G[x]$	-	sąsiedztwo domknięte wierzchołka x w grafie G
$d_G(x, y)$	-	odległość pomiędzy wierzchołkami x, y w grafie G
$x - z - y$	-	droga pomiędzy wierzchołkami x i y zawierająca wierzchołek z
$sub_{xy}(G)$	-	graf otrzymany z grafu G przez podział krawędzi xy
$ad_{H(x,y)}(G)$	-	graf otrzymany przez lokalne powiększenie grafu G o graf H
N_n	-	graf bezkrawędziowy n-wierzchołkowy
P_n	-	ścieżka n-wierzchołkowa
C_n	-	cykl n-wierzchołkowy
K_n	-	graf pełny n-wierzchołkowy
$K_{1,n-1}$	-	gwiazda n-wierzchołkowa
T_n	-	drzewo n-wierzchołkowe
$L_{n,k}$	-	lizak n-wierzchołkowy
$C_{n,k}$	-	graf ósemka
$H_{n,3}$	-	gwiazda z jednym trójkątem
$H_{n,3,3}$	-	gwiazda z dwoma krawędziowo rozłącznymi trójkątami
$R_{n,3,3}$	-	podwójny lizak n-wierzchołkowy z dwoma trójkątami
$H \leqslant G$	-	podgraf indukowany H grafu G
$L(G)$	-	zbiór liści grafu G
$L(x)$	-	zbiór liści grafu G sąsiednich z wierzchołkiem x
$S(G)$	-	zbiór wierzchołków podtrzymujących grafu G
$S_s(G)$	-	zbiór wierzchołków silnie podtrzymujących grafu G

$S_w(G)$	-	zbiór wierzchołków słabo podtrzymujących grafu G
$G \cong H$	-	izomorfizm grafów G i H
$G \,\square\, H$	-	produkt kartezjański grafów G i H
$G \times H$	-	produkt tensorowy grafów G i H
$G \boxtimes H$	-	silny produkt grafów G i H
$G[H]$	-	kompozycja grafów G i H
$G[h_n]$	-	G-złączenie grafu G i ciągu grafów h_n
$G \circ H$	-	korona grafów G i H
$G \circ h_n$	-	uogólniona korona grafu G i ciągu grafów h_n
$\alpha(G)$	-	liczba niezależności grafu G
$i(G)$	-	dolna liczba niezależności grafu G
$\gamma(G)$	-	liczba dominowania grafu G
$\gamma_2(G)$	-	liczba 2-dominowania grafu G
$\gamma_3(G)$	-	liczba 3-dominowania grafu G
$\gamma_{\overline{2}}(G)$	-	liczba właściwego 2-dominowania grafu G
$\sigma(G)$	-	liczba zbiorów niezależnych w grafie G
$\sigma_L(G)$	-	liczba zbiorów niezależnych w grafie G zawierających $L(G)$
$\sigma_{L,x}(G)$	-	liczba zbiorów niezależnych w grafie G zawierających $L(G)$ i $x \notin L(G)$
$\sigma_{L,-x}(G)$	-	liczba zbiorów niezależnych w grafie G zawierających $L(G)$ i niezawierających $x \notin L(G)$
$\sigma_L^{(1,2)}(G)$	-	liczba niezależnych $(1,2)$-dominujących zbiorów w grafie G zawierających $L(G)$
$\sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)$	-	liczba p-elementowych niezależnych $(1,2)$-dominujących zbiorów n-wierzchołkowego grafu G zawierających $L(G)$
$\sigma_{max}(G)$	-	liczba maksymalnych zbiorów niezależnych w grafie G
$\sigma^{(k)}(G)$	-	liczba zbiorów k-niezależnych w grafie G
$\sigma_L^{(k)}(G)$	-	liczba zbiorów k-niezależnych w grafie G zawierających $L(G)$
$\sigma_{L,max}^{(k)}(G,n,t)$	-	liczba t-elementowych maksymalnych zbiorów k-niezależnych n-wierzchołkowego grafu G zawierających $L(G)$
F_n	-	n-ta liczba Fibonacciego
L_n	-	n-ta liczba Lucasa
$Pv(n)$	-	n-ta liczba Padovana
$Pr(n)$	-	n-ta liczba Perrina
$F(k,n)$	-	n-ta uogólniona liczba Fibonacciego
$Pv(n,k)$	-	n-ta uogólniona liczba Padovana
$Pv(n,x)$	-	wielomian Padovana

Rozdział 1

Podstawowe definicje

W tym rozdziale podamy podstawowe definicje wykorzystywane w rozprawie, które zostały zaczerpnięte głównie z [25]. Pozostałe definicje są wprowadzane w kolejnych rozdziałach, bezpośrednio przed ich wykorzystaniem.

Grafem prostym, nieskierowanym nazywamy uporządkowaną parę $G = (V, E)$, gdzie $V = V(G)$ jest skończonym, niepustym zbiorem, natomiast $E = E(G)$ jest rodziną różnych, dwuelementowych podzbiorów zbioru $V(G)$. Elementy zbioru $V(G)$ nazywamy *wierzchołkami*, a elementy zbioru $E(G)$ *krawędziami*. Dla uproszczenia zapisu krawędź $\{x, y\} \in E(G)$ będziemy oznaczać symbolem xy.

W niniejszej pracy rozważamy wyłącznie grafy proste, nieskierowane, które będziemy nazywać krótko *grafami*.

Jeżeli $|V(G)| = n$, $n \geqslant 1$, oraz $E(G) = \emptyset$, to graf G nazywamy *grafem bezkrawędziowym* i oznaczamy przez N_n. Grafy jednowierzchołkowe będziemy nazywać *grafami trywialnymi*.

Dwa wierzchołki $x, y \in V(G)$ są *sąsiednie* w grafie G, jeżeli $xy \in E(G)$. Mówimy wtedy, że wierzchołki x i y są incydentne z krawędzią xy lub że są jej końcami. Liczbę krawędzi incydentnych z wierzchołkiem x nazywamy *stopniem wierzchołka* x w grafie G i oznaczamy symbolem $d_G(x)$. Wtedy $\delta(G) = \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ nazywamy *minimalnym stopniem grafu* G natomiast $\Delta(G) = \max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ nazywamy *maksymalnym stopniem grafu* G).

Niech $x \in V(G)$. Zbiór $N_G(x) = \{y \in V(G) \ : \ xy \in E(G)\}$ nazywamy *sąsiedztwem otwartym*, natomiast zbiór $N_G[x] = N_G(x) \cup \{x\}$ nazywamy *sąsiedztwem domkniętym* wierzchołka x w grafie G.

Jeżeli $d_G(x) = 0$, to wierzchołek $x \in V(G)$ nazywamy *izolowanym*. Jeżeli $d_G(x) = 1$, to wierzchołek x nazywamy *liściem* grafu G. Zbiór wszystkich liści grafu G oznaczamy symbolem $L(G)$. Niech $x \in V(G)$. Wtedy $L(x)$ oznacza zbiór liści sąsiednich z wierzchołkiem x, czyli $L(G) = \bigcup\limits_{x \in V(G)} L(x)$. Jeżeli $L(x) \neq \emptyset$, to x nazywamy *wierz-*

chołkiem podtrzymującym. Zbiór wszystkich wierzchołków podtrzymujących w grafie G oznaczamy symbolem $S(G)$. Jeżeli $|L(x)| \geqslant 2$, to x nazywamy wierzchołkiem *silnie podtrzymującym*. Zbiór wszystkich wierzchołków silnie podtrzymujących oznaczamy przez $S_s(G)$. Jeżeli $|L(x)| = 1$, to x nazywamy *wierzchołkiem słabo podtrzymującym*, a zbiór wszystkich wierzchołków słabo podtrzymujących oznaczamy symbolem $S_w(G)$. Wtedy $S(G) = S_s(G) \cup S_w(G)$.

Wierzchołek $x \in V(G)$ nazywamy wierzchołkiem przedostatnim grafu G, jeżeli nie jest liściem i sąsiaduje z co najmniej $d_G(x) - 1$ liśćmi.

Dla $n \geqslant 1$ *drogą łączącą wierzchołki* x_0 *i* x_n w grafie G nazywamy ciąg wierzchołków i krawędzi $x_0, x_0x_1, x_1, \ldots, x_{n-1}x_n, x_n$. Jeżeli $x_0 = x_n$ dla $n \geqslant 3$, to otrzymujemy *cykl*. *Odległością pomiędzy wierzchołkami* x_0 i x_n nazywamy długość najkrótszej drogi łączącej wierzchołki x_0 i x_n w grafie G i oznaczamy symbolem $d_G(x_0, x_n)$. Przyjmujemy, że $d_G(x, x) = 0$.

Niech $v \in V(G)$ i niech $S \subseteq V(G)$. Liczbę $d_G(v, S) = \min\{d_G(v, x) : x \in S\}$ nazywamy *odległością pomiędzy wierzchołkiem* x *i zbiorem* S w grafie G.

Mówimy, że graf jest *spójny*, jeżeli dla dowolnych dwóch wierzchołków istnieje łącząca je droga.

Niech G będzie grafem spójnym. Wierzchołek $v \in V(G)$ nazywamy *wierzchołkiem rozcinającym*, jeżeli graf $G \setminus \{v\}$ jest niespójny.

Podzbiór $S \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem niezależnym* grafu G, jeżeli dowolne dwa wierzchołki ze zbioru S nie są sąsiednie. Przyjmujemy że, zbiór pusty oraz wszystkie jednoelementowe podzbiory $V(G)$ są zbiorami niezależnymi. Zbiór niezależny S nazywamy *maksymalnym*, jeżeli nie jest on podzbiorem właściwym innego zbioru niezależnego grafu G. Moc największego zbioru niezależnego grafu G nazywamy *liczbą niezależności* i oznaczamy symbolem $\alpha(G)$, natomiast moc najmniejszego maksymalnego zbioru niezależnego grafu G nazywamy *dolną liczbą niezależności* i oznaczamy przez $i(G)$. Dla każdego grafu G zachodzi nierówność $i(G) \leqslant \alpha(G)$.

Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem dominującym* grafu G, jeżeli każdy wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ ma co najmniej jednego sąsiada w D. Mówimy, że wierzchołek x jest *dominowany* przez zbiór D. W szczególności zbiór $V(G)$ jest zbiorem dominującym. Zbiór dominujący D nazywamy *minimalnym*, jeżeli żaden jego podzbiór właściwy nie jest zbiorem dominującym. Moc najmniejszego zbioru dominującego grafu G nazywamy *liczbą dominowania* i oznaczamy symbolem $\gamma(G)$.

Mówimy, że grafy G i H są *izomorficzne*, jeżeli istnieje bijekcja $f : V(G) \to V(H)$ taka, że $xy \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x)f(y) \in E(H)$. Izomorfizm grafów G i H zapisujemy jako $G \cong H$, a funkcję f nazywamy *izomorfizmem* grafów G i H.

Jeżeli $V(H) \subseteq V(G)$ oraz $E(H) \subseteq E(G)$, to graf H nazywamy *podgrafem grafu* G.

Niech $U \subseteq V(G)$. Podgrafem grafu G indukowanym przez zbiór U nazywamy maksymalny, w sensie zawierania, podgraf grafu G o zbiorze wierzchołków U. Podgraf indukowany przez zbiór U oznaczamy $G[U]$. Jeżeli mówimy o dowolnym podgrafie indukowanym H grafu G, to przyjmujemy zapis $H \leqslant G$.

Niech G i H będą danymi grafami. *Lokalnym powiększeniem* grafu G o graf H nazywamy graf $ad_{H(x,y)}(G)$ powstały przez dołączenie do ustalonego wierzchołka $x \in V(G)$ grafu H w taki sposób, że wierzchołek x identyfikujemy z ustalonym wierzchołkiem $y \in V(H)$.

Niech $e = xy \in E(G)$. Grafem $sub_{xy}(G)$ nazywamy graf powstały z grafu G przez *podział krawędzi* $e = xy$ polegający na wstawieniu na krawędzi e wierzchołka stopnia 2.

Produktem kartezjańskim grafów G i H nazywamy graf $G \square H$ taki, że $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \square H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q) \colon (x_i = x_j \text{ i } y_p y_q \in E(H)) \text{ lub } (y_p = y_q \text{ i } x_i x_j \in E(G))\}$.

Produktem tensorowym grafów G i H nazywamy graf $G \times H$ taki, że $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \times H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q) \colon x_i x_j \in E(G) \text{ i } y_p y_q \in E(H)\}$.

Silnym produktem grafów G oraz H nazywamy graf $G \boxtimes H$ taki, że $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G \boxtimes H) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q) \colon (x_i = x_j \text{ i } y_p y_q \in E(H)) \text{ lub } (y_p = y_q \text{ i } x_i x_j \in E(G)) \text{ lub } (x_i x_j \in E(G) \text{ i } y_p y_q \in E(H))\}$.

Niech G będzie grafem takim, że $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \geqslant 1$ i niech $h_n = (H_i)_{i \in \mathcal{I} = \{1,2,\ldots,n\}}$ będzie ciągiem dowolnych grafów.

Uogólnioną koroną grafu G i ciągu h_n nazywamy graf $G \circ h_n$ taki, że $V(G \circ h_n) = V(G) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} V(H_i)$ oraz $E(G \circ h_n) = E(G) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} E(H_i) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{n} \{x_i y; y \in V(H_i)\}$.

Koronę grafu G i ciągu h_n oznaczamy również symbolem $G \circ (H_1, H_2, \ldots, H_n)$.

Jeżeli wszystkie grafy ciągu h_n są izomorficzne z pewnym grafem H, to otrzymujemy definicję korony dwóch grafów $G \circ H$.

Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Ciągi zdefiniowane jednorodnym liniowym równaniem rekurencyjnym rzędu k postaci

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \cdots + b_k a_{n-k}, \quad n \geqslant k, \tag{2.1}$$

gdzie $b_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dla $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $b_k \neq 0$, z danymi warunkami początkowymi $a_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, z których przynajmniej jeden jest niezerowy, nazywamy *ciągami typu Fibonacciego*, a ich wyrazy *liczbami typu Fibonacciego*.

Dla szczególnych wartości parametrów k, b_i, $i \in \{1, \ldots, k\}$ oraz a_j, $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ otrzymujemy równania rekurencyjne znanych ciągów liczbowych. Przypomnimy ciągi typu Fibonacciego, które są wykorzystane w niniejszej rozprawie.

1. Ciąg Fibonacciego.
Jeżeli $k = 2$, $b_1 = b_2 = 1$ oraz $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, to otrzymujemy ciąg Fibonacciego (F_n) postaci

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

z warunkami początkowymi $F_0 = F_1 = 1$.
Wyrazy ciągu Fibonacciego nazywamy *liczbami Fibonacciego*.
2. Ciąg Lucasa.
Jeżeli $k = 2$, $b_1 = b_2 = 1$ oraz $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, to otrzymujemy ciąg Lucasa (L_n) postaci

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$$

z warunkami początkowymi $L_0 = 2$, $L_1 = 1$.
Wyrazy ciągu Lucasa nazywamy *liczbami Lucasa*.
3. Ciąg Padovana.
Jeżeli $k = 3$, $b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = 1$ oraz $a_0 = a_1 = a_2 = 1$, to otrzymujemy ciąg Padovana $(Pv(n))$ postaci

$$Pv(n) = Pv(n-2) + Pv(n-3), \quad n \geqslant 3,$$

z warunkami początkowymi $Pv(0) = Pv(1) = Pv(2) = 1$.
Wyrazy ciągu Padovana nazywamy *liczbami Padovana*.
4. Ciąg Perrina.
Jeżeli $k = 3$, $b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = 1$ oraz $a_0 = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, to otrzymujemy ciąg Perrina $(Pr(n))$ postaci

$$Pr(n) = Pr(n-2) + Pr(n-3), \quad n \geqslant 3,$$

z warunkami początkowymi $Pr(0) = 3$, $Pr(1) = 0$ i $Pr(2) = 2$.
Wyrazy ciągu Perrina nazywamy *liczbami Perrina*.

Ciągi typu Fibonacciego mogą być zdefiniowane także w dziedzinie całkowitej.

W dalszej części rozprawy będziemy używać liczb Fibonacciego w dziedzinie całkowitej oraz wybranych znanych tożsamości dla liczb Fibonacciego.

Dla $n < 0$ liczby Fibonacciego są określone wzorem $F_{-1} = 0$, $F_{-n} = (-1)^n F_{n-2}$, $n \geqslant 2$.

$$F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n}, \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 1,\ m \geqslant 1, \tag{1.1}$$

$$F_m F_n - F_{m+1} F_{n-1} = (-1)^n F_{m-n}, \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 1,\ m \geqslant n, \tag{1.2}$$

$$F_m F_n - F_{m-2} F_{n-2} = F_{m+n-1}, \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 2,\ m \geqslant 2, \tag{1.3}$$

$$F_m F_n - F_{m+2} F_{n-2} = (-1)^{n-1} F_{m-n+1}, \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 2,\ m \geqslant n-1. \tag{1.4}$$

Wielomian zmiennej x postaci $f_n(x) = xf_{n-1}(x) + f_{n-2}(x)$, dla $n \geqslant 2$, z warunkami początkowymi $f_0(x) = 1$ i $f_1(x) = x$ nazywamy *wielomianem Fibonacciego*. Jeżeli $x = 1$, wtedy $f_n(1) = F_n$.

Wielomian zmiennej x postaci $Pv(n, x) = xPv(n-2, x) + Pv(n-3, x)$, $n \geqslant 3$, z warunkami początkowymi $Pv(0, x) = Pv(1, x) = Pv(2, x) = 1$ nazywamy *wielomianem Padovana*.

1.1 Definicje szczególnych klas grafów

W tym podrozdziale przypomnimy definicje szczególnych klas grafów, które będą wykorzystywane w kolejnych rozdziałach.

Ścieżką n-wierzchołkową nazywamy graf P_n, $n \geqslant 2$ taki, że $V(P_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $E(P_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n\}$. Jeżeli $n = 1$, to P_1 jest ścieżką trywialną.

Cyklem n-wierzchołkowym nazywamy graf C_n, $n \geqslant 3$ taki, że $V(C_n) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ i $E(C_n) = \{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1\}$.

Drzewem nazywamy graf spójny, który nie zawiera cykli. Drzewo n-wierzchołkowe ma $n-1$ krawędzi i mówimy także, że jest $(n, n-1)$-grafem.

Jeżeli graf G zawiera dokładnie jeden cykl, to nazywamy go *grafem jednocyklowym*. Spójny graf jednocyklowy o n wierzchołkach, $n \geqslant 3$ i n krawędziach nazywamy również (n, n)-grafem.

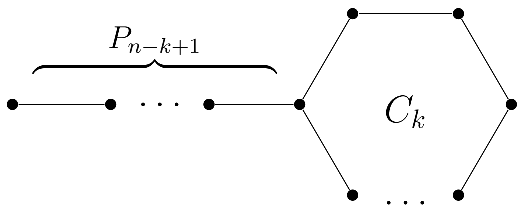
Spójny graf dwucyklowy o n wierzchołkach i $n+1$ krawędziach, $n \geqslant 5$, nazywamy $(n, n+1)$-grafem.

Graf, w którym każde dwa wierzchołki są sąsiednie, nazywamy *grafem pełnym*.

Graf pełny n-wierzchołkowy oznaczamy przez K_n, $n \geqslant 1$. W szczególności, graf K_3 nazywamy *trójkątem*.

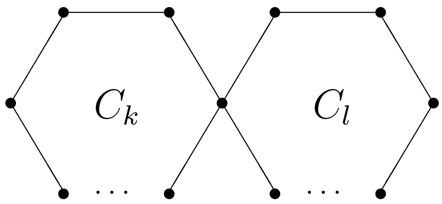
Graf G nazywamy *grafem dwudzielnym*, jeżeli zbiór wierzchołków $V(G)$ można podzielić na dwa rozłączne, niepuste i niezależne zbiory V_1 i V_2. Jeżeli $|V_1| = n$ oraz $|V_2| = m$ i każdy wierzchołek ze zbioru V_1 jest sąsiedni z każdym wierzchołkiem ze zbioru V_2, to taki graf nazywamy *grafem pełnym dwudzielnym* i oznaczamy przez $K_{n,m}$. Graf $K_{1,n-1}$ nazywamy *gwiazdą*.

Niech n, k będą liczbami naturalnymi. Symbolem $L_{n,k}$, $n > k \geqslant 3$, oznaczamy n-wierzchołkowy graf jednocyklowy otrzymany z cyklu C_k i ścieżki P_{n-k+1} przez identyfikację dowolnego wierzchołka z cyklu C_k z liściem ścieżki P_{n-k+1}. Graf $L_{n,k}$ nazywamy *lizakiem.* Rysunek 1.1 przedstawia konstrukcję lizaka $L_{n,k}$.



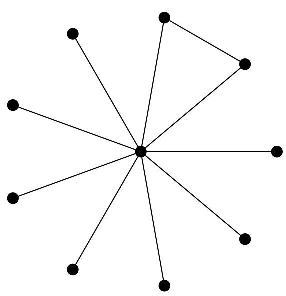
Rysunek 1.1: Lizak $L_{n,k}$.

Niech k i l będą liczbami naturalnymi, $k, l \geqslant 3$. Symbolem $C_{k,l}$ oznaczamy n-wierzchołkowy graf dwucyklowy, $n = k + l - 1 \geqslant 5$, otrzymany przez identyfikację jednego wierzchołka cyklu C_k z jednym wierzchołkiem cyklu C_l. Graf $C_{k,l}$ nazywamy *ósemką.* Rysunek 1.2 przedstawia konstrukcję ósemki $C_{k,l}$.



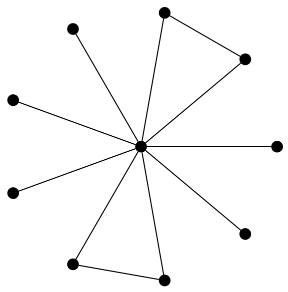
Rysunek 1.2: Ósemka $C_{k,l}$.

Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Symbolem $H_{n,3}$ oznaczamy n-wierzchołkowy graf otrzymany z gwiazdy $K_{1,n-1}$ przez dodanie dokładnie jednej krawędzi. Graf $H_{n,3}$ nazywamy *gwiazdą z jednym trójkątem.* Rysunek 1.3 przedstawia konstrukcję grafu $H_{n,3}$.



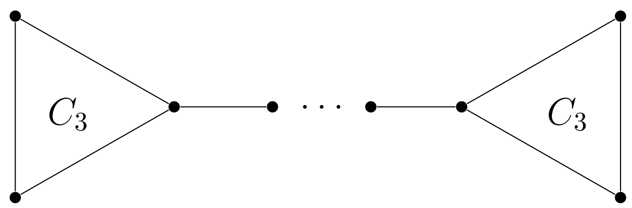
Rysunek 1.3: Gwiazda z jednym trójkątem $H_{n,3}$.

Niech $n \geqslant 6$ będzie liczbą naturalną. Symbolem $H_{n,3,3}$ oznaczamy n-wierzchołkowy graf otrzymany z gwiazdy $K_{1,n-1}$ przez dodanie dwóch krawędzi w taki sposób, że powstały graf zawiera dwa rozłączne krawędziowo trójkąty. Graf $H_{n,3,3}$ nazywamy *gwiazdą z dwoma rozłącznymi trójkątami*. Rysunek 1.4 przedstawia konstrukcję grafu $H_{n,3,3}$.



Rysunek 1.4: Gwiazda z dwoma rozłącznymi trójkątami $H_{n,3,3}$.

Niech $n \geqslant 6$ będzie liczbą naturalną. Symbolem $R_{n,3,3}$ oznaczamy n-wierzchołkowy graf otrzymany przez identyfikację jedynego liścia x lizaka $L_{n-2,3}$ z pewnym wierzchołkiem y grafu C_3. Rysunek 1.5 przedstawia konstrukcję grafu $R_{n,3,3}$.



Rysunek 1.5: Graf $R_{n,3,3}$.

Rozdział 2

Przedstawienie problemu i celu rozprawy

Celem niniejszej rozprawy jest badanie zbiorów niezależnych i dominujących zawierających zbiór liści jako podzbiór, ze szczególnym uwzględnieniem problemów ich zliczania.

Zbiory dominujące, ich uogólnienia lub warianty są w literaturze niekiedy rozważane z dodatkowym założeniem niezależności. W niektórych przypadkach uogólnienie zbioru dominującego lub nałożenie dodatkowego warunku niezależności na zbiór dominujący D wymusza zależność, że $L(G) \subseteq D$. Takimi uogólnionymi zbiorami dominującymi które zawierają zbiór liści są zbiory wielokrotnie dominujące oraz niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące.

Pojęcie zbioru wielokrotnie dominującego zostało wprowadzone przez J. M. Finka i M. S. Jacobsona w [26].

Niech $p \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem p-dominującym* grafu G jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V(G) \setminus D$ zachodzi nierówność $|D \cap N(v)| \geqslant p$. Innymi słowy każdy wierzchołek nienależący do zbioru D ma co najmniej p sąsiadów w tym zbiorze. Ponadto przyjmujemy, że zbiór wierzchołków $V(G)$ jest zbiorem p-dominującym grafu G, dla dowolnego $p \geqslant 1$. To oznacza, że dla dowolnego $p \geqslant 1$ każdy graf ma zbiór dominujący.

Jeżeli $p = 1$, to zbiór p-dominujący jest zbiorem dominującym. Jeżeli $p = 2$, to otrzymujemy definicję zbioru 2-dominującego.

Parametr p w definicji zbioru p-dominującego określa najmniejszą liczbę sąsiadów wierzchołka v należących do zbioru D.

Z definicji zbioru p-dominującego, dla $p \geqslant 2$, wynikają następujące obserwacje

Obserwacja 2.1. *Niech $p \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Każdy zbiór p-dominujący grafu G jest zbiorem $(p - i)$-dominującym, dla $i \in \{1, ..., p - 1\}$.*

Obserwacja 2.2. *Niech $p \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Dla dowolnego grafu G każdy wierzchołek stopnia co najwyżej $p-1$ należy do każdego zbioru p-dominującego.*

Z obserwacji 2.2 wynika, że dla dowolnego grafu G każdy zbiór p-dominujący, $p \geqslant 2$ zawiera zbiór liści jako podzbiór.

W znacznej części publikacji dotyczących wielokrotnego dominowania badane są zbiory 2-dominujące i związane z nimi parametry 2-dominowania.

Między innymi M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron w [14] badali największe zbiory niezależne oraz zbiory 2-dominujące w drzewach, analizując zależności pomiędzy parametrami $\gamma_2(G)$ i $\alpha(G)$. M. Chellali, L. Volkmann w [20, 66] wyznaczyli dolne oszacowania liczby $\gamma_2(G)$ w drzewach i scharakteryzowali grafy ekstremalne.

