POLITECHNIKA RZESZOWSKA
im. Ignacego Łukasiewicza
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej

ROZPRAWA DOKTORSKA

Technika Miar Niezwartości w Zastosowaniu do Badania Rozwiązań Nieskończonych Układów Równań Całkowych na Przedziale Nieograniczonym

Autor:
Justyna Madej
Promotor:
Prof. dr hab. Józef Banaś

Rzeszów 2024

"Prawdziwie wielcy ludzie wywołują w nas uczucie, że sami możemy stać się wielcy"

Pragnę złożyć najserdeczniejsze podziękowania
dla promotora prof. dr hab. Józefa Banasia
za cierpliwość, poświęcony czas oraz nieocenioną pomoc
przy pracy nad niniejszą rozprawą.

Spis treści

Wstęp **2**

1 Definicje, oznaczenia i fakty pomocnicze **5**

1.1 Podstawowe oznaczenia i pojęcia używane w pracy 5

1.2 Pewne przestrzenie Banacha 7

2 Miary niezwartości **10**

2.1 Pojęcie miary niezwartości i jej własności 11

2.2 Klasyczne miary niezwartości 13

2.3 Miary niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych 16

2.4 Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ 19

3 Znikające w nieskończoności rozwiązania nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna **28**

4 Asymptotycznie stabilne rozwiązania nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna **51**

5 Nieskończone układy kwadratowych równań całkowych Hammersteina i ich rozwiązania asymptotycznie stabilne **71**

6 Nieskończony układ równań całkowych modelujący proces urodzin i śmierci **89**

Literatura **99**

Wstęp

Równania całkowe stanowią ważną gałąź analizy matematycznej, odgrywając istotną rolę zarówno w teorii operatorów liniowych (zob. [36, 40, 42]), jak również w analizie nieliniowej [40, 49, 69, 82]. Ponadto równania całkowe są efektywnymi narzędziami matematycznymi stosowanymi w modelowaniu procesów i zjawisk spotykanych w wielu dziedzinach takich jak mechanika, termodynamika, astronomia, hydrodynamika, fizyka matematyczna, ekonomia, biologia itp. (zob. [29, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 83]). Podobnie także teoria równań różniczkowych odgrywa bardzo ważną rolę w rozwiązywaniu problemów otaczającego nas świata. Na przykład, druga zasada dynamiki Newtona przetłumaczona na język matematyczny staje się równaniem różniczkowym. Także problemy pojawiające się w obwodach elektrycznych, czy kinetyce chemicznej można przedstawić jako równanie różniczkowe. Równania te, jak i wiele innych, można z kolei przekształcić w równoważne im równania całkowe. Odwrotnie, wiele zjawisk opisanych za pomocą równań całkowych można przekształcić w równania różniczkowe. Widać zatem, że zastosowania teorii równań całkowych są często związane z zastosowaniami różnego typu równań różniczkowych [67, 82].

Z historycznego punktu widzenia można uznać, że początki równań całkowych sięgają początków XIX w., kiedy to norweski matematyk N.H. Abel jako pierwszy sformułował i rozwiązał pewne równanie całkowe. Podobnie inni matematycy, tacy jak Laplace, Fourier, Poisson i Liouville rozważali pewne typy równań całkowych. Jednak dopiero na przełomie XIX i XX wieku prace szwedzkiego matematyka I. Fredholma dotyczące tzw. liniowych równań całkowych Fredholma (m.in. [45, 46]) pozwoliły przejść od badania przypadków szczególnych do szeroko rozwiniętej ogólnej teorii równań całkowych.

Warto także wspomnieć o osiągnięciach V. Volterry [4], do których należała seria artykułów dotyczących m.in. równań całkowych, które nazwano jego nazwiskiem.

Niewątpliwie do rozwoju teorii równań całkowych przyczynił się także A. Hammerstein, który w pierwszej połowie XX w. badał nieliniowe równania całkowe znane równaniami Hammersteina [55].

Wyniki uzyskane przez matematyków w ubiegłych stuleciach zapewniły teorii równań całkowych miejsce wśród najważniejszych działów matematyki.

Obecnie mamy szeroki wybór literatury związanej z zasygnalizowaną tematyką. Niemniej jednak warto przytoczyć monografię [92] stanowiącą wyczerpujący przegląd teorii równań całkowych aż do lat sześćdziesiątych XX w. Z nowszych opracowań warte uwagi są prace takie jak [18, 36, 40].

Teoria równań całkowych wciąż stanowi przedmiot zainteresowań matematyków i jest stale rozwijana. Jej niewątpliwym uogólnieniem i poszerzeniem są układy równań całkowych, zarówno skończonych, jak i nieskończonych. Szczególnie trudne i poważne wyzwanie stanowią nieskończone układy równań całkowych zdefiniowanych na przedziale nieograniczonym, które pojawiły się w ostatnich latach w pracach [6, 9, 20, 24, 25, 61, 68, 72], prezentujących narzędzia stosowane z powodzeniem w badaniu rozwiązań wspomnianych układów. Okazuje się, że narzędzia te są ściśle związane z techniką miar niezwartości.

Warto wspomnieć, ze istnieje wiele problemów prowadzących do nieskończonych układów równań całkowych, m.in. zagadnienia brzegowe dla nieskończonych układów równań różniczkowych [19, 56, 73, 74] oraz semidyskretyzacja stosowana przy rozwiązywaniu pewnych typów równań różniczkowych cząstkowych [41, 59]. Na przykład, dzięki zastosowaniu procesu semidyskretyzacji do problemu Cauchy'ego dla równań różniczkowych cząstkowych parabolicznych otrzymujemy układ równań różniczkowych zwyczajnych [89, 90]. Nieskończone układy równań całkowych pojawiają się także przy modelowaniu niektórych zjawisk w teorii sieci neuronowych, czy też w dysocjacji polimerów [26, 41, 57, 78, 79]. Ze względu na zasygnalizowane wcześniej ścisłe zależności i powiązania między teorią równań różniczkowych i całkowych możemy wskazać wiele przykładów zastosowań nieskończonych układów równań różniczkowych pojawiających się np. w mechanice [5, 41, 80, 81, 89, 93].

Bardzo ciekawe, a zarazem ważne zastosowania nieskończonych układów równań całkowych można wskazać przy modelowaniu stochastycznego procesu urodzin i śmierci - otrzymujemy wtedy w sposób naturalny nieskończony układ równań całkowych. Ze względu na ważność tego przykładu poświęcimy mu w przedkładanej pracy Rozdział 6, w którym szczegółowo omówimy wspomniany układ.

Wraz z rozwojem teorii równań różniczkowych i całkowych zaczęto używać, poza klasycznymi narzędziami analizy, zaawansowanych metod analizy funkcjonalnej. Efektywna okazuje się być teoria miar niezwartości, która stanowi podstawowe narzędzie stosowane w przedkładanej pracy. Dzięki stosowanej w tej teorii technice miar niezwartości oraz twierdzeniu o punkcie stałym Darbo jesteśmy w stanie udowodnić wiele twierdzeń egzystencjalnych dotyczących nieskończonych układów równań całkowych.

Przedkładana rozprawa doktorska ma na celu dyskusję wyników dotyczących twierdzeń egzystencjalnych dla nieskończonych układów równań całkowych typu Hammersteina i Urysohna rozważanych na przedziale nieograniczonym. Przedziałem tym jest w tej rozprawie półoś rzeczywista $\mathbb{R}_+$.
W pracy będziemy zajmować się rozwiązaniami wspomnianych nieskończonych układów równań całkowych, które są ciągami funkcyjnymi określonymi na półosi rzeczywistej i takimi, że spełniają one pewne warunki w nieskończoności, np. są zbieżne w nieskończoności do zera (inaczej: są ciągami znikającymi w nieskończoności) czy też są asymptotycznie stabilne.
Aby zrealizować założony cel będziemy posługiwać się techniką miar niezwartości tzn. będziemy używać odpowiednio skonstruowanych miar niezwartości, które w połączeniu z twierdzeniami o punkcie stałym takim jak twierdzenie Schaudera czy też twierdzenie typu Darbo, umożliwiają realizację założonego celu.
Zasadnicze rezultaty rozprawy doktorskiej są omówione w Rozdziałach 3, 4, 5 i 6.

Praca opiera się na wynikach zawartych w trzech publikacjach [14, 15, 7]. Wspomniany Rozdział 6 bazuje na pracy [16].

1 Definicje, oznaczenia i fakty pomocnicze

W rozdziale tym wprowadzimy oznaczenia i przedstawimy pewne definicje, których będziemy używać w dalszej części pracy. Ponadto omówimy przestrzenie, w których prowadzone będą nasze rozważania. Ze względu na złożoność tego rozdziału podzielimy go na dwa podrozdziały - pierwszy poświęcimy przedstawieniu oznaczeń, definicji i faktów pomocniczych, natomiast drugi będzie stanowił prezentację wykorzystywanych przestrzeni Banacha.

1.1 Podstawowe oznaczenia i pojęcia używane w pracy

Na początku przypomnijmy podstawowe definicje oraz wprowadźmy pewne oznaczenia, które nie odbiegają na ogół od ogólnie przyjętych.

Standardowo, przez $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{N}$ oznaczamy odpowiednio zbiór liczb rzeczywistych i naturalnych. Ponadto w całej pracy symbol $\mathbb{R}_+$ stosujemy do oznaczenia przedziału $[0,+\infty)$.

Następnie, niech M będzie dowolnym zbiorem niepustym, a d metryką określoną na zbiorze M. Wówczas tak określoną przestrzeń metryczną oznaczamy przez (M,d).

Niech ponadto E będzie przestrzenią liniową określoną nad ciałem $\mathbb{K}$ liczb rzeczywistych lub zespolonych. W przestrzeni tej określamy normę $||\cdot||_E$. Przez parę $(E,||\cdot||_E)$ rozumiemy zatem przestrzeń unormowaną nad ciałem $\mathbb{K}$, natomiast przez θ element zerowy tej przestrzeni. W dalszej części pracy, jeśli nie będzie to powodowało nieporozumień, przestrzeń unormowaną $(E,||\cdot||_E)$ będziemy oznaczać krótko przez E.

Ustalmy dalej dowolny element x przestrzeni E oraz dowolną liczbę $r>0$.
Przez $B(x,r)$ oznaczamy kulę otwartą o środku w punkcie x i promieniu r. Będziemy pisać krótko B_r, by oznaczyć kulę $B(\theta,r)$. Kulą jednostkową nazywamy kulę o promieniu 1, tj. $B(x,1)$. Dodatkowo, niech X będzie dowolnym, niepustym podzbiorem przestrzeni E. Wówczas $B(X,r)$ oznacza kulę o środku w zbiorze X i promieniu r, tj.:

$$B(X,r)=\bigcup_{x\in X}B(x,r)=\{y\in E:\ \mathrm{dist}(y,X)<r\},$$

gdzie $\mathrm{dist}(y,X)$ oznacza odległość punktu y od zbioru X określoną wzorem

$$\mathrm{dist}(y,X)=\inf\{||y-x||_E:\ x\in X\}.$$

Kule domknięte będziemy oznaczać odpowiednio przez $\overline{B}(x,r)$, $\overline{B}_r$ i $\overline{B}(X,r)$.

Następnie, niech $\mathfrak{M}_E$ będzie rodziną wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E, a $\mathfrak{N}_E$ jej podrodziną złożoną ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych.

