Warszawa, 23 października 2025

dr hab. Tomasz Kochanek
Instytut Matematyki
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytetu Warszawskiego

Recenzja rozprawy doktorskiej
pana mgr. Karola Szczepana Aleksandrowicza

pt. *Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych*

1. Tematyka rozprawy doktorskiej

Rozprawa doktorska pana mgr. Karola Szczepana Aleksandrowicza została napisana pod kierunkiem pana prof. dra hab. Stanisława Prusa i dotyczy problemu stabilności klasycznych własności geometrycznych dla przestrzeni interpolacyjnych. Autor zajmuje się pytaniem o przenoszenie się na przestrzenie interpolacyjne takich własności jak: (lokalna) jednostajna wypukłość, ścisła wypukłość, (jednostajna) własność Kadeca-Kleego, własność (β), jak również geometrycznych własności przysługujących kratom Banacha, takich jak: ścisła monotoniczność, dolnie/górnie lokalnie jednostajna monotoniczność, jednostajna monotoniczność oraz (jednostajna) porządkowa gładkość. Wyniki uzyskane przez Doktoranta rozszerzają i uogólniają znane w literaturze rezultaty uzyskane m.in. przez takich matematyków jak: B. Beauzamy, H. Hudzik, W. Kurc, D. Kutzarova, L. Nikolova i S. Prus.

Pan Aleksandrowicz zajmuje się w swojej rozprawie kilkoma rodzajami interpolacji: dyskretną, rzeczywistą interpolacją Lionsa-Peetrego, interpolacją Yoshikawy-Sparra, zespoloną interpolacją Calderóna, jak również ogólnymi sumami prostymi przestrzeni Banacha danymi za pomocą tzw. przestrzeni bazowej, tj. kraty Banacha z porządkiem danym za pomocą 1-bezwarunkowej bazy Schaudera. Tezy uzyskanych twierdzeń są naturalne i dobrze wpisują się w ogólną teorię geometrii przestrzeni Banacha.

Rozprawa składa się ze wstępu oraz czterech rozdziałów. Redakcja tekstu jest staranna i przejrzysta, a wszystkie kroki dowodowe są przedstawione jasno. Rozprawa częściowo oparta jest na trzech artykułach naukowych, których współautorem jest pan Aleksandrowicz:

[A1] K. Aleksandrowicz, S. Prus, *Uniform Kadec–Klee property in interpolation spaces*, J. Math. Anal. Appl. **509** (2022), paper no. 125947.

[A2] K. Aleksandrowicz, S. Prus, *Convexity properties of Yoshikawa–Sparr interpolation spaces*, Math. Nachr. **297** (2024), 2624–2638.

[A3] K. Aleksandrowicz, J. Markowicz, S. Prus, *Monotonicity properties and orded smoothness in Banach lattices*, Results Math. **80** (2025), paper no. 83.

tk

2. Główne tezy i ocena rozprawy

W rozdziale pierwszym Autor wprowadza definicje badanych przez siebie własności geometrycznych oraz modułów tych własności dla przestrzeni i krat Banacha. Obok klasycznych własności o charakterze skończenie wymiarowym Doktorant zajmuje się także pewnymi „nieskończenie wymiarowymi" wariacjami tych własności, takimi jak (jednostajna) własność Kadeca-Kleego, niemal jednostajna wypukłość, czy też własność (β), jak również – kluczowymi dla tego rozdziału – własnościami ścisłej, jednostajnej, dolnie/górnie lokalnie jednostajnej monotoniczności oraz porządkowej gładkości krat Banacha. Wyniki rozdziału pierwszego dotyczące porządkowej gładkości krat Banacha, a także lokalnie jednostajnej monotoniczności przestrzeni Köthego, pochodzą z pracy [A3].