Uogólnieniem zbiorów 2-dominujących są zbiory $(1,k)$-dominujące. Pojęcie zbioru $(1,k)$-dominującego wprowadzili S. M. Hedetniemi i in. w [30]. Definicja zbioru $(1,k)$-dominującego uogólnia 2-dominowanie z wykorzystaniem odległościowego k-dominowania.

Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy *zbiorem $(1,k)$-dominującym*, jeżeli dla każdego wierzchołka $v \in V(G) \setminus D$ istnieją dwa różne wierzchołki $u, w \in D$ takie, że $uv \in E(G)$ oraz $d_G(v,w) \leqslant k$. Jeżeli $k = 1$, to otrzymujemy definicję zbioru 2-dominującego. Parametr k w definicji zbioru $(1,k)$-dominującego nie jest określony jednoznacznie, określa największą dopuszczalną odległość pomiędzy wierzchołkiem v nienależącym do zbioru D, a wierzchołkiem $w \in D$.

Z powyższej definicji wynika następująca obserwacja

Obserwacja 2.3. *Niech $k \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Każdy zbiór $(1,k)$-dominujący grafu G jest zbiorem $(1,k+i)$-dominującym, dla $i \geqslant 1$.*

Rozważanie zbiorów $(1,k)$-dominujących ma sens jedynie dla niewielkich wartości parametru k. W pracy [30] udowodniono, że każdy zbiór dominujący zawierający co najmniej dwa wierzchołki jest zbiorem $(1,4)$-dominującym, a zatem rozważania można ograniczyć do przypadków $k \in \{1,2,3,4\}$.

Twierdzenie 2.4. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [30]) *Jeżeli graf G jest spójny i $\gamma(G) \geqslant 2$, to każdy zbiór dominujący grafu G jest zbiorem $(1,4)$-dominującym.*

W niniejszej rozprawie będziemy rozważać niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące. Przegląd literatury dotyczącej zbiorów $(1,k)$-dominujących pokazuje, że dla $k \geqslant 2$ najczęściej rozważane są zbiory $(1,2)$-dominujące. Parametrami $(1,2)$-dominowania zajmowali się S. M. Hedetniemi i in. w [30], K. Kayathri i S. Vallirani w [34], M. Dettlaff i in. w [24], A. Kosiorowska i in. w [35] oraz A. Michalski i in. w [43]. Zagadnienia złożoności obliczeniowej badała J. Raczek w [55, 56]. Zbiory $(1,2)$-dominujące rozważane są także z dodatkowym warunkiem niezależności. Po raz pierwszy niezależne zbiory $(1, 2)$- dominujące były rozważane w [30], a następnie w [4, 5, 43].

Nie każdy graf ma niezależny zbiór $(1, 2)$-dominujący.

Twierdzenie 2.5. (A. Michalski [42]) *Jeżeli D jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym grafu G, to D jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G takim, że $L(G) \subseteq D$.*

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy

Wniosek 2.6. (M. Pirga [50]) *Jeżeli D jest niezależnym zbiorem $(1, 2)$-dominującym, to D jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści i zbiorem $(1, 2)$-dominującym zawierającym zbiór liści.*

Zauważmy, że dla $k = 3$ niezależne zbiory $(1, 3)$-dominujące nie muszą zawierać zbioru liści. Przykładem jest ścieżka P_5 gdzie zbiór wierzchołków podtrzymujących jest niezależnym zbiorem $(1, 3)$-dominującym. Nasze rozważania będą dotyczyć zbiorów 2-dominujących i niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących ze względu na to, że zbiory te zawierają zbiór liści grafu jako podzbiór.

Powyższe rozważania były motywacją do prowadzenia badań dotyczących zbiorów niezależnych i zbiorów dominujących zawierających zbiór liści jako podzbiór w grafie. Jednym z szeroko omawianych problemów dotyczących zbiorów niezależnych jest ich zliczanie.

Niech $\sigma(G)$ oznacza liczbę wszystkich zbiorów niezależnych w grafie G.

Twierdzenie 2.7. (H. Prodinger, R. F. Tichy [54]) *Niech $n \geqslant 0$ będzie liczbą całkowitą. Wtedy $\sigma(P_n) = F_{n+1}$, dla $n \geqslant 0$ oraz $\sigma(C_n) = L_n$ dla $n \geqslant 3$.*

Obserwacja pokazująca związki parametru $\sigma(G)$ z liczbami Fibonacciego i liczbami Lucasa stała się impulsem do dalszych badań nad zliczaniem zbiorów niezależnych w grafach. Duży wpływ na zwiększenie zainteresowania problemami zliczania zbiorów niezależnych miało zastosowanie parametru $\sigma(G)$, ponieważ niezależnie od wyników H. Prodingera i R. F. Tichy'ego dwaj chemicy R. E. Merrifield i H. E. Simmons wprowadzili w [41] liczbę zbiorów niezależnych do kombinatoryki chemicznej. Parametr $\sigma(G)$ dla grafu molekularnego, czyli grafu w którym wierzchołki reprezentują atomy a krawędzie wiązania pomiędzy nimi, ma ścisły związek z pewnymi fizykochemicznymi właściwościami związków chemicznych, między innymi punktami wrzenia. Parametr $\sigma(G)$ należy do tak zwanych indeksów topologicznych grafu, które służą do ilościowego opisu struktury grafu molekularnego i są wykorzystywane w projektowaniu cząsteczek. Obecnie ze względu na zastosowania parametr $\sigma(G)$ jest nazywany indeksem Merrifielda-Simmonsa, rzadziej liczbą Fibonacciego grafu. Literatura zawiera bardzo dużo prac dotyczących zliczania zbiorów niezależnych, a problemy zliczania są nadal intensywnie badane. W przeglądowym artykule I. Gutmana i S. Wagnera [28] z 2010 roku, zostały zebrane i uporządkowane wyniki dla parametru $\sigma(G)$ i nadal pojawiają się nowe prace.

Parametr $\sigma(G)$ został wyznaczony lub oszacowany dla wielu klas grafów, w pierwszej kolejności, także ze względu na zastosowania w kombinatoryce chemicznej, grafów z małą liczbą cykli, czyli dla drzew i grafów jednocyklowych, a następnie również dla grafów z dwoma elementarnymi cyklami.

Twierdzenie 2.8. (H. Prodinger, R. F. Tichy [54]) *Jeżeli T_n jest n-wierzchołkowym drzewem, $n \geqslant 1$, to $F_{n+1} \leqslant \sigma(T_n) \leqslant 2^{n-1}+1$. Ponadto $\sigma(T_n) = F_{n+1}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_n \cong P_n$ oraz $\sigma(T_n) = 2^{n-1}+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_n \cong K_{1,n-1}$.*

Twierdzenie 2.9. (A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard [49]) *Jeżeli G jest n-wierzchołkowym grafem jednocyklowym, $n \geqslant 3$, to $L_n \leqslant \sigma(G) \leqslant 3 \cdot 2^{n-3}+1$. Ponadto $\sigma(G) = L_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C_n$ lub $G \cong L_{n,3}$ oraz $\sigma(G) = 3 \cdot 2^{n-3}+1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $G \cong C_4$ lub $G \cong H_{n,3}$.*

Kolejne twierdzenie podaje oszacowanie parametru $\sigma(G)$ dla $(n, n+1)$-grafów G zawierających dwa cykle elementarne.

Twierdzenie 2.10. (M. Startek, A. Włoch, I. Włoch [60]) *Niech G będzie dowolnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 5$, zawierającym dokładnie dwa cykle elementarne. Wtedy $5F_{n-3} \leqslant \sigma(G) \leqslant 1 + 9 \cdot 2^{n-2}$. Ponadto $\sigma(G) = 5F_{n-3}$ dla $G \cong C_{3,3}$ i $G \cong R_{n,3,3}$ dla $n \geqslant 6$ oraz $\sigma(G) = 1 + 9 \cdot 2^{n-2}$ dla $G \cong H_{n,3,3}$.*

Przegląd rezultatów dotyczących parametru $\sigma(G)$ jest zawarty w [28].

Niech $\sigma_L(G)$ oznacza liczbę wszystkich zbiorów niezależnych w grafie G zawierających zbiór liści $L(G)$ jako podzbiór. Jeżeli $L(G) = \{w\}$, to przyjmujemy oznaczenie $\sigma_w(G)$.

Niech $\mathcal{F}_L$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów niezależnych grafu G, zawierających zbiór $L(G)$. Wtedy $|\mathcal{F}_L| = |\mathcal{F}'|$, gdzie $\mathcal{F}'$ jest rodziną wszystkich zbiorów niezależnych grafu $G \setminus N[L]$. To oznacza, że

$$\sigma_L(G) = \sigma(G \setminus N[L]). \tag{2.1}$$

Niech $x \in V(G)$. Oznaczmy przez $\sigma_{L,x}(G)$ (odpowiednio: $\sigma_{L,-x}(G)$) liczbę zbiorów niezależnych S zawierających zbiór $L(G)$ takich, że $x \in S$ (odpowiednio: $x \notin S$). Wtedy

$$\sigma_L(G) = \sigma_{L,x}(G) + \sigma_{L,-x}(G) \tag{2.2}$$

jest podstawową regułą zliczania zbiorów niezależnych zawierających zbiór $L(G)$ jako podzbiór w grafie G.

Jeżeli $L(G) = \{w\}$, to przyjmujemy zapis

$$\sigma_w(G) = \sigma_{w,x}(G) + \sigma_{w,-x}(G). \tag{2.3}$$

Analogicznie jak w przypadku parametru $\sigma(G)$ parametr $\sigma_L(G)$ w pierwszej kolejności został oszacowany dla grafów z małą liczbą cykli, czyli dla drzew i grafów jednocyklowych.

Twierdzenie 2.11. (A. Włoch, I. Włoch [71]) *Niech T będzie dowolnym drzewem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 3$. Wtedy $1 \leqslant \sigma_L(T) \leqslant F_{n-3}$. Ponadto, $\sigma_L(T) = F_{n-3}$ jeżeli $T \cong P_n$.*

Twierdzenie 2.12. (A. Włoch, I. Włoch [72]) *Niech G będzie grafem jednocyklowym, n-wierzchołkowym, $n \geqslant 4$ oraz $G \neq C_n$. Wtedy $\sigma_L(G) \leqslant F_{n-1}$. Ponadto, $\sigma_L(G) = F_{n-1}$ jeżeli $G \cong L_{n,n-1}$.*

Niech G będzie n-wierzchołkowym, $n \geqslant 4$, grafem jednocyklowym i $G \neq C_n$. Dla małych wartości $n \in \{4, 5\}$ przez przeglądnięcie wszystkich możliwości otrzymujemy, że $\sigma_L(G) = 3$ dla $n = 4$ oraz $\sigma_L(G) \geqslant 2$ dla $n = 5$.

Twierdzenie 2.13. (M. Pirga [50]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem jednocyklowym, $n \geqslant 6$ oraz $G \neq C_n$. Wtedy $\sigma_L(G) \geqslant 1$. Ponadto, $\sigma_L(G) = 1$ jeżeli $V(G) = L(G) \cup S(G)$.*

Ponieważ parametr $\sigma_L(G)$ jest liczbą zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w grafie G, więc w przedłożonej rozprawie, wyznaczając parametr $\sigma_L(G)$, rozważamy wyłącznie grafy które mają co najmniej jeden liść. Innymi słowy zakładamy, że $\delta(G) = 1$.

Celem przedstawionych w rozprawie badań jest:

- wyznaczenie najmniejszej i największej wartości parametru $\sigma_L(G)$ w $(n, n+1)$-grafach zawierających $C_{k,l}$, $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$ jako podgraf indukowany,
- wyznaczenie wartości parametru $\sigma_L(G)$ w szczególnych $(n, n+1)$-grafach,
- podanie zależności pomiędzy liczbą niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących w pewnych klasach grafów a liczbami Padovana i wielomianami Padovana,
- podanie zależności pomiędzy liczbą maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w pewnych klasach grafów a uogólnionymi liczbami Padovana i uogólnionymi wielomianami Padovana,
- zdefiniowanie właściwych zbiorów 2-dominujących, czyli zbiorów 2-dominujących które nie są p-dominujące, $p \geqslant 3$, rozwiązanie problemu istnienia właściwych

zbiorów 2-dominujących i przedstawienie zależności pomiędzy liczbą właściwego dominowania a innymi parametrami dominowania,

- zdefiniowanie doskonałych zbiorów $(1, 2)$-dominujących i określenie dalszych kierunków badań.

Rozdział 3

Liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w $(n, n+1)$-grafach

W tym rozdziale rozważymy szczególną podklasę $(n, n+1)$-grafów zawierających co najmniej jeden liść i podgraf indukowany $C_{k,l}$, $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$. Wyznaczymy najmniejszą i największą liczbę zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w tej klasie grafów. Przedstawimy charakteryzację grafów ekstremalnych z najmniejszą i największą liczbą takich zbiorów niezależnych.

W dalszej części rozdziału zajmiemy się wyznaczeniem parametru $\sigma_L(G)$ dla grafów należących do szczególnej podrodziny $(n, n+1)$-grafów. Niech

$$\mathcal{C}(n, n{+}1) = \{G : G \,\text{jest}\, (n, n{+}1){-}\text{grafem}, n \geqslant 6, \delta(G) = 1 \,\text{i}\, C_{k,l} \leqslant G, \text{dla}\, k \geqslant 3, l \geqslant 3\}.$$

Podamy najmniejszą i największą wartość parametru $\sigma_L(G)$, dla $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$.

Niech $G \in \mathcal{C}(n, n{+}1)$, $n \geqslant 6$. Dla małych wartości $n \in \{6, 7, 8, 9\}$ przez przeglądnięcie wszystkich możliwości otrzymujemy, że

$$\sigma_L(G) \geqslant \begin{cases} 7 & \text{dla } n = 6, \\ 4 & \text{dla } n = 7, \\ 3 & \text{dla } n = 8, \\ 2 & \text{dla } n = 9. \end{cases}$$

Twierdzenie 3.1. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 10$. Parametr $\sigma_L(G) = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $V(G) = L(G) \cup S(G)$.*

Dowód. Załóżmy, że $\sigma_L(G) = 1$. To oznacza, że nie istnieje inny niż $L(G)$ zbiór niezależny zawierający podzbiór liści. W przeciwnym przypadku istniałby wierzchołek $v \in V(G) \setminus (L(G) \cup S(G))$ i zbiór $L(G) \cup \{v\}$ byłby zbiorem niezależnym, czyli $\sigma_L(G) \geqslant 2$ co jest sprzeczne z założeniem. Zatem $V(G) = L(G) \cup S(G)$.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że $V(G) = L(G) \cup S(G)$. Każdy wierzchołek podtrzymujący jest sąsiadem pewnego liścia, czyli wierzchołek podtrzymujący nie może należeć do zbioru niezależnego zawierającego $L(G)$. Stąd jedynym zbiorem niezależnym zawierającym $L(G)$ jest zbiór $L(G)$. Zatem $\sigma_L(G) = 1$, co kończy dowód. □

3.1 Przekształcenia grafu G w graf G' takie, że $\sigma_L(G) \leqslant \sigma_L(G')$

W tym podrozdziale opiszemy szczególne przekształcenia grafu G w wyniku których liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści nie maleje. Przekształcenia te pozwolą na znalezienie podrodziny $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}(n, n+1)$ do której należą grafy z największą wartością parametru $\sigma_L(G)$. Wykorzystamy w tym celu metody zastosowane do zliczania maksymalnych zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w drzewach, opisane w pracy [75].

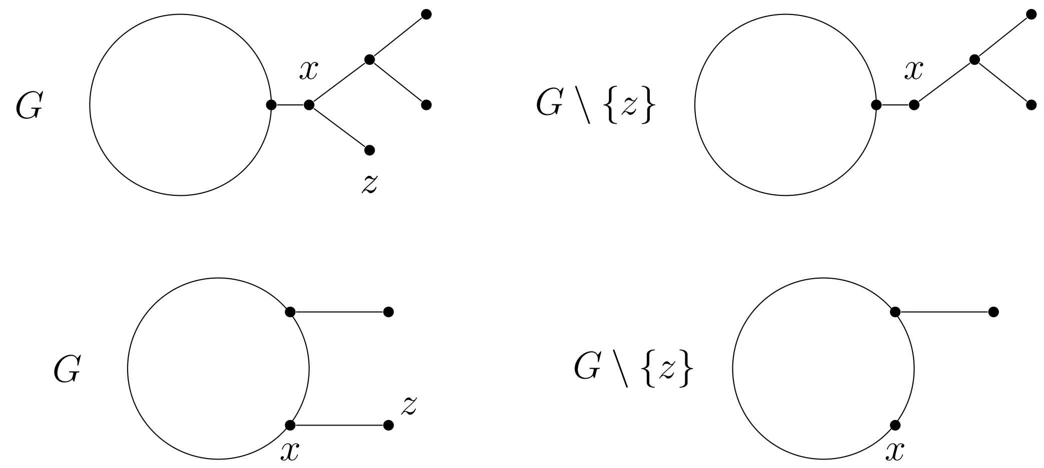
Ponieważ rozważamy grafy należące do rodziny $\mathcal{C}(n, n+1)$, więc opiszemy zachowanie się parametru $\sigma_L(G)$ po zastosowaniu przekształcenia dla $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$. Warto jednak zauważyć, że niektóre z przedstawionych twierdzeń są prawdziwe dla dowolnego grafu.

Z definicji parametru $\sigma_L(G)$ wynika następujące twierdzenie

Twierdzenie 3.2. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 7$ oraz $x \in S_s(G)$. Wtedy $\sigma_L(G) = \sigma_L(G \setminus L'(x))$ dla dowolnego $L'(x) \subset L(x)$.*

Twierdzenie 3.3. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 7$ takim, że $|L(G)| \geqslant 2$ oraz $x \in S_w(G)$, gdzie $L(x) = \{z\}$. Jeżeli x nie jest wierzchołkiem przedostatnim, to $\sigma_L(G) < \sigma_L(G \setminus \{z\})$.*

Dowód. Niech S będzie dowolnym zbiorem niezależnym grafu G zawierającym $L(G)$ jako podzbiór. Ponieważ $x \in S_w(G)$ to $x \notin S$, zatem $\sigma_L(G) = \sigma_{L,-x}(G)$. Z założenia x nie jest wierzchołkiem przedostatnim oraz $L(x) = \{z\}$. Rysunek 3.1 ilustruje przykładowe grafy G i $G \setminus \{z\}$. Ponieważ $|L(G)| \geqslant 2$, więc dla dowolnego zbioru niezależnego S podzbiór $S \setminus \{z\}$ jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści grafu $G \setminus \{z\}$. Stąd $\sigma_L(G) \leqslant \sigma_L(G \setminus \{z\})$. Z założenia $x \in S_w(G)$ i nie jest wierzchołkiem przedostatnim, więc istnieje co najmniej jeden zbiór niezależny zawierający zbiór liści grafu $G \setminus \{z\}$ i wierzchołek x. Zatem $\sigma_L(G \setminus \{z\}) = \sigma_{L,-x}(G) + \sigma_{L,x}(G \setminus \{z\}) = \sigma_L(G) + \sigma_{L,x}(G \setminus \{z\}) > \sigma_L(G)$, co kończy dowód.



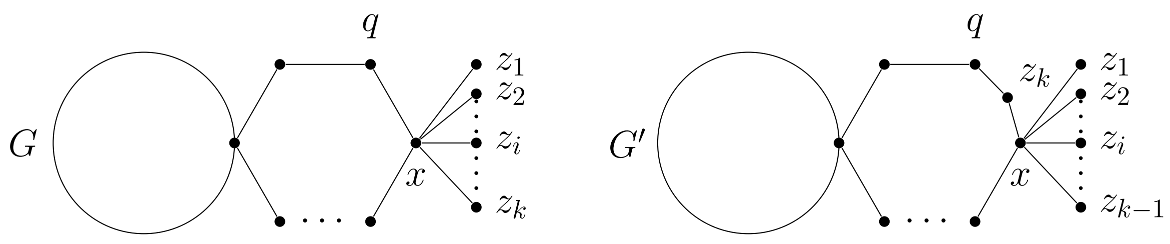
Rysunek 3.1: Grafy G i $G \setminus \{z\}$ takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G \setminus \{z\})$

□

Kolejne twierdzenia opisują przekształcenia grafu, które nie zmieniają liczby wierzchołków i powodują, że liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści nie maleje.

Twierdzenie 3.4. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 7$. Niech $x \in S_s(G)$ oraz $L(x) = \{z_1, ..., z_k\}$, $k \geqslant 2$. Jeżeli nie istnieje w grafie G wierzchołek przedostatni, to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant k$ zachodzi $\sigma_L(G) < \sigma_L(sub_{xq}(G \setminus \{z_i\}))$, gdzie q jest sąsiadem x należącym do cyklu.*

Dowód. Niech $z_i \in L(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \geqslant 2$. Bez straty dla ogólności rozważań wybierzmy wierzchołek z_k. Wtedy, z twierdzenia 3.2, zachodzi równość $\sigma_L(G) = \sigma_L(G \setminus \{z_k\})$. Ponieważ w grafie G nie istnieje wierzchołek przedostatni, więc każdy wierzchołek podtrzymujący należy do podgrafu $C_{k,l}$ grafu G. Niech q będzie sąsiadem wierzchołka x i niech q należy do cyklu w grafie G. Oznaczamy przez $G' = sub_{xq}(G \setminus \{z_k\})$ graf otrzymany z grafu G przez usunięcie wierzchołka z_k i wstawienie z_k na krawędzi xq. Rysunek 3.2 ilustruje przekształcenie grafu G w graf G'. Wtedy $\sigma_L(G') = \sigma_{L,z_k}(G') + \sigma_{L,-z_k}(G')$. Ponieważ $\sigma_{L,-z_k}(G') = \sigma_L(G)$ i istnieje co najmniej jeden niezależny zbiór zawierający zbiór liści i wierzchołek z_k to $\sigma_L(G') = \sigma_{L,z_k}(G') + \sigma_L(G) > \sigma_L(G)$, co kończy dowód.

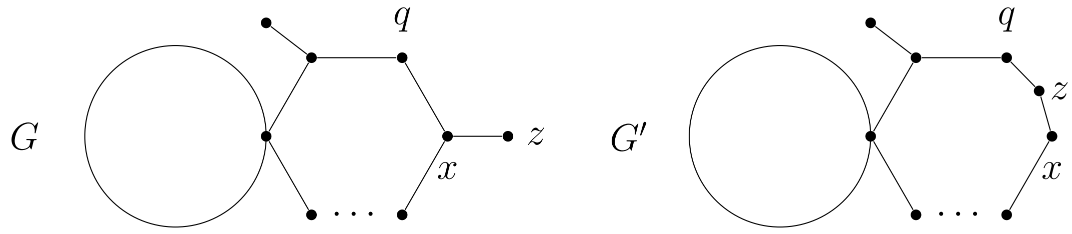


Rysunek 3.2: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

$\square$

Twierdzenie 3.5. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 7$ oraz $|L(G)| \geqslant 2$. Niech $x \in S_w(G)$ oraz $L(x) = \{z\}$. Jeżeli nie istnieje w grafie G wierzchołek przedostatni, to $\sigma_L(G) < \sigma_L(sub_{xq}(G \setminus \{z\}))$, gdzie q jest wierzchołkiem sąsiednim do x, należącym do cyklu.*

Dowód. Niech $q \in N(x)$ i niech q należy do podgrafu $C_{k,l}$ w grafie G. Oznaczmy przez $G' = sub_{xq}(G \setminus \{z\})$ graf powstały z grafu G przez usunięcie wierzchołka z i wstawienie go na krawędzi xq. Rysunek 3.3 ilustruje przekształcenie grafu G w graf G'. Ponieważ nie istnieje w grafie G wierzchołek przedostatni, więc każdy wierzchołek podtrzymujący należy do cyklu. Niech S będzie dowolnym zbiorem niezależnym grafu G takim, że $L(G) \subset S$. Wtedy $x \notin S$, czyli $\sigma_L(G) = \sigma_{L,-x}(G)$. Zbiór $S \setminus \{z\}$ jest niezależny w G' i ponieważ $|L(G)| \geqslant 2$, więc zawiera $L(G')$, stąd $\sigma_L(G') \geqslant \sigma_L(G)$. Ponadto istnieje w grafie G' co najmniej jeden niezależny zbiór zawierający zbiór liści i wierzchołek x, zatem $\sigma_L(G') > \sigma_L(G)$, co kończy dowód.



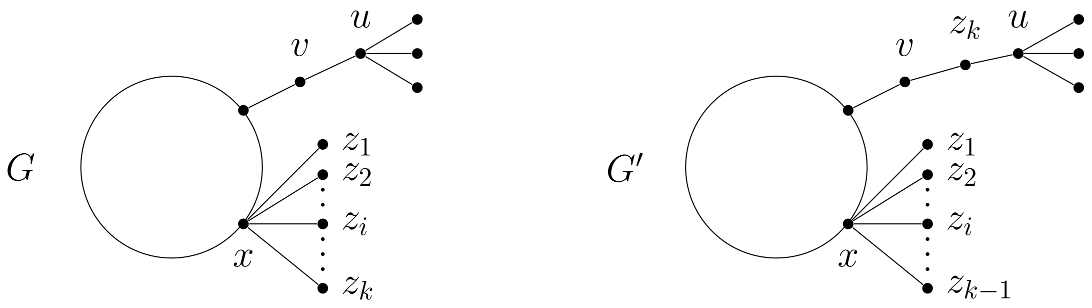
Rysunek 3.3: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

$\square$

Twierdzenie 3.6. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 8$. Niech $x \in S_s(G)$ oraz $L(x) = \{z_1, ..., z_k\}$, $k \geqslant 2$. Jeżeli w grafie G istnieje wierzchołek przedostatni u (niekoniecznie różny od x) oraz $v \in N(u) \setminus L(u)$, to dla dowolnego $1 \leqslant i \leqslant k$ zachodzi $\sigma_L(G) < \sigma_L(sub_{uv}(G \setminus \{z_i\}))$.*

Dowód. Niech $z_i \in L(x)$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $k \geqslant 2$. Bez straty dla ogólności rozważań wybierzmy wierzchołek z_k. Wtedy, z twierdzenia 3.2, zachodzi równość $\sigma_L(G) = \sigma_L(G \setminus \{z_k\})$.

Niech u będzie wierzchołkiem przedostatnim grafu G oraz $v \in N(u) \setminus L(u)$. Niech $G' = sub_{uv}(G \setminus \{z_k\})$ będzie grafem otrzymanym z grafu G przez usunięcie wierzchołka z_k i wstawienie z_k na krawędź vu. Rysunek 3.4 ilustruje przykład grafów G i G'. Ponieważ u jest wierzchołkiem przedostatnim grafu G, więc u jest również wierzchołkiem przedostatnim grafu G'. Korzystając z zależności (2.2) wiemy, że $\sigma_L(G') = \sigma_{L,u}(G') + \sigma_{L,-u}(G')$. Niech S będzie dowolnym zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści grafu G'. Każdy wierzchołek przedostatni grafu jest sąsiedni z liściem, więc $u \notin S$. To oznacza, że $\sigma_L(G') = \sigma_{L,-u}(G')$. Wtedy $\sigma_{L,-u}(G') = \sigma_{L,z_k}(G') + \sigma_{L,-z_k}(G') = \sigma_{L,z_k}(G') + \sigma_L(G)$. Ponieważ istnieje w grafie G' co najmniej jeden zbiór niezależny S zawierający zbiór liści i wierzchołek z_k, więc $\sigma_L(G') > \sigma_L(G)$.