Jeżeli X, Y są dowolnymi niepustymi podzbiorami przestrzeni E, to przez oznaczenia $X+Y$, λX, dla $\lambda \in \mathbb{K}$ rozumiemy klasyczne operacje algebraiczne, tj.:

$$X+X = \{x+y : \ x \in X, \ y \in Y\}, \qquad \lambda X = \{\lambda x : \ x \in X\}.$$

Ponadto dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset E$, jego domknięcie, powłokę wypukłą oraz domkniętą powłokę wypukłą będziemy oznaczać odpowiednio przez $\overline{X}$, conv$X$ oraz Conv$X$. Przy dodatkowym założeniu o ograniczoności zbioru X symbol diam$X$ stanowi średnicę zbioru X, a jego normę określamy następująco:

$$||X|| = \sup\{||x||_E : \ x \in X\}.$$

Na koniec tego podrozdziału wprowadzimy jeszcze pojęcie metryki Hausdorffa [64]. Dla dowolnych zbiorów $X,Y \in \mathfrak{M}_E$ określmy wyrażenia

$$d_H(X,Y) = \inf\{r : \ X \subset B(Y,r)\}, \quad d_H(Y,X) = \inf\{r : \ Y \subset B(X,r)\},$$

$$D_H(X,Y) = \max\{d_H(X,Y), d_H(Y,X)\}$$

oznaczające odpowiednio *niesymetryczną i symetryczną odległość Hausdorffa* między zbiorami X i Y. Okazuje się, że funkcja D_H stanowi pseudometrykę na rodzinie $\mathfrak{M}_E$. Na ogół nie zachodzi implikacja $D_H(X,Y) = 0 \Rightarrow X = Y$. Na przykład, dla zbiorów $(0,1), \ [0,1] \subset \mathbb{R}$ mamy, że $D_H(X,Y) = 0$, ale $X \neq Y$. Jeżeli ograniczymy się do rodziny $\mathfrak{M}_E^c$ złożonej z domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni E, odległość Hausdorffa D_H staje się metryką. Gdy dodatkowo E jest przestrzenią Banacha, otrzymujemy przestrzeń metryczną zupełną $(\mathfrak{M}_E^c, D_H)$ [43].

Jeżeli $\mathcal{K}$ jest rodziną zbiorów z przestrzeni E, to *odległość Hausdorffa zbioru X od rodziny* $\mathcal{K}$ będzie oznaczona symbolem dist$(X,\mathcal{K})$ i zdefiniowana jako

$$\text{dist}(X,\mathcal{K}) = \inf\{D_H(X,K) : \ K \in \mathcal{K}\}.$$

Ze względu na to, że w pracy będziemy prowadzić rozważania głównie w przestrzeniach Banacha, dalej skupimy się na omówieniu tych przestrzeni.

1.2 Pewne przestrzenie Banacha

Przypomnimy teraz przestrzenie Banacha, których będziemy używać w dalszych częściach pracy oraz omówimy ich najważniejsze własności [76] . Ponieważ nasze rozważania prowadzone będą w przestrzeniach określonych nad ciałem liczb rzeczywistych pozwolimy sobie już na tym etapie założyć, że wszystkie przestrzenie, które będą omawiane i wykorzystywane w dalszych rozdziałach będą określone dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Przez c_0 oznaczmy przestrzeń ciągów rzeczywistych zbieżnych do zera. Normę elementu $x = (x_n)$ tej przestrzeni definiujemy jako klasyczną normę supremum (lub maksimum):

$$||x||_{c_0} = ||(x_n)||_{c_0} = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\} = \max\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Następnie, niech c oznacza przestrzeń ciągową, której elementami są wszystkie ciągi rzeczywiste zbieżne do granicy właściwej. W przestrzeni tej określamy normę supremum:

$$||x||_c = ||(x_n)||_c = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}$$

dla $x = (x_n) \in c$.

Ostatnią rozważaną przez nas ciągową przestrzenią Banacha jest przestrzeń l_∞, której elementami są wszystkie ograniczone ciągi rzeczywiste. Normę elementu $x = (x_n)$ przestrzeni l_∞ określamy wzorem:

$$||x||_{l_\infty} = ||(x_n)||_{l_\infty} = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \dots\}.$$

Oczywistym jest, że $c_0 \subsetneq c \subsetneq l_\infty$. Ponadto wiadomo, że przestrzenie c i c_0 są ośrodkowe, podczas gdy l_∞ nie jest przestrzenią ośrodkową.

Niech $[a,b] \subset \mathbb{R}$ będzie ustalonym przedziałem. Symbolem $C([a,b])$ oznaczamy przestrzeń złożoną ze wszystkich funkcji $x : [a,b] \to \mathbb{R}$, które są ciągłe na przedziale $[a,b]$. Dla dowolnej funkcji $x \in C([a,b])$ określmy wartość $||x||_{C([a,b])}$ następująco:

$$||x||_{C([a,b])} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\}.$$

Z podstawowych faktów i twierdzeń analizy matematycznej łatwo wywnioskować, że kres górny w definicji normy w tej przestrzeni można zastąpić przez maksimum, tj.:

$$||x||_{C([a,b])} = \sup\{|x(t)| : t \in [a,b]\} = \max\{|x(t)| : t \in [a,b]\}.$$

dla dow. $x = x(t) \in C([a,b])$. Przestrzeń unormowana $C([a,b], ||\cdot||_{C([a,b])})$ jest ośrodkową przestrzenią Banacha. Ośrodkowość jest następstwem twierdzenia Weierstrassa o aproksymacji funkcji ciągłej wielomianami [76].

Omówimy teraz przestrzeń, która będzie stanowiła podstawę naszych dalszych rozważań. W tym celu załóżmy, że $(E, ||\cdot||_E)$ jest przestrzenią Banacha. Oznaczmy przez $BC(\mathbb{R}_+, E)$ przestrzeń złożoną ze wszystkich funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to E$, które są ciągłe i ograniczone na przedziale $\mathbb{R}_+$. Ponieważ $x(t)$ jest elementem przestrzeni E dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$, normę dowolnej funkcji $x \in BC(\mathbb{R}_+, E)$ określamy wzorem:

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+,E)} = \sup\{||x(t)||_E : \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Można udowodnić, że jest to przestrzeń Banacha.

W pracy będziemy wykorzystywać przypadki szczególne przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$, tj. przypadki, w których za przestrzeń E przyjmiemy odpowiednio c_0, c oraz l_∞. Omówimy w kilku zdaniach każdą z nich.

Przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ składa się ze wszystkich funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to c_0$, które są ciągłe i ograniczone na $\mathbb{R}_+$. Dokładniej, funkcje z tej przestrzeni mają postać

$$x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t),\ x_2(t), \dots) \ \text{ dla } \ t \in \mathbb{R}_+,$$

gdzie ciąg $(x_n(t))$ należy do przestrzeni Banacha c_0 dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$, tzn. $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Biorąc pod uwagę podane wcześniej normy w przestrzeniach $BC(\mathbb{R}_+, E)$ oraz c_0, dla dowolnej funkcji $x \in BC(\mathbb{R}_+, c_0)$ otrzymujemy:

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+,c_0)} = \sup\{||x(t)||_{c_0} : \ t \in \mathbb{R}_+\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \{\sup\{|x_n(t)| : \ n = 1,2,\dots\}\}.$$

Równoważnie

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+,c_0)} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \{\max\{|x_n(t)| : \ n = 1,2,\dots\}\}.$$

Podobnie jak wyżej przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, c)$ będziemy rozumieć jako przestrzeń Banacha złożoną ze wszystkich funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to c$ ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}_+$. Każda funkcja $x \in BC(\mathbb{R}_+, c)$ dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ jest ciągiem postaci

$$x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t),\ x_2(t), \dots)$$

należącym do przestrzeni ciągowej c, tj. zbieżnym do granicy właściwej. Norma w tej przestrzeni dana jest wzorem

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+,c)} = \sup\{||x(t)||_c : t \in \mathbb{R}_+\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \{\sup\{|x_n(t)| : n = 1,2,\dots\}\}$$

dla dow. $x \in BC(\mathbb{R}_+, c)$.

Ostatnią z rozważanych przestrzeni będzie przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$. Jej elementami są funkcje $x : \mathbb{R}_+ \to l_\infty$ ciągłe i ograniczone na przedziale $\mathbb{R}_+$. Mianowicie każdą funkcję $x \in BC_{l_\infty}$ można zapisać następująco

$$x(t) = (x_n(t)) = (x_1(t),\ x_2(t),\dots),$$

gdzie dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ ciąg $x(t) = (x_n(t))$ należy do przestrzeni l_∞, czyli jest ograniczony. Analogicznie jak w poprzednich przestrzeniach normę elementu $x \in BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ określa wzór

$$||x||_{BC(\mathbb{R}_+,l_\infty)} = \sup\{||x(t)||_{l_\infty} : t \in \mathbb{R}_+\} = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \{\sup\{|x_n(t)| : n = 1,2,\dots\}\}.$$

2 Miary niezwartości

Pojęcie miary niezwartości zostało wprowadzone przez K. Kuratowskiego w 1930 roku [63] na potrzeby badań z dziedziny topologii, jednak dopiero po 25 latach wzrosło zainteresowanie teorią miar niezwartości i jej znaczny rozwój. Stało się to za sprawą G. Darbo, który w 1955 roku wykorzystał miarę niezwartości wprowadzoną przez Kuratowskiego do uogólnienia twierdzenia Schaudera o punkcie stałym [39] badając operatory, których właściwości można określić jako pośrednie między właściwościami odwzorowań kontrakcyjnych i zwartych. Kolejną ważną datą w historii rozwoju miar niezwartości jest rok 1957, kiedy to L.S. Goldenštein, I.T. Gohberg i A.S. Markus zdefiniowali miarę niezwartości Hausdorffa [51]. Następnie badali ją L.S. Goldenštein i A.S. Markus [52]. W kolejnych dekadach wprowadzono wiele innych miar niezwartości [38, 60], a teoria ta budziła duże zainteresowanie matematyków [84]. Szczególne uznanie zyskała w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia, kiedy zaczęto wykorzystywać twierdzenie Darbo o punkcie stałym m.in. do badania istnienia rozwiązań równań różniczkowych. Na potrzeby zastosowań zaczęto rozwijać teorię miar niezwartości. Szukano formuł wyrażających miary niezwartości w danych przestrzeniach Banacha, ponieważ znane do tej pory miary nie były proste w zastosowaniu. Na przykład, obliczenie pozornie prostej miary niezwartości Kuratowskiego dla kuli jednostkowej w przestrzeni nieskończenie wymiarowej okazywało się nie lada wyzwaniem, a w niektórych przestrzeniach Banacha takich jak c, $L^p([a,b])$ nie znano formuł dla miary Hausdorffa. Co więcej, w niektórych przestrzeniach Banacha nie znano nawet formuł, które wyrażałyby poznane dotąd miary. Z tego powodu B.N. Sadovskii zaproponował podejście aksjomatyczne do teorii miar niezwartości. Spośród powstałych dotąd aksjomatycznych definicji najważniejszą i najczęściej wykorzystywaną jest jednak definicja aksjomatyczna wprowadzona w 1980 r. przez J. Banasia i K. Goebla [10], gdyż cytując J. Banasia i M. Mursaleena [18] definicja ta "nie powinna być zbyt ogólna oraz powinna wymagać spełnienia takich warunków, które umożlwią ich wykorzystanie w konkretnych zastosowaniach."