W twierdzeniach 1.2, 1.3 oraz 1.6 Autor podaje użyteczne przeformułowania geometrycznych własności krat w języku ciągowym. Mam następujące uwagi dotyczące tej części tekstu:

- Na str. 18, w wierszu 7 od dołu powinno być *„topologii"*.
- W dowodzie twierdzenia 1.2, w wierszach 6–7 od dołu na str. 19 można było wziąć po prostu funkcjonał $f_n \in S(X_+^*)$ spełniający
$$f_n(x \vee t_n y) = \|x \vee t_n y\| \geqslant 1 + t_n \varepsilon.$$
- W ostatnim zdaniu dowodu pierwszej implikacji w twierdzeniu 1.2 powołujemy się milcząco na rozkład Hahna – dobrze byłoby wcześniej w tekście rozprawy wspomnieć o tym, że taki rozkład ma miejsce w dowolnej kracie Banacha.

Autor dowodzi kilku naturalnych twierdzeń o dualności między lokalnie jednostajną monotonicznością a lokalnie jednostajnie porządkową gładkością. Końcowa część rozdziału pierwszego zawiera ciekawe wyniki dotyczące relacji między górną i dolną lokalnie jednostajną monotonicznością. W twierdzeniu 1.9 (i uwadze następującej po nim) o przenormowaniu przestrzeni Köthego tak, aby była dolnie, ale nie górnie, lokalnie jednostajnie monotoniczna, kluczową rolę pełni twierdzenie Foralewskiego-Kolwicza (*J. Convex Anal.* 2007). Na uwagę zasługuje interesujący przykład 1.1 pochodzący z artykułu [A3], który stanowi rozwiązanie problemu postawionego w monografii Foralewskiego, Hudzika, Kowalewskiego i Wisły. Pokazuje on, że górna i dolna lokalnie jednostajna monotoniczność są własnościami nieporównywalnymi. Interesującym otwartym problemem, związanym z twierdzeniem 1.7 Doktoranta, jest pytanie o to, czy ogólnie dolna lokalna porządkowa gładkość X^* implikuje dolną lokalną jednostajną monotoniczność X. Wiadomo jednak, z odpowiedniego twierdzenia Wiesława Kurca, że X musi być wówczas ściśle monotoniczna.

Rozdział drugi poświęcony jest badaniu zachowywania własności: ścisłej wypukłości, (lokalnie/niemal) jednostajnej wypukłości i własności (β) dla ogolnej dyskretnej metody interpolacji oraz dla ogólnych sum prostych przestrzeni Banacha. Nowe wyniki dotyczące stabilności własności geometrycznych dla dyskretnej interpolacji oparte są na ideach dowodu twierdzenia o stabilności jednostajnej wypukłosci opublikowanego przez J. Markowicz i S. Prusa w *Journal of Topology and Analysis* (2022). W twierdzeniach 2.3 i 2.4 dotyczących ścisłej i lokalnie jednostajnej wypukłości Autor zakłada, że obydwie przestrzenie podlegające interpolacji są refleksywne. Jest to istotne uproszczenie, bowiem infimum definiujące

ϕh

współczynniki $k_{p,\theta}(x, i)$ pojawiające się w szeregu określającym normę w przestrzeni interpolacyjnej jest wówczas osiągane. Dowody są wzorowane na pracy J. Markowicz i S. Prusa (*Math. Nachr.* 2022). Brakuje dyskusji na temat tego, na ile założenie o refleksywności obu przestrzeni X_0, X_1 (np. w twierdzeniu 2.3) jest konieczne.

Interesujące i wysoce nietrywialne jest twierdzenie 2.8 pochodzące z pracy [A2], które mówi, że suma prosta przestrzeni Banacha z indeksami β jednostajnie 'odseparowanymi' od zera i z jednostajnie wypukłą przestrzenią bazową ma własność (β). Kluczowy w dowodzie jest tu techniczny lemat 2.6 stanowiący modyfikację pewnego lematu udowodnionego przez D. Kutzarovą, L. Nikolovą i S. Prusa (*Math. Nachr.* 1998) i podający ciekawą nierówność wiążącą moduł własności (β) z pewnymi granicami podwójnymi. Warto zauważyć, że twierdzenie 2.8 daje wynik ilościowy – pozwala oszacować od dołu moduł własności (β) sumy prostej w języku modułu monotoniczności przestrzeni bazowej E, jej modułu wypukłości oraz infimum modułów wlasności (β) dla składników sumy prostej. Wynik ten, dotyczący ogólnych sum prostych, jest niezbędny do wykazania twierdzenia 2.10 o stabilności własności (β) dla przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(X, E)$ dwóch przestrzeni, z których przynajmniej jedna ma własność (β), przy czym o E zakładamy, że jest jednostajnie wypukła. Chciałbym także odnotować następujące uwagi:

- Po definicji 2.3 warto byłoby umieścić uwagę o tym, że określona tam norma w przestrzeni interpolacyjnej $K_{p,\theta}(X, E)$ wyraża się jako odpowiednie infimum (podobnie jak np. w pracy [43] J. Markowicz i S. Prusa z *Mathematische Nachrichten* 2021), w którym rozważa się nieskończenie wiele rozkładów danego wektora $x \in K_{p,\theta}(X, E)$ w postaci $x = x_0(i) + x_1(i)$ dla $i \in \mathbb{Z}$. Dobrze motywowałoby to wypowiedź podanego bez dowodu lematu 2.1.

- Myślę, że warto byłoby zamieścić w rozprawie dowód lematu 2.1, jako że jest on, wraz z wypływającym z niego wnioskiem 2.2, kluczowym narzędziem w dowodach twierdzeń 2.3–2.5.

Rozdział trzeci poświęcony jest własnościom geometrycznym przestrzeni powstających w wyniku rzeczywistej metody interpolacji – zarówno w wersji dyskretnej, jak i ciągłej. Większość zaprezentowanych tu wyników pochodzi z artykułu [A2]. W przypadku wersji ciągłej do interpolacji Yoshikawy-Sparra używa się przestrzeni Lebesgue'a-Bochnera $L_p(X)$ i, jak zauważa Autor, występuje tu problem polegający na tym, że takie własności jak niemal jednostajna wypukłość czy własność (β) nie przenoszą się z przestrzeni X na $L_p(X)$.

Twierdzenia 3.2 i 3.3. mówią o stabilności jednostajnej wypukłości przy dyskretnej wersji interpolacji Yoshikawy-Sparra i dotyczą odpowiednio norm zdefiniowanych dla $x \in (X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\theta,p,q}$ wzorami

$$\|x\|^{(a)}_{\theta,p,q} = \left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n} \left(a^{-\theta\nu} K_q(a^{\nu}, x) \right)^p \right)^{1/p} \tag{1}$$

oraz

$$|||x|||^{(a)}_{\theta,p,q} = \inf \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n} \|x_i\|^q_{\ell^{a,i}_{p,\theta}(X_i)} \right)^{1/q} \right\} \tag{2}$$

(wszelkie oznaczenia są oczywiście wyjaśnione w tekście rozprawy). Są to odpowiedniki znanego twierdzenia Beauzamy'ego (1975) mówiącego o jednostajnej wypukłości rzeczywistej

fh

przestrzeni interpolacyjnej wyposażonej w klasyczną normę. Ponieważ jednak jednostajna wypukłość nie zachowuje się – rzecz jasna – przy równoważnych przenormowaniach, wspomniane wyżej nowe wersje twierdzenia Beauzamy'ego wymagały oddzielnych dowodów.

W przypadku twierdzenia 3.3 interesującą obserwacją jest to, że przestrzeń interpolacyjna z normą (2) jest ilorazem ℓ_1-sumy prostej przestrzeni $\ell_{p,\theta}^{a;i}(X_i)$ przez podprzestrzeń ciągów o wyrazach sumujących się do zera. Oczywiście, jak zauważa Autor, bez wzięcia ilorazu sama ta ℓ_1-suma nie musi być jednostajnie wypukła, nawet jeśli jednostajnie wypukłe są wszystkie składniki X_i (a zatem także wszystkie $\ell_{p,\theta}^{a;i}(X_i)$).

Stosując metody podobne do tych wypracowanych we wspomnianej wcześniej pracy Kutzarovej, Nikolovej i Prusa, Autor dowodzi twierdzeń o zachowaniu niemal jednostajnej wypukłosci oraz własności (β) dla przestrzeni interpolacyjnej z normą (2). W pierwszym przypadku, analogicznie do sytuacji, z którą mieliśmy do czynienia w przypadku twierdzeń 3.2 i 3.3, kluczową własnością jest zachowywanie niemal jednostajnej wypukłości przestrzeni X_i przy przejściu do przestrzeni $\ell_{p,\theta}^{a;i}(X_i)$ – wynika to z twierdzenia J.R. Partingtona (*Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1983). W drugim przypadku Autor używa swojego twierdzenia 2.8, które gwarantuje analogiczne zachowanie własności (β).