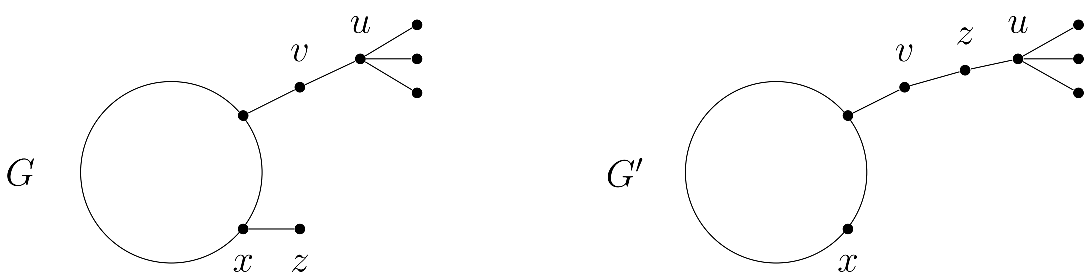


Rysunek 3.4: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

$\square$

Twierdzenie 3.7. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 8$, $x \in S_w(G)$, $L(x) = \{z\}$ oraz $|L(G)| \geqslant 2$. Niech u będzie wierzchołkiem przedostatnim grafu G oraz $v \in N(u) \setminus L(u)$. Jeżeli x nie jest wierzchołkiem przedostatnim, to $\sigma_L(G) < \sigma_L(sub_{uv}(G \setminus \{z\}))$.*

Dowód. Oznaczmy przez $G' = sub_{uv}(G \setminus \{z\})$ graf otrzymany z grafu G przez usunięcie wierzchołka z i wstawienie z na krawędzi uv. Rysunek 3.5 ilustruje przykład grafów G i G'. Niech $y \in N(x) \setminus \{z\}$. Dowodząc w sposób analogiczny jak w twierdzeniu 3.3, otrzymujemy tezę twierdzenia.



Rysunek 3.5: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

$\square$

Twierdzenie 3.8. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 9$. Załóżmy, że G zawiera dwa podgrafy izomorficzne ze ścieżkami P_t i P_m, dla $t, m \geqslant 3$ takie, że*

(*i*) *P_t i P_m mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek x,*

(*ii*) *końcowe wierzchołki P_t i P_m, różne od x, są liśćmi w grafie G,*

(*iii*) *wszystkie wewnętrzne wierzchołki podgrafów P_t i P_m mają stopień dwa w grafie G.*

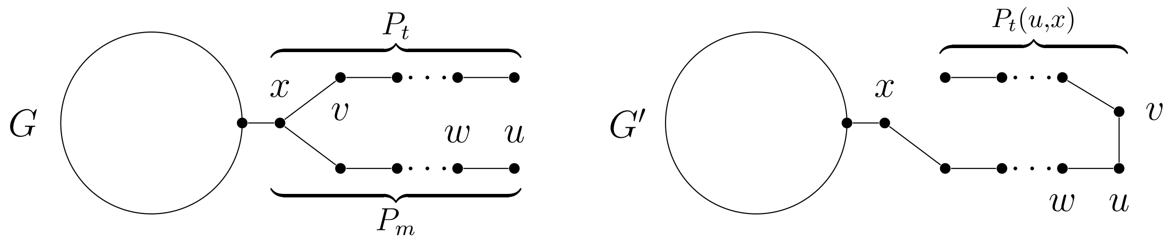
Wtedy $\sigma_L(G) < \sigma_L(ad_{P_t(u,x)}(G \setminus (P_t \setminus \{x\})))$, gdzie u jest liściem grafu P_m, $u \neq x$, który identyfikujemy z wierzchołkiem x ścieżki P_t.

Dowód. Niech $G' = ad_{P_t(u,x)}(G \setminus (P_t \setminus \{x\}))$ będzie grafem otrzymanym z grafu G przez usunięcie z grafu G ścieżki $P_t \setminus \{x\}$ i powiększenie ścieżki P_m przez dołączenie ścieżki P_t identyfikując wierzchołki końcowe x, u. Rysunek 3.6 ilustruje przekształcenie grafu G w G'. Z zależności (2.2) wiemy, że $\sigma_L(G) = \sigma_{L,x}(G) + \sigma_{L,-x}(G)$. Niech S będzie dowolnym zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści grafu G. Wtedy $u \in S$. Oznaczmy $S^* = S \cap (V(G) \setminus (V(P_t \setminus \{x\}) \cup V(P_m \setminus \{x\}))$, $S_1 = S \cap V(P_m \setminus \{x\})$, $S_2 = S \cap V(P_t \setminus \{x\})$. Rozważmy dwa przypadki:

1. $x \in S$.
Identyfikując początkowy wierzchołek x ścieżki P_t z końcowym wierzchołkiem u ścieżki P_m, otrzymujemy, że $S^* \cup S_1 \cup S_2$ jest zbiorem niezależnym w G' zawierającym zbiór $L(G)$. Ponadto $S^* \cup S_1 \cup S_2 \setminus \{u\}$ jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści w G', czyli $\sigma_{L,x}(G) < \sigma_{L,x}(G')$.

2. $x \notin S$.
Niech $v \in N(x) \cap V(P_t)$. Jeśli $v \notin S$, to $S^* \cup S_1 \cup S_2$ jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór $L(G)$ grafu G'. Jeśli $v \in S$, to $S^* \cup S_1 \cup S_2 \setminus \{u\}$ jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści w G'. Ponadto w grafie G' istnieją zbiory niezależne zawierające wierzchołek w, gdzie $w \in N(u) \cap V(P_m)$. Stąd $L(G') \cup \{w\}$ jest zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści w G', czyli $\sigma_{L,-x}(G) < \sigma_{L,-x}(G')$.

Z powyższych przypadków wynika, że $\sigma_L(G) = \sigma_{L,x}(G) + \sigma_{L,-x}(G) < \sigma_{L,x}(G') + \sigma_{L,-x}(G')$, co kończy dowód.



Rysunek 3.6: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

□

W analogiczny sposób możemy wykazać, że

Twierdzenie 3.9. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 9$. Załóżmy, że G zawiera dwa podgrafy izomorficzne do P_t i P_m, $t, m \geqslant 3$, takie że*

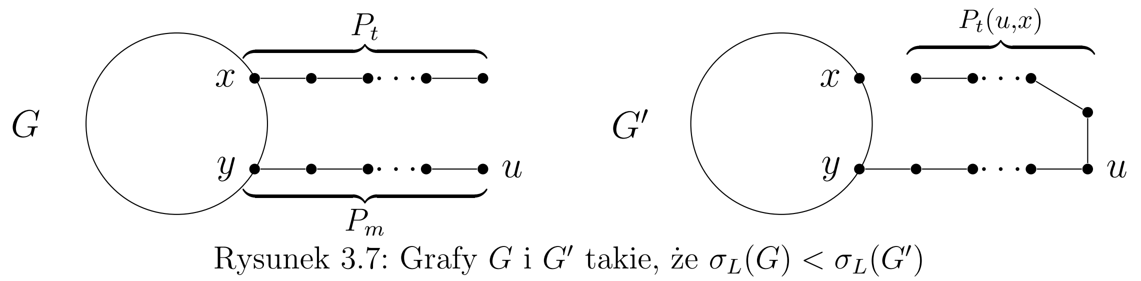
(i) P_t ma dokładnie jeden wspólny wierzchołek x z cyklem oraz P_m ma dokładnie jeden wspólny wierzchołek y z cyklem, przy czym $x \neq y$,

(ii) końcowe wierzchołki P_t i P_m, różne od x i y, są liśćmi w grafie G i

(iii) wszystkie wewnętrzne wierzchołki P_t i P_m mają stopień dwa w G.

Wtedy $\sigma_L(G) < \sigma_L(ad_{P_t(u,x)}(G \setminus (P_t \setminus \{x\})))$ gdzie u jest końcowym wierzchołkiem P_m różnym od y, który identyfikujemy z początkowym wierzchołkiem x ścieżki P_t.

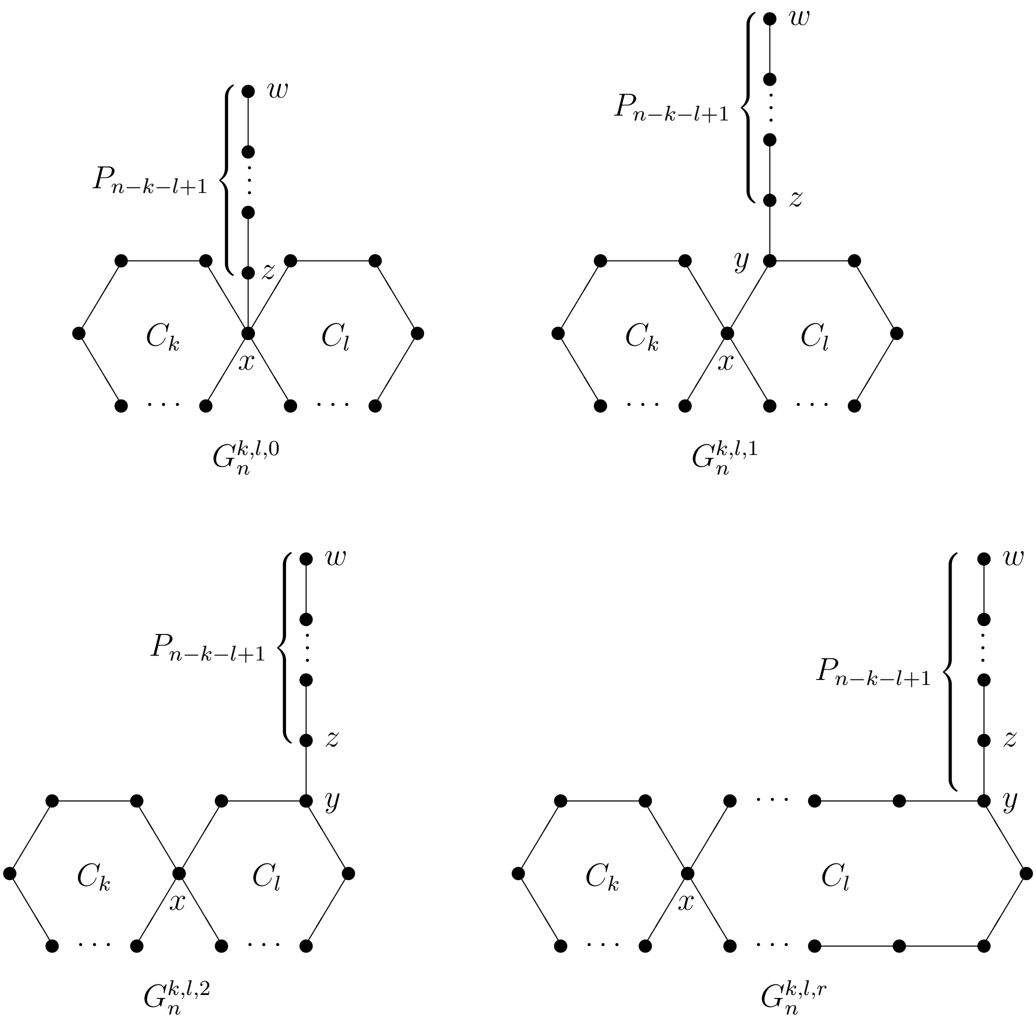
Rysunek 3.7 przedstawia przekształcenie grafu G w graf G' otrzymany przez usunięcie z grafu G ścieżki $P_t \setminus \{x\}$ i powiększenie ścieżki P_m przez dołączenie ścieżki P_t identyfikując wierzchołki końcowe x oraz u.



Rysunek 3.7: Grafy G i G' takie, że $\sigma_L(G) < \sigma_L(G')$

Rozważmy podrodzinę $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}(n, n+1)$ zawierającą grafy $G_n^{k,l,r}$ zdefiniowane następująco. Niech $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$, $0 \leqslant r \leqslant \lfloor l/2 \rfloor$, $n \geqslant k + l$. Niech $G_n^{k,l,r} \in \mathcal{C}(n, n+1)$ będzie grafem n-wierzchołkowym zawierającym podgraf indukowany $C_{k,l}$, gdzie cykle C_k i C_l mają wspólny wierzchołek x, ścieżkę $P_{n-k-l+1}$ połączoną z cyklem C_l krawędzią zy, gdzie $z \in P_{n-k-l+1}$ oraz $y \in V(C_l)$ (w szczególności $y = x$) w taki sposób, że $d_{G_n^{k,l,r}}(x, y) = r$.

Zauważmy, że $|L(G_n^{k,l,r})| = 1$. Niech $L(G_n^{k,l,r}) = \{w\}$. Rysunek 3.8 przedstawia grafy $G_n^{k,l,r}$ dla $r \in \{0, 1, 2\}$ i ogólnego przypadku $r > 0$. Z powyższej definicji wynika, że ścieżka $P_{n-k-l+1}$ ma co najmniej jeden wierzchołek.



Rysunek 3.8: Grafy $G_n^{k,l,r}$ dla $r \geqslant 0$.

Niech $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 6$. Stosując krok po kroku przekształcenia opisane w tym podrozdziale, które zachowują liczbę wierzchołków i nie zmniejszają liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.10. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Jeżeli $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$ jest grafem dla którego wartość $\sigma_L(G)$ jest największa wśród wszystkich grafów z rodziny $\mathcal{C}(n, n+1)$, to $G \cong G_n^{k,l,r}$ dla pewnych liczb całkowitych n, k, l, r.*

Z twierdzenia 3.10 wnioskujemy, że aby wyznaczyć największą wartość parametru $\sigma_L(G)$ dla grafów $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$ konieczne jest zbadanie parametru $\sigma_L(G)$ w grafach $G_n^{k,l,r} \in \mathcal{C}'(n, n+1)$.

3.2 Wartości parametru $\sigma_L(G)$ w szczególnej rodzinie $(n, n+1)$-grafów

W tym podrozdziale wyznaczymy dokładną wartość parametru $\sigma_L(G_n^{k,l,r})$ dla niektórych przypadków k, l, r. Dla przejrzystości dalszych dowodów rozróżnimy szczególne przypadki r .

Lemat 3.11. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech* $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$, $0 \leqslant r \leqslant [l/2]$, $n \geqslant k+l$. *Wtedy*

(*i*) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l}$,

(*ii*) $\sigma_w(G_n^{k,l,1}) = F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l} + F_kF_{n-k-1}$,

(*iii*) $\sigma_w(G_n^{k,l,2}) = F_{k-2}F_{n-k-3} + F_k(F_{l-2}F_{n-k-l} + F_{n-k-2})$, $l \geqslant 4$,

(*iv*) $\sigma_w(G_n^{k,l,r}) = F_{k-2}(F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} + F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l})$
$+ F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} + F_{l-r}F_rF_{n-k-l})$, $l \geqslant 6$, $r \geqslant 3$.

Dowód. Rozważmy następujące przypadki dla grafu $G_n^{k,l,r}$.
(i) Niech $r = 0$. Jeżeli $n = k+l$, to

$$\begin{aligned}\sigma_w(G_n^{k,l,0}) &= \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,0}) = \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-1}) = F_kF_l \\ &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l}.\end{aligned}$$

Jeżeli $n = k+l+1$, to

$$\begin{aligned}\sigma_w(G_n^{k,l,0}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,0}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,0}) \\ &= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-3}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-1}) = F_{k-2}F_{l-2} + F_kF_l \\ &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l}.\end{aligned}$$

Jeżeli $n \geqslant k+l+2$, to

$$\begin{aligned}\sigma_w(G_n^{k,l,0}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,0}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,0}) \\ &= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-3})\sigma(P_{n-k-l-2}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-1})\sigma(P_{n-k-l-1}) \\ &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l}.\end{aligned}$$

(ii) Niech $r = 1$. Jeżeli $n = k + l$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,1}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,1}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,1}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-3}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-2}) = F_{k-2}F_{l-2} + F_kF_{l-1} \\
&= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l} + F_kF_{n-k-1}.
\end{aligned}$$

Jeżeli $n \geqslant k + l + 1$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,1}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,1}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,1}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-3})\sigma(P_{n-k-l-1}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{n-k-2}) \\
&= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l} + F_kF_{n-k-1}.
\end{aligned}$$

(iii) Niech $r = 2$. Jeżeli $n = k + l$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,2}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,2}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,2}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-4}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-3}) \cdot 2 = F_{k-2}F_{l-3} + 2F_kF_{l-2} \\
&= F_{k-2}F_{n-k-3} + F_k(F_{l-2}F_{n-k-l} + F_{n-k-2}).
\end{aligned}$$

Jeżeli $n \geqslant k + l + 1$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,2}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,2}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,2}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{n-k-4}) + \sigma(P_{k-1})\Big(\sigma(P_{l-3})\sigma(P_{n-k-l-1}) + \sigma(P_{n-k-3})\Big) \\
&= F_{k-2}F_{n-k-3} + F_k(F_{l-2}F_{n-k-l} + F_{n-k-2}).
\end{aligned}$$

(iv) Niech $r \geqslant 3$. Jeżeli $n = k + l$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,r}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,r}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,r}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-r-2})\sigma(P_{r-2}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-r-1})\sigma(P_{r-1}) \\
&= F_{k-2}F_{l-r-1}F_{r-1} + F_kF_{l-r}F_r \\
&= F_{k-2}(F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} + F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad + F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} + F_{l-r}F_rF_{n-k-l}).
\end{aligned}$$

Jeżeli $n = k + l + 1$, to z (1.1) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,r}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,r}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,r}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\sigma(P_{l-3}) + \sigma(P_{k-1})\sigma(P_{l-1}) = F_{k-2}F_{l-2} + F_kF_l \\
&= F_{k-2}(F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} + F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad + F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} + F_{l-r}F_rF_{n-k-l}).
\end{aligned}$$

Jeżeli $n \geqslant k + l + 2$, to

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,r}) &= \sigma_{w,x}(G_n^{k,l,r}) + \sigma_{w,-x}(G_n^{k,l,r}) \\
&= \sigma(P_{k-3})\Big(\sigma(P_{l-r-3})\sigma(P_{r-3})\sigma(P_{n-k-l-2}) \\
&\quad + \sigma(P_{l-r-2})\sigma(P_{r-2})\sigma(P_{n-k-l-1})\Big) \\
&\quad + \sigma(P_{k-1})\Big(\sigma(P_{l-r-2})\sigma(P_{r-2})\sigma(P_{n-k-l-2}) \\
&\quad + \sigma(P_{l-r-1})\sigma(P_{r-1})\sigma(P_{n-k-l-1})\Big) \\
&= F_{k-2}(F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} + F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad + F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} + F_{l-r}F_rF_{n-k-l}),
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Korzystając z Lematu 3.11 (i) oraz tożsamości dla liczb Fibonacciego otrzymujemy następujące zależności.

Wniosek 3.12. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $n \geqslant 7$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

(i) $\sigma_w(G_n^{4,n-4,0}) > \sigma_w(G_n^{3,3,0})$ *dla* $n \geqslant 7$.

(ii) $\sigma_w(G_n^{4,n-4,0}) \geqslant \sigma_w(G_n^{3,4,0})$ *dla* $n \geqslant 7$, *równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $n = 7$.

(iii) $\sigma_w(G_n^{4,n-4,0}) \geqslant \sigma_w(G_n^{4,4,0})$ *dla* $n \geqslant 8$, *równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy* $n = 8$.

Korzystając z Lematu 3.11 możemy udowodnić następujące zależności dla parametru $\sigma_w(G_n^{k,l,r})$ dla szczególnych wartości r. W dowodzie wykorzystujemy znane tożsamości dla liczb Fibonacciego.

Lemat 3.13. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$, $0 \leqslant r \leqslant [l/2]$, $n \geqslant k+l$. Wtedy*

(i) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l,1}) + F_{k-1}F_{l-2}F_{n-k-l-2} \geqslant \sigma_w(G_n^{k,l,1})$,

(ii) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l,2}) + F_{k-1}F_{l-3}F_{n-k-l-2} \geqslant \sigma_w(G_n^{k,l,2})$, $l \geqslant 4$,

(iii) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l,r}) + F_{k-1}F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-2} \geqslant \sigma_w(G_n^{k,l,r})$, $l \geqslant 6$, $r \geqslant 3$.

Równości w powyższych zależnościach zachodzą wtedy i tylko wtedy gdy $n = k+l+1$.

Dowód. Dla dowodu zależności (i) oraz (ii) skorzystamy ze znanej tożsamości dla liczb Fibonacciego $F_mF_n - F_{m-2}F_{n-2} = F_{m+n-1}$.
(i) Z lematu 3.11 (i) oraz (ii) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l,1}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\
&\quad -F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l} - F_kF_{n-k-1} \\
&= F_{k-2}F_{l-2}(F_{n-k-l-1} - F_{n-k-l}) + F_k(F_lF_{n-k-l} - F_{n-k-1}) \\
&= -F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-2} + F_kF_{l-2}F_{n-k-l-2} \\
&= F_{k-1}F_{l-2}F_{n-k-l-2}.
\end{aligned}$$

(ii) Z lematu 3.11 (iii) oraz (ii) dla $l \geqslant 4$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,2}) - \sigma_w(G_n^{k,l,1}) &= F_{k-2}(F_{n-k-3} - F_{l-2}F_{n-k-l}) \\
&\quad +F_k(F_{l-2}F_{n-k-l} + F_{n-k-2} - F_{n-k-1}) \\
&= -F_{k-2}F_{l-4}F_{n-k-l-2} + F_k(F_{l-2}F_{n-k-l} - F_{n-k-3}) \\
&= -F_{k-2}F_{l-4}F_{n-k-l-2} + F_kF_{l-4}F_{n-k-l-2} \\
&= F_{k-1}F_{l-4}F_{n-k-l-2}.
\end{aligned}$$

Stąd, korzystając z (i), dla $l \geqslant 4$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l,2}) &= (\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l,1})) - (\sigma_w(G_n^{k,l,2}) - \sigma_w(G_n^{k,l,1})) \\
&= F_{k-1}F_{l-2}F_{n-k-l-2} - F_{k-1}F_{l-4}F_{n-k-l-2} \\
&= F_{k-1}F_{l-3}F_{n-k-l-2}.
\end{aligned}$$

W dowodzie zależności (iii) wykorzystamy tożsamość $F_mF_n + F_{m-1}F_{n-1} = F_{m+n}$.

(*iii*) Z lematu 3.11 (*i*) oraz (*iv*) dla $l \geqslant 6$, $r \geqslant 3$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l,r}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\
&\quad -F_{k-2}(F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} + F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad -F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} + F_{l-r}F_rF_{n-k-l}) \\
&= F_{k-2}(F_{l-2}F_{n-k-l-1} - F_{l-r-2}F_{r-2}F_{n-k-l-1} \\
&\quad -F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad +F_k(F_lF_{n-k-l} - F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} - F_{l-r}F_rF_{n-k-l}) \\
&= F_{k-2}(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1} - F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l}) \\
&\quad +F_k(F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l} - F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-1}) \\
&= -F_{k-2}F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-2} + F_kF_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-2} \\
&= F_{k-1}F_{l-r-1}F_{r-1}F_{n-k-l-2}.
\end{aligned}$$

Z definicji ciągu Fibonacciego wiemy, że $F_p = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p = -1$. To oznacza, że $F_{n-k-l-2} = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n = k + l + 1$. Pozostałe indeksy są dodatnie, czyli odpowiadające im liczby Fibonacciego mają wartości dodatnie. Stąd wynika, że równości w (*i*)–(*iii*) zachodzą wtedy i tylko wtedy, gdy $n = k + l + 1$. □

Lemat 3.14. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $n \geqslant k + l$, $l \geqslant 3$. Wtedy*

(*i*) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k-1,l+1,0}) + (-1)^kF_{l-k}F_{n-k-l+1}$ *dla* $k \geqslant 4$.

(*ii*) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k-2,l+2,0}) + (-1)^{k-1}F_{l-k+1}F_{n-k-l+1}$ *dla* $k \geqslant 5$.

Dowód. (*i*) Z lematu 3.11 (*i*) i (1.2) dla $k \geqslant 4$ mamy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k-1,l+1,0}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\
&\quad - F_{k-3}F_{l-1}F_{n-k-l-1} - F_{k-1}F_{l+1}F_{n-k-l} \\
&= (F_{k-2}F_{l-2} - F_{k-3}F_{l-1})F_{n-k-l-1} \\
&\quad + (F_kF_l - F_{k-1}F_{l+1})F_{n-k-l} \\
&= (-1)^{k-2}F_{l-k}F_{n-k-l-1} + (-1)^kF_{l-k}F_{n-k-l} \\
&= (-1)^kF_{l-k}(F_{n-k-l-1} + F_{n-k-l}) \\
&= (-1)^kF_{l-k}F_{n-k-l+1}.
\end{aligned}$$

(ii) Z lematu 3.11 (i) i (1.4) dla $k \geqslant 5$ mamy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k-2,l+2,0}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\
&\quad - F_{k-4}F_lF_{n-k-l-1} - F_{k-2}F_{l+2}F_{n-k-l} \\
&= (F_{k-2}F_{l-2} - F_{k-4}F_l)F_{n-k-l-1} \\
&\quad + (F_kF_l - F_{k-2}F_{l+2})F_{n-k-l} \\
&= (-1)^{k-3}F_{l-k+1}F_{n-k-l-1} + (-1)^{k-1}F_{l-k+1}F_{n-k-l} \\
&= (-1)^{k-1}F_{l-k+1}(F_{n-k-l-1} + F_{n-k-l}) \\
&= (-1)^{k-1}F_{l-k+1}F_{n-k-l+1},
\end{aligned}$$

co kończy dowód. □

Lemat 3.15. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $n \geqslant k + l$, $k \geqslant 3$. Wtedy*

(i) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l-1,0}) + (-1)^l A$, $l \geqslant 4$, *gdzie* $A > 0$ *dla* $n \geqslant k + 2l - 2$.

(ii) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l-1,0}) + (-1)^{n-k-l} B$, $l \geqslant 4$, *gdzie* $B > 0$ *dla* $n \leqslant k + 2l - 2$.

(iii) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l-2,0}) + (-1)^{l-1} C$, $l \geqslant 5$, *gdzie* $C > 0$ *dla* $n \geqslant k + 2l - 3$.

(iv) $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{k,l-2,0}) + (-1)^{n-k-l} D$, $l \geqslant 5$, *gdzie* $D > 0$ *dla* $n \leqslant k + 2l - 3$.