Teoria miar niezwartości okazuje się być efektywnym narzędziem m.in. w teorii równań operatorowych, rownań różniczkowych, w teorii punktu stałego i przede wszystkim w interesujących nas równaniach całkowych [18, 75]. Nie bez powodu poświęcimy jej w przedkładanej pracy cały rozdział. Jak już wcześniej wspomnieliśmy, technika miar niezwartości tuż obok twierdzeń o punktach stałych będzie stanowić główne narzędzie w dowodach twierdzeń prezentowanych w tej pracy. Przedstawimy zatem wykorzystywaną przez nas definicję tego pojęcia oraz przyjrzymy się podstawowym, najbardziej rozpoznawalnym miarom niezwartości Kuratowskiego i Hausdorffa. Omówimy także miary niezwartości w rozważanych przez nas przestrzeniach Banacha.

2.1 Pojęcie miary niezwartości i jej własności

W tym podrozdziale wprowadzimy definicję miary niezwartości, która pozwoli nam otrzymać formuły dla miar niezwartości w rozważanych przez nas przestrzeniach Banacha.

Załóżmy zatem, że E jest przestrzenią Banacha i przyjmijmy aksjomatyczną definicję miary niezwartości podaną przez J. Banasia i K. Goebla (zob. [10]).

Definicja 2.1.1. Funkcję $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ spełniającą warunki:

(i) Rodzina $ker\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta oraz $ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$,

(ii) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leqslant \mu(Y)$,

(iii) $\mu\left(\overline{X}\right) = \mu(X)$,

(iv) $\mu(ConvX) = \mu(X)$,

(v) $\mu(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leqslant \lambda\mu(X) + (1-\lambda)\mu(Y)$ dla $\lambda \in [0,1]$,

(vi) Jeżeli $(X_n)_{n\geqslant 1}$ jest ciągiem zstępującym (tj. $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$) zbiorów domkniętych z rodziny $\mathfrak{M}_E$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, to wtedy zbiór $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty,

nazywamy *miarą niezwartości w przestrzeni E*.

Rodzinę $ker\mu$ zdefiniowaną w aksjomacie (i) nazywamy *jądrem miary* μ. Jeżeli μ spełnia dodatkowy warunek:

(vii) $ker\mu = \mathfrak{N}_E$,

to miarę μ nazywamy *miarą pełną*.

Oczywiście istnieje wiele miar, które nie są pełne, tj. $\ker\mu \subsetneq \mathfrak{N}_E$. Prostymi przykładami mogą być miary $\mu_1(X) = ||x||_E$ i $\mu_2(X) = diamX$. Obie funkcje spełniają aksjomaty (i)-(vi), jednak $ker\mu_1 = \{\theta\}$ podczas gdy $ker\mu_2$ stanowi rodzina wszystkich zbiorów jednoelementowych.

Zwróćmy uwagę na fakt, że zbiór X_∞ z aksjomatu (vi) należy do jądra $\ker\mu$. Wynika to z faktu, że $X_\infty \subset X_n,\ n = 1,2,\ldots$ oraz nierówności $\mu(X_\infty) \leqslant \mu(X_n)$ dla $n = 1,2,\ldots$. Stąd $\mu(X_\infty) = 0$ co implikuje, że $X_\infty \in ker\mu$. Ta prosta obserwacja okazuje się być ważna w wielu zastosowaniach.

W dalszym ciągu załóżmy, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni E.

Przyjrzyjmy się bliżej strukturze jądra $\ker\mu$. Można zauważyć, że nie jest rodziną domkniętą względem operacji algebraicznych, tzn. nie ma on struktury stożka. Stąd, jeżeli miara μ jest subaddytywna i jednorodna, tzn.:

(viii) $\mu\left(X+Y\right) \leqslant \mu\left(X\right) + \mu\left(Y\right)$,

(ix) $\mu\left(\lambda X\right) = |\lambda|\mu\left(X\right)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$,

to nazywamy ją *subliniową*.

Okazuje się, że jądro miary μ na ogół nie jest także rodziną domkniętą względem sumy zbiorów, a zachodzi jedynie warunek $\max\{\mu(X),\mu(Y)\} \leqslant \mu(X\cup Y)$ dla dowolnych zbiorów $X,Y \in ker\mu$. Jako przykład pokazujący, że nierówność w drugą stronę nie musi być spełniona można podać miarę $\mu(X) = \mathrm{diam}(X)$ i wziąć dwa rozłączne zbiory jednoelementowe o wystarczająco dużej odległości od siebie. Motywując się tym faktem mówimy, że miara μ ma *własność maksimum*, jeżeli:

(x) $\mu\left(X\cup Y\right) = max\{\mu\left(X\right),\ \mu\left(Y\right)\}$.

Łącząc aksjomaty (vii)-(x), otrzymujemy następującą definicję.

Definicja 2.1.2. Miarę μ nazywamy *regularną miarą niezwartości*, jeżeli jest ona pełna, subliniowa i ma własność maksimum.

Zauważmy, że jądro miary regularnej złożone jest ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych w przestrzeni E oraz jest domknięte względem operacji algebraicznych i sumy zbiorów.

Dzięki aksjomatycznemu podejściu do definicji miary niezwartości możemy stworzyć wygodne formuły miar w przestrzeniach, dla których nie są znane warunki konieczne i wystarczające dla relatywnej zwartości zbioru. Problem taki występuje np. w przestrzeni l_∞. Ponadto, konstruując w odpowiedni sposób jądro możemy stworzyć miary niezwartości umożliwiające nam scharakteryzowanie rozwiązań badanych równań bądź układów równań.

2.2 Klasyczne miary niezwartości

Ten podrozdział poświęcimy omówieniu dwóch klasycznych miar niezwartości, tj. miary niezwartości Kuratowskiego oraz Hausdorffa.

Pierwszą omawianą przez nas miarą niezwartości będzie wprowadzona przez polskiego matematyka K. Kuratowskiego w 1930 r. tzw. miara niezwartości Kuratowskiego, zdefiniowana następująco.

Definicja 2.2.1. Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech X będzie ograniczonym podzbiorem przestrzeni M. Wówczas *miarę Kuratowskiego* zbioru X oznaczamy przez $\alpha(X)$ i definiujemy jako

$$\alpha(X) = \inf\{\varepsilon > 0 : \ X \textit{ można pokryć skończoną liczbą zbiorów o średnicy mniejszej od } \varepsilon\}.$$

Powyższą formułę można zapisać symbolicznie w następujący sposób

$$\alpha(X) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : \ X \subset \bigcup_{i=1}^{n} X_i : \ X_i \subset M, \ diam(X_i) < \varepsilon, \ i = 1,2,\ldots,n, \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Wprost z definicji wynika, że

$$\alpha(X) \leqslant diam(X).$$

Ponadto, analizując definicję funkcji α, otrzymujemy następujące własności miary Kuratowskiego [10]:

(a) $\alpha(X) = 0 \ \Leftrightarrow \ \overline{X}$ jest zwarty,

(b) $\alpha(X) = \alpha(\overline{X})$,

(c) $X \subset Y \implies \alpha(X) \leqslant \alpha(Y)$,

(d) $\alpha(X \cup Y) = \max\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$,

(e) $\alpha(X \cap Y) \leqslant \min\{\alpha(X), \alpha(Y)\}$.

Kolejna własność miary α stanowi uogólnienie dobrze znanego z topologii Twierdzenia Cantora [65].

(f) Dla każdego zstępującego ciągu (X_n) niepustych, domkniętych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni X takiego, że $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha(X_n) = 0$ zbiór $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty i zwarty.

Przy dodatkowym założeniu, że M jest przestrzenią Banacha otrzymujemy dodatkowe własności wynikające ze struktury przestrzeni wektorowej:

(g) $\alpha(X+Y) \leqslant \alpha(X) + \alpha(Y)$,

(h) $\alpha(\lambda X) = |\lambda|\alpha(X)$ dla $\lambda \in \mathbb{R}$,

(i) $\alpha(ConvX) = \alpha(X)$.

Jeżeli założymy, że M jest nieskończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, otrzymujemy kolejną własność [18]:

$$|\alpha(X_1) - \alpha(X_2)| \leqslant 2d_H(X_1, X_2) \tag{2.1}$$

dla dowolnych zbiorów $X_1, X_2 \in \mathfrak{M}_M$.

Zauważmy, że własność (a) implikuje, iż miara Kuratowskiego jest miarą pełną, natomiast z (d) wynika, że ma ona własność maksimum. Dalej, wykorzystując (g) i (h) otrzymujemy, że α jest miarą subliniową. Łącząc te fakty można stwierdzić, że jest to miara regularna.

Pomimo z pozoru prostej definicji miara niezwartości Kuratowskiego okazuje się być trudna w zastosowaniach. Podczas gdy równość $\alpha(B_1) = 0$ w przestrzeni skończenie wymiarowej jest natychmiastową konsekwencją własności (a), (b) oraz Twierdzenia Riesza o zwartości kuli [76], to obliczenie miary niezwartości dla kuli jednostkowej w przestrzeni nieskończenie wymiarowej wymagało dużych umiejętności. Dopiero w 1970 roku udowodniono, że $\alpha(B_1) = 2$ w przypadku przestrzeni nieskończenie wymiarowej [48].

Kolejną i jak się okazuje prostszą w zastosowaniach miarą niezwartości jest miara Hausdorffa. Przypomnijmy najpierw jej definicję [10, 18].

Definicja 2.2.2. Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną oraz niech X będzie dowolnym niepustym i ograniczonym podzbiorem przestrzeni M. Wówczas *miarę niezwartości Hausdorffa* zbioru X oznaczamy przez $\chi(X)$ i definiujemy wzorem

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0: \textit{ X można pokryć skończoną liczbą kul o promieniach mniejszych od } \varepsilon\ \}.$$

Równoważnie

$$\chi(X) = \inf\left\{\varepsilon > 0: \ X \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, r_i),\ x_i \in M,\ r_i < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Ponieważ w definicji miary Hausdorffa nie zakłada się, że środki kul pokrywających zbiór X należą do zbioru X, definicję tą możemy wyrazić następująco:

$$\chi(X) = \inf\{\varepsilon > 0: \ X \text{ ma skończoną } \varepsilon\text{-sieć w } M\}.$$

Można wykazać, że miara χ zachowuje własności (a)-(i) podane wyżej dla miary Kuratowskiego α. Tym samym jest ona miarą regularną.
Pomimo, iż miarę tą skonstruowali L.S. Goldenštein, I.T. Gohberg i A.S. Markus nie jest przypadkiem, że nazwano ją nazwiskiem F. Hausdorffa. Okazuje się bowiem, że istnieje ścisła zależność między miarą χ a odległością Hausdorffa [18].

Twierdzenie 2.2.3. *Załóżmy, że (M,d) jest przestrzenią metryczną oraz X, X_1, $X_2 \in \mathfrak{M}_M$. Niech ponadto symbol $\mathfrak{N}_M^c$ oznacza zbiór wszystkich niepustych zwartych podzbiorów przestrzeni M. Wówczas*

$$\chi(X) = \operatorname{dist}(X, \mathfrak{N}_M^c) \tag{2.2}$$

oraz

$$|\chi(X_1) - \chi(X_2)| \leqslant d_H(X_1, X_2). \tag{2.3}$$

Zauważmy, że z oszacowań (2.1) i (2.3) otrzymujemy, że funkcje α i χ spełniają warunek Lipschitza względem odległości Hausdorffa d_H.
Kolejne twierdzenie pokazuje, że miary α i χ są w pewnym sensie równoważne.