W końcowej części rozdziału trzeciego Autor opisuje metodę pozwalającą na przeniesienie wyników o stabilności wymienionych wyżej własności geometrycznych z przypadku interpolacji dyskretnej na przypadek interpolacji ciągłej, tj. gdy norma w przestrzeni $(X_0, X_1, \ldots, X_n)_{\theta,p,q}$ jest zadana za pomocą odpowiedniej całki wielokrotnej (zob. wzór (3.2)). Metoda ta oparta jest na szeregu nierówności wiążących moduły (niemal jednostajnej) wypukłości i moduły własności (β) w przypadku, gdy dane są stałe równoważności dwóch norm na danej przestrzeni.

Mam jedną drobną uwagę redakcyjną na temat tego rozdziału:

- W wypowiedzi lematu 3.1 na str. 57 powinno być

$$A_i = \|x_i(\boldsymbol{\nu})\|_{l_{p,\theta}^{a,i}(X_i)}.$$

Ostatni rozdział poświęcony jest klasycznej zespolonej metodzie interpolacji Calderóna. Używając m.in. znanej nierówności Calderóna, Autor dowodzi dwóch twierdzeń mówiących o ścisłej wypukłości oraz lokalnie jednostajnej wypukłości przestrzeni interpolacyjnej $(X_0, X_1)_\theta$ dla pary porównywalnych, refleksywnych przestrzeni Banacha, z których przynajmniej jedna ma odpowiednią własność geometryczną (twierdzenia 4.2 i 4.3). W obu tych przypadkach Autor przyjmuje dodatkowe założenie, które gwarantuje, że infimum w definicji normy w przestrzeni interpolacyjnej jest osiągane. Brakuje jednak w rozprawie dyskusji na temat istotności tego dodatkowego, technicznego założenia.

Wyniki dotyczące stabilności własności Kadeca-Kleego i własności (β) dla zespolonej interpolacji $(X_0, X_1)_\theta$ wymagają dodatkowego, dość technicznego, założenia o istnieniu na przestrzeni $X_0 + X_1$ odpowiedniego netu operatorów (Π_λ) skończonego rzędu, zbiegającego do identyczności w silnej topologii operatorowej (twierdzenia 4.4 i 4.5). Bez tego dodatkowego warunku ogólny problem zachowania własności Kadeca-Kleego i własności (β) dla zespolonej interpolacji Calderóna pozostaje otwarty.

Rozdział kończy się twierdzeniem o stabilności jednostajnej monotoniczności dla zespolonej metody interpolacji stosowanej do pary zespolonych krat funkcyjnych Banacha.

th

3. Konkluzja

Zaprezentowane w rozprawie dowody w mojej ocenie nie wymagały wypracowania szczególnie nowatorskich metod, ale pokazują niewątpliwie solidny warsztat Doktoranta oraz to, że wykazuje się on biegłością i szeroką wiedzą z zakresu geometrii przestrzeni Banacha. Choć zaprezentowane dowody są w pewnym stopniu powtarzalne, a główna trudność dowodowa często sprowadza się do kwestii czysto technicznych, trzeba przyznać, że rozumowania przedstawione są w rozprawie w sposób bardzo przejrzysty, a uzyskane wyniki stanowią ciekawy cykl, który naturalnie uogólnia i rozszerza stan wiedzy na temat własności geometrycznych przestrzeni Banacha. Na uwagę zasługują również interesujące przykłady omówione w rozprawie i ogólnie bardzo dobry poziom redakcji tekstu.

Uważam, że przedstawiona mi do oceny rozprawa doktorska pana mgr. Karola Aleksandrowicza zawiera oryginalne rozwiązanie problemu naukowego oraz spełnia wymagania ustawowe, opisane w ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce, jak i wymagania zwyczajowe stawiane rozprawom doktorskim.

Wnoszę zatem o dopuszczenie pana mgr. Karola Aleksandrowicza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Tomasz Kochanek