Dowód. (i) Z lematu 3.11 (i) i (1.2) dla $l \geqslant 4$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l-1,0}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\
&\quad - F_{k-2}F_{l-3}F_{n-k-l} - F_kF_{l-1}F_{n-k-l+1} \\
&= F_{k-2}(F_{l-2}F_{n-k-l-1} - F_{l-3}F_{n-k-l}) \\
&\quad + F_k(F_lF_{n-k-l} - F_{l-1}F_{n-k-l+1}) \\
&= F_{k-2}(-1)^{l-2}F_{n-k-2l+1} + F_k(-1)^lF_{n-k-2l} \\
&= (-1)^l(F_{k-2}F_{n-k-2l+1} + F_kF_{n-k-2l}).
\end{aligned}$$

Jeżeli $n - k - 2l \geqslant -2$, to $A = F_{k-2}F_{n-k-2l+1} + F_kF_{n-k-2l} > 0$.

(ii) Korzystając z zleżności $F_{-n} = (-1)^n F_{n-2}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} A = F_{k-2}F_{n-k-2l+1} + F_kF_{n-k-2l} &= F_{k-2}(-1)^{-n+k+2l-1}F_{-n+k+2l-3} \\ &\quad + F_k(-1)^{-n+k+2l}F_{-n+k+2l-2} \\ &= (-1)^{-n+k+2l-1}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-3} - F_kF_{-n+k+2l-2}) \\ &= (-1)^{-n+k-1}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-3} - F_{k-2}F_{-n+k+2l-2} \\ &\quad - F_{k-1}F_{-n+k+2l-2}) \\ &= (-1)^{-n+k-1}(-F_{k-2}F_{-n+k+2l-4} - F_{k-1}F_{-n+k+2l-2}) \\ &= (-1)^{-n+k}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-4} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-2}). \end{aligned}$$

W ten sposób z (i) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l-1,0}) &= (-1)^{-n+k+l}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-4} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-2}) \\ &= (-1)^{n-k-l}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-4} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-2}), \end{aligned}$$

gdzie $B = F_{k-2}F_{-n+k+2l-4} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-2} > 0$ dla $-n+k+2l-4 \geqslant -2$.
(iii) Z lematu 3.11 (i) i (1.4) dla $l \geqslant 5$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l-2,0}) &= F_{k-2}F_{l-2}F_{n-k-l-1} + F_kF_lF_{n-k-l} \\ &\quad - F_{k-2}F_{l-4}F_{n-k-l+1} - F_kF_{l-2}F_{n-k-l+2} \\ &= F_{k-2}(F_{l-2}F_{n-k-l-1} - F_{l-4}F_{n-k-l+1}) \\ &\quad + F_k(F_lF_{n-k-l} - F_{l-2}F_{n-k-l+2}) \\ &= F_{k-2}(-1)^{l-3}F_{n-k-2l+2} + F_k(-1)^{l-1}F_{n-k-2l+1} \\ &= (-1)^{l-1}(F_{k-2}F_{n-k-2l+2} + F_kF_{n-k-2l+1}). \end{aligned}$$

Jeżeli $n-k-2l+1 \geqslant -2$, to $C = F_{k-2}F_{n-k-2l+2} + F_kF_{n-k-2l+1} > 0$.
(iv) Podobnie jak w (ii) korzystając z (iii) otrzymujemy

$$\sigma_w(G_n^{k,l,0}) - \sigma_w(G_n^{k,l-2,0}) = (-1)^{n-k-l}(F_{k-2}F_{-n+k+2l-5} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-3}),$$

gdzie $D = F_{k-2}F_{-n+k+2l-5} + F_{k-1}F_{-n+k+2l-3} > 0$ dla $-n+k+2l-5 \geqslant -2$. $\square$

3.3 Największa wartość parametru $\sigma_L(G)$

W tym podrozdziale podamy górne oszacowanie parametru $\sigma_L(G)$ dla $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$.

Niech $k = l = 3$. Jeżeli $n = 6$, to przez przeglądnięcie wszystkich możliwości otrzymujemy, że $\sigma_L(G) \leqslant 9$, dla $G \in \mathcal{C}'(n, n+1)$. Z wniosku 3.12 (i) i lematu 3.13 (i) otrzymujemy

Twierdzenie 3.16. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $n \geqslant 7$, $k = l = 3$ oraz $0 \leqslant r \leqslant 1$. Wtedy $\sigma_w(G_n^{3,3,r}) < \sigma_w(G_n^{4,n-4,0})$.*

Twierdzenie 3.17. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$, $0 \leqslant r \leqslant [l/2]$, $n \geqslant k + l \geqslant 7$. Wtedy $\sigma_w(G_n^{k,l,r}) \leqslant \sigma_w(G_n^{4,n-4,0}) = 5F_{n-4}$. Ponadto $\sigma_w(G_n^{k,l,r}) = 5F_{n-4}$ wtedy, gdy $G_n^{k,l,r} \cong G_n^{4,n-4,0}$.*

Dowód. Niech k, l będą ustalone, $n \geqslant k + l \geqslant 7$. Z lematu 3.13 wynika, że dla $0 < r \leqslant [l/2]$ zachodzi

$$\sigma_w(G_n^{k,l,r}) \leqslant \sigma_w(G_n^{k,l,0}) \tag{3.1}$$

natomiast równość jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy $n = k + l + 1$. Zatem wystarczy rozważyć grafy $G_n^{k,l,0}$.

Jeżeli $k + l = 7$, to z wniosku 3.12 wynika teza twierdzenia.

Załóżmy, że suma $k+l$ jest ustalona oraz $k+l \geqslant 8$. Bez straty dla ogólności rozważań przyjmijmy, że $k \leqslant l$, ponieważ $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) = \sigma_w(G_n^{l,k,0})$. Z lematu 3.14 (i) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{3,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,l-1,0})$.
Niech $k > 4$. Jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to z lematu 3.14 (i) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) < \sigma_w(G_n^{k-1,l+1,0})$. Jeżeli k jest liczbą parzystą, to z lematu 3.14 (ii) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{k,l,0}) < \sigma_w(G_n^{k-2,l+2,0})$. Korzystając krok po kroku z lematu 3.14 zmniejszając w każdym kroku wartość k odpowiednio o 1 lub 2, w zależności od parzystości k, po skończonej liczbie kroków dla $k \neq 4$ oraz $k + l \geqslant 8$ otrzymujemy

$$\sigma_w(G_n^{k,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,k+l-4,0}). \tag{3.2}$$

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że aby otrzymać górne oszacowanie parametru $\sigma_w(G_n^{k,l,0})$ wystarczy rozważyć grafy $G_n^{4,l,0}$ dla $l \geqslant 4$.

Rozważmy dowolny graf $G_n^{4,l,0}$ i załóżmy, że $4 < l < n - 4$.
Niech $n \geqslant 2l + 2$.
Jeżeli l jest liczbą nieparzystą, to z lematu 3.15 (i) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{4,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,l-1,0})$.
Jeżeli l jest liczbą parzystą, to z lematu 3.15 (iii) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{4,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,l-2,0})$, gdzie $l - 2 \geqslant 4$. Wynika to z założenia, że $l > 4$ i l jest parzyste.

Niech $n \leqslant 2l + 1$.
Jeżeli $n - l$ jest liczbą nieparzystą, to $n - 4 - l$ jest liczbą nieparzystą i z lematu 3.15 (*ii*) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{4,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,l-1,0})$. Jeżeli $n - l$ jest liczbą parzystą, to $n - l - 2 = n - (l + 2)$ jest liczbą parzystą. Z założenia $n - l > 4$, a ponieważ $n - l$ jest liczbą parzystą, więc $n - l \geqslant 6$. Stąd $n - (l + 2) \geqslant 4$. Wtedy dla $k = 4$ oraz $l + 2$ mamy, że $n \leqslant 2l + 5$ i z lematu 3.15 (*iv*) otrzymujemy $\sigma_w(G_n^{4,l,0}) < \sigma_w(G_n^{4,l+2,0})$ dla $l + 2 \leqslant n - 4$.

Zatem dla każdego grafu $G_n^{4,l,0}$ takiego, że $4 < l < n - 4$, istnieje graf $G_n^{4,l',0}$ taki, że $\sigma_w(G_n^{4,l',0}) > \sigma_w(G_n^{4,l,0})$ oraz $4 \leqslant l' \leqslant n - 4$. Dla dowolnej liczby n istnieje skończona liczba różnych grafów $G_n^{4,l,0}$. Zatem z zależności 3.2 graf o największej liczbie niezależnych zbiorów zawierających zbiór liści wśród grafów $G_n^{4,l,0}$ jest izomorficzny z $G_n^{4,4,0}$ lub $G_n^{4,n-4,0}$ dla $4 \leqslant l \leqslant n - 4$. Zatem, w zbiorze grafów $G_n^{k,l,0}$, $k \geqslant 3$, $l \geqslant 3$, największa liczba zbiorów niezależnych jest osiągana w grafie izomorficznym z jednym z następujących grafów: $G_n^{3,4,0}$, $G_n^{4,4,0}$, $G_n^{4,n-4,0}$. Z wniosku 3.12 otrzymujemy, że dla $n \geqslant 7$ grafem ekstremalnym jest graf izomorficzny z $G_n^{4,n-4,0}$.

Zatem na mocy (3.1) dla $n \geqslant 7$ zachodzi nierówność

$$\sigma_w(G_n^{k,l,r}) \leqslant \sigma_w(G_n^{4,n-4,0})$$

przy czym równość zachodzi wtedy, gdy $k = 4$, $l = n-4$, $r = 0$ lub $k = n-4$, $l = 4$, $r = 0$. Ponadto z lematu 3.11 (*i*) zachodzi równanie $\sigma_w(G_n^{4,n-4,0}) = F_4F_{n-6}F_{-1} + F_4F_{n-4}F_0 = 5F_{n-4}$, co kończy dowód. $\square$

Z twierdzeń 3.10 oraz 3.16 i 3.17 otrzymujemy główny wynik tego rozdziału.

Twierdzenie 3.18. (M. Pirga, M. Startek, I. Włoch [53]) *Niech* $G \in \mathcal{C}(n, n+1)$, $n \geqslant 7$. *Wtedy* $\sigma_L(G) \leqslant 5F_{n-4}$. *Ponadto równość zachodzi wtedy, gdy* $G \cong G_n^{4,n-4,0}$.

Rozdział 4

Zależności pomiędzy liczbą zbiorów niezależnych a liczbami Padovana

W tym rozdziale wyznaczymy liczbę niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w ścieżkach i cyklach uzyskując nowe wzory dwumianowe dla liczb Padovana i Perrina. Wykorzystując interpretację grafową liczb Padovana zdefiniujemy wielomian Padovana grafu.

4.1 Liczba $(1,2)$-IDS w ścieżkach i cyklach

Niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące (krótko: $(1,2)$-IDS) zostały wprowadzone w [30]. Nie każdy graf ma $(1,2)$-IDS, co więcej, S. M. Hedetniemi i in. podali, że problem istnienia $(1,2)$-IDS jest $\mathcal{NP}$-zupełny w ogólnym przypadku. W pracy [30] został podany warunek wystarczający na to aby graf G miał $(1,2)$-IDS.

Twierdzenie 4.1. (S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall [30]) *Każdy spójny graf G, który ma co najmniej dwa niesąsiednie wierzchołki i nie zawiera trójkątów, ma $(1,2)$-IDS o liczności równej $\alpha(G)$.*

W ostatnich latach problemy istnienia $(1,2)$-IDS w grafach i ich produktach były rozważane w [5, 24, 42, 43].

Z twierdzenia 2.5 wiemy, że jeżeli S jest $(1,2)$-IDS grafu G, to S jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G zawierającym zbiór liści.

Implikacja w drugą stronę nie zachodzi. A. Michalski podaje w [42] przykład grafu $P_3 \circ (P_2, P_2, N_1)$ w którym istnieje maksymalny zbiór niezależny zawierający zbiór liści jako podzbiór i niebędący $(1,2)$-IDS.

W wybranych klasach grafów warunek z twierdzenia 2.5 jest wystarczający.

Twierdzenie 4.2. (A. Michalski [42]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem niezawierającym trójkątów, $n \geqslant 3$. Każdy maksymalny zbiór niezależny grafu G zawierający zbiór liści jest $(1,2)$-IDS.*

Jeżeli założymy, że graf nie zawiera trójkątów, to ma $(1,2)$-IDS, co pozwala wyznaczyć liczbę tych zbiorów. W ścieżkach P_n, $n \geqslant 3$ i cyklach C_n, $n \geqslant 4$, które są grafami bez trójkątów, istnieje $(1,2)$-IDS, a liczba $(1,2)$-IDS jest wyrażona odpowiednio liczbami Padovana i Perrina.

Niech $\sigma_L^{(1,2)}(G)$ oznacza liczbę wszystkich $(1,2)$-IDS w grafie G.

Twierdzenie 4.3. (A. Michalski, I. Włoch [43]) *Niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy $\sigma_L^{(1,2)}(P_n) = Pv(n-3)$ dla $n \geqslant 3$ oraz $\sigma_L^{(1,2)}(C_n) = Pr(n)$ dla $n \geqslant 4$.*

Liczby Padovana i Perrina oprócz postaci rekurencyjnej są przedstawiane także w postaci dwumianowej.

Niech n będzie liczbą naturalną. Wtedy

$$Pv(n-2) = \sum_{m=\lceil n/3 \rceil}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{m}{n-2m} \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 2,$$

$$Pr(n) = n \sum_{k=\left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{1}{k} \binom{k}{n-2k} \qquad \text{dla} \qquad n \geqslant 1.$$

Wykorzystując interpretację grafową liczb Padovana i Perrina związaną z liczbą $(1,2)$-IDS w ścieżkach i cyklach podamy nową postać dwumianową liczb Padovana i Perrina. W tym celu najpierw rozważymy szczególne rodziny podzbiorów n-elementowego zbioru X.

Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 3$ i niech $Y \subset X$ będzie zbiorem takim, że

(i) $|Y| = p$ dla ustalonego $p \geqslant 2$,

(ii) jeżeli $i, j \in Y$, to $|i-j| \geqslant 2$,

(iii) jeżeli $t \notin Y$, to istnieją $q, r \in Y$, $q \neq r$ takie, że $|t-q| = 1$ oraz $|t-r| \leqslant 2$.

Dla ustalonego $p \geqslant 2$, oznaczmy przez $\mathcal{Y}(n,p)$ rodzinę wszystkich p-elementowych podzbiorów Y spełniających warunki (i)–(iii) oraz niech $\mathcal{Y}(n) = \bigcup_{p \geqslant 2} \mathcal{Y}(n,p)$.

Niech $|\mathcal{Y}(n,p)| = i_{1,2}(n,p)$, oraz $|\mathcal{Y}(n)| = \mathcal{I}_{1,2}(n)$.

Wtedy

$$\mathcal{I}_{1,2}(n) = \sum_{p \geqslant 2} i_{1,2}(n,p). \tag{4.1}$$

Aby wyznaczyć liczby $i_{1,2}(n,p)$ i w konsekwencji $\mathcal{I}_{1,2}(n)$, udowodnimy niezbędne lematy.

Lemat 4.4. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $n \geqslant 3$ i $p \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy, $\{1, n\} \subseteq Y$ dla każdego $Y \subseteq \mathcal{Y}(n, p)$.*

Dowód. Niech Y będzie dowolnym podzbiorem $\mathcal{Y}(n, p)$ i załóżmy nie wprost, że $1 \notin Y$ lub $n \notin Y$. Bez straty dla ogólności rozważań przyjmijmy, że $n \notin Y$. Wtedy, na podstawie warunku (iii), mamy, że $\{n-1, n-2\} \subseteq Y$, co jest sprzeczne z warunkiem (ii). □

Lemat 4.5. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $n \geqslant 3$ i $p \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Jeżeli $\mathcal{Y}(n, p) \neq \emptyset$, to $2p - 1 \leqslant n \leqslant 3p - 2$.*

Dowód. Niech $Y \subseteq \mathcal{Y}(n, p)$. Z lematu 4.4, wynika, że $\{1, n\} \subseteq Y$. Ustawmy liczby ze zbioru Y w ciąg rosnący $y_1, ..., y_p$. Wtedy $y_1 = 1$ oraz $y_p = n$. Z warunków (ii) oraz (iii) wynika, że $y_{i+1} - y_i \in \{2, 3\}$ dla dowolnego $i \in \{1, ..., p-1\}$. Stąd $n = 2p - 1$ jeżeli $y_{i+1} - y_i = 2$ dla każdego $i \in \{1, ..., p-1\}$ albo $n = 3p - 2$ jeżeli $y_{i+1} - y_i = 3$ dla każdego $i \in \{1, ..., p-1\}$. W konsekwencji $2p - 1 \leqslant n \leqslant 3p - 2$, co kończy dowód. □

Wniosek 4.6. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $p \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli $n \leqslant 2p - 2$ lub $n \geqslant 3p - 1$, to $i_{1,2}(n, p) = 0$.*

Twierdzenie 4.7. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $p \geqslant 2$ oraz $2p - 1 \leqslant n \leqslant 3p - 2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$i_{1,2}(n, p) = \binom{p-1}{n-2p+1}.$$

Dowód. Niech $p \geqslant 2$ oraz $2p - 1 \leqslant n \leqslant 3p - 2$. Niech $Y \subseteq \mathcal{Y}(n, p)$ będzie dowolnym podzbiorem spełniającym warunki (i)–(iii). Wyznaczymy liczbę wszystkich podzbiorów $Y \subseteq \mathcal{Y}(n, p)$. Zauważmy, że zamiast podzbioru Y, możemy rozważać n-wyrazowy binarny ciąg $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ taki, że wyrazy α_i, dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ spełniają następujące warunki

(a) $\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i \in Y, \\ 0 & \text{jeżeli } i \notin Y, \end{cases}$

(b) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = p$,

(c) jeżeli $\alpha_i = \alpha_j = 1$, to $|i - j| \geqslant 2$,

(d) jeżeli $\alpha_t = 0$, to istnieją $\alpha_r = \alpha_q = 1$, $r \neq q$, takie, że $|t - r| = 1$ oraz $|t - q| \leqslant 2$.

Aby wyznaczyć liczbę wszystkich ciągów α, rozważmy p -wyrazowy ciąg $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, $p \geqslant 2$, taki, że $\beta_s = 1$ dla każdego $s \in \{1, \ldots, p\}$. Następnie konstruujemy $(2p-1)$-wyrazowy ciąg $\beta' = (\beta_1, \beta'_1, \beta_2, \beta'_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta'_{p-1}, \beta_p)$, gdzie $\beta'_r = 0$ dla każdego $r \in$

$\{1,\ldots,p-1\}$. Aby utworzyć ciąg α, wystarczy rozszerzyć ciąg β' o $n-(2p-1)$ zer w taki sposób, że dokładamy co najwyżej jedno zero pomiędzy wyrazami β_r, β_{r+1} dla $r \in \{1,\ldots,p-1\}$. Ponieważ w ciągu β' mamy $p-1$ takich możliwości, więc korzystając z podstawowych schematów wyboru wiemy, że możemy to zrobić na $C_{p-1}^{n-(2p-1)} = \binom{p-1}{n-2p+1}$ sposobów, co kończy dowód. □

Wniosek 4.8. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech* $p \geqslant 2$ *oraz* $2p-1 \leqslant n \leqslant 3p-2$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy* $\mathcal{I}_{1,2}(n) = \sum_{p\geqslant 2} \binom{p-1}{n-2p+1}$.

Liczby $i_{1,2}(n,p)$ oraz $\mathcal{I}_{1,2}(n)$ posiadają interpretację grafową związaną z liczbą p-elementowych $(1,2)$-IDS w ścieżce P_n.

Przyjmując, że zbiór $X = \{1,2,...,n\}$ dla $2p-1 \leqslant n \leqslant 3p-2$, odpowiada zbiorowi wierzchołków $V(P_n) = \{x_1,...,x_n\}$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności wnioskujemy, że podzbiór Y odpowiada p-elementowemu $(1,2)$-IDS w ścieżce P_n.

Z twierdzenia 4.7 otrzymujemy następujący wniosek

Wniosek 4.9. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech* $p \geqslant 2$ *oraz* $2p-1 \leqslant n \leqslant 3p-2$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy* $i_{1,2}(n,p)$ *jest równa liczbie wszystkich p-elementowych (1,2)-IDS w ścieżce* P_n *oraz* $\mathcal{I}_{1,2}(n)$ *jest równa liczbie wszystkich* $(1,2)$*-IDS w grafie* P_n.

Z powyższej interpretacji grafowej oraz twierdzeń 4.3 i 4.7 otrzymujemy nowy wzór dwumianowy dla liczb Padovana.

Twierdzenie 4.10. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech* $p \geqslant 2$ *oraz* $2p-1 \leqslant n \leqslant 3p-2$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$Pv(n) = \sum_{p\geqslant 2} \binom{p-1}{n-2p+4}.$$

Zliczając p-elementowe $(1,2)$-IDS w ścieżce P_n, otrzymujemy rekurencyjną postać liczby $i_{1,2}(n,p)$.

Twierdzenie 4.11. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech* $p \geqslant 2$ *oraz* $2p-1 \leqslant n \leqslant 3p-2$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$i_{1,2}(n,p) = i_{1,2}(n-2,p-1) + i_{1,2}(n-3,p-1), \ \ \text{dla } n \geqslant 6, p \geqslant 3 \tag{4.2}$$

z warunkami początkowymi $i_{1,2}(n,2) = 1$ *dla* $n \in \{3,4\}$ *oraz* $i_{1,2}(5,3) = 1$.

Analogiczną interpretację możemy uzyskać dla liczb Perrina.

Niech $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geqslant 4$, oraz niech Y^* będzie p-elementowym, $p \geqslant 2$, podzbiorem zbioru X takim, że Y^* nie zawiera dwóch kolejnych liczb i nie zawiera jednocześnie liczb 1 oraz n. Ponadto, jeżeli $t \notin Y^*$, to istnieją $q, r \in Y^*$, $q \neq r$, takie, że $|t - q| \in \{1, n-1\}$ oraz $|t - r| \in \{1, 2, n-1, n-2\}$.
Dla ustalonego $p \geqslant 2$, niech $\mathcal{Y}^*(n,p)$ oznacza rodzinę wszystkich p-elementowych podzbiorów Y^* oraz $\mathcal{Y}^*(n) = \bigcup\limits_{p \geqslant 2} \mathcal{Y}^*(n,p)$.

Niech $|\mathcal{Y}^*(n,p)| = i^*_{1,2}(n,p)$ oraz $|\mathcal{Y}^*(n)| = \mathcal{I}^*_{1,2}(n)$.

Wtedy

$$\mathcal{I}^*_{1,2}(n) = \sum_{p \geqslant 2} i^*_{1,2}(n,p). \tag{4.3}$$

Dowodząc analogicznie jak w lemacie 4.5, otrzymujemy

Lemat 4.12. (M. Pirga [50]) *Niech $n \geqslant 4$ oraz $p \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Jeżeli $\mathcal{Y}^*(n,p) \neq \emptyset$, to $2p \leqslant n \leqslant 3p$.*

Wniosek 4.13. (M. Pirga [50]) *Niech $p \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli $n \leqslant 2p - 1$ lub $n \geqslant 3p + 1$, to $i^*_{1,2}(n,p) = 0$.*

Twierdzenie 4.14. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $p \geqslant 2$ oraz $2p \leqslant n \leqslant 3p$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy $i^*_{1,2}(2p,p) = 2$ oraz*

$$i^*_{1,2}(n,p) = \frac{n}{n-2p}\binom{p-1}{n-2p-1} \quad \textit{dla } n \geqslant 2p+1.$$

Dowód. Niech $p \geqslant 2$ oraz $2p \leqslant n \leqslant 3p$ będą liczbami naturalnymi. Analogicznie jak w dowodzie twierdzenia 4.7, zamiast podzbioru Y^*, rozważmy binarny, n-wyrazowy ciąg $t = (t_1, \ldots, t_n)$, taki, że wyrazy t_i dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ spełniają następujące warunki

(e) $t_i = \begin{cases} 1 & \text{jeżeli } i \in Y^*, \\ 0 & \text{jeżeli } i \notin Y^*, \end{cases}$

(f) $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = p$,

(g) jeżeli $t_i = t_j = 1$ wtedy $2 \leqslant |i - j| \leqslant n - 2$,

(h) jeżeli $t_i = 0$, to istnieją $t_r = t_q = 1$ takie, że $|i - r| \in \{1, 2, n-1, n-2\}$ oraz $|i - q| \in \{1, n-1\}$.