Twierdzenie 2.2.4. *Niech (M,d) będzie przestrzenią metryczna zupełną oraz niech $X \in \mathfrak{M}_M$ będzie ustalonym zbiorem. Wtedy*

$$\chi(X) \leqslant \alpha(X) \leqslant 2\chi(X).$$

Niestety odpowiedź na wynikające z powyższego twierdzenia pytanie, czy każda regularna miara niezwartości μ jest równoważna mierze Hausdorffa okazuje się być negatywna [17].

W literaturze możemy znaleźć dokładniejsze oszacowania i inne zależności między miarami Hausdorffa i Kuratowskiego (por. [10, 27, 91]) oraz wiele innych własności tych miar [18, 84]. Podobnie jak w przypadku miary Kuratowskiego oczywistym jest, że w przestrzeni skończonego wymiaru $\chi(B_1) = 0$. Natomiast gdy mamy do czynienia z przestrzenią nieskończenie wymiarową otrzymujemy, że $\chi(B_1) = 1$. Dowody tej własności można znaleźć m.in. w [18, 70].

Warto wspomnieć, że w niektórych przestrzeniach Banacha takich jak $c_0,\ l_p\ (1 \leqslant p < \infty)$, $C([a,b])$ istnieją formuły związane ze strukturą tych przestrzeni wyrażające miarę niezwartości Hausdorffa ([2, 3, 10]). Z drugiej strony, w niektórych przestrzeniach Banacha np. w $L^p(a,b)$ czy c, znamy formuły dla regularnych miar niezwartości, które są równoważne mierze χ [1, 10, 71]. Niestety w wielu przestrzeniach Banacha nie jesteśmy w stanie skonstruować formuł dla miar niezwartości Hausdorffa lub miar jej równoważnych. W tej styuacji pomocne jest aksjomatyczne podejście do teorii miar niezwartości omówione w poprzednim podrozdziale. Wówczas ograniczamy się do miar niezwartości według Definicji 2.1.1, które nie są nawet pełne.

2.3 Miary niezwartości w klasycznych przestrzeniach ciągowych

Podrozdział ten poświęcimy wprowadzeniu miar niezwartości w przestrzeniach Banacha $c_0,\ c$ i l_∞ oraz omówieniu ich własności.

Na początku rozważmy przestrzeń c_0 z normą supremum. Jak już wspomnieliśmy, w przestrzeni tej jesteśmy w stanie podać formułę wyrażającą miarę niezwartości Hausdorffa.

Konstrukcja miary niezwartości w przestrzeni c_0 jest dość klarowna dzięki temu, że znamy warunki konieczne i wystarczające dla relatywnej zwartości zbioru w tej przestrzeni. Przypomnijmy twierdzenie określające te kryteria.

Twierdzenie 2.3.1. *Zbiór $A \subset c_0$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:*

(i) $A \in \mathfrak{M}_{c_0}$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k|:\ a=(a_n)\in A,\ k>n\}=0.$

Widzimy zatem, że zbiór $X \in \mathfrak{M}_{c_0}$ należy do $\mathfrak{N}_{c_0}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\{\sup\{|x_k|:\ k>n\}\}\right\}=0.$$

Można udowodnić, że dla $X \in \mathfrak{M}_{c_0}$ funkcja

$$\mu_{c_0}(X)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\{\sup\{|x_k|:\ k>n\}\}\right\}$$

stanowi miarę niezwartości Hausdorffa w przestrzeni c_0. Dowód tego faktu wymaga rozważenia dodatkowych miar niezwartości związanych z bazą Schaudera. Ponieważ nie są one istotne dla naszych dalszych rozważań, zainteresowanych kierujemy do książki [10].
Ze względu na to, że μ_{c_0} jest miarą Hausdorffa będziemy ją dalej oznaczać przez χ_{c_0}, tj.:

$$\chi_{c_0}(X)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\{\sup\{|x_k|:\ k>n\}\}\right\}. \tag{2.4}$$

W przestrzeni ciągowej c niestety nie znamy wzoru opisującego miarę niezwartości Hausdorffa. Korzystając m.in. z istnienia bazy Schaudera tej przestrzeni oraz twierdzeń opisujących pewne zależności dotyczące miary χ i przestrzeni ciągowych z bazą Schaudera (zob. [18]), dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_c$ otrzymujemy oszacowanie

$$\frac{1}{2}\mu(X)\leqslant\chi(X)\leqslant\mu(X),$$

gdzie

$$\mu(X)=\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\{|x_i-\lim_{k\to\infty}x_k|:\ i\geqslant n\}\right\}\right\} \tag{2.5}$$

jest miarą regularną w przestrzeni c. Niestety miara wyrażona wzorem (2.5) okazuje się być trudna z użyciu ze względu na konieczność użycia granic ciągów ze zbioru X. Wygodniejszy w zastosowaniu okazuje się być związany z granicą ciągu warunek Cauchy'ego nie wymagający znajomości granicy ciągu. Zatem dla $X \in \mathfrak{M}_c$ określmy miarę niezwartości μ_c następująco

$$\mu_c(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_k)\in X} \left\{ \sup\{|x_i - x_j| : \ i, j \geqslant n\} \right\} \right\}. \tag{2.6}$$

Miara ta jest regularna i równoważna mierze Hausdorffa χ w przestrzeni Banacha c [10, 18].

Dalej rozważmy przestrzeń ciągową l_∞. Niestety określenie rodziny $\mathfrak{N}_{l_\infty}$ okazuje się być problematyczne oraz nie ma wzoru wyrażającego miarę niezwartości Hausdorffa w tej przestrzeni. Nie znamy także wzoru dla regularnej miary niezwartości [10, 13, 18]. Spowodowane jest to faktem, że l_∞ nie jest przestrzenią ośrodkową, więc nie możemy wykorzystać twierdzeń dotyczących miar niezwartości w przestrzeniach Banacha z bazami Schaudera. W związku z tym musimy ograniczyć się do aksjomatycznej definicji miary niezwartości (por. Definicja 2.1.1).

Ustalmy zatem dowolny zbiór $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$. Poniższe wzory określają nieregularne miary niezwartości w przestrzeni l_∞ [10, 18]:

$$\mu_1(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_k)\in X} \{\sup\{|x_k| : \ k \geqslant n\}\} \right\}, \tag{2.7}$$

$$\mu_2(X) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_k)\in X} \left\{ \sup\{|x_i - x_j| : \ i, j \geqslant n\} \right\} \right\}, \tag{2.8}$$

$$\mu_3(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n, \tag{2.9}$$

gdzie:

$$X_n = \{x_n : \ x = (x_k) \in X\} \quad \text{oraz} \quad \operatorname{diam} X_n = \sup\{|x_n - y_n| : \ x = (x_k), \ y = (y_k) \in X\}.$$

Zwróćmy uwagę, że wzór (2.7) dla miary niezwartości w przestrzeni l_∞ jest taki sam jak wzór (2.4) określający miarę niezwartości w przestrzeni c_0, w której funkcja ta jest już miarą Hausdorffa. Podobnie wzór (2.8) odpowiada mierze μ_c w przestrzeni c zadanej wzorem (2.6). Ponadto wszystkie trzy miary są subliniowe, a jedynie dwie pierwsze miary μ_1, μ_2 mają własność maksimum.

Jądra tych miar są następujące [10]:

- $ker\mu_1$ - rodzina wszystkich zbiorów ograniczonych złożonych z ciągów zbieżnych do zera z tą samą prędkością.

- $ker\mu_2$ - rodzina wszystkich zbiorów ograniczonych złożonych z ciągów zbieżnych z tą samą prędkością. Ponadto mamy, że $ker\mu_2 = \mathfrak{N}_c$.
- $\ker\mu_3$ - rodzina wszystkich zbiorów $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$ takich, że dla dowolnego ciągu $x \in X$

  $$\lim_{n\to\infty} |y_n - x_n| = 0$$

  jednostajnie względem dowolnego $y \in X$.

Podane wyżej miary niezwartości w ciągowych przestrzeniach Banacha c_0, c i l_∞ znajdują szerokie zastosowanie m.in. w teorii równań różniczkowych [11, 13].

2.4 Miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$

W podrozdziale tym omówimy konstrukcję miar niezwartości w przestrzeniach Banacha $BC([0,T],E)$, $BC(\mathbb{R}_+,E)$, $BC(\mathbb{R}_+,c_0)$ oraz $BC(\mathbb{R}_+,l_\infty)$.

W tym celu załóżmy, że E jest przestrzenią Banacha i ustalmy dowolną liczbę $T > 0$. Symbolem $BC([0,T],E)$ oznaczamy przestrzeń wszystkich funkcji $x : [0,T] \to E$ ciągłych i ograniczonych na przedziale $[0,T]$. Oczywiście symbol $BC([0,T],E)$ możemy zastąpić symbolem $C([0,T],E)$ definiującym przestrzeń funkcji określonych i ciągłych na $[0,T]$ o wartościach w przestrzeni Banacha E. W przestrzeni tej określona jest standardowa norma supremum

$$||x||_{C([0,T],E)} = \sup\{||x(t)||_E : \ t \in [0,T]\}$$

dla $x = x(t) \in C([0,T],E)$.

Tak określona przestrzeń unormowana jest przestrzenią Banacha.

Konstrukcja miary niezwartości w przestrzeni $C([0,T],E)$ opiera się na uogólnieniu dobrze znanego twierdzenia Arzéli-Ascolego [10].

Twierdzenie 2.4.1. *Zbiór $X \in \mathfrak{M}_{C([0,T],E)}$ jest relatywnie zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe i zbiór $X(t)$ jest relatywnie zwarty w E dla każdego $t \in [0,T]$.*

Zbiór $X(t)$ w powyższym twierdzeniu nazywamy *przekrojem zbioru X w punkcie t* i definiujemy jako

$$X(t) = \{x(t) : \ x \in X\}. \tag{2.10}$$

Konstruując miarę niezwartości danego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{C([0,T],E)}$ musimy zatem wziąć pod uwagę dwie kwestie: w jakim stopniu funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe oraz relatywną zwartość zbioru $X(t)$ w przestrzeni E. Zwartość przekroju $X(t)$ zmierzymy za pomocą miary niezwartości w przestrzeni E.

Pierwszy składnik szukanej miary niezwartości definiujemy za pomocą modułu ciągłości. Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$ i dowolną funkcję $x \in C([0,T],E)$. Wówczas otrzymujemy kolejno

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup\{||x(t)-x(s)||_E : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\},$$

$$\omega(X,\varepsilon) = \sup\{\omega(x,\varepsilon) : \ x \in X\} = \sup_{x\in X}\{\sup\{||x(t)-x(s)||_E : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\}\},$$

oraz

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega(X,\varepsilon).$$

Załóżmy dalej, że μ jest dowolną miarą niezwartości w przestrzeni E. Zdefiniujmy:

$$\mu^*(X) = \sup\{\mu(X(t)) : \ t \in [0,T]\}.$$

Wówczas otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.4.2. *Funkcja określona dla $X \in \mathfrak{M}_{C([0,T],E)}$ wzorem*

$$\mu_T(X) = \omega_0(X) + \mu^*(X) \tag{2.11}$$

jest miarą niezwartości w przestrzeni $C([0,T],E)$. Jądro $\ker\mu_T$ składa się ze wszystkich zbiorów X funkcji jednakowo ciągłych i takich, że $X(t) \in \ker\mu$ dla dowolnego $t \in [0,T]$, czyli $X(t)$ jest zbiorem relatywnie zwartym w przestrzeni Banacha E dla każdego $t \in [0,T]$.

Dowód powyższego twierdzenia w wersji ogólnej, tzn. dla przestrzeni $C([a,b],E)$ można znaleźć w [10].

Warto wspomnieć tutaj o jeszcze jednej mierze używanej przez wielu autorów [23, 41, 50, 77]. Mianowicie, jeśli zawęzimy swoje rozważania do rodziny zbiorów ograniczonych i jednakowo ciągłych, którą oznaczymy przez $\mathfrak{M}^{eq}_{C_{[a,b]}}$ i wykorzystamy miarę Hausdorffa χ_E w przestrzeni E, to funkcja

$$\chi_{C_{[a,b]}}(X) = \max\{\chi_E(X(t)) : \ t \in [a,b]\}, \ \text{ dla } \ X \in \mathfrak{M}^{eq}_{C_{[a,b]}}$$

jest miarą niezwartości Hausdorffa w przestrzeni $C([a,b],E)$ [10].

Formuły dla szczególnych przypadków powyższej miary niezwartości zostały przedstawione w pracy [23]. Autorzy rozważyli przestrzenie $C([a,b],c_0)$, $C([a,b],l_1)$ oraz wykorzystali miary określone w tych przestrzeniach do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych Hammersteina.

Rozważmy teraz kolejną przestrzeń stanowiącą uogólnienie przestrzeni $C([0,T],E)$, czyli przestrzeń Banacha $BC(\mathbb{R}_+,E)$. Oczywiście, jeżeli weźmiemy funkcję $x \in BC(\mathbb{R}_+,E)$ to jej zawężenie do przedziału $[0,T]$, tj. $x|_{[0,T]}$ jest elementem przestrzeni $C([0,T],E)$. Przypomnijmy, iż konstrukcję i własności przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$ jak i jej przypadki szczególne dla przestrzeni E równej c_0, c, l_∞ omawialiśmy w podrozdziale 1.2.

Przejdźmy teraz do konstrukcji miary niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$ [6].

Załóżmy najpierw, że γ jest miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E. Dodatkowo załóżmy, że jest ona regularna i równoważna mierze Hausdorffa χ, tzn. że istnieją dodatnie stałe m, M takie, że dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_E$ spełniony jest warunek (zob. [10]):

$$m\chi(X) \leqslant \gamma(X) \leqslant M\chi(X).$$

Ustalmy dalej dowolny zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. Ponadto weźmy dowolnie ustalone liczby $\varepsilon > 0$, $T > 0$ oraz funkcję $x \in X$. Zdefiniujmy moduł ciągłości $\omega^T(x,\varepsilon)$ funkcji x na przedziale $[0,T]$, kładąc

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\{||x(t)-x(s)||_E : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\}.$$

Dalej, określmy kolejno:

$$\omega^T(X,\varepsilon) = \sup\left\{\omega^T(x,\varepsilon) : \ x \in X\right\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^T(X,\varepsilon),$$
$$\omega_0(X) = \lim_{T\to\infty}\omega_0^T(X). \tag{2.12}$$

Można pokazać, że wzór (2.12) jest zdefiniowany poprawnie [6].

Następnie korzystając z faktu, że $X(t)$ czyli przekrój zbioru X dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$ (por. (2.10)) jest zbiorem ograniczonym, określmy wartość

$$\overline{\gamma}_T(X) = \sup\{\gamma(X(t)) : \ t \in [0,T]\} \tag{2.13}$$

oraz położmy

$$\overline{\gamma}_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \overline{\gamma}_T(X). \tag{2.14}$$

Załóżmy dodatkowo, że $T > 0$ jest ustaloną liczbą. Wówczas mamy

$$a_T(X) = \sup_{x\in X}\{\sup\{||x(t)||_E : \ t \geqslant T\}\}.$$

Ponieważ funkcja $T \to a_T(X)$ jest nierosnąca wnioskujemy, że istnieje skończona granica

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} a_T(X). \tag{2.15}$$

Ostatecznie, łącząc wzory (2.12), (2.14) i (2.15) dostajemy funkcję γ_a określoną następująco

$$\gamma_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\gamma}_\infty(X) + a_\infty(X) \tag{2.16}$$

dla $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$. Otrzymana funkcja jest miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$ mającą własność maksimum. Dowód tego faktu można znaleźć w [6]. W zacytowanej pracy przedstawiono także inne miary niezwartości w tej przestrzeni różniące się ostatnim składnikiem sumy (2.16). Nie będziemy ich teraz omawiać, ponieważ wykorzystamy tylko miarę podaną wyżej.

Istotny natomiast będzie dla nas fakt, że jądro miary γ_a składa się ze wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$ takich, że funkcje ze zbioru X są lokalnie jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ i dążą do zera w nieskończoności z tą samą prędkością. Ponadto przekroje $X(t)$ zbioru X dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ należą do jądra miary niezwartości γ w przestrzeni E, czyli są zbiorami relatywnie zwartymi w przestrzeni Banacha E [6].

Korzystając z formuł dla miar niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,E)$ i wybierając za E konkretne przestrzenie Banacha możemy tworzyć miary niezwartości w interesujących nas przestrzeniach, odpowiednio dobranych pod kątem docelowych zastosowań.

Korzystając zatem z miary niezwartości γ_a danej wzorem (2.16) i przyjmując za E przestrzeń Banacha c_0 skonstruujemy miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+,c_0)$. Przestrzeń tą pozwolimy sobie skrótowo oznaczać symbolem BC_0. Przypomnijmy, że przestrzeń BC_0 została omówiona w podrozdziale 1.2.

Zaprezentujemy zatem formuły dla kolejnych składników miary γ_a określonej na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC_0}$ wzorem (2.16).

Ustalmy więc $X \in \mathfrak{M}_{BC_0}$ i rozważmy pierwszy składnik sumy we wzorze (2.16), czyli funkcję ω_0 określoną wzorem (2.12). W tym celu weźmy $\varepsilon > 0$ oraz $T > 0$. Wówczas, dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC_0}$ i $x \in X$, mamy kolejno:

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\left\{\sup\{|x_n(t) - x_n(s)| : \ n \in \mathbb{N}\} : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\},$$

$$\omega_T(X,\varepsilon) = \sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\left\{\sup\{|x_n(t) - x_n(s)| : \ n \in \mathbb{N}\} : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\left\{\sup\{|x_n(t) - x_n(s)| : \ n \in \mathbb{N}\} : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}\right\},$$

$$\omega_0(X) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left\{\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n(t) - x_n(s)|\} : \ t,s \in [0,T], \ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}\right\}\right\}. \tag{2.17}$$

Zauważmy dalej, że drugi składnik miary γ_a, czyli funkcja $\overline{\gamma}_\infty$ dana wzorem (2.14) wykorzystuje miarę γ określoną w przestrzeni c_0. Wiemy już, że w tej przestrzeni znamy formułę dla miary niezwartości Hausdorffa. Określiliśmy ją w podrozdziale 2.3 wzorem (2.4) i oznaczyliśmy jako χ_{c_0}. We wzorze (2.13) funkcji $\overline{\gamma}_\infty$ wykorzystamy zatem miarę niezwartości Hausdorffa χ_{c_0}. W związku z tym oznaczmy $\overline{\gamma}_\infty$ jako $\overline{\chi}_\infty$ oraz $\overline{\gamma}_T$ jako $\overline{\chi}_T$ i zdefiniujmy następująco:

$$\overline{\chi}_T(X) = \sup\{\chi_{c_0}(X(t)) : \ t \in [0,T]\},$$

gdzie

$$\chi_{c_0}(X(t)) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\{|x_k(t)| : k \geqslant n\}\right\}\right\}.$$

Stąd

$$\overline{\chi}_T(X) = \sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\{|x_k(t)| : k \geqslant n\}\right\}\right\}\right\}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\begin{aligned}\overline{\chi}_\infty(X) &= \lim_{T\to\infty}\overline{\chi}_T(X)\\ &= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_k)\in X}\left\{\sup\{|x_k(t)| : k \geqslant n\}\right\}\right\}\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Weźmy teraz pod uwagę ostatni składnik miary γ_a, czyli funkcję a_∞ określoną równością (2.15). W tym przypadku wystarczy jedynie uwzględnić normę określoną w przestrzeni c_0, czyli normę supremum. Mamy wówczas

$$a_\infty(X) = \lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{x=(x_k)\in X} \left\{ \sup_{t\geqslant T} \{ \sup \{ |x_n(t)| : n \in \mathbb{N} \} \} \right\} \right\}. \tag{2.19}$$

Nareszcie, wstawiając (2.17), (2.18) oraz (2.19) do równości (2.16) otrzymujemy miarę niezwartości w przestrzeni BC_0. W związku z wykorzystaniem miary Hausdorffa z przestrzeni c_0 oznaczmy ją przez χ_a. Wówczas otrzymujemy funkcję określoną dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{BC_0}$ wzorem

$$\chi_a(X) = \omega_0(X) + \overline{\chi}_\infty(X) + a_\infty(X), \tag{2.20}$$

będącą miarą niezwartości w przestrzeni BC_0 [6]. W zacytowanej pracy możemy znaleźć także inne miary niezwartości określone w przestrzeni BC_0 oraz przykład zastosowania miary χ_a do badania rozwiązań nieskończonych układów równań całkowych Volterry-Hammersteina. W analogiczny sposób możemy tworzyć miary niezwartości w innych przestrzeniach, na przykład w przestrzeni Banacha $BC(\mathbb{R}_+, l^1)$ [34, 35].

Zauważmy, że konstruując powyższą miarę w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ zakładaliśmy, że w przestrzeni E dana jest regularna miara niezwartości. Niestety w wielu przestrzeniach Banacha nie istnieją miary Hausdorffa lub miary im równoważne. Taka sytuacja występuje między innymi w przestrzeni l_∞. W związku z tym, aby skonstruować miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ posłużymy się inną miarą niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ generowaną przez dowolną miarę niezwartości w przestrzeni E [9].

Ustalmy zatem dowolny zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ i weźmy liczbę $\varepsilon > 0$. Dla dowolnej funkcji $x = x(t) \in X$ oznaczmy przez $\omega^\infty(x, \varepsilon)$ moduł ciągłości funkcji x na przedziale $\mathbb{R}_+$ zdefiniowany następująco:

$$\omega^\infty(x, \varepsilon) = \sup \{ ||x(t) - x(s)||_E : \ t, s \in \mathbb{R}_+, \ |t - s| \leqslant \varepsilon \} .$$

Zauważmy, że $\omega^\infty(x, \varepsilon) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja x jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}_+$. Dalej, biorąc w powyższej równości supremum po wszystkich funkcjach $x \in X$ i przechodząc z $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy kolejno:

$$\omega^\infty(X, \varepsilon) = \sup \{ \omega^\infty(x, \varepsilon) : \ x \in X \} ,$$

$$\omega_0^\infty(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^\infty(X, \varepsilon). \tag{2.21}$$

Łatwo zauważyć, ze $\omega_0^\infty(X) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ lub równoważnie, jednakowo jednostajnie ciągłe na $\mathbb{R}_+$.