Aby skonstruować ciąg t spełniający warunki (e)-(h) rozważmy p-wyrazowy ciąg $b = (b_1, \ldots, b_p)$, $p \geqslant 2$, gdzie $b_s = 1$ dla każdego $s \in \{1, \ldots, p\}$. Następnie tworzymy jeden z dwóch $2p$-wyrazowych ciągów $b' = (b'_1, b_1, \ldots, b'_p, b_p)$ lub $b'' = (b_1, b''_1, \ldots, b_p, b''_p)$

takich, że $b'_s = b''_s = 0$ dla $s \in \{1,\ldots,p\}$. Wtedy zachodzą warunki $b'_1 \neq b_p$ oraz $b_1 \neq b''_p$. Jeżeli $n = 2p$, to każdy z tych ciągów spełnia warunki (e)-(h), więc $i_{1,2}(2p,p) = 2$. Niech $n \geqslant 2p+1$. Aby zbudować ciąg t, musimy uzupełnić ciągi b' i b'' o $n-2p$ zer. Uzupełniamy ciągi b' i b'' w taki sposób, że w ciągu b' możemy dodać co najwyżej jedno zero przed wyraz b'_1 lub co najwyżej jedno zero pomiędzy wyrazy b_i, b_{i+1} dla każdego $i \in \{1,\ldots,p-1\}$. Analogicznie w ciągu b'' możemy dodać co najwyżej jedno zero po wyrazie b''_p lub co najwyżej jedno zero pomiędzy wyrazy b_i, b_{i+1} dla każdego $i \in \{1,\ldots,p-1\}$. Dla obydwu ciągów b' i b'' mamy $p-1$ możliwości dodania zera pomiędzy b_i, b_{i+1} i uwzględniając możliwość dodania zera odpowiednio przed b'_1 albo po b''_p możemy to zrobić na $C_p^{n-2p} = \binom{p}{n-2p}$ sposobów dla każdego z ciągów b' i b''. Ponieważ mamy dwa ciągi b' i b'', to liczba wszystkich możliwych ciągów wynosi $2\binom{p}{n-2p}$. Załóżmy, że w wyjściowym ciągu t zachodzi warunek $t_1 = t_n = 0$. Wtedy, $t_2 = t_{n-1} = 1$, w przeciwnym wypadku, warunek (h) nie jest spełniony. W takim przypadku wystarczy rozważyć $(n-2)$-wyrazowy ciąg spełniający warunki (a)–(d) określone w dowodzie twierdzenia 4.7. Korzystając z twierdzenia 4.7 otrzymujemy, że liczba wszystkich $(n-2)$-wyrazowych ciągów jest równa $i_{1,2}(n-2,p) = \binom{p-1}{n-2p-1}$. Uwzględniając wszystkie rozważane możliwości otrzymujemy, że $i^*_{1,2}(n,p) = 2\binom{p}{n-2p} + \binom{p-1}{n-2p-1}$. Wykorzystując znaną tożsamość $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$, otrzymujemy, dla $n \geqslant 2p+1$, że $i^*_{1,2}(n,p) = \frac{2p}{n-2p}\binom{p-1}{n-2p-1} + \binom{p-1}{n-2p-1} = \frac{n}{n-2p}\binom{p-1}{n-2p-1}$, co kończy dowód. $\square$

Wniosek 4.15. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $n \geqslant 4$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Wtedy*

$$\mathcal{I}^*{}_{1,2}(n) = \begin{cases} 2 + \sum\limits_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p}\binom{p-1}{n-2p-1} \right) & \textit{dla } n \textit{ parzystego}, \\ \sum\limits_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p}\binom{p-1}{n-2p-1} \right) & \textit{dla } n \textit{ nieparzystego}. \end{cases}$$

Z definicji liczb $i^*_{1,2}(n,p)$ oraz $\mathcal{I}^*{}_{1,2}(n)$ wynika interpretacja grafowa związana z liczbą $(1,2)$-IDS w cyklu C_n. Przyjmując, że zbiór $X = \{1,2,...,n\}$, $2p \leqslant n \leqslant 3p$, $p \geqslant 2$, odpowiada zbiorowi wierzchołków $V(C_n) = \{x_1,...,x_n\}$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności wnioskujemy, że podzbiór Y^* odpowiada p-elementowemu $(1,2)$-IDS w cyklu C_n. To oznacza, że w interpretacji grafowej liczba $i^*_{1,2}(n,p)$ jest równa liczbie wszystkich p-elementowych $(1,2)$-IDS w C_n, a w konsekwencji, liczba $\mathcal{I}^*{}_{1,2}(n)$ jest równa liczbie $(1,2)$-IDS w cyklu C_n, $n \geqslant 4$. Zatem korzystając z twierdzenia 4.3 otrzymujemy nowe wzory dwumianowe dla liczb Perrina

Twierdzenie 4.16. (M. Pirga [50]) *Niech $n \geqslant 4$ będzie liczbą naturalną. Wtedy*

$$Pr(n) = \begin{cases} 2 + \sum\limits_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) & \text{dla } n \text{ parzystego,} \\ \sum\limits_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) & \text{dla } n \text{ nieparzystego.} \end{cases}$$

Wykorzystując powyższą interpretację grafową, możemy znaleźć zależności pomiędzy liczbami $i_{1,2}(n,p)$ oraz $i^*_{1,2}(n,p)$.

Twierdzenie 4.17. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $p \geqslant 2$ oraz $2p \leqslant n \leqslant 3p$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy $i^*_{1,2}(4,2) = 2$, $i^*_{1,2}(5,2) = 5$, $i^*_{1,2}(6,2) = 3$ oraz dla $p \geqslant 3$ zachodzi*

$$i^*_{1,2}(n,p) = 2i_{1,2}(n-3,p-1) + 5i_{1,2}(n-4,p-1) + 3i_{1,2}(n-5,p-1).$$

Dowód. Aby udowodnić powyższą równość, korzystając z interpretacji grafowej liczb $i^*_{1,2}(n,p)$ oraz $i_{1,2}(n,p)$, wystarczy wyznaczyć liczbę p-elementowych $(1,2)$-IDS w grafie C_n. Warunki początkowe są oczywiste. Niech $p \geqslant 3$ oraz $2p \leqslant n \leqslant 3p$. Niech $V(C_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności. Załóżmy, że S jest dowolnym $(1,2)$-IDS grafu C_n i rozważmy następujące przypadki.

1. $x_1 \in S$.

Wtedy $\{x_n, x_2\} \cap S = \emptyset$, czyli zbiór S ma postać $S = \{x_1\} \cup S^*$, gdzie S^* jest $(p-1)$-elementowym $(1,2)$-IDS zawierającym zbiór liści w pewnym podgrafie grafu C_n izomorficznym ze ścieżką P_j, $n-5 \leqslant j \leqslant n-3$.

Jeżeli $\{x_{n-1}, x_3\} \subset S^*$, to S^* jest dowolnym $(p-1)$-elementowym $(1,2)$-IDS grafu $C_n \setminus \{x_1, x_2, x_n\} \cong P_{n-3}$ i z wniosku 4.9 istnieje $i_{1,2}(n-3,p-1)$ takich zbiorów S^*.

Jeżeli $\{x_{n-1}, x_4\} \subset S^*$ albo $\{x_{n-2}, x_3\} \subset S^*$, to S^* jest dowolnym $(p-1)$-elementowym $(1,2)$-IDS grafu $C_n \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_n\} \cong P_{n-4}$, albo odpowiednio $C_n \setminus \{x_1, x_2, x_{n-1}, x_n\} \cong P_{n-4}$ a ponieważ obydwa przypadki są symetryczne, to z wniosku 4.9 istnieje $2i_{1,2}(n-4,p-1)$ takich zbiorów.

Jeżeli $\{x_{n-2}, x_4\} \subset S^*$, to S^* jest $(p-1)$-elementowym $(1,2)$-IDS grafu $C_n \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_{n-1}, x_n\} \cong P_{n-5}$, więc istnieje $i_{1,2}(n-5,p-1)$ takich zbiorów.

2. $x_1 \notin S$.

Wtedy, zbiór $S = S'$, gdzie S' jest p-elementowym $(1,2)$-IDS zawierającym zbiór liści w pewnym podgrafie grafu C_n izomorficznym ze ścieżką P_l, $n-2 \leqslant l \leqslant n-1$.

Jeżeli $\{x_n, x_2\} \subset S'$, to S' jest dowolnym p-elementowym $(1,2)$-IDS grafu $C_n \setminus \{x_1\} \cong P_{n-1}$, zatem z wniosku 4.9 istnieje $i_{1,2}(n-1,p)$ zbiorów S'.

Jeżeli $\{x_n, x_3\} \subset S'$ albo $\{x_{n-1}, x_2\} \subset S'$, to S' jest dowolnym p-elementowym $(1,2)$-

IDS grafu $C_n \setminus \{x_1, x_2\} \cong P_{n-2}$ albo odpowiednio $C_n \setminus \{x_1, x_n\} \cong P_{n-2}$ i liczba takich zbiorów wynosi $2i_{1,2}(n-2, p)$ ze względu na symetryczne przypadki.
Z powyższych rozważań otrzymujemy, że $i^*_{1,2}(n, p) = i_{1,2}(n-1, p) + 2i_{1,2}(n-2, p) + i_{1,2}(n-3, p-1) + 2i_{1,2}(n-4, p-1) + i_{1,2}(n-5, p-1)$.

Korzystając z rekurencyjnej postaci liczby $i_{1,2}(n, p)$ określonej wzorem (4.2) otrzymujemy, że $i^*_{1,2}(n, p) = i_{1,2}(n-3, p-1) + i_{1,2}(n-4, p-1) + 2i_{1,2}(n-4, p-1) + 2i_{1,2}(n-5, p-1) + i_{1,2}(n-3, p-1) + 2i_{1,2}(n-4, p-1) + i_{1,2}(n-5, p-1) = 2i_{1,2}(n-3, p-1) + 5i_{1,2}(n-4, p-1) + 3i_{1,2}(n-5, p-1)$, co kończy dowód. $\square$

4.2 Wielomiany Padovana w grafach

W [32] G. Hopkins i W. Staton wprowadzili wielomian Fibonacciego grafów, który wyznacza liczbę wszystkich zbiorów niezależnych w kompozycji dwóch grafów.

Kompozycją dwóch grafów G, H nazywamy graf $G[H]$ taki, że $V(G[H]) = V(G) \times V(H)$ oraz $E(G[H]) = \{(x_i, y_p)(x_j, y_q) \colon x_i x_j \in E(G)$ lub $(y_p y_q \in E(H)$ i $x_i = x_j)\}$.

Niech $x \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Wielomian Fibonacciego $f_G(x)$ zmiennej x grafu G jest zdefiniowany jako $f_G(x) = \sigma(G[K_x])$.

Dla szczególnych klas grafów wielomiany Fibonacciego zostały wyznaczone.

Twierdzenie 4.18. (G. Hopkins, W. Staton [32]) *Niech $n \geqslant 1$, $x \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$f_{P_n}(x) = \sum_{p \geqslant 0} \binom{n-p+1}{p} x^p,$$

$$f_{C_n}(x) = 1 + \sum_{p \geqslant 1} \frac{n}{p} \binom{n-p-1}{p-1} x^p.$$

Wykorzystując ideę wielomianu Fibonacciego grafu w tym podrozdziale zdefiniujemy wielomiany Padovana grafu. Zaczniemy od wprowadzenia niezbędnych oznaczeń.

Niech $U \subseteq V(G[H])$. Rzutem zbioru U na graf G nazywamy zbiór $\pi_G(U) = \{x_i \in V(G);$ istnieje $y_p \in V(H)$ takie, że $(x_i, y_p) \in U\}$. Rzutem zbioru U na graf H nazywamy zbiór $\pi_H(U) = \{y_p \in V(H);$ istnieje $x_i \in V(G)$ takie, że $(x_i, y_p) \in U\}$.

Niech $\sigma_{max}(G)$ oznacza liczbę maksymalnych zbiorów niezależnych w grafie G. Niech $\sigma_L^{(1,2)}(G, n, p)$ oznacza liczbę p-elementowych $(1,2)$-IDS w n-wierzchołkowym grafie G.

Twierdzenie 4.19. (A. Michalski, I. Włoch [43]) *Niech $S \subset V(G[H])$ będzie $(1,2)$-IDS grafu $G[H]$. Wtedy $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu G.*

Zauważmy, że jeżeli $S \subset V(G[H])$ jest $(1,2)$-IDS, to $\pi_G(S)$ nie musi być $(1,2)$-IDS. Jako przykład rozważmy graf $P_3[C_4]$. Wtedy podzbiór $S = \{(x_2, y), (x_2, y')\}$ gdzie $x_2 \in S(P_3)$, $y, y' \in V(C_4)$ oraz $yy' \notin E(C_4)$ jest $(1,2)$-IDS grafu $P_3[C_4]$. Z definicji kompozycji $P_3[C_4]$ wynika, że $\pi_G(S) = \{x_2\}$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu P_3, ale zbiór $\pi_G(S) = \{x_2\}$ nie zawiera $L(P_3)$ i nie jest $(1,2)$-IDS grafu P_3.

Dla ustalonej liczby całkowitej $x \geqslant 1$, niech H będzie grafem takim, że $i(H) \geqslant 2$ i $\sigma_{max}(H) = x$. Niech G będzie grafem mającym $(1,2)$-IDS.

Niech $\sigma_{\pi_G(1,2)}(G[H])$ będzie liczbą wszystkich $(1,2)$-IDS których rzut na graf G jest $(1,2)$-IDS grafu G.

Niech $x \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Wielomian Padovana $Pv(G,x)$ zmiennej x grafu G definiujemy jako $Pv(G,x) = \sigma_{\pi_G(1,2)}(G[H])$.

Twierdzenie 4.20. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech H będzie grafem takim, że $i(H) \geqslant 2$ oraz $\sigma_{max}(H) = x$, gdzie $x \geqslant 1$. Niech G będzie spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 3$ mającym $(1,2)$-IDS. Wtedy*

$$Pv(G,x) = \sum_{p \geqslant 2} \sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)x^p.$$

Dowód. Niech G i H będą grafami spełniającymi założenia twierdzenia. Aby wyznaczyć wielomian Padovana $Pv(G,x)$, wystarczy pokazać, że liczba wszystkich $(1,2)$-IDS w kompozycji $G[H]$ których rzut na graf G jest $(1,2)$-IDS wynosi $\sum_{p \geqslant 2} \sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)x^p$. Z definicji $G[H]$ wynika, że aby znaleźć zbiór S będący $(1,2)$-IDS w $G[H]$, taki, że $\pi_G(S)$ jest $(1,2)$-IDS grafu G, należy najpierw wybrać $(1,2)$-IDS grafu G. Niech $S' \subset V(G)$ będzie p-elementowym $(1,2)$-IDS grafu G. Z definicji $(1,2)$-IDS wynika, że S' ma co najmniej dwa wierzchołki. Liczba sposobów wyboru zbioru S' wynosi $\sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)$. Następnie w każdej kopii H odpowiadającej wierzchołkom należącym do S' w grafie G, należy wybrać maksymalny zbiór niezależny. Jeżeli w pewnej kopii grafu H wybrany zbiór niezależny nie byłby maksymalny, to istniałby wierzchołek w tej kopii grafu H, który nie byłby dominowany. Ponieważ $\sigma_{max}(H) = x$, więc możemy to zrobić na x sposobów. Co więcej $i(H) \geqslant 2$, więc każdy maksymalny zbiór niezależny każdej kopii grafu H ma co najmniej dwa wierzchołki. Ponieważ G jest spójny, więc każdy wierzchołek grafu H jest $(1,2)$-dominowany. Wynika to z faktu, że maksymalny zbiór niezależny jest dominujący i ponadto dla dowolnego wierzchołka z kopii grafu H istnieje droga długości dwa do drugiego wierzchołka w tym zbiorze. To oznacza, że w kompozycji $G[H]$ istnieje $\sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)x^p$ zbiorów $(1,2)$-IDS których rzut na G jest $(1,2)$-IDS. Zatem otrzymujemy, że $Pv(G,x) = \sum_{p \geqslant 2} \sigma_L^{(1,2)}(G,n,p)x^p$, co kończy dowód. □

Korzystając z twierdzenia 4.7 oraz twierdzenia 4.14, otrzymujemy wielomiany Padovana dla ścieżek i cykli.

Twierdzenie 4.21. (M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch [52]) *Niech $p \geqslant 2$. Wtedy*

$$Pv(P_n, x) = \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{p-1}{n-2p+1} x^p \text{ dla } n \geqslant 3,$$

oraz dla $n \geqslant 4$ mamy

$$Pv(C_n, x) = \begin{cases} 2x^{\frac{n}{2}} + \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) x^p & \text{dla } n \text{ parzystego}, \\ \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) x^p & \text{dla } n \text{ nieparzystego}. \end{cases}$$

Jako ilustrację twierdzenia 4.21, rozważmy kompozycję $P_7[C_4]$. Ponieważ $i(C_4) = 2$ oraz P_7 ma $(1,2)$-IDS, więc spełnione są założenia. Zatem $Pv(P_7, x) = x^3 + x^4$, a ponieważ $\sigma_{max}(C_4) = 2$, więc $Pv(P_7, 2) = 24$. To oznacza, że liczba $(1,2)$-IDS grafu $P_7[C_4]$ których rzut na graf P_7 jest $(1,2)$-IDS wynosi 24.
Rozważmy kompozycję $C_6[P_4]$. Wtedy $i(P_4) = 2$. Korzystając z twierdzenia 4.21 otrzymujemy, że $Pv(C_6, x) = 2x^3 + 3x^2$, a ponieważ $\sigma_{max}(P_4) = 3$, więc $Pv(C_6, 3) = 81$. To oznacza, że liczba $(1,2)$-IDS grafu $C_6[P_4]$ których rzut na graf C_6 jest $(1,2)$-IDS wynosi 81.

Korzystając z definicji $\sigma_{\pi_G(1,2)}(G[H])$ oraz z twierdzenia 4.21 otrzymujemy

Wniosek 4.22. (M. Pirga [50]) *Niech $p \geqslant 2$. Wtedy dla dowolnego grafu H takiego, że $i(H) \geqslant 2$ oraz $\sigma_{max}(H) = x$ zachodzi*

$$\sigma_{\pi_{P_n}(1,2)}(P_n[H]) = \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{p-1}{n-2p+1} x^p \text{ dla } n \geqslant 3,$$

oraz dla $n \geqslant 4$ mamy

$$\sigma_{\pi_{C_n}(1,2)}(C_n[H]) = \begin{cases} 2x^{\frac{n}{2}} + \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) x^p & \text{dla } n \text{ parzystego}, \\ \sum_{p=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left(\frac{n}{n-2p} \binom{p-1}{n-2p-1} \right) x^p & \text{dla } n \text{ nieparzystego}. \end{cases}$$

4.3 Liczba maksymalnych zbiorów k-niezależnych w grafach

Znanym uogólnieniem zbiorów niezależnych w grafach są zbiory niezależne uogólnione w sensie odległościowym, wprowadzone przez A. Meira i J. W. Moona w [40].

Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $S \subseteq V(G)$ jest zbiorem k-niezależnym grafu G jeżeli dla dowolnych $x, y \in S$, gdzie $x \neq y$ zachodzi warunek $d_G(x, y) \geqslant k$. W szczególności zbiór pusty oraz każdy podzbiór jednowierzchołkowy są zbiorami k-niezależnymi, dla dowolnego $k \geqslant 2$. Jeżeli $k = 2$, to otrzymujemy definicję zbioru niezależnego w klasycznym sensie.

Parametr k w definicji zbioru k-niezależnego określa najmniejszą, dopuszczalną odległość pomiędzy wierzchołkami należącymi do zbioru k-niezależnego. Zatem z definicji zbioru k-niezależnego wynika, że jeżeli $S \subseteq V(G)$ jest zbiorem $(k+i)$-niezależnym grafu G, dla $i \geqslant 1$, to S jest zbiorem k-niezależnym grafu G.

W kolejnych podrozdziałach rozważymy maksymalne zbiory k-niezależne grafu G, zawierające zbiór liści. Wykorzystując zależności pomiędzy uogólnionym ciągiem Padovana a liczbą wszystkich maksymalnych zbiorów k-niezależnych, zawierających zbiór liści w ścieżce, przedstawimy wzór dwumianowy uogólnionego ciągu Padovana. Ponadto zdefiniujemy uogólnione wielomiany Padovana grafu wykorzystując G-złączenie grafów.

Przegląd literatury pokazuje, że tematyka dotycząca zbiorów k-niezależnych jest obszerna. Wiele wyników dotyczących zbiorów k-niezależnych także w grafach skierowanych uzyskali M. Kwaśnik [37, 38], M. Kucharska [36], Z. Skupień [58], H. Galeana-Sánchez i C. Hernández-Cruz [27, 31], A. P. Stakhov [59], A. Włoch i I. Włoch [68, 69, 73], W. Szumny i inni [61, 62], I. Włoch [70] oraz U. Bednarz i inni [8].

Ponieważ każdy graf nieskierowany ma zbiór k-niezależny, dla $k \geqslant 2$, więc znaczna część badań dotycząca zbiorów k-niezależnych dotyczy liczby tych zbiorów.

Niech $\sigma^{(k)}(G)$ oznacza liczbę zbiorów k-niezależnych grafu G. Jeżeli $k = 2$, to przyjmujemy $\sigma(G)$ zamiast $\sigma^{(2)}(G)$.

Zliczanie zbiorów k-niezależnych zostało zapoczątkowane przez M. Kwaśnik i I. Włoch w [37]. Otrzymane wyniki uogólniły wcześniejsze obserwacje, które podali H. Prodinger i R. F. Tichy w [54] i w naturalny sposób doprowadziły do zdefiniowania uogólnionych ciągów Fibonacciego i uogólnionych ciągów Lucasa.

Niech $k \geqslant 2$, $n \geqslant 0$ będą liczbami naturalnymi. Uogólnionym ciągiem Fibonacciego nazywamy ciąg $(F(k,n))$ zdefiniowany równaniem rekurencyjnym postaci

$$\begin{aligned} &F(k,n) = F(k,n-1) + F(k,n-k), \text{ dla } k \geqslant 2, \ n \geqslant k, \\ &F(k,n) = n+1, \text{ dla } n \in \{0,1,...,k-1\}. \end{aligned}$$

Wyrazy ciągu $(F(k,n))$ nazywamy uogólnionymi liczbami Fibonacciego. Jeżeli $k=2$, to $F(2,n) = F_{n+2}$.
Niech $k \geqslant 2$, $n \geqslant 0$ będą liczbami naturalnymi. Uogólnionym ciągiem Lucasa nazywamy ciąg $(L(k,n))$ zdefiniowany równaniem rekurencyjnym postaci

$$\begin{aligned} &L(k,n) = L(k,n-1) + L(k,n-k), \text{ dla } k \geqslant 2, \ n \geqslant 2k, \\ &L(k,n) = n+1, \text{ dla } n \in \{0,1,...,2k-1\}. \end{aligned}$$

Wyrazy ciągu $(L(k,n))$ nazywamy uogólnionymi liczbami Lucasa. Jeżeli $k=2$, to $L(2,n) = L_n$.

Twierdzenie 4.23. (M. Kwaśnik, I. Włoch [37]) *Niech $k \geqslant 2$, $n \geqslant 0$ będą liczbami całkowitymi. Wtedy $\sigma^{(k)}(P_n) = F(k,n)$ oraz $\sigma^{(k)}(C_n) = L(k,n)$.*

Zliczanie zbiorów k-niezależnych w grafach prowadzi do uogólnień znanych ciągów typu Fibonacciego. Wykorzystując interpretacje grafowe związane z liczbą zbiorów k-niezależnych w pewnych klasach grafów zostały uogólnione liczby Pella i liczby Jacobsthala, [8, 63, 70].

4.4 Uogólniony ciąg Padovana

W [69] został wprowadzony uogólniony ciąg Padovana jako konsekwencja zliczania maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżce P_n, $n \geqslant 1$.

Niech $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Uogólniony ciąg Padovana $(Pv(n,k))$ jest zdefiniowany równaniem rekurencyjnym postaci

$$Pv(n,k) = Pv(n-k,k) + Pv(n-k-1,k) + ... + Pv(n-2k+1,k) \text{ dla } n \geqslant 2k+1 \quad (4.4)$$

z warunkami początkowymi

$$Pv(i,k) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \in \{1,...,k\}, \\ 1 & \text{dla } i \in \{k+1,...,2k\}. \end{cases}$$

Wyrazy ciągu $(Pv(n,k))$ są nazywane uogólnionymi liczbami Padovana.

Jeżeli $k = 2$, to $Pv(n, 2)$ jest $Pv(n - 3)$.

Tabela 4.1 zawiera początkowe wyrazy uogólnionych ciągów Padovana $(Pv(n, k))$ dla wybranych wartości n i k.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$Pv(n, 2)$	0	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28	37	49	65
$Pv(n, 3)$	0	0	0	1	1	1	1	2	3	3	4	6	8	10	13	18	24	31	41
$Pv(n, 4)$	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	3	4	4	5	7	10	13	16	20
$Pv(n, 5)$	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	5	6	8	11
$Pv(n, 6)$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5	6	6
$Pv(n, 7)$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	2	3	4	5

Tabela 4.1: Uogólnione ciągi Padovana $(Pv(n, k))$ dla $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $n \in \{1, 2, ..., 19\}$

Twierdzenie 4.24. (A. Włoch, I. Włoch [69]) *Niech $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy $Pv(n, k)$ jest liczbą maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżce P_n.*

Ponieważ jest znana tylko postać rekurencyjna ciągu $(Pv(n, k))$, więc w tym podrozdziale, wykorzystując powyższą interpretację grafową, podamy wzór dwumianowy dla ciągu $(Pv(n, k))$.

Dla liczb naturalnych $k \geqslant 2$, $t \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, niech $\mathcal{S}(n, k, t)$ oznacza rodzinę wszystkich t-elementowych maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżce P_n oraz niech $\mathcal{S}(n, k) = \bigcup_{t \geqslant 2} \mathcal{S}(n, k, t)$. Wtedy z twierdzenia 4.24 wynika zależność

$$|\mathcal{S}(n, k)| = Pv(n, k). \tag{4.5}$$

Z definicji zbioru k-niezależnego wynika następujący lemat

Lemat 4.25. (M. Pirga [50]) *Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli $1 \leqslant n \leqslant k$, to $|\mathcal{S}(n, k, t)| = 0$.*

Twierdzenie 4.26. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech $n \geqslant k + 1$, $k \geqslant 2$ oraz $t \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$|\mathcal{S}(n, k, t)| = \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n - (t + j - 1)k + t - 3}{t - 2}.$$

Dowód. Niech $n \geqslant k + 1$, $k \geqslant 2$ oraz $t \geqslant 2$ będą liczbami naturalnymi. Niech $V(P_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności. Aby wyznaczyć liczność rodziny $\mathcal{S}(n, k, t)$, wystarczy znaleźć liczbę wszystkich maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżce P_n. Niech $S \in \mathcal{S}(n,k,t)$ będzie t-elementowym maksymalnym zbiorem niezależnym zawierającym $L(P_n)$. Zauważmy, że zamiast zbioru S możemy rozważyć n-wyrazowy ciąg $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ taki, że

(i) $a_i = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } x_i \in S, \\ 0 & \text{jeśli } x_i \notin S, \end{cases}$

(ii) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = t$,

(iii) jeśli $a_i = a_j = 1$ wtedy $k \leqslant |i-j| \leqslant 2k-1$,

(iv) $a_1 = a_n = 1$.

Aby wyznaczyć liczbę wszystkich n-wyrazowych ciągów spełniających warunki (i) - (iv) najpierw rozważmy ciąg $b = (b_1, b_1^1, \dots, b_1^{k-1}, b_2, b_2^1, \dots, b_2^{k-1}, \dots, b_{t-1}^1, \dots, b_{t-1}^{k-1}, b_t)$ taki, że $b_j = 1$ dla $j \in \{1, \dots, t\}$ oraz $b_j^r = 0$ dla $r \in \{1, \dots, k-1\}$. Wtedy ciąg b spełnia warunki (i), (ii) i (iv) oraz b ma $(t-1)k+1$ wyrazów. Aby otrzymać n-wyrazowy ciąg $a = (a_1, \dots, a_n)$ należy uzupełnić ciąg b dodając dokładnie $n-(t-1)k-1$ zer w taki sposób, aby spełniony był również warunek (iii). Zauważmy, że ten problem można równoważnie sprowadzić do dekompozycji (tj. uporządkowanego podziału) liczby $n-(t-1)k-1$ na $t-1$ składników w postaci $n-(t-1)k-1 = m_1 + m_2 + \dots + m_{t-1}$, gdzie $m_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$. Każdy składnik m_i odpowiada liczbie zer dodanych pomiędzy wyrazy b_j, b_{j+1}, $j \in \{1, ..., t-1\}$. Wtedy liczba wszystkich takich dekompozycji odpowiada liczbie wszystkich n-ciągów $a = (a_1, a_2 \dots, a_n)$ spełniających warunki (i)-(iv).