Załóżmy dodatkowo, że μ jest miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E i zdefiniujmy funkcję $\overline{\mu}_\infty(X)$ określoną na rodzinie $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+,E)}$ wzorem

$$\overline{\mu}_\infty(X) = \lim_{T \to \infty} \overline{\mu}_T(X), \tag{2.22}$$

gdzie

$$\overline{\mu}_T(X) = \sup\left\{\mu(X(t)) : \ t \in [0,T]\right\}.$$

Ponieważ funkcja $T \to \overline{\mu}_T(X)$ jest niemalejąca i ograniczona z góry na $\mathbb{R}_+$, granica we wzorze (2.22) istnieje (zob. [9]).

Następnie, dla dowolnie ustalonej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ połóżmy

$$c(X) = \limsup_{t \to \infty} \operatorname{diam} X(t). \tag{2.23}$$

Ostatecznie, łącząc (2.21), (2.22) i (2.23) otrzymujemy formułę

$$\mu_c(X) = \omega_0^\infty(X) + \overline{\mu}_\infty(X) + c(X) \tag{2.24}$$

określającą miarę niezwartości w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$. Dowód tego faktu oraz konstrukcje innych miar niezwartości w tej przestrzeni różniące się składnikiem $c(X)$ można znaleźć w [9].

Istotny dla nas będzie natomiast fakt, że jądro $ker\mu_c$ miary μ_c zawiera wszystkie niepuste i ograniczone podzbiory X przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ takie, że funkcje ze zbioru X są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ oraz wszystkie przekroje $X(t)$ zbioru X dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$ są elementami jądra $ker\mu$ miary niezwartości μ w przestrzeni E. Dodatkowo grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji należących do X dąży do zera w nieskończoności.

W dalszym ciągu rozważmy przestrzeń $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$ i oznaczmy ją symbolem BC_∞. Przedstawimy konstrukcję miary niezwartości w przestrzeni BC_∞. W tym celu wykorzystamy miarę μ_c określoną wzorem (2.24) w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, E)$ i jako E przyjmiemy przestrzeń Banacha l_∞.

Ustalmy zatem dowolny zbiór $X \in \mathfrak{M}_{BC_\infty}$. Podamy najpierw wzór funkcji ω_0^∞ określonej równością (2.21), w której uwzględnimy normę supremum w przestrzeni l_∞. Niech więc $\varepsilon > 0$

będzie ustaloną liczbą i $x = (x_n(t)) \in X$ będzie dowolną funkcją. Wtedy moduł ciągłości funkcji x ma postać

$$\begin{aligned} \omega^{\infty}(x,\varepsilon) &= \sup\{\| x(t) - x(s) \|_{l_\infty}\colon\ t,s \in \mathbb{R}_+,\ |t-s| \leqslant \varepsilon\} \\ &= \sup\{\sup\{|x_n(t) - x_n(s)|\ :\ n = 1,2,\dots\}\ :\ t,s \in \mathbb{R}_+,\ |t-s| \leqslant \varepsilon\}\,. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\omega^{\infty}(X,\varepsilon) = \sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - x_n(s)|\ :\ t,s \in \mathbb{R}_+,\ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}.$$

Korzystając z powyższego wzoru i (2.21) dostajemy

$$\begin{aligned} \omega_0^{\infty}(X) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\omega^{\infty}(X,\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\sup_{x\in X}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - x_n(s)|\ :\ t,s \in \mathbb{R}_+,\ |t-s| \leqslant \varepsilon\right\}\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Zdefiniujemy teraz kolejny składnik $\overline{\mu}_\infty$ miary μ_c, który jest zadany wzorem (2.22). Jako miarę μ występującą we wzorze funkcji $\overline{\mu}_\infty$ weźmy miarę niezwartości w przestrzeni l_∞ określoną w poprzednim podrozdziale wzorem (2.9), czyli funkcję μ_3. Przypomnijmy, że dla dowolnego zbioru $X \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$ jest ona określona następująco

$$\mu_3(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n.$$

Korzystając z powyższej miary niezwartości i wzoru (2.22) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_\infty^3(X) &= \lim_{T\to\infty}\overline{\mu}_T^3(X) \\ &= \lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\limsup_{n\to\infty}\{\sup\{|x_n(t) - y_n(t)|\ :\ x = (x_n(t)),\ y = (y_n(t)) \in X\}\}\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Pozostała nam do sformułowania wartość $c(X)$ zadana wzorem (2.23). Posługując się normą w przestrzeni l_∞, dostajemy

$$\begin{aligned} c(X) &= \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t) \\ &= \limsup_{t\to\infty}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - y_n(t)|\ :\ x = (x_n(t)),\ y = (y_n(t)) \in X\right\}\right\}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ostatecznie, sumując (2.25), (2.26), (2.27) i korzystając ze wzoru (2.24) otrzymujemy miarę niezwartości w przestrzeni BC_∞ odpowiadającą mierze μ_3 w przestrzeni l_∞. Miara ta jest sformułowana w następujący sposób:

$$\mu_c^3(X) = \omega_0^{\infty}(X) + \overline{\mu}_\infty^3(X) + c(X). \tag{2.28}$$

Jest to miara subliniowa, ale nie ma własności maksimum. Nie jest to także miara pełna.

Zauważmy, że w przestrzeni BC_∞ możemy w podobny sposób skonstruować inne miary niezwartości. Pozwala nam na to większy wybór miar μ z przestrzeni l_∞ we wzorze (2.22). Przypomnijmy, że w przestrzeni l_∞ podaliśmy trzy miary niezwartości μ_1, μ_2, μ_3 dane wzorami (2.7)-(2.9). Zastosowania niektórych z tych miar niezwartości w przestrzeni BC_∞ do badania nieskończonych układów równań całkowych można znaleźć m.in. w [8, 20, 25].

3 Znikające w nieskończoności rozwiązania nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna

Celem tego rozdziału jest przedstawienie wyników dotyczących istnienia rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna określonych na przedziale $\mathbb{R}_+$. Rozważania będziemy prowadzić w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, c_0) = BC_0$ opisanej w podrozdziale 1.2. Kluczowe w dowodzie przedstawionego twierdzenia egzystencjalnego będzie twierdzenie Schaudera o punkcie stałym oraz miara niezwartości χ_a w przestrzeni BC_0 przedstawiona w poprzednim rozdziale i określona wzorem (2.20).

Do dalszych rozważań będziemy potrzebować podanych poniżej dwóch lematów, których dowody można znaleźć w [6].

Lemat 3.1. Niech $x = (x_n) \in BC_0$. Wówczas ciąg (x_n) jest wspólnie ograniczony i lokalnie jednakowo ciągły na przedziale $\mathbb{R}_+$, tzn. (x_n) jest jednakowo ciągły na przedziale $[0,T]$ dla każdej liczby $T > 0$.

Lemat 3.2. Niech $x = (x_n) \in BC_0$. Wtedy ciąg funkcyjny (x_n) jest niemal jednostajnie zbieżny do zera na zbiorze $\mathbb{R}_+$, tzn. ciąg (x_n) jest jednostajnie zbieżny do zera na przedziale $[0,T]$ dla dowolnego $T > 0$.

Przypomnijmy jeszcze twierdzenie Schaudera o punkcie stałym [87].

Twierdzenie 3.3. *Niech E będzie przestrzenią Banacha. Wówczas każde ciągłe odwzorowanie niepustego, wypukłego i zwartego podzbioru przestrzeni E w siebie ma punkt stały.*

Rozważmy teraz układ kwadratowych równań całkowych Urysohna określony następująco

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^\infty u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau \tag{3.1}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

Załóżmy, że spełnione są następujące warunki.

(i) Ciąg $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni BC_0 takim, że $\lim_{t\to\infty} a_n(t) = 0$ jednostajnie względdem $n = 1, 2, \ldots$, tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{T>0}{\exists} \ \underset{t\geqslant T}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |a_n(t)| \leqslant \varepsilon.$$

(ii) Dla każdej liczby naturalnej n funkcja f_n jest określona na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmuje wartości rzeczywiste. Ponadto funkcja $t \to f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in c_0$ i $n \in \mathbb{N}$, tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{t_0\in\mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{(x_i)\in c_0}{\forall} \ \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left[|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow \right.$$
$$\left. |f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t_0, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon\right].$$

(iii) Istnieje funkcja $l : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ niemalejąca na zbiorze $\mathbb{R}_+$, ciągła w punkcie 0 oraz spełniająca nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(t, y_1, y_2, \ldots)| \leqslant l(r) \sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz dla dowolnych ciągów $x = (x_i),\ y = (y_i) \in c_0$ takich, że $||x||_{c_0} \leqslant r,\ ||y||_{c_0} \leqslant r$.

(iv) Ciąg $(\overline{f}_n)$ określony wzorem

$$\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \ldots)|$$

jest elementem przestrzeni BC_0 oraz $\lim_{t\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$, tzn.:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{T>0}{\exists} \ \underset{t\geqslant T}{\forall} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} |\overline{f}_n(t)| \leqslant \varepsilon.$$

(v) Dla dowolnej liczby naturalnej n funkcja u_n odwzorowuje zbiór $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times c_0$ w zbiór $\mathbb{R}$. Ponadto rodzina funkcji $\{u_n(t, \tau, x_1, x_2, \ldots)\}$ jest lokalnie jednakowo ciągła dla $t \in \mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $\tau \in \mathbb{R}_+$ i $x = (x_i) \in c_0$, tzn.:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \underset{T>0}{\forall} \underset{\delta>0}{\exists} \underset{t,s\in[0,T]}{\forall} \underset{\tau\in\mathbb{R}_+}{\forall} \underset{x=(x_i)\in c_0}{\forall} \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left[|t - s| \leqslant \delta \Rightarrow \right.$$
$$\left. |u_n(t, \tau, x_1, x_2, \ldots) - u_n(s, \tau, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \varepsilon\right].$$

(vi) Rodzina funkcji $\{u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)\}$ jest jednakowo ciągła na dowolnym ograniczonym podzbiorze przestrzeni c_0, tzn. dla dowolnego ograniczonego zbioru $X \subset c_0$, dla każdego $T > 0$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla dowolnych $t,\tau \in [0,T],\ n \in \mathbb{N}$ oraz dla wszystkich $x = (x_i),\ y = (y_i) \in X$ takich, że $||x-y||_{c_0} \leqslant \delta$.

(vii) Dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje funkcja ciągła $g_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ oraz ciągła i niemalejąca funkcja $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)| \leqslant g_n(t,\tau)h(||(x_i)||_{c_0})$$

dla dowolnych $t,\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $(x_i) \in c_0$.

(viii) Dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ funkcja $\tau \to g_n(t,\tau)$ jest całkowalna na przedziale $\mathbb{R}_+$ oraz funkcje $t \to \int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau$ są wspólnie ograniczone na $\mathbb{R}_+$.

(ix)

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau :\ t \in [0,T]\right\}\right\} = 0$$

jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$.

Uwaga 3.4. Zauważmy, że na podstawie Lematu 3.2 oraz założeń (i), (iv) ciągi funkcyjne $(a_n(t))$ i $(\overline{f}_n(t))$ dążą do zera na przedziale $\mathbb{R}_+$. Stąd natomiast wynika, że istnieją skończone stałe $A, \overline{F}$ określone w następujący sposób:

$$A = \sup\{|a_n(t)| :\ t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\dots\},$$

$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) :\ t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\dots\}.$$

Wówczas możemy sformułować ostatnie założenie.

(x) Istnieje liczba $r_0 > 0$ będąca rozwiązaniem nierówności

$$A + \overline{F}Gh(r) + Grl(r)h(r) \leqslant r$$

oraz taka, że

$$Gl(r_0)h(r_0) < 1.$$

Stała G w powyższej nierówności określona jest wzorem:

$$G = \sup\left\{\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau :\ t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\dots\right\}.$$

Z założenia (viii) wnioskujemy, że $G < \infty$.

Mając na uwadze podane powyżej założenia dotyczące rozważanego układu możemy sformułować twierdzenie stanowiące główny rezultat tego rozdziału.

Twierdzenie 3.5 *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(x). Wtedy nieskończony układ równań całkowych określony wzorem* (3.1) *ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* BC_0.

Dowód. Zdefiniujmy operatory $F,\ U,\ Q$ określone na przestrzeni BC_0 następująco:

$$(Fx)(t) = ((F_n x)(t)) = (f_n(t,x(t))) = (f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)),$$

$$(Ux)(t) = ((U_n x)(t)) = \left(\int_o^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau\right),$$

$$(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) = (a_n(t) + (F_n x)(t)(U_n x)(t)).$$

Pokażemy najpierw, że operator F odwzorowuje przestrzeń BC_0 w siebie. W tym celu ustalmy dowolną funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_0$. Wówczas $(x_n(t)) \in c_0$ dla dowolnie ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$. Stąd dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0 \tag{3.2}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Dalej, korzystając z założeń (ii)-(iv), otrzymujemy

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t)| &= |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)| \\ &= |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots) - f_n(t,0,0,\dots) + f_n(t,0,0,\dots)| \\ &\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots) - f_n(t,0,0,\dots)| + |f_n(t,0,0,\dots)| \\ &\leqslant l(||x(t)||_{c_0}) \sup\{|x_i(t)| :\ i \geqslant n\} + \overline{f}_n(t). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Wykorzystując powyższe oszacowanie, równość (3.2), założenie (iv) oraz wspomnianą w Uwadze 3.4 zbieżność ciągu funkcyjnego $(\overline{f}_n(t))$ otrzymujemy, że dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$

$$\lim_{n\to\infty} (F_n x)(t) = 0.$$

Stąd bezpośrednio wnioskujemy, że $(Fx)(t) \in c_0$ dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Ponadto korzystając z nierówności (3.3) możemy stwierdzić, że funkcja Fx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Pozostało nam wykazać, że funkcja Fx jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+$. W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$ i weźmy dowolny punkt $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Z założenia o ciągłości funkcji $x : \mathbb{R}_+ \to c_0$ otrzymujemy, że:

$$\underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\forall} \left[|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t) - x(t_0)||_{c_0} \leqslant \varepsilon\right]. \tag{3.4}$$

Wybierzmy zatem $\delta > 0$ z warunku (3.4). Wtedy, dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ takiego, że $|t - t_0| \leqslant \delta$ i dla dowolnej liczby naturalnej n, dostajemy

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)| \\ &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\ &+ |f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)|. \end{aligned}$$

Dalej, wykorzystując założenie (iii) oraz oszacowanie (3.4), mamy

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\ &+ l\left(\sup\{||x(t)||_{c_0} : \ t \in \mathbb{R}_+\}\right) \sup\{|x_i(t) - x_i(t_0)| : \ i \geqslant n\} \\ &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| + l(||x||_{BC_0})\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Teraz, biorąc pod uwagę założenie (ii) możemy wybrać $\delta > 0$ tak, aby

$$|f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

Uwzględniając powyższe oszacowanie w nierówności (3.5) otrzymujemy

$$|(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| \leqslant (1 + l(||x||_{BC_0}))\varepsilon \tag{3.6}$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - t_0| \leqslant \delta$.

Stąd, biorąc supremum po wszystkich $n \in \mathbb{N}$ dostajemy nierówność

$$||(Fx)(t) - (Fx)(t_0)||_{c_0} \leqslant (1 + l(||x||_{BC_0}))\varepsilon,$$

która dowodzi ciągłości funkcji Fx w punkcie t_0. Z dowolności $t_0 \in \mathbb{R}_+$ wnioskujemy, że funkcja Fx jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. Ponadto, jak wcześniej pokazaliśmy $(Fx)(t) \in c_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$. Łącząc te fakty z ograniczonością funkcji Fx na zbiorze $\mathbb{R}_+$ dostajemy, że $Fx \in BC_0$. To zaś oznacza, że operator F przekształca przestrzeń BC_0 w siebie.

W dalszym ciągu udowodnimy, że także operatory U i Q odwzorowują przestrzeń BC_0 w siebie. Podobnie jak poprzednio wybierzmy dowolną funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_0$. Najpierw wykażemy, że funkcja Ux jest ograniczona. W tym celu wykorzystamy założenia (vii), (viii) i (x). Mianowicie, dla dowolnie ustalonych liczb $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|(U_nx)(t)| &= \left| \int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau \right| \\
&\leqslant \int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau \\
&\leqslant \int_0^\infty g_n(t,\tau)h(||(x_n(\tau))||_{c_0})d\tau \\
&\leqslant \int_0^\infty g_n(t,\tau)h(||x||_{BC_0})d\tau \\
&\leqslant h(||x||_{BC_0})\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau \leqslant Gh(||x||_{BC_0}).
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Oczywiście powyższe oszacowanie dowodzi ograniczoności funkcji Ux na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Weźmy teraz dowolną funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_0$. Pokażemy, że $(Qx)(t) \in c_0$ dla $t \in \mathbb{R}_+$. Przypomnijmy, że operator Q ma postać:

$$(Qx)(t) = ((Q_nx)(t)) = (a_n(t) + (F_nx)(t)(U_nx)(t)).$$

Ponieważ $x \in BC_0$ wiemy, że $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = 0$ dla ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas jak poprzednio zaobserwowaliśmy, także $\lim_{n\to\infty}(F_nx)(t) = 0$. Uwzględniając dodatkowo założenie (i) oraz nierówność (3.7) dostajemy, że

$$\lim_{n\to\infty}(Q_nx)(t) = 0.$$

Powyższa równość pokazuje, że $(Qx)(t) \in c_0$ dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$.

Zajmiemy się teraz ciągłością funkcji Qx. W tym celu ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$, $T > 0$ i wybierzmy liczbę $t_0 \in [0,T]$. Wtedy, biorąc pod uwagę założenia (i)-(iii), (vii) oraz (viii) znajdziemy $\delta > 0$ taką, że dla $t \in [0,T]$, $|t-t_0| \leqslant \delta$ (bez straty ogólności możemy założyć, że $t > t_0$)

i dla dowolnie wybranej liczby $n \in \mathbb{N}$, na podstawie (3.3), (3.6) i (3.7) spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned}
&|(Q_n x)(t) - (Q_n x)(t_0)| \\
&\leqslant |a_n(t) - a_n(t_0)| + |(F_n x)(t)(U_n x)(t) - (F_n x)(t_0)(U_n x)(t_0)| \\
&\leqslant |a_n(t) - a_n(t_0)| + |(F_n x)(t)(U_n x)(t) - (F_n x)(t_0)(U_n x)(t)| \\
&\quad + |(F_n x)(t_0)(U_n x)(t) - (F_n x)(t_0)(U_n x)(t_0)| \\
&\leqslant |a_n(t) - a_n(t_0)| + |(U_n x)(t)||(F_n x)(t) - (F_n x)(t_0)| \\
&\quad + |(F_n x)(t_0)||(U_n x)(t) - (U_n x)(t_0)| \\
&\leqslant \omega^T(a,\varepsilon) + Gh(||x||_{BC_0})(1 + l(||x||_{BC_0}))\varepsilon \\
&\quad + [l(||x(t)||_{c_0}) \sup\{|x_i(t)| : i \geqslant n\} \\
&\quad + \overline{F}] \int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| d\tau,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

gdzie

$$\omega^T(a,\varepsilon) = \sup\{|a_n(t) - a_n(s)| : t,s \in [0,T],\ |t-s| \leqslant \varepsilon,\ n = 1,2,\dots\}.$$

Oczywiście z założenia (i) wynika, że $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(a,\varepsilon) = 0$.

Oszacujemy teraz całkę występującą w nierówności (3.8). Mianowicie, prawdziwe są następujące oszacowania

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| d\tau \\
&\leqslant \int_0^T |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| d\tau \\
&\quad + \int_T^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \omega^T(u,\varepsilon) d\tau + \int_T^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| d\tau,
\end{aligned}$$

gdzie oznaczyliśmy

$$\begin{aligned}
\omega^T(u,\varepsilon) = \sup\{&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(s,\tau,x_1,x_2,\dots)| : t,s,\tau \in [0,T],\ |t-s| \leqslant \varepsilon, \\
&(x_i) \in c_0,\ n \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(u,\varepsilon) = 0$, co jest konsekwencją założenia (v).

Dalej, z powyższego oszacowania i założenia (vii) dostajemy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon)\\ +\int_T^\infty [|u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|+|u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|]\,d\tau\\ \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon)+\int_T^\infty g_n(t,\tau)h\left(||(x_i(\tau))||_{c_0}\right)d\tau\\ +\int_T^\infty g_n(t_0,\tau)h\left(||(x_i(\tau))||_{c_0}\right)d\tau\\ \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon)+h\left(||x||_{BC_0}\right)\left[\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau+\int_T^\infty g_n(t_0,\tau)d\tau\right].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Następnie, wykorzystując założenie (viii) oraz (3.9), otrzymujemy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau\\ \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_0})\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T]\right\}\\ \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_0})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Łącząc oszacowania (3.8) i (3.10) dostajemy, że dla dowolnej liczby $n=1,2,\dots$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned}|(Q_nx)(t)-(Q_nx)(t_0)| \leqslant \omega^T(a,\varepsilon)+Gh(||x||_{BC_0})(1+l(||x||_{BC_0}))\varepsilon\\ +\left[l(||x(t)||_{c_0})\sup\{|x_i(t)|:\ i\geqslant n\}+\overline{F}\right]\left[T\omega^T(u,\varepsilon)\right.\\ \left.+2h(||x||_{BC_0})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}\right].\end{aligned}$$

Dalej, otrzymujemy

$$\begin{aligned}|(Q_nx)(t)-(Q_nx)(t_0)| \leqslant \omega^T(a,\varepsilon)+Gh(||x||_{BC_0})(1+l(||x||_{BC_0}))\varepsilon\\ +\left[l(||x||_{BC_0})\sup\{|x_i(t)|:\ i\geqslant n\}+\overline{F}\right]\left[T\omega^T(u,\varepsilon)\right.\\ \left.+2h(||x||_{BC_0})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.11}$$

Stąd natomiast wynika oszacowanie

$$\begin{aligned}|(Q_nx)(t)-(Q_nx)(t_0)| \leqslant \omega^T(a,\varepsilon)+Gh(||x||_{BC_0})(1+l(||x||_{BC_0}))\varepsilon\\ +\left[l(||x||_{BC_0})||x||_{BC_0}+\overline{F}\right]\left[T\omega^T(u,\varepsilon)\right.\\ \left.+2h(||x||_{BC_0})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.12}$$

Zauważmy teraz, że na podstawie założenia (ix) możemy wybrać $T > 0$ tak, aby ostatnie wyrażenie w nierówności (3.12) było wystarczająco małe. Łącząc ten fakt z pozostałymi podanymi wcześniej własnościami funkcji $\omega^T(a,\varepsilon)$, $\omega^T(u,\varepsilon)$ i uwzględniając oszacowanie (3.12) wnioskujemy, że funkcja Qx jest ciągła na przedziale $[0,T]$ dla dowolnego wystarczająco dużego $T > 0$. To zaś implikuje, że funkcja Qx jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+$.