Rozważmy równanie

$$n-(t-1)k-1 = m_1 + m_2 + \dots + m_{t-1}, \text{ gdzie } \quad m_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}. \tag{4.6}$$

Wiemy, że liczba nieujemnych całkowitych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + \dots + x_p = m$ jest równa $\binom{m+p-1}{p-1}$. Stosując to do równania (4.6), liczba wszystkich rozwiązań bez ograniczeń nałożonych na m_i jest równa

$$\binom{n-(t-1)k+t-3}{t-2}.$$

W ten sposób otrzymujemy liczbę wszystkich dekompozycji liczby $n-(t-1)k-1$ na $t-1$ składników m_i bez ograniczeń. Jednak w równaniu (4.6) zakładamy, że $m_i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ dlatego do rozwiązania zastosujemy zasadę włączeń i wyłączeń. Niech $j = |\{i : m_i \geqslant k, 1 \leqslant i \leqslant t-1\}|$. Rozważamy następujące przypadki

1. $j \geqslant 0$. To oznacza, że na $m_i \in \{0, 1, ..., k-1\}$ nie nakładamy ograniczeń, więc zgodnie z powyższym wzorem liczba takich rozwiązań wynosi

$$\binom{n-(t-1)k+t-3}{t-2}. \tag{4.7}$$

2. $j \geqslant 1$. Zakładamy, że istnieje co najmniej jedno $i \in \{1, ..., t-1\}$ takie, że $m_i \geqslant k$. Bez straty dla ogólności rozważań możemy przyjąć, że $m_1 \geqslant k$ oraz $m_1 = k + m_1'$, gdzie $m_1' \geqslant 0$. Podstawiając to do równania (4.6), otrzymujemy

$$n-(t-1)k-1-k = m_1' + m_2 + \cdots + m_{t-1}.$$

Następnie, korzystając z wyrażenia (4.7) liczba rozwiązań tego równania wynosi

$$\binom{n-tk+t-3}{t-2}.$$

Ponieważ składnik $m_i \geqslant k$ można wybrać na $t-1$ sposobów, liczba wszystkich takich przypadków jest równa

$$(t-1) \cdot \binom{n-tk+t-3}{t-2}. \tag{4.8}$$

Zatem wystarczy od wyrażenia (4.7) odjąć wyrażenie (4.8) czyli pominąć przypadki, w których co najmniej jeden ze składników jest większy niż $k-1$. Musimy pamiętać, że wzór 4.8 zlicza wielokrotnie przypadki dla $j \geqslant 2$, zatem odjęliśmy za dużo. Musimy dodać obliczoną w podobny sposób liczbę przypadków dla $j \geqslant 2$.

3. $j \geqslant 2$. Zakładamy, że dwa składniki $m_i, m_j \geqslant k$. Niech $m_1, m_2 \geqslant k$ oraz $m_1 = k + m_1'$ i $m_2 = k + m_2'$. Analogicznie do poprzedniego przypadku, otrzymujemy równanie

$$n-(t-1)k-1-2k = m_1' + m_2' + m_3 + \cdots + m_{t-1}$$

i liczba rozwiązań tego równania wynosi

$$\binom{n-(t+1)k+t-3}{t-2}.$$

Liczba sposobów wyboru dwóch składników spośród $t-1$, które mogą być większe niż $k-1$, wynosi $\binom{t-1}{2}$. Zatem liczba wszystkich takich przypadków jest równa

$$\binom{t-1}{2} \cdot \binom{n-(t+1)k+t-3}{t-2}.$$

Dodajemy to z powrotem do wyrażenia (4.7) pomniejszonego o wartość (4.8), ponieważ te przypadki zostały usunięte dwukrotnie w kroku $j \geqslant 1$. Wtedy dodamy jednak wielokrotnie przypadki dla $j \geqslant 3$, więc musimy odjąć przypadki $j \geqslant 3$. Kontynuując to postępowanie, widać, że będziemy odejmować przypadki dla j nieparzystego, a dodawać dla j parzystego.

Obliczmy liczbę rozwiązań przy założeniu, że co najmniej j składników może być większych niż $k-1$. Niech $m_1, m_2, \ldots, m_j \geqslant k$. Przedstawiając te składniki jako $m_j = k + m_j'$, równanie przyjmuje postać

$$n-(t-1)k-1-jk = m_1' + m_2' + \cdots + m_j' + \cdots + m_{t-1}.$$

Liczba rozwiązań tego równania wynosi

$$\binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2}.$$

Liczba sposobów wyboru j składników spośród $t-1$ wynosi $\binom{t-1}{j}$. Zatem liczba wszystkich takich przypadków to

$$(-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2}.$$

Element $(-1)^j$ oznacza, że dla nieparzystych wartości j, usuwamy przypadki, w których składniki są większe niż $k-1$, a dla parzystych wartości j dodajemy je z powrotem, aby skorygować nadmiarowe odjęcia w poprzednich krokach.

Sumując po wszystkich możliwych wartościach $j \in \{0, ..., t-1\}$ otrzymujemy, że

$$|\mathcal{S}(n,k,t)| = \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2}$$

co kończy dowód. □

Korzystając z twierdzeń 4.24 i 4.26 oraz zależności 4.5, sumując powyższe wyrażenie po wszystkich możliwych $t \geqslant 2$ otrzymujemy wzór dwumianowy dla uogólnionych liczb Padovana $Pv(n,k)$.

Twierdzenie 4.27. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech $n \geqslant k+1$, $k \geqslant 2$ będą liczbami całkowitymi. Wtedy*

$$Pv(n,k) = \sum_{t \geqslant 2} \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2}.$$

Jeżeli $k=2$, to $Pv(n,2) = Pv(n-3)$ i w konsekwencji otrzymujemy kolejny nowy wzór dwumianowy dla klasycznych liczb Padovana.

Wniosek 4.28. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech* $n \geqslant 3$ *będą liczbami całkowitymi. Wtedy*

$$Pv(n-3) = \sum_{t \geqslant 2} \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-2(t+j)+t-1}{t-2}.$$

4.5 Uogólnione wielomiany Padovana grafu

Uogólnione wielomiany Fibonacciego grafów, mające związek z liczbą wszystkich zbiorów k-niezależnych, $k \geqslant 3$, zostały wprowadzone przez I. Włoch [74] z wykorzystaniem operacji złączenia grafów.

Niech G będzie grafem spójnym o zbiorze wierzchołków $V(G) = \{t_1, ..., t_n\}$, $n \geqslant 2$ oraz niech $h_n = (H_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ będzie ciągiem, dowolnych, wierzchołkowo rozłącznych grafów H_i takich, że $V(H_i) = \{(t_i, y_1), ..., (t_i, y_x)\}$, $x \geqslant 1$.

G-złączeniem grafu G i ciągu (h_n) nazywamy graf $G[h_n]$ taki, że $V(G[h_n]) = \bigcup_{i=1}^{n} V(H_i)$ i $E(G[h_n]) = \bigcup_{i=1}^{n} E(H_i) \cup \{(t_i, y_p), (t_j, y_q) : t_i t_j \in E(G)\}$.

Jeżeli $H_i = H$ dla każdego $i \in \{1, ..., n\}$, to otrzymujemy definicje kompozycji dwóch grafów G i H.

Dla dowolnych liczb naturalnych $k \geqslant 3$, $x \geqslant 1$ uogólniony wielomian Fibonacciego $f_G(k, x)$ zmiennej x, grafu n-wierzchołkowego G, $n \geqslant 2$ jest zdefiniowany jako $f_G(k, x) = \sigma^{(k)}(G[h_n])$, gdzie $h_n = (H_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ jest dowolnym ciągiem wierzchołkowo rozłącznych grafów, takich, że $|V(H_i)| = |V| = x$.

Twierdzenie 4.29. (I. Włoch [74]) *Niech* $k \geqslant 3$, $n \geqslant 2$, $x \geqslant 1$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$f_{P_n}(k, x) = \sum_{p \geqslant 0} \binom{n-(p-1)(k-1)}{p} x^p,$$

$$f_{C_n}(k, x) = 1 + nx + \sum_{p \geqslant 2} \frac{n}{p} \binom{n-p(k-1)-1}{p-1} x^p.$$

Z definicji wielomianu $f_G(k, x)$ otrzymujemy liczbę zbiorów k-niezależnych, $k \geqslant 3$, w złączeniu $G[h_n]$, gdzie $h_n = (H_i)_{i \in \{1,...,n\}}$ jest ciągiem dowolnych grafów, mających x wierzchołków, $x \geqslant 1$. Wtedy

$$\sigma^{(k)}(P_n[h_n]) = \sum_{p \geqslant 0} \binom{n-(p-1)(k-1)}{p} x^p,$$

$$\sigma^{(k)}(C_n[h_n]) = 1 + nx + \sum_{p \geqslant 2} \frac{n}{p} \binom{n-p(k-1)-1}{p-1} x^p.$$

Analogicznie jak w przypadku klasycznych ciągów Padovana, ciągi Padovana $(Pv(n, k))$ można uogólnić przy pomocy wielomianu.

W dalszych rozważaniach wykorzystamy twierdzenie dotyczące odległości pomiędzy wierzchołkami w G-złączeniu.

Twierdzenie 4.30. (A. Włoch, I. Włoch [73]) *Niech* $(t_i, y_p), (t_j, y_q) \in V(G[h_n])$. *Wtedy*

$$d_{G[h_n]}((t_i, y_p), (t_j, y_q)) = \begin{cases} d_G(t_i, t_j) & \text{dla } i \neq j, \\ 1 & \text{dla } i = j \text{ oraz } d_{H_i}(y_p, y_q) = 1, \\ 2 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Charakteryzacja zbiorów k-niezależnych i maksymalnych zbiorów k-niezależnych w G-złączeniu została podana w [62] i [65].

Twierdzenie 4.31. (W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch [62]) *Podzbiór* $S \subset V(G[h_n])$ *jest zbiorem niezależnym grafu* $G[h_n]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy rzut* $\pi_G(S)$ *jest zbiorem niezależnym grafu* G *i zbiór* $\pi_{H_i}(S)$ *jest zbiorem niezależnym grafu* H_i, *dla każdego* $t_i \in \pi_G(S)$.

Twierdzenie 4.32. (J. Topp [65]) *Podzbiór* $S \subset V(G[h_n])$ *jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu* $G[h_n]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy rzut* $\pi_G(S)$ *jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu* G *i zbiór* $\pi_{H_i}(S)$ *jest maksymalnym zbiorem niezależnym grafu* H_i, *dla każdego* $t_i \in \pi_G(S)$.

Twierdzenie 4.33. (W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch [62]) *Niech* $k \geqslant 3$ *będzie liczbą naturalną. Podzbiór* $S \subset V(G[h_n])$ *jest maksymalnym zbiorem* k*-niezależnym grafu* $G[h_n]$ *wtedy i tylko wtedy, gdy rzut* $\pi_G(S)$ *jest maksymalnym zbiorem* k*-niezależnym grafu* G *i zbiór* $\pi_{H_i}(S)$ *zawiera dokładnie jeden wierzchołek dla każdego* $t_i \in \pi_G(S)$.

Niech $k \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Niech G będzie spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant k+1$ oraz $\delta(G) = 1$. Każdy spójny n-wierzchołkowy graf, $n \geqslant 3$ taki, że $L(G) \neq \emptyset$ ma maksymalny zbiór niezależny zawierający zbiór liści. Jeżeli $k \geqslant 3$ i $L(G) \neq \emptyset$, to nie każdy graf ma zbiór k-niezależny zawierający zbiór $L(G)$. Z definicji zbioru k-niezależnego wnioskujemy, że dla $k \geqslant 3$ graf G ma zbiór k-niezależny zawierający $L(G)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $L(G)$ zawiera dokładnie jeden wierzchołek albo dla każdego $x, y \in L(G)$ zachodzi nierówność $d_G(x, y) \geqslant k$.

W dalszych rozważaniach zakładamy, że G jest grafem spójnym takim, że $L(G) \neq \emptyset$ i G ma maksymalny zbiór k-niezależny, $k \geqslant 2$, zawierający $L(G)$ jako podzbiór.

Niech $\sigma^{(k)}_{L,max}(G, n, t)$ oznacza liczbę t-elementowych maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści $L(G)$ w n-wierzchołkowym grafie G. Niech $\sigma^{(k)}_{L,max}(G)$ oznacza liczbę maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści $L(G)$ w grafie G. Dla każdego n-wierzchołkowego grafu G mamy $\sigma^{(k)}_{L,max}(G) =$

$\sum\limits_{t\geqslant 1} \sigma^{(k)}_{L,max}(G,n,t)$. Niech $S_{\pi(G)} \subset V(G[h_n])$ będzie maksymalnym zbiorem k-niezależnym grafu $G[h_n]$ takim, że rzut $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem k-niezależnym zawierającym zbiór liści $L(G)$. Liczbę zbiorów $S_{\pi(G)}$ będziemy oznaczać $\sigma^{(k)}_{L,max}(G[h_n]_{\pi(G)})$.

Dla dowolnych liczb całkowitych $k \geqslant 2$ oraz $x \geqslant 1$, uogólniony wielomian Padovana $Pv(G,k,x)$ zmiennej x, grafu n-wierzchołkowego G, $n \geqslant 3$, definiujemy jako $Pv(G,k,x) = \sigma^{(k)}_{L,max}(G[h_n]_{\pi(G)})$, gdzie dla $k \geqslant 3$ i ciąg $h_n = (H_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ jest dowolnym ciągiem wierzchołkowo rozłącznych grafów takich, że $|V(H_i)| = |V| = x$, $x \geqslant 1$, natomiast dla $k = 2$ ciąg $h_n = (K^{(i)}_x)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$ gdzie $K^{(i)}_x$ jest i-tą kopią grafu pełnego K_x, $x \geqslant 1$.

Twierdzenie 4.34. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech $k \geqslant 2$, $n \geqslant 3$, $x \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi. Wtedy dla każdego grafu G takiego, że $\delta(G) = 1$ i mającego maksymalny zbiór k-niezależny zawierający zbiór liści, uogólniony wielomian Padovana ma postać*

$$Pv(G,k,x) = \sum_{t\geqslant 1} \sigma^{(k)}_{L,max}(G,n,t)x^t.$$

Dowód. Niech G będzie grafem spełniającym założenia twierdzenia. Korzystając z definicji $Pv(G,k,x)$ rozważmy następujące przypadki.

1. $k = 2$. W tym przypadku ciąg (h_n) zawiera n kopii grafu pełnego K_x, oznaczonych jako $K^{(i)}_x$, $x \geqslant 1$, dla $i \in \{1,\ldots,n\}$. Niech $S_{\pi(G)} \subset V(G[h_n])$ będzie t-elementowym maksymalnym zbiorem niezależnym w $G[h_n]$, takim że jego rzut $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści grafu G. Korzystając z twierdzenia 4.32 wnioskujemy, że aby otrzymać zbiór $S_{\pi(G)}$, należy wybrać t-elementowy maksymalny zbiór niezależny zawierający zbiór liści grafu G, a następnie wybrać dokładnie jeden wierzchołek z każdej kopii $K^{(i)}_x$. Ponieważ możemy to zrobić na x sposobów, to liczba możliwości wyboru zbioru niezależnego w $G[h_n]$, którego rzut na G jest maksymalnym zbiorem niezależnym zawierającym zbiór liści, wynosi $\sigma^{(2)}_{L,max}(G,n,t)x^t$. Zatem $Pv(G,2,x) = \sum\limits_{t\geqslant 2} \sigma^{(2)}_{L,max}(G,n,t)x^t$.

2. $k \geqslant 3$. W tym przypadku ciąg (h_n) zawiera n dowolnych, wierzchołkowo rozłącznych grafów H_i, gdzie $|V(H_i)| = x$, $x \geqslant 1$. Niech $S_{\pi(G)} \subset V(G[h_n])$ będzie maksymalnym zbiorem k-niezależnym w $G[h_n]$ takim, że jego rzut $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem k-niezależnym zawierającym zbiór liści grafu G. Korzystając z twierdzenia 4.30 wiemy, że co najwyżej jeden wierzchołek z każdego grafu H_i, $i \in \{1,...,n\}$ może należeć do $S_{\pi(G)}$. Dowodząc w sposób analogiczny jak w przypadku 1 i korzystając z twierdzenia 4.33, otrzymujemy tezę twierdzenia. □

Korzystając z twierdzeń 4.26 i 4.34, otrzymujemy postać uogólnionego wielomianu Padovana dla ścieżek.

Wniosek 4.35. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech* $t \geqslant 1$. *Wtedy, dla* $n \geqslant k+1$, $k \geqslant 2$ *mamy*

$$Pv(P_n, k, x) = \sum_{t \geqslant 1} \left(\sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2} \right) x^t.$$

Podamy wzór rekurencyjny dla uogólnionego wielomianu $Pv(P_n, k, x)$, który wykorzystamy do zdefiniowania uogólnionych wielomianów Padovana.

Twierdzenie 4.36. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech* $k \geqslant 2$, $n \geqslant 0$, $x \geqslant 1$ *będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

$$Pv(P_n, k, x) = x\left(Pv(P_{n-k}, k, x) + Pv(P_{n-k-1}, k, x) + ... + Pv(P_{n-2k+1}, k, x)\right), \quad (4.9)$$

dla $n \geqslant 2k+1$ *z warunkami początkowymi*

$$Pv(P_i, k, x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \in \{1, ..., k\}, \\ x^2 & \text{dla } i \in \{k+1, ..., 2k\}. \end{cases}$$

Dowód. Dla $n \in \{0, 1, ..., 2k\}$ twierdzenie wynika bezpośrednio z definicji $Pv(G, k, x)$. Niech $n \geqslant 2k+1$. Niech $k \geqslant 2$. Korzystając z definicji uogólnionego wielomianu $Pv(P_n, k, x)$ wiemy, że liczba maksymalnych zbiorów k-niezależnych S w złączeniu $P_r[h_r]$, dla $r < n$, których rzut $\pi_G(S)$ jest maksymalnym zbiorem k-niezależnym zawierającym $L(P_r)$ jest równa $Pv(P_r, k, x)$. Przyjmijmy, że $V(P_n) = \{t_1, ..., t_n\}$, $n \geqslant 2k+1$ z numeracją wierzchołków w naturalnej kolejności. Wtedy $\{t_1, t_n\} \subset L(P_n)$. Niech S będzie maksymalnym zbiorem k-niezależnym zawierającym zbiór liści w ścieżce P_n. Rozważamy następujące przypadki.

1. $k = 2$. Ponieważ $t_n \in S$ to $t_{n-1} \notin S$. Wtedy zachodzi jedna z dwóch możliwości $t_{n-2} \in S$ albo $t_{n-2} \notin S$ i $t_{n-3} \in S$. Zatem, na podstawie definicji $Pv(G, k, x)$ oraz hipotezy indukcyjnej, otrzymujemy, że $Pv(P_n, 2, x) = xPv(P_{n-2}, 2, x) + xPv(P_{n-3}, 2, x)$.

2. $k \geqslant 3$. Ponieważ $t_n \in S$ to $\{t_{n-1}, \ldots, t_{n-(k-1)}\} \cap S = \emptyset$. Na podstawie definicji $Pv(P_n, k, x)$ oraz hipotezy indukcyjnej otrzymujemy $xP_v(P_{n-k}, k, x)$ możliwości. Wtedy $|\{t_{n-k}, \ldots, t_{n-2k+1}\} \cap S| = 1$, w przeciwnym wypadku S nie jest maksymalnym zbiorem k-niezależnym. Postępując analogicznie jak w przypadku 1, otrzymujemy równość (4.9). $\square$

Z powyższej interpretacji wynika definicja uogólnionego wielomianu Padovana. Niech $k \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ będą liczbami naturalnymi. Uogólniony wielomian Padovana $Pv(n, k, x)$ definiujemy równaniem rekurencyjnym.

$$Pv(n, k, x) = xPv(n-k, k, x)+Pv(n-k-1, k, x)+...+Pv(n-2k+1, k, x) \text{ dla } n \geqslant 2k+1$$

z warunkami początkowymi

$$Pv(i, k, x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \in \{1, ..., k\}, \\ x^2 & \text{dla } i \in \{k+1, ..., 2k\}. \end{cases}$$

Jeżeli $x = 1$, to $Pv(n, k, 1) = Pv(n, k)$ oraz $Pv(n, 2, 1) = Pv(n-3)$.

W konsekwencji z wniosku 4.35 i definicji uogólnionego wielomianu Padovana otrzymujemy jego postać dwumianową.

Wniosek 4.37. (M. Pirga, I. Włoch [51]) *Niech $t \geqslant 1$. Wtedy, dla $n \geqslant k+1$, $k \geqslant 2$ otrzymujemy*

$$Pv(n, k, x) = \sum_{t \geqslant 1} \left(\sum_{j=0}^{t-1} (-1)^j \cdot \binom{t-1}{j} \cdot \binom{n-(t+j-1)k+t-3}{t-2} \right) x^t.$$

Rozdział 5

Właściwe zbiory 2-dominujące

W tym rozdziale będziemy rozważać zbiory 2-dominujące, które są zbiorami zawierającymi zbiór liści. Zdefiniujemy właściwe zbiory 2-dominujące w grafach i podamy warunki konieczne i wystarczające, na to aby w grafie istniał właściwy zbiór 2-dominujący. Przedstawimy zależności pomiędzy parametrami właściwego 2-dominowania a parametrami 2-dominowania i 3-dominowania oraz pokażemy, związek pomiędzy liczbą właściwego 2-dominowania a istnieniem niezależnych zbiorów 2-dominujących.

5.1 Definicja właściwego zbioru 2-dominującego

Jednym z wariantów zbiorów dominujących jest doskonałe dominowanie wprowadzone przez E. J. Cockayne i in. w pracy [22].

Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest *doskonałym zbiorem dominującym* jeżeli każdy wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ jest sąsiedni z dokładnie jednym wierzchołkiem ze zbioru D.

Zbiory, które są jednocześnie doskonałymi zbiorami dominującymi i niezależnymi są nazywane *efektywnymi zbiorami dominującymi* [2], $(3,1)$-*jądrami* [16] lub *doskonałymi kodami* [13].

Uogólniając pojęcie doskonałego dominowania B. Chaluvaraju i in. wprowadzili w [17] doskonałe zbiory p-dominujące korzystając z definicji zbioru p-dominującego w sensie J. M. Finka i M. S. Jacobsona, [26].

Niech $p \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Podzbiór $D \subseteq V(G)$ jest *doskonałym zbiorem p-dominującym* grafu G, jeżeli każdy wierzchołek $v \in V(G) \setminus D$ ma dokładnie p-sąsiadów w grafie G.

Z powyższej definicji wynika, że doskonały zbiór 1-dominujący jest doskonałym zbiorem dominującym.

Każdy graf ma doskonały zbiór p-dominujący w szczególności jest nim zbiór wierzchołków $V(G)$. Z definicji doskonałego zbioru p-dominującego wynika następująca zależność.

Twierdzenie 5.1. (B. Chaluvaraju, M. Chellali, K. A. Vidya [17]) *Niech $p \geqslant 1$ będzie liczbą naturalną. Dla dowolnego grafu G każdy wierzchołek stopnia co najwyżej $p-1$ należy do każdego doskonałego zbioru p-dominującego.*

Z twierdzenia 5.1 wynika, że dla dowolnego grafu G każdy doskonały zbiór p-dominujący, $p \geqslant 2$, zawiera zbiór liści jako podzbiór. Wiemy również, że dla dowolnego grafu G każdy zbiór p-dominujący, $p \geqslant 2$ zawiera zbiór liści jako podzbiór.

Definicja doskonałego zbioru p-dominującego wprowadza jednoznacznie określenie parametru p, jednak nałożone warunki wymuszają znaczne ograniczenia na stopnie wierzchołków w grafie.

Spośród zbiorów p-dominujących najczęściej badane są zbiory 2-dominujące i niezależne zbiory 2-dominujące. Niezależne zbiory 2-dominujące są nazywane $(2-d)$-jądrami [7]. Warto wspomnieć, że w książce [29] z 2020 roku jeden z rozdziałów autorstwa A. Hansberga i L. Volkmanna zawiera przegląd wyników dotyczących wielokrotnego dominowania. Wiele z tych rezultatów dotyczy 2-dominowania, ale należy wymienić także interesujące prace dotyczące ogólnego przypadku [15, 45, 46].

Definicja doskonałego zbioru p-dominującego nakłada warunek na każdy wierzchołek nienależący do tego zbioru. W tym rozdziale wprowadzimy pojęcie właściwego zbioru 2-dominującego, które osłabia doskonałe 2-dominowanie i odróżnia zbiory 2-dominujące od p-dominujących, $p \geqslant 3$.

Podzbiór $D \subset V(G)$ nazywamy *właściwym zbiorem 2-dominującym* (krótko: $\overline{2}$-DS), jeżeli jest zbiorem 2-dominującym i nie jest zbiorem p-dominującym, $p \geqslant 3$. Innymi słowy, podzbiór $D \subset V(G)$ jest $\overline{2}$-DS, jeżeli istnieje wierzchołek nienależący do zbioru D który ma dokładnie dwóch sąsiadów w zbiorze D. O tym wierzchołku będziemy mówić, że jest *właściwie 2-dominowany*.

Ponieważ zbiór $V(G)$ jest zbiorem p-dominującym, dla $p \geqslant 1$, więc $V(G)$ nie jest właściwym zbiorem 2-dominującym.

Z definicji zbioru p-dominującego wynika następujący lemat, który będzie wykorzystany w dalszych rozważaniach.

Lemat 5.2. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Dla dowolnego grafu G każdy liść należy do każdego właściwego zbioru 2-dominującego.*

Moc najmniejszego $\overline{2}$-DS nazywamy *liczbą właściwego 2-dominowania* i oznaczamy symbolem $\gamma_{\overline{2}}(G)$.

Zbiór $D \subseteq V(G)$ nazywamy γ_2-zbiorem, jeżeli jest zbiorem 2-dominującym grafu G oraz ma najmniejszą liczność spośród wszystkich zbiorów 2-dominujących grafu G. Analogicznie, zbiór $D \subset V(G)$ nazywamy $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem, jeżeli jest $\overline{2}$-DS grafu G oraz ma najmniejszą liczność spośród wszystkich $\overline{2}$-DS grafu G.

Ponieważ każdy $\overline{2}$-DS jest zbiorem 2-dominującym, więc dla dowolnego grafu G, zachodzi nierówność:

$$\gamma_{\overline{2}}(G) \geqslant \gamma_2(G). \tag{5.1}$$

5.2 Charakteryzacja grafów mających właściwy zbiór 2-dominujący

Nie każdy graf ma $\overline{2}$-DS. Jako przykład rozważmy gwiazdę $K_{1,n-1}$, $n \geqslant 4$, w której nie istnieje $\overline{2}$-DS.W tym podrozdziale przedstawimy pełną charakteryzację grafów mających właściwe zbiory 2-dominujące.

Poniższe twierdzenie podaje warunek konieczny i wystarczający na istnienie $\overline{2}$-DS w grafie G.

Twierdzenie 5.3. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Graf spójny, n-wierzchołkowy G, $n \geqslant 3$, ma $\overline{2}$-DS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wierzchołek v taki że $d_G(v) \geqslant 2$ i $|N_G(v) \cap L(G)| \leqslant 2$.*

Dowód. Niech D będzie $\overline{2}$-DS grafu G. Załóżmy nie wprost, że każdy wierzchołek $x \in V(G)$ jest liściem lub $|N_G(x) \cap L(G)| \geqslant 3$. To oznacza, że $x \in L(G) \cup S(G)$. Jeżeli $x \in L(G)$, to z definicji $\overline{2}$-DS wiemy, że $x \in D$. Jeżeli $x \in S(G)$, to $|N_G(x) \cap D| \geqslant 3$. Zatem nie istnieje wierzchołek w zbiorze $V(G) \setminus D$ który ma dwóch sąsiadów w zbiorze D, sprzeczność z założeniem, że D jest $\overline{2}$-DS.

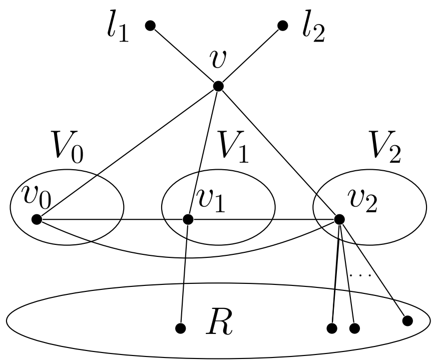
Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że istnieje $v \in V(G)$ taki, że $d_G(v) \geqslant 2$ i $|N_G(v) \cap L(G)| \leqslant 2$. Pokażemy, że G ma $\overline{2}$-DS.
Niech $R = V(G) \setminus N_G[v]$ oraz $N_G(v) = L(v) \cup V_0 \cup V_1 \cup V_2$, gdzie

(*i*) $V_0 \subseteq V(G)$ taki, że dla każdego $v_0 \in V_0$ zachodzi $N_G(v_0) \cap R = \emptyset$,

(*ii*) $V_1 \subseteq V(G)$ taki, że dla każdego $v_1 \in V_1$ zachodzi $|N_G(v_1) \cap R| = 1$,

(*iii*) $V_2 \subseteq V(G)$ taki, że dla każdego $v_2 \in V_2$ zachodzi $|N_G(v_2) \cap R| \geqslant 2$.

Rysunek 5.1 przedstawia graf G z wyszczególnieniem zbiorów V_0, V_1, V_2 i R w grafie G, dla $|L(v)| = 2$.



Rysunek 5.1: Zbiory V_0, V_1, V_2, R w grafie G, dla $L(v) = \{l_1, l_2\}$.

Rozważmy następujące przypadki.

1. Załóżmy, że $v \in S_s(G)$ oraz $N_G(v) \cap L(G) = \{l_1, l_2\}$ i przeanalizujemy wszystkie możliwości.

(a) $V_0 \neq \emptyset$.

Załóżmy, że v_0 jest wierzchołkiem o najmniejszym stopniu w zbiorze V_0. Każdy wierzchołek z V_0 ma stopień co najmniej dwa, w przeciwnym razie V_0 zawierałby wierzchołek będący liściem, co jest sprzeczne z założeniem, że v sąsiaduje dokładnie z dwoma liśćmi. Wtedy zbiór $(V(G) \setminus N_G[v_0]) \cup \{v, v_0'\}$ gdzie $v_0' \in N_G(v_0) \setminus \{v\}$ jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v_0 jest właściwie 2-dominowany. Dla dowolnego $v_0'' \in N_G(v_0)$ takiego, że $v_0'' \neq v_0'$ oraz $v_0'' \in V_1$ lub $v_0'' \in V_2$ warunek 2-dominowania jest zapewniony przez v i co najmniej jeden wierzchołek ze zbioru R. Jeżeli $v_0'' \in V_0$, to z założenia że v_0 ma najmniejszy stopień w V_0 wynika, że $d_G(v_0'') \geqslant d_G(v_0)$. Jeżeli $N_G(v_0) = N_G(v_0'')$, to v_0'' jest właściwie 2-dominowany przez v i v_0'. Jeżeli $N_G(v_0) \neq N_G(v_0'')$, to istnieje $v_0''' \in N_G(v_0'')$ taki, że $v_0''' \notin N_G(v_0)$, czyli v_0'' jest 2-dominowany przez v i v_0'''.

(b) $V_0 = \emptyset$ i $V_1 \neq \emptyset$.

Wtedy zbiór $R \cup \{v, l_1, l_2\}$ jest $\overline{2}$-DS i każdy wierzchołek ze zbioru V_1 jest właściwie 2-dominowany.

(c) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 \neq \emptyset$.

Wtedy zbiór $R \cup \{l_1, l_2\}$ jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v jest właściwie 2-dominowany.

(d) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 = \emptyset$.

Wtedy $R = \emptyset$ czyli $G = P_3$, co oznacza, że zbiór $L(P_3)$ jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v jest właściwie 2-dominowany przez $L(P_3)$.

2. Niech $v \in S_w(G)$ oraz $N_G(v) \cap L(G) = \{l_1\}$.

(a) $V_0 \neq \emptyset$.
Analogicznie jak w przypadku 1(a), niech v_0 będzie wierzchołkiem o najmniejszym stopniu w zbiorze V_0. Każdy wierzchołek z V_0 ma stopień co najmniej dwa. W przeciwnym razie, otrzymalibyśmy sprzeczność z założeniem, że wierzchołek v sąsiaduje z dokładnie jednym liściem. Wtedy analogicznie jak w przypadku 1(a), zbiór $(V(G) \setminus N_G(v_0)) \cup \{v, v_0'\}$, gdzie $v_0' \in N_G(v_0) \setminus \{v\}$, jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v_0 jest właściwie 2-dominowany. W taki sam sposób jak w przypadku 1(a) możemy pokazać, że każdy $v_0'' \in N_G(v_0)$ jest 2-dominowany.

(b) $V_0 = \emptyset$ i $V_1 \neq \emptyset$.
Wtedy, zbiór $R \cup \{l_1, v\}$ jest $\overline{2}$-DS i każdy wierzchołek ze zbioru V_1 jest właściwie 2-dominowany.

(c) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 \neq \emptyset$.
Niech $v' \in N_G(v) \cap V_2$. Wtedy zbiór $R \cup \{l_1, v'\}$ jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v jest właściwie 2-dominowany.

(d) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 = \emptyset$.
Przypadek (d) nie zachodzi, ponieważ $d_G(v) = 1$, sprzeczność z założeniem, że $n \geqslant 3$.

3. Załóżmy, że $v \notin (L(G) \cup S(G))$. Rozważmy następujące przypadki.

(a) $V_0 \neq \emptyset$.
Analogicznie jak w przypadku 1(a), niech v_0 będzie wierzchołkiem o najmniejszym stopniu w zbiorze V_0. Zauważmy, że każdy wierzchołek ze zbioru V_0 ma stopień co najmniej dwa w G. W przeciwnym razie otrzymujemy sprzeczność z założeniem, że v nie jest wierzchołkiem podtrzymującym. Wtedy analogicznie jak w przypadku 1(a), zbiór $(V(G) \setminus N_G(v_0)) \cup \{v, v_0'\}$, gdzie $v_0' \in N_G(v_0) \setminus \{v\}$, jest $\overline{2}$-DS i wierzchołek v_0 jest właściwie 2-dominowany oraz każdy $v_0'' \in N_G(v_0)$ jest 2-dominowany.

(b) $V_0 = \emptyset$ i $V_1 \neq \emptyset$.
Wtedy zbiór $R \cup \{v\}$ jest $\overline{2}$-DS i każdy wierzchołek z V_1 jest właściwie 2-dominowany.

(c) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 \neq \emptyset$.
Wtedy zbiór $R \cup \{x, y\}$ jest $\overline{2}$-DS, gdzie wierzchołki $\{x, y\} \in V_2$. Istnienie co najmniej dwóch wierzchołków w zbiorze V_2 jest zapewnione przez założenie, że v nie jest ani liściem, ani wierzchołkiem podtrzymującym. Wtedy wierzchołek v jest właściwie 2-dominowany.

(d) $V_0 = \emptyset$, $V_1 = \emptyset$ i $V_2 = \emptyset$.
Przypadek (d) nie zachodzi, ponieważ $d_G(v) = 0$, sprzeczność ze spójnością grafu G i z założeniem, że $n \geqslant 3$.

□

Z powyższych twierdzeń wynikają następujące wnioski.

Wniosek 5.4. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Jeżeli graf G ma $\overline{2}$-DS, to G nie można przedstawić w postaci uogólnionej korony pewnego grafu H i rodziny grafów N_{p_i} postaci $H \circ N_{p_i}$, gdzie $p_i \geqslant 3$, $i \in \{1, 2, \ldots, |V(H)|\}$.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje graf H taki, że $G = H \circ N_{p_i}$ gdzie $p_i \geqslant 3$ dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, |V(H)|\}$ i niech $D \subset V(G)$ będzie $\overline{2}$-DS grafu G. Z definicji $\overline{2}$-DS wiemy, że wszystkie liście grafu G muszą należeć do zbioru D. Z definicji uogólnionej korony $H \circ N_{p_i}$ wynika, że każdy wierzchołek $h \in V(G) \setminus L(G)$ ma co najmniej 3 sąsiadów w zbiorze D, ponieważ $p_i \geqslant 3$, czyli nie istnieje wierzchołek właściwie 2-dominowany, co jest sprzeczne z założeniem, że D jest $\overline{2}$-DS. □

Wniosek 5.5. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *W grafie G nie istnieje $\overline{2}$-DS wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek grafu jest liściem lub jest wierzchołkiem podtrzymującym mającym co najmniej trzy sąsiednie liście.*

Wniosek 5.6. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Jeżeli $L(G) = \emptyset$, to G ma $\overline{2}$-DS.*

Wniosek 5.7. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Jeżeli w grafie G istnieje wierzchołek v taki, że $d_G(v) = 2$, to G ma $\overline{2}$-DS.*

Wykorzystując otrzymane rezultaty możemy podać warunki wystarczające na istnienie $\overline{2}$-DS w znanych produktach grafowych. Skorzystamy ze znanych zależności dotyczących minimalnego stopnia w produktach grafowych.

Niech G i H będą spójnymi n-wierzchołkowymi grafami, $n \geqslant 2$. Wtedy

1. $\delta(G \,\Box\, H) = \delta(G) + \delta(H)$,
2. $\delta(G \boxtimes H) \geqslant 2$,
3. $\delta(G \times H) = \delta(G) \cdot \delta(H)$ dla $n \geqslant 3$ i $\delta(H) \geqslant 2$.

Z powyższych zależności wynika, że w rozważanych produktach nie ma liści, zatem z wniosku 5.6 otrzymujemy

Twierdzenie 5.8. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli G i H są spójnymi n-wierzchołkowymi grafami, to grafy $G \,\Box\, H$ i $G \boxtimes H$ mają $\overline{2}$-DS.*

Twierdzenie 5.9. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech $n \geqslant 3$ będzie liczbą naturalną. Jeżeli G i H są spójnymi n-wierzchołkowymi grafami, $L(H) = \emptyset$, to $G \times H$ ma $\overline{2}$-DS.*

5.3 Parametry właściwego 2-dominowania

W tym podrozdziale pokażemy zależności pomiędzy parametrami dominowania $\gamma_{\overline{2}}(G)$ i $\gamma_2(G), \gamma_3(G)$.

Dla szczególnych klas grafów parametr $\gamma_{\overline{2}}(G)$ można wyznaczyć dokładnie.

Wniosek 5.10. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech n, m będą liczbami naturalnymi. Wtedy*

(i) $\gamma_{\overline{2}}(K_n) = \gamma_2(K_n) = 2$ *dla* $n \geqslant 3$,

(ii) $\gamma_{\overline{2}}(C_n) = \gamma_2(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ *dla* $n \geqslant 3$,

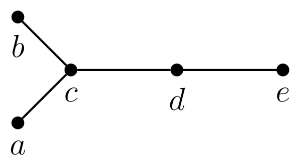
(iii) $\gamma_{\overline{2}}(P_n) = \gamma_2(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ *dla* $n \geqslant 3$,

(iv) $\gamma_{\overline{2}}(K_{n,m}) = \gamma_2(K_{n,m}) = \begin{cases} 2 & \textit{dla } n = 2 \textit{ i } n \leqslant m \\ 4 & \textit{dla } n \geqslant 3 \textit{ i } n \leqslant m \end{cases}$.

Twierdzenie 5.11. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech G będzie grafem spójnym mającym $\overline{2}$-DS. Jeżeli $\gamma_2(G) < \gamma_3(G)$, to $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$.*

Dowód. Jeżeli $\gamma_2(G) < \gamma_3(G)$, to każdy γ_2-zbiór grafu G nie jest γ_3-zbiorem. Innymi słowy, istnieje wierzchołek w γ_2-zbiorze który nie jest 3-dominowany. Zatem każdy γ_2-zbiór jest również $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem. W konsekwencji otrzymujemy, że $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$, co kończy dowód. □

Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Z równości $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$ nie musi wynikać nierówność $\gamma_2(G) < \gamma_3(G)$. Jako przykład rozważmy drzewo T przedstawione na Rysunku 5.2. Wtedy $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T)$ ponieważ $V_1 = \{a, b, c, e\}$ jest jednocześnie $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem i γ_2-zbiorem. Ponadto najmniejszym zbiorem 3-dominującym drzewa T jest $V_2 = \{a, b, d, e\}$, zatem $\gamma_2(T) = \gamma_3(T)$.



Rysunek 5.2: Drzewo T.

Kolejne twierdzenie podaje zależność pomiędzy parametrami dominowania $\gamma_{\overline{2}}(G)$ i $\gamma_2(G)$.

Twierdzenie 5.12. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech G będzie spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 4$, mającym $\overline{2}$-DS i niech $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$. Jeżeli w grafie G istnieje γ_2-zbiór, który nie jest niezależny, to $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$.*

Dowód. Załóżmy, że G jest grafem mającym $\overline{2}$-DS takim, że $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$. Niech D będzie γ_2-zbiorem który nie jest niezależny. Jeżeli istnieje wierzchołek $v \in V(G) \setminus D$ który jest właściwie 2-dominowany, to D jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem. Załóżmy, że D nie jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem. To oznacza, że każdy wierzchołek $v \in V(G) \setminus D$ jest 3-dominowany. Ponieważ D nie jest zbiorem niezależnym to istnieją dwa sąsiednie wierzchołki $x, y \in D$. Niech $z \in (N_G(x) \cup N_G(y)) \setminus \{x, y\}$. Ponieważ G ma co najmniej cztery wierzchołki i G jest spójny, więc zawsze istnieje wierzchołek z. To oznacza, że zachodzi co najmniej jedna możliwość: $xz \in E(G)$ lub $yz \in E(G)$ lub $xz, yz \in E(G)$. Bez straty ogólności załóżmy, że $xz \in E(G)$. Pokażemy, że $z \notin D$. Jeżeli $z \in D$, to zbiór $D \setminus \{x\}$ również byłby 2-dominujący, ponieważ D jest 3-dominujący, co przeczyłoby założeniu, że D jest γ_2-zbiorem. Zatem $N_G(x) \cap D = \{y\}$. Stąd $(N_G(x) \setminus \{y\}) \cap D = \emptyset$. Ponieważ D jest zbiorem 3-dominującym to każdy wierzchołek $z' \in N_G(x) \setminus D$ jest 3-dominowany. Rozważmy zbiór $D_1 = D \setminus \{x\} \cup \{z\}$. Wtedy wierzchołek x ma dokładnie dwóch sąsiadów y oraz z w zbiorze D_1, a każdy wierzchołek $z' \in N_G(x) \setminus D_1$ jest dominowany przez co najmniej dwa wierzchołki ze zbioru D_1. Z tego wynika, że D_1 jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem, co kończy dowód. □

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek 5.13. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech G będzie spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 4$, mającym $\overline{2}$-DS i niech $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$. Jeżeli $\gamma_{\overline{2}}(G) > \gamma_2(G)$, to każdy γ_2-zbiór grafu G jest niezależny.*

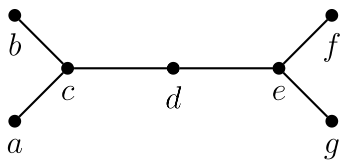
Kolejne twierdzenie podaje zależność pomiędzy liczbą 2-dominowania a liczbą właściwego 2-dominowania.

Twierdzenie 5.14. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Jeżeli G jest spójnym n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 3$, który ma $\overline{2}$-DS, to spełniona jest nierówność*

$$\gamma_2(G) \leqslant \gamma_{\overline{2}}(G) \leqslant \gamma_2(G) + 1.$$

Dowód. Nierówność $\gamma_2(G) \leqslant \gamma_{\overline{2}}(G)$ wynika bezpośrednio z definicji $\overline{2}$-DS ponieważ każdy $\overline{2}$-DS jest zbiorem 2-dominującym. Wykażemy, że $\gamma_{\overline{2}}(G) \leqslant \gamma_2(G) + 1$. Ponieważ każdy zbiór 3-dominujący jest 2-dominujący, więc $\gamma_2(G) \leqslant \gamma_3(G)$. Z twierdzenia 5.11 wynika, że jeżeli $\gamma_2(G) < \gamma_3(G)$, to $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$. Zatem załóżmy, że $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$. Wtedy z wniosku 5.13 otrzymujemy, że jeżeli $\gamma_{\overline{2}}(G) > \gamma_2(G)$, to wszystkie γ_2-zbiory grafu G są niezależne. Niech D będzie dowolnym γ_2-zbiorem. Wtedy istnieje wierzchołek $x \in D$, który nie jest liściem, ponieważ w przeciwnym wypadku jeżeli $D = L(G)$ i ponieważ $L(G)$ jest zawarty w każdym γ_3-zbiorze i $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$, to γ_3-zbiorem byłby zbiór D. Zatem każdy wierzchołek podtrzymujący jest 3-dominowany, co jest sprzeczne z założeniem, że graf G ma $\overline{2}$-DS. Z założenia $\gamma_2(G) = \gamma_3(G)$ wynika, że każdy γ_3-zbiór jest γ_2-zbiorem. Zatem każdy γ_3-zbiór jest niezależny, ponieważ każdy γ_2-zbiór jest niezależny. Jeżeli γ_3-zbiór jest niezależny, to $N_G(x) \cap D = \emptyset$. Ponadto każdy sąsiad wierzchołka x jest dominowany przez co najmniej trzy wierzchołki. Ponieważ x nie jest liściem to ma co najmniej dwóch sąsiadów y i z. Niech $D' = D \setminus \{x\} \cup \{y, z\}$. Wtedy każdy sąsiad wierzchołka x jest dominowany przez co najmniej dwa wierzchołki ze zbioru D'. Ponadto wierzchołek x jest właściwie 2-dominowany przez y i z. Zatem otrzymujemy, że zbiór D' jest $\overline{2}$-DS oraz $|D'| = |D| - 1 + 2$, co kończy dowód. □

Aby zilustrować przykład grafu spełniającego równość $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G) + 1$ rozważmy drzewo T przedstawione na Rysunku 5.3. Wtedy $\gamma_2(T) = \gamma_3(T)$, gdzie γ_2-zbiorem jest $V_1 = \{a, b, d, f, g\}$. Ponadto zbiór $V_2 = \{a, b, c, e, f, g\}$ jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem, stąd $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T) + 1$.



Rysunek 5.3: Drzewo T.

Problem dla jakich grafów $\gamma_2(G) = \gamma_{\overline{2}}(G)$, a dla jakich $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G) + 1$ nie jest rozstrzygnięty w ogólnym przypadku. Możemy to rozstrzygnąć dla drzew.

Dla dowodu wykorzystamy następujące twierdzenia.

Twierdzenie 5.15. (M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron [14]) *Dla drzewa T następujące warunki są równoważne:*

(i) $\gamma_2(T) = \alpha(T)$.

(ii) T ma dokładnie jeden γ_2-zbiór, który jest także jedynym $\alpha(T)$-zbiorem.

Twierdzenie 5.16. (P. Bednarz [7]) *Drzewo T ma $(2-d)$-jądro wtedy i tylko wtedy gdy* $\gamma_2(T) = \alpha(T)$.

Z powyższych twierdzeń wynika, że drzewo T ma niezależny zbiór 2-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy ma dokładnie jeden γ_2-zbiór. Prowadzi to do następującego twierdzenia.

Twierdzenie 5.17. (P. Bednarz, M. Pirga [6]) *Niech T będzie drzewem n-wierzchołkowym, $n \geqslant 3$, które ma $\overline{2}$-DS. Wtedy,*

$$\gamma_{\overline{2}}(T) = \begin{cases} \gamma_2(T) + 1 & \textit{jeżeli } T \textit{ ma } (2-d)\textit{-jądro, które jest } 3\textit{-dominujące,} \\ \gamma_2(T) & \textit{w pozostałych przypadkach} \end{cases}.$$

Dowód. Niech T będzie n-wierzchołkowym drzewem, $n \geqslant 3$, które ma $\overline{2}$-DS. Rozważmy dwa przypadki.

1. W drzewie T istnieje $(2-d)$-jądro.
Niech D będzie $(2-d)$-jądrem w drzewie T. Z twierdzeń 5.15 i 5.16 wynika, że drzewo T ma $(2-d)$-jądro wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jeden γ_2-zbiór D, który jest jednocześnie największym zbiorem niezależnym.
Jeżeli D jest zbiorem 3-dominującym, to istnieje $x \in D$ taki, że $x \notin L(T)$, w przeciwnym wypadku $D = L(T)$. Zatem każdy wierzchołek $y \in V(T) \setminus D$ jest 3-dominowany wyłącznie przez liście, czyli $T = T' \circ N_{p_i}$, $p_i \geqslant 3$, $i \in \{1, 2, \dots, |V(T')|\}$, gdzie T' jest pewnym drzewem, ale z wniosku 5.4 wiemy, że w T nie istnieje $\overline{2}$-DS, sprzeczność z założeniem. To oznacza, że $x \in D$ nie jest liściem i ponieważ D jest zbiorem niezależnym, więc x ma co najmniej dwóch sąsiadów $x_1 \in V(T) \setminus D$ oraz $x_2 \in V(T) \setminus D$. Niech $D' = D \setminus \{x\} \cup \{x_1, x_2\}$. Wtedy każdy sąsiad wierzchołka x jest dominowany przez co najmniej dwa wierzchołki należące do D' oraz wierzchołek x jest właściwie 2-dominowany przez x_1 oraz x_2. Zatem zbiór D' jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem oraz $|D'| = |D| - 1 + 2$. Stąd wynika, że $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T) + 1$. Jeżeli zbiór D nie jest zbiorem 3-dominującym, to istnieje wierzchołek nienależący do D, który jest właściwie 2-dominowany. Wtedy zbiór D jest $\gamma_{\overline{2}}$-zbiorem. Zatem $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T)$.

2. W drzewie T nie istnieje $(2-d)$-jądro.
Jeżeli $\gamma_2(T) < \gamma_3(T)$, to z twierdzenia 5.11 wynika, że $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T)$. Niech $\gamma_2(T) = \gamma_3(T)$. Z założenia każdy zbiór 2-dominujący nie jest zbiorem niezależnym, w szczególności każdy γ_2-zbiór w drzewie T nie jest niezależny. Wtedy z twierdzenia 5.12 otrzymujemy, że $\gamma_{\overline{2}}(T) = \gamma_2(T)$, co kończy dowód. □

Wprowadzone w artykule [6] pojęcie właściwych zbiorów 2-dominujących spotkało się z dalszym zainteresowaniem. W 2024 roku M. Chellali i in. w [19] odwołując się do pracy [6], badali parametry właściwego dominowania w grafach. Następnie w 2025 roku D. Chen i S. Cai w [21], nawiązując do artykułu [6] oraz definicji właściwych zbiorów 2-dominujących, wprowadzili właściwe zbiory 3-dominujące wraz z odpowiadającymi im parametrami, co świadczy o aktualności rozważanych problemów.

Podsumowanie i dalsze kierunki badań

W niniejszej rozprawie zostały przedstawione wyniki dotyczące zbiorów niezależnych oraz zbiorów dominujących zawierających zbiór liści ze szczególnym uwzględnieniem problemów zliczania zbiorów niezależnych w wybranych klasach grafów oraz ich związków z ciągami Padovana.

W nawiązaniu do istniejących w literaturze rezultatów dotyczących liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści został oszacowany parametr $\sigma_L(G)$ w szczególnej podklasie $(n, n+1)$-grafów zawierających podgraf indukowany $C_{k,l}$, gdzie $k \geqslant 3$ oraz $l \geqslant 3$. Oprócz wyznaczenia najmniejszej oraz największej wartości parametru $\sigma_L(G)$ w rozważanej klasie grafów oraz scharakteryzowania grafów ekstremalnych, otrzymanie wyników wymagało opisania przekształceń grafu, które zachowują liczbę wierzchołków i nie zmniejszają wartości parametru $\sigma_L(G)$. Badania związane z parametrem $\sigma_L(G)$ w $(n, n+1)$-grafach mogą być kontynuowane, w szczególności w grafach z małą liczbą cykli, w tym w klasie $(n, n+1)$-grafów mających dwa rozłączne cykle.

W kolejnej części rozprawy zostały zbadane związki pomiędzy liczbą niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących w ścieżkach i cyklach, a liczbami Padovana i Perrina, co pozwoliło na otrzymanie nowych wzorów dwumianowych dla tych liczb. Zdefiniowany został wielomian Padovana grafu, przy wykorzystaniu interpretacji grafowej liczb Padovana. Poprzez zliczanie w ścieżkach maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści, które są uogólnieniem zbiorów niezależnych w sensie odległości, pokazane zostały zależności pomiędzy ich liczbą a uogólnionymi liczbami Padovana. Uzyskane interpretacje umożliwiły wyprowadzenie wzorów dwumianowych dla uogólnionych liczb Padovana oraz zdefiniowanie uogólnionych wielomianów Padovana grafu z wykorzystaniem operacji G-złączenia grafów. Badania związane z wielomianami Padovana mogą być kontynuowane w szczególności w odniesieniu do ich własności. Zliczanie niezależnych zbiorów $(1, 2)$-dominujących oraz maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w innych klasach grafów niż ścieżki i cykle może doprowadzić do uogólnień innych liczb typu Fibonacciego.

W dalszej części rozprawy dotyczącej zbiorów 2-dominujących, została wprowadzona definicja właściwych zbiorów 2-dominujących, czyli zbiorów 2-dominujących, które nie są zbiorami p-dominującymi dla $p \geqslant 3$. Podana została pełna charakteryzacja grafów posiadających właściwy zbiór 2-dominujący oraz określone zostały zależności pomiędzy parametrami właściwego 2-dominowania a parametrami 2-dominowania i 3-dominowania. Wykazany został związek pomiędzy liczbą właściwego 2-dominowania, a istnieniem niezależnych zbiorów 2-dominujących. Badania dotyczące właściwych zbiorów dominujących mogą być kontynuowane w szczególności w odniesieniu do parametrów właściwego 2-dominowania. Twierdzenie 5.14 podaje zależność pomiędzy liczbą właściwego dominowania, a liczbą dominowania, mianowicie

$$\gamma_2(G) \leqslant \gamma_{\overline{2}}(G) \leqslant \gamma_2(G) + 1,$$

przy założeniu, że graf G ma $\overline{2}$-DS. Nadal pozostaje otwartym pytanie dla jakich grafów $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G)$, a dla jakich $\gamma_{\overline{2}}(G) = \gamma_2(G) + 1$. W rozprawie zostało to rozstrzygnięte dla drzew. O ile rozwiązanie tego problemu może w ogólnym przypadku okazać się trudne, to wato kontynuować badania w grafach z małą liczbą cykli.

Należy zauważyć, że pojęcie właściwych zbiorów 2-dominujących zostało przeniesione na zbiory 3-dominujące. W 2025 roku D. Chen i S. Cai w [21] wprowadzili analogiczną definicję właściwych zbiorów 3-dominujących. Badając parametry właściwego 3-dominowania wykazali zależność pomiędzy liczbą właściwego 3-dominowania, a liczbą dominowania.

Twierdzenie 6.1. (D. Chen, S. Cai [21]) *Niech G będzie spójnym, n-wierzchołkowym grafem, $n \geqslant 4$. Jeżeli G ma właściwy zbiór 3-dominujący, to $\gamma_3(G) \leqslant \gamma_{\overline{3}}(G) \leqslant \gamma_3(G)+2$.*

Analogicznie jak w przypadku 2-dominowania pytanie o charakteryzację grafów dla których $\gamma_{\overline{3}}(G) = \gamma_3(G)$, a dla których $\gamma_{\overline{3}}(G) = \gamma_3(G) + 2$ jest otwarte.
Pojęcie właściwego zbioru 2-dominującego należy rozszerzyć na zbiór p-dominujący i uzyskanie ogólnych zależności będzie przedmiotem dalszych badań.

W rozprawie były rozważane niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące, które z definicji zawierają zbiór liści. Szczególnym przypadkiem zbiorów $(1, 2)$-dominujących, są wprowadzone przez A. Michalskiego właściwe zbiory $(1, 2)$-dominujące. Podzbiór $D \subset V(G)$ nazywamy właściwym zbiorem $(1, 2)$-dominującym, jeżeli jest $(1, 2)$-dominujący i nie jest $(1, 1)$-dominujący, tzn. istnieje wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ mający dokładnie jednego sąsiada w D oraz wierzchołek $u \in D$ taki, że $d_G(x, u) = 2$.

Kontynuacją tych rozważań było wprowadzenie w [10] doskonałych zbiorów $(1, 2)$-dominujących jako szczególny przypadek właściwych zbiorów $(1, 2)$-dominujących. Podzbiór $D \subset V(G)$ nazywamy *doskonałym zbiorem* $(1, 2)$-*dominującym* grafu G, (krótko:

$(1,2)$-PDS), jeżeli każdy wierzchołek $x \in V(G) \setminus D$ ma dokładnie jednego sąsiada w zbiorze D oraz istnieje wierzchołek $u \in D$ taki, że $d_G(x,u) = 2$.

Ponieważ nie każdy graf ma $(1,2)$-PDS, w pierwszej kolejności rozważany był problem istnienia $(1,2)$-PDS w grafach. Podane zostały warunki konieczne i wystarczające na istnienie $(1,2)$-PDS w grafach mających co najwyżej jeden lub dwa wierzchołki o maksymalnym stopniu.

W odróżnieniu od klas grafów badanych w rozprawie, zbiór liści nie musi zawierać się w $(1,2)$-PDS. Jednak istnienie liścia wystarczy, aby graf miał $(1,2)$-PDS.

Twierdzenie 6.2. (U. Bednarz, M. Pirga [10]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem spójnym, $n \geqslant 3$. Jeżeli $L(G) \neq \emptyset$, to graf G ma $(1,2)$-PDS.*

W grafach z dokładnie jednym wierzchołkiem stopnia $n-1$ istnieje $(1,2)$-PDS wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek ten jest wierzchołkiem rozcinającym.

Twierdzenie 6.3. (U. Bednarz, M. Pirga [10]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem spójnym, $n \geqslant 3$, mającym dokładnie jeden wierzchołek o maksymalnym stopniu $\Delta(G) = n-1$. Graf G ma $(1,2)$-PDS wtedy i tylko wtedy, gdy wierzchołek o maksymalnym stopniu jest wierzchołkiem rozcinającym.*

Dowód. Niech $x \in V(G)$ będzie wierzchołkiem rozcinającym grafu G takim, że $d_G(x) = n-1$, $n \geqslant 3$. Wtedy $V(G) \setminus \{x\} = \bigcup_{i=1}^{r} V_i$, gdzie $r \geqslant 2$ oraz dla każdego $i, j \in \{1, \ldots, r\}$, $i \neq j$, zachodzi $V_i \cap V_j = \emptyset$, a każdy podgraf indukowany przez V_i jest spójny. Pokażemy, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, r\}$ zbiór $D_i = V_i \cup \{x\}$ jest $(1,2)$-PDS. Niech $y \in V(G) \setminus D_i$, gdzie $1 \leqslant i \leqslant r$. Ponieważ $d_G(x) = n-1$, to y jest sąsiadem x, a zatem y jest dominowany przez D_i. Ponieważ $V_i \cap V_j = \emptyset$ dla każdego $j \in \{1, \ldots, r\} \setminus \{i\}$ to $d_G(y, V_i) \geqslant 2$. Ponieważ x jest sąsiadem każdego wierzchołka z V_i, więc istnieje ścieżka $y - x - u$, gdzie $u \in V_i$ co oznacza, że $d_G(y, V_i) = 2$. Stąd D_i jest $(1,2)$-PDS.

Dla dowodu w drugą stronę załóżmy, że graf G ma $(1,2)$-PDS oraz x jest jedynym wierzchołkiem o maksymalnym stopniu $\Delta(G) = n-1$. Pokażemy, że x jest wierzchołkiem rozcinającym. Niech D będzie $(1,2)$-PDS grafu G. Wtedy $x \in D$, gdyż w przeciwnym razie istniałyby co najmniej dwa wierzchołki $u, v \in D$ sąsiadujące z x, więc x byłby $(1,1)$-dominowany, sprzeczność, że D jest $(1,2)$-PDS. Oczywiście $V(G) \setminus D \neq \emptyset$ ponieważ zbiór $V(G)$ nie jest $(1,2)$-PDS. Niech $y \in V(G) \setminus D$. Wtedy y jest sąsiadem dokładnie jednego wierzchołka ze zbioru D, gdyż w przeciwnym razie y byłby $(1,1)$-dominowany, co przeczyłoby doskonałości $(1,2)$-PDS. Z założenia x jest jedynym wierzchołkiem o maksymalnym stopniu $\Delta(G) = n-1$, zatem $N_G(y) \cap D = \{x\}$. W konsekwencji, dla każdego $y \in V(G) \setminus D$ oraz $u \in D \setminus \{x\}$ wierzchołki u i y nie są sąsiadami. Zatem graf indukowany przez $V(G) \setminus \{x\}$ zawiera co najmniej dwie spójne składowe $D \setminus \{x\}$

oraz $V(G) \setminus D$. To dowodzi, że x jest wierzchołkiem rozcinającym grafu G, co kończy dowód. $\square$

Prowadzone były dalsze badania dotyczące istnienia $(1, 2)$-PDS w zależności od liczby wierzchołków o maksymalnym stopniu. Poniżej przedstawione są początkowe rezultaty. Dalsze badania są prowadzone, a uzyskane wyniki zawarte w [9, 11]. Badania dotyczące $(1, 2)$-PDS powinny być nadal kontynuowane także z dodatkowym warunkiem niezależności.

Twierdzenie 6.4. (U. Bednarz, M. Pirga [10]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem spójnym, $n \geqslant 6$, takim że $\delta(G) \geqslant 2$, mającym dokładnie jeden wierzchołek o maksymalnym stopniu, $\Delta(G) = n - 2$. Niech $d_G(x) = n - 2$ oraz y jest jedynym wierzchołkiem niebędącym sąsiadem x. Niech $N(x)$ indukuje spójny podgraf. Graf G ma $(1, 2)$-PDS wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wierzchołek $u \in N(x)$ taki, że:*

(i) $N(u) \cap N(y) = \emptyset$ *oraz*

(ii) $N(x) \setminus N(u) = N(y) \cup \{u\}$ *oraz*

(iii) każdy wierzchołek z $N(u) \setminus \{x, y\}$ jest sąsiadem pewnego wierzchołka z $N(y)$.

Twierdzenie 6.5. (U. Bednarz, M. Pirga [10]) *Niech G będzie n-wierzchołkowym grafem spójnym, $n \geqslant 5$ takim że $\delta(G) \geqslant 2$, mającym dokładnie dwa wierzchołki o maksymalnym stopniu, $\Delta(G) = n - 2$, oraz $d_G(x) = d_G(y) = n - 2$, przy czym x, y nie są sąsiednie. Graf G ma doskonały zbiór $(1, 2)$-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy w G istnieje wierzchołek stopnia 2.*

W trakcie dalszych badań naukowych z pewnością pojawią się nowe problemy. W szczególności badania mogą dotyczyć zliczania zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w grafach o ustalonej liczbie liści oraz analizy właściwych zbiorów $(1, 3)$-dominujących z dodatkowym warunkiem niezależności. P. Bednarz i N. Paja [3], już zdefiniowali właściwe zbiory $(1, 3)$-dominujące i podali pełną charakteryzacje grafów posiadających właściwy zbiór $(1, 3)$-dominujący. Tematyka przedstawiona w pracy może być nadal rozwijana, a postawione problemy stanowią naturalny kierunek dalszych badań naukowych.

Bibliografia

[1] W. W. R. Ball, *Mathematical recreations and problems of past and present times*, Macmillan and Company, (1892).

[2] D. W. Bange, A. E. Barkauskas, P. J. Slater, *Efficient dominating sets in graphs*, Applications of Discrete Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, (1988), 189–199.

[3] P. Bednarz, N. Paja, *On proper* $(1,3)$*-dominating sets in graphs*, w recenzji.

[4] P. Bednarz, A. Michalski, N. Paja, *On the existence of independent* $(1,k)$*-dominating sets for* $k \in \{1,2\}$ *in two products of graphs*, Opuscula Mathematica, 46, w druku.

[5] P. Bednarz, A. Michalski, *On Independent Secondary Dominating Sets in Generalized Graph Products*, Symmetry, 13(12) (2021) 2399.

[6] P. Bednarz, M. Pirga, *On Proper 2-Dominating Sets in Graphs*, Symmetry, 16(3) (2024) 296.

[7] P. Bednarz, *Relations between the existence of a (2-d)-kernel and parameters* $\gamma_2(G), \alpha(G)$, Indian Journal of Mathematics, 64 (2022) 93–107.

[8] U. Bednarz, A. Włoch, I. Włoch, M. Wołowiec-Musiał, *Distance Fibonacci Sequences*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów, (2025).

[9] U. Bednarz, *On the Existence of Perfect* $(1,2)$*-Dominating Sets in Graphs*, Symmetry, 17(3) (2025) 405.

[10] U. Bednarz, M. Pirga, *(1,2)-PDS in graphs with the small number of vertices of large degrees*, Opuscula Mathematica, 45(1) (2025) 53–62.

[11] U. Bednarz, J. Kratochvíl, A. Michalski, *Complexity of Perfect (1, 2)-Dominating Sets in Low-Degree Graphs*, In E. Di Giacomo, D. Mondal, editors, *WALCOM: Algorithms and Computation*, 203–214. Springer Nature Singapore, Singapore, (2026).

[12] C. Berge, *The theory of graphs and its applications*, New York: Wiley, (1962).

[13] N. L. Biggs, *Perfect codes in graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, 15(3) (1973) 289–296.

[14] M. Blidia, M. Chellali, O. Favaron, *Independence and 2-domination in trees*, Australasian Journal of Combinatorics, 33 (2005) 317–327.

[15] M. Borowiecki, A. Fiedorowicz, E. Sidorowicz, Z. Tuza, *Independent* $(k+1)$-*domination in* k-*trees*, Discrete Applied Mathematics, 284 (2020) 99–110.

[16] D. Bród, Z. Skupień, *Recurrence among trees with most numerous efficient dominating sets*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, 10(1) (2008) 43–56.

[17] B. Chaluvaraju, M. Chellali, K. A. Vidya, *Perfect* k-*domination in graphs*, Australasian Journal of Combinatorics, 48 (2010) 175–184.

[18] G. J. Chang, M. J. Jou, *Maximal independent sets in graphs with at most one cycle*, Discrete Applied Mathematics, 79(1) (1997) 67–73.

[19] M. Chellali, L. Volkmann, *Disproof of two conjectures on proper 2-dominating sets in graphs*, Communications in Combinatorics and Optimization, 1–3.

[20] M. Chellali, L. Volkmann, *Characterization of trees with equal 2-domination number and domination number plus two*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 31(4) (2011) 687–697.

[21] D. Chen, S. Cai, *Proper 3-Dominating Sets in Graphs*, Mathematics, 13(12) (2025) 1960.

[22] E. J. Cockayne, B. L. Hartnell, S. T. Hedetniemi, R. Laskar, *Perfect domination in graphs*, Journal of Combinatorial Information and System Sciences, 18 (1993) 136–148.

[23] C. F. de Jaenisch, *Traite des applications de l'analyse mathematique au jeu des echecs*, St. Petersbourg Academie Imperiale des Sciences, (1862).

[24] M. Dettlaff, M. Lemańska, A. Michalski, I. Włoch, *On proper* $(1,2)$-*dominating sets in graphs*, Mathematical Models in the Applied Sciences, 45(11) (2022) 7050–7057.

[25] R. Diestel, *Graph Theory. 5th Electronic Edition*, (2016).

[26] J. F. Fink, M. S. Jacobson, *n-Domination in graphs*, In *Graph theory with applications to algorithms and computer science*, 283–300. John Wiley & Sons, Inc., (1985).

[27] H. Galeana-Sánchez, C. Hernández-Cruz, *On the existence of (k, l)-kernels in digraphs with a given circumference*, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 10(1) (2013) 15–28.

[28] I. Gutman, S. Wagner, *Maxima and minima of the Hosoya Index and the Merrifield-Simmons Index*, Acta Applicandae Mathematicae, 112 (2010) 323–346.

[29] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, M. A. Henning, *Topics in Domination in Graphs*, Springer International Publishing, Cham, (2020).

[30] S. M. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, J. Knisely, D. F. Rall, *Secondary domination in graphs*, AKCE Int. J. Graphs Comb, 5(2) (2008) 117–125.

[31] C. Hernández-Cruz, *A Contribution to the Theory of (k, l)-kernels in Digraphs*, PhD Dissertation, Universidad Nacional Autónoma de México, (2011).

[32] G. Hopkins, W. Staton, *Some identities arising from the Fibonacci numbers of certain graphs*, Fibonacci Quarterly, 22(3) (1984) 255–258.

[33] Z. Jin, X. Liang, P. Zhu, *Maximal Independent Sets without Including any Leaves in Trees*, International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, 6(24) (2011) 1159–1165.

[34] K. Kayathri, S. Vallirani, *(1, 2)-Domination in Graphs*, In *Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics*, 128–133. Springer International Publishing, Cham, (2017).

[35] A. Kosiorowska, A. Michalski, I. Włoch, *On minimum intersections of certain secondary dominating sets in graphs*, Opuscula Mathematica, 43 (2023) 813–827.

[36] M. Kucharska, *On (k, l)-kernel perfectness of special classes of digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 25(1-2) (2005) 103–119.

[37] M. Kwaśnik, I. Włoch, *The total number of generalized stable sets and kernels of graphs*, Ars Combinatoria, 55 (2000) 139–146.

[38] M. Kwaśnik, *On (k, l)-kernels on graphs and their products*, PhD Dissertation, Technical University of Wrocław, (1980).

[39] D. Malyshev, D. Taletskii, *The number of maximal independent sets in trees with a given number of leaves*, Discrete Applied Mathematics, 314 (2022) 321–330.

[40] A. Meir, J. W. Moon, *Relations between packing and covering numbers of a tree*, Pacific Journal of Mathematics, 61(1) (1975) 225–233.

[41] R. E. Merrifield, H. E. Simmons, *Topological methods in chemistry*, Jonh Wiley & Sons, New York, (1989).

[42] A. Michalski, *Zbiory* $(1,2)$*-dominujące w grafach*, Rozprawa doktorska, Politechnika Rzeszowska, Rzeszów, 2024.

[43] A. Michalski, I. Włoch, *On the existence and the number of independent* $(1,2)$*-dominating sets in the G-join of graphs*, Applied Mathematics and Computation, 377 (2020) 125155.

[44] J. W. Moon, L. Moser, *On cliques in graphs*, Israel Journal of Mathematics, 3(1) (1965) 23–28.

[45] Z. L. Nagy, *Generalizing Erdős, Moon and Moser's result—The number of k-dominating independent sets*, Electronic Notes in Discrete Mathematics, 61 (2017) 909–915.

[46] Z. L. Nagy, *On the Number of k-Dominating Independent Sets*, Journal of Graph Theory, 84(4) (2017) 566–580.

[47] O. Ore, *Theory of Graphs*, Am. Math. Soc. Transl., 38 (1962) 206–212.

[48] C. Palmer, B. Patkós, *On the number of maximal independent sets: From Moon–Moser to Hujter–Tuza*, Journal of Graph Theory, 104(2) (2023) 440–445.

[49] A. S. Pedersen, P. D. Vestergaard, *The number of independent sets in unicyclic graphs*, Discrete Applied Mathematics, 152(1-3) (2005) 246–256.

[50] M. Pirga, *Independent and Dominating Sets Containing the Set of Leaves in Special Classes of Graphs*, manuskrypt.

[51] M. Pirga, I. Włoch, *Some Properties of the generalized Padovan sequence arising from the graph interpreatation*, 2026+.

[52] M. Pirga, A. Włoch, I. Włoch, *Some New Graph Interpretations of Padovan Numbers*, Symmetry, 16(11) (2024) 1493.

[53] M. Pirga, M. Startek, I. Włoch, *Counting of independent sets including the set of leaves in graphs with two elementary cycles*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, 26(4) (2025) 347–357.

[54] H. Prodinger, R. F. Tichy, *Fibonacci numbers of graphs*, Fibonacci Quarterly, 20(1) (1982) 16–21.

[55] J. Raczek, *Complexity Issues on of Secondary Domination Number*, Algorithmica.

[56] J. Raczek, *Polynomial Algorithm for Minimal* $(1, 2)$*-Dominating Set in Networks*, Electronics, 11(3) (2022) 300.

[57] B. E. Sagan, *A note on independent sets in trees*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, 1(1) (1988) 105–108.

[58] Z. Skupień, *Sums of powered characteristic roots count distance-independent circular sets*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 33 (2013) 217–229.

[59] A. P. Stakhov, *A generalization of the Fibonacci Q-matrix*, Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine, (9) (1999) 46–49.

[60] M. Startek, A. Włoch, I. Włoch, *Fibonacci numbers and Lucas numbers in graphs*, Discrete Applied Mathematics, 157 (2009) 864–868.

[61] W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch, *On (k, l)-kernels in D-join of digraphs*, Discussiones Mathematicae Graph Theory, 27(3) (2007) 457–470.

[62] W. Szumny, A. Włoch, I. Włoch, *On the existence and on the number of (k, l)-kernels in the lexicographic product of graphs*, Discrete Mathematics, 308(20) (2008) 4616–4624.

[63] A. Szynal-Liana, A. Włoch, I. Włoch, *On generalized Pell numbers generated by Fibonacci and Lucas numbers*, Ars Combinatoria, 115 (2014) 411–423.

[64] Y. Tian, J. Tu, *The minimum number of maximal independent sets in graphs with given order and independence number*, Discrete Applied Mathematics, 368 (2025) 52–65.

[65] J. Topp, *Domination, independence and irredundance in graphs*, Dissertationes Math., Warszawa, (1995).

[66] L. Volkmann, *Some remarks on lower bounds on the p-domination number in trees*, Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 61 (2007) 159–167.

[67] H. S. Wilf, *The number of maximal independent sets in a tree*, SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods, 7(1) (1986) 125–130.

[68] A. Włoch, I. Włoch, *The total number of maximal k-independent sets in the generalized lexicographic product of graphs*, Ars Combinatoria, 75 (2005) 163–170.

[69] A. Włoch, I. Włoch, *Generalized Padovan numbers, Perrin numbers and maximal k-independent sets in graphs*, Ars Combinatoria, 99 (2011) 359–364.

[70] I. Włoch, *On generalized Pell numbers and their graph representations*, Commentationes Mathematicae, 48(2) (2008) 169–175.

[71] A. Włoch, I. Włoch, *The number of independent sets intersecting the set of leaves in trees*, Ars Combinatoria, 85 (2007) 225–231.

[72] A. Włoch, I. Włoch, *Unicyclic graphs with the extremal number of independent sets containing pendent vertices*, Advances and Applications in Discrete Mathematics, 5 (2) (2010) 85–169.

[73] A. Włoch, I. Włoch, *On (k, l)-kernels in generalized products*, Discrete Mathematics, 164 (1997) 295–301.

[74] I. Włoch, *Generalized Fibonacci polynomial of graph*, Ars Combinatoria, 68 (2003) 49–55.

[75] I. Włoch, *Trees with extremal numbers of maximal independent sets including the set of leaves*, Discrete Mathematics, 308(20) (2008) 4768–4772.

[76] G. C. Ying, K. K. Meng, B. E. Sagan, V. R. Vatter, *Maximal independent sets in graphs with at most r cycles*, Journal of Graph Theory, 53(4) (2006) 270–282.

Politechnika Rzeszowska im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

Rzeszów, 16.02.2026

Streszczenie rozprawy doktorskiej

Tytuł: *Zbiory niezależne i dominujące w grafach zawierające zbiór liści*

Autor: mgr Mateusz Pirga

Promotor: dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

W rozprawie doktorskiej rozważane są zbiory niezależne oraz zbiory dominujące zawierające zbiór liści, ze szczególnym uwzględnieniem problemów zliczania.

Zbiory niezależne zawierające zbiór liści były zliczane w literaturze w drzewach oraz grafach jednocyklowych. W rozprawie doktorskiej kontynuowane są badania dotyczące zliczania zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści. Zbadana została szczególna klasa grafów dwucyklowych, w których zbiór liści jest niepusty, a dwa cykle mają dokładnie jeden wspólny wierzchołek. W tej klasie grafów wyznaczona została najmniejsza oraz największa liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści, a także podana została charakteryzacja grafów ekstremalnych ze względu na tę liczbę.

W rozprawie rozważane są niezależne zbiory $(1,2)$-dominujące, które zawierają zbiór liści jako podzbiór. Wykorzystując interpretację grafową liczb Padovana i Perrina, dotyczącą zliczania niezależnych zbiorów $(1,2)$-dominujących w ścieżkach i cyklach, zostały uzyskane nowe wzory dwumianowe dla liczb Padovana i Perrina oraz zdefiniowano wielomian Padovana grafu z wykorzystaniem kompozycji dwóch grafów.

W rozprawie rozważane są również, uogólnione w sensie odległości, zbiory k-niezależne dla $k \geqslant 2$. Wykorzystując interpretację grafową uogólnionego ciągu Padovana, pokazane zostały zależności pomiędzy uogólnionymi liczbami Padovana a liczbą maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści w ścieżkach. Interpretacja ta pozwoliła na uzyskanie wzoru dwumianowego dla uogólnionych liczb Padovana, a następnie wykorzystując operację G-złączenia grafów, zdefiniowane zostały uogólnione wielomiany Padovana.

Wariantem zbiorów dominujących zawierających zbiór liści są zbiory 2-dominujące, które również są badane w rozprawie doktorskiej. Ponieważ każdy zbiór 2-dominujący jest zbiorem 3-dominującym, w rozprawie zostało opisane właściwe 2-dominowanie, będące nowym rodzajem zbiorów 2-dominujących. Właściwe zbiory 2-dominujące zostały wprowadzone w celu rozróżnienia zbiorów 2-dominujących od 3-dominujących. W rozprawie podana została charakteryzacja grafów mających właściwy zbiór 2-dominujący, zależność pomiędzy parametrami właściwego 2-dominowania a parametrami 2-dominowania i 3-dominowania oraz związek pomiędzy liczbą właściwego 2-dominowania, a istnieniem niezależnych zbiorów 2-dominujących.

Rzeszow University of Technology
The Faculty of Mathematics and Applied Physics

Rzeszów, 16.02.2026

Abstract of the doctoral thesis

Title: *Independent and dominating sets in graphs including the set of leaves*

Author: mgr Mateusz Pirga
Supervisor: dr hab. Iwona Włoch, prof. PRz

The thesis investigates independent sets and dominating sets including the set of leaves, with particular emphasis on counting problems.

Independent sets including the set of leaves were previously counted in trees and unicyclic graphs. The thesis continues the study of counting independent sets including the set of leaves for a particular class of bicyclic graphs in which the set of leaves is nonempty and the two cycles have exactly one common vertex. For this class of graphs, the minimum and the maximum number of independent sets including the set of leaves were determined, and extremal graphs with respect to this number were characterized.

The thesis also considers independent $(1, 2)$-dominating sets including the set of leaves. Using a graph interpretation of the Padovan and Perrin numbers related to counting independent $(1, 2)$-dominating sets in paths and cycles, new binomial formulas for Padovan and Perrin numbers were obtained. Moreover, the Padovan polynomial of a graph was defined using the composition of two graphs.

Furthermore, the thesis studies distance k-independent sets for $k \geqslant 2$. By applying a graph interpretation of the generalized Padovan sequence, relationships between generalized Padovan numbers and the number of maximal k-independent sets including the set of leaves in paths were established. This interpretation led to a binomial formula for generalized Padovan numbers. Using the G-join operation of graphs, a generalized Padovan polynomial was defined.

Finally, the thesis investigates 2-dominating sets including the set of leaves. Since every 2-dominating set is also a 3-dominating set, proper 2-domination was introduced as a new type of 2-dominating set. Proper 2-dominating sets were defined in order to distinguish 2-dominating sets from 3-dominating sets. A complete characterization of graphs admitting a proper 2-dominating set was obtained. Furthermore, relationships between the parameters of proper 2-domination and those of 2-domination and 3-domination were established. It was also shown that the proper 2-domination number is related to the existence of independent 2-dominating sets.