Pozostało nam wykazać, że funkcja Qx jest ograniczona na $\mathbb{R}_+$. W tym celu weźmy funkcję $x = (x_n) = (x_n(t)) \in BC_0$. Wtedy, dla dowolnych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ i $n \in \mathbb{N}$, na podstawie oszacowań (3.3), (3.7) oraz Uwagi 3.4, dostajemy

$$\begin{aligned} |(Q_n x)(t)| &= |a_n(t) + (F_n x)(t)(U_n x)(t)| \\ &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)||(U_n x)(t)| \\ &\leqslant A + \left[l(||x(t)||_{c_0}) \sup\{|x_i(t)| : \ i \geqslant n\} + \overline{F} \right] Gh(||x||_{BC_0}) \\ &\leqslant A + \left[l(||x||_{BC_0})||x||_{BC_0} + \overline{F} \right] Gh(||x||_{BC_0}). \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy nierówność

$$|(Qx)(t)| \leqslant A + \left[||x||_{BC_0} l(||x||_{BC_0}) + \overline{F} \right] Gh(||x||_{BC_0}), \tag{3.13}$$

pokazującą, że funkcja Qx jest ograniczona na zbiorze $\mathbb{R}_+$.
Łącząc ten fakt z udowodnioną wcześniej ciągłością funkcji Qx otrzymujemy, że operator Q przekształca przestrzeń BC_0 w siebie.

Aby móc zastosować wspomniane wcześniej twierdzenie Schaudera o punkcie stałym potrzebujemy wykazać, że operator Q przekształca pewien niepusty, wypukły i zwarty podzbiór przestrzeni BC_0 w siebie. W celu skonstruowania tego zbioru najpierw pokażemy, że istnieje kula $\overline{B}_{r_0} = \overline{B}(\theta, r_0)$, którą operator Q przekształca w siebie.

Na początku zauważmy, że z oszacowania (3.13) otrzymujemy następującą nierówność

$$||Qx||_{BC_0} \leqslant A + \left[||x||_{BC_0} l(||x||_{BC_0}) + \overline{F} \right] Gh(||x||_{BC_0}),$$

która wraz z założeniem (x) dowodzi, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie. Promień r_0 jest liczbą występującą w założeniu (x).

Do określenia zwartości konstruowanego zbioru wykorzystamy miarę niezwartości χ_a w przestrzeni BC_0 wprowadzoną w podrozdziale 2.4 i określoną wzorem (2.20). Ponieważ jest ona określona jako suma trzech składników, oszacujemy kolejno każdy z nich.

Na początku rozważmy pierwszy składnik miary χ_a, czyli funkcję ω_0 określoną wzorem (2.17). Ustalmy dowolny niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ oraz weźmy dowolne liczby $T > 0$, $\varepsilon > 0$ i funkcję $x \in X$. Niech ponadto $t, s \in [0,T]$ będą ustalonymi liczbami takimi, że $|t-s| \leqslant \varepsilon$. Bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$. Wtedy dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, stosując przekształcenia analogiczne do (3.3), (3.5), (3.6), (3.8), (3.10), (3.11), dostajemy

$$\begin{gathered}
|(Q_nx)(t)-(Q_nx)(s)| \leqslant \omega^T(a,\varepsilon) \\
+|(U_nx)(t)||(F_nx)(t)-(F_nx)(s)|+|(F_nx)(s)||(U_nx)(t)-(U_nx)(s)| \\
\leqslant \omega^T(a,\varepsilon)+Gh(||x||_{BC_0})\,[|f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(s,x_1(t),x_2(t),\dots)| \\
+l(||x||_{BC_0})\sup\{|x_i(t)-x_i(s)|:\ i \geqslant n\}] \\
+\left[l(||x||_{BC_0})||x||_{BC_0}+\overline{F}\right]\left[T\omega^T(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_0})\times\right. \\
\left.\times\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}\right].
\end{gathered}$$

Dalej korzystając z faktu, że $x \in \overline{B}_{r_0}$, czyli równoważnie $||x||_{BC_0} \leqslant r_0$, mamy:

$$\begin{gathered}
\omega^T(Qx,\varepsilon) \leqslant \omega^T(a,\varepsilon)+Gh(r_0)\left[\omega_1^T(f,\varepsilon)+l(r_0)\omega^T(x,\varepsilon)\right] \\
+\left(r_0l(r_0)+\overline{F}\right)\left[T\omega^T(u,\varepsilon)\right. \\
\left.+2h(r_0)\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau:\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}\right],
\end{gathered} \tag{3.14}$$

gdzie

$$\begin{gathered}
\omega_1^T(f,\varepsilon)=\sup\{|f_n(t,x_1,x_2,\dots)-f_n(s,x_1,x_2,\dots)|:\ t,s\in[0,T], \\
|t-s|\leqslant\varepsilon,\ x=(x_i)\in c_0,\ ||x||_{c_0}\leqslant r_0,\ n\in\mathbb{N}\}.
\end{gathered}$$

Zauważmy, że na podstawie założenia (ii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_1^T(f,\varepsilon)=0$. Ponadto z założeń (i) oraz (v) dostajemy odpowiednio, iż $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^T(a,\varepsilon)=0$ i $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega^T(u,\varepsilon)=0$. Uwzględniając dodatkowo założenie (ix) oraz wzór funkcji ω_0 określony równością (2.17), otrzymujemy

$$\omega_0(QX) \leqslant Gh(r_0)l(r_0)\omega_0(X). \tag{3.15}$$

W podobny sposób oszacujemy teraz kolejny składnik miary χ_a, czyli funkcję $\overline{\chi}_\infty$ określoną wzorem (2.18). Ustalmy zatem dowolny niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ i wybierzmy funkcję $x \in X$ oraz liczbę $T > 0$. Wtedy, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in [0,T]$, korzystając z oszacowań (3.3) i (3.7), mamy

$$\begin{aligned}|(Q_i x)(t)| &\leqslant |a_i(t)| + |(F_i x)(t)||(U_i x)(t)| \\ &\leqslant |a_i(t)| + \left[l(r_0)\sup\{|x_i(t)|:\ i \geqslant n\} + \overline{f}_i(t)\right] Gh(r_0).\end{aligned}$$

Dalej, biorąc supremum po wszystkich $x = (x_i) \in X$, dostajemy

$$\begin{aligned}&\sup_{x=(x_i)\in X} |(Q_i x)(t)| \\ &\leqslant a_i(t) + Gh(r_0)l(r_0)\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\{\sup\{|x_i(t)|:\ i \geqslant n\}\}\right\} + Gh(r_0)\overline{f}_i(t).\end{aligned}$$

Stąd, przechodząc z $n \to \infty$ oraz wykorzystując Lemat 3.2, założenia (i) i (iv), otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X} |(Q_i x)(t)|\right\} \\ &\leqslant Gh(r_0)l(r_0)\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\{\sup\{|x_i(t)|:\ i \geqslant n\}\}\right\}.\end{aligned}$$

Dalej, biorąc supremum po $t \in [0,T]$ po obu stronach powyższej nierówności oraz przechodząc z $T \to \infty$, mamy

$$\begin{aligned}&\lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}|(Q_i x)(t)|\right\}\right\}\right\} \\ &\leqslant Gh(r_0)l(r_0)\lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\lim_{n\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\{\sup\{|x_i(t)|:\ i \geqslant n\}\}\right\}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Z powyższej nierówności łatwo zauważyć, że wykorzystując wzór (2.18) określający funkcję $\overline{\chi}_\infty$ dostajemy nierówność

$$\overline{\chi}_\infty(QX) \leqslant Gh(r_0)l(r_0)\overline{\chi}_\infty(X). \tag{3.16}$$

Oszacujemy teraz ostatni składnik miary χ_a, czyli funkcję a_∞ określoną wzorem (2.19). W tym celu ustalmy niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ i wybierzmy dowolną funkcję $x \in X$. Niech dodatkowo $T > 0$ i $n \in \mathbb{N}$ będą ustalonymi liczbami. Wtedy, biorąc $t \geqslant T$ i wykorzystując oszacowania (3.3) oraz (3.7), dostajemy

$$\begin{aligned}&\sup\{|(Q_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}|\} \\ &\leqslant \sup\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\{|(F_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\}\sup\{|(U_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\} \\ &\leqslant \sup\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\} + \sup\left\{\left[l(r_0)\sup\{|x_i(t)| : i \geqslant n\} + \overline{f}_n(t)\right]Gh(r_0) : n \in \mathbb{N}\right\} \\ &\leqslant \sup\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\} + Gh(r_0)l(r_0)\sup\{|x_n(t)| : n \in \mathbb{N}\} + Gh(r_0)\sup\left\{\overline{f}_n(t) : n \in \mathbb{N}\right\}.\end{aligned}$$

Biorąc w powyższym oszacowaniu supremum po wszystkich $t \geqslant T$, a następnie po $x = (x_i) \in X$, otrzymujemy

$$\sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup_{t\geqslant T}\{\sup\{|(Q_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\}\}\right\} \leqslant \sup_{t\geqslant T}\{\sup\{|a_n(t)| : n \in \mathbb{N}\}\}$$
$$+Gh(r_0)l(r_0) \sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup_{t\geqslant T}\{\sup\{|x_n(t)| : n \in \mathbb{N}\}\}\right\}$$
$$+Gh(r_0)\sup_{t\geqslant T}\left\{\sup\{\overline{f}_n(t) : n \in \mathbb{N}\}\right\}.$$

Następnie, przechodząc z $T \to \infty$ i korzystając z założeń (i) oraz (iv), dostajemy nierówność

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup_{t\geqslant T}\{\sup\{|(Q_n x)(t)| : n \in \mathbb{N}\}\}\right\}\right\}$$
$$\leqslant Gh(r_0)l(r_0)\lim_{T\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_i)\in X}\left\{\sup_{t\geqslant T}\{\sup\{|x_n(t)| : n \in \mathbb{N}\}\}\right\}\right\},$$

która po uwzględnieniu wzoru (2.15) daje nam następujące oszacowanie

$$a_\infty(QX) \leqslant Gh(r_0)l(r_0)a_\infty(X). \tag{3.17}$$

Teraz, uwzględniając (3.15), (3.16) i (3.17) we wzorze (2.20) określającym miarę χ_a w przestrzeni BC_0, dostajemy nierówność

$$\chi_a(QX) \leqslant Gh(r_0)l(r_0)\chi_a(X), \tag{3.18}$$

która jest spełniona dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \overline{B}_{r_0}$.

Przedstawimy teraz konstrukcję szukanego zbioru spełniającego założenia z twierdzenia Schaudera.

W tym celu rozważmy ciąg zbiorów $\left(\overline{B}^n_{r_0}\right)$ określony następująco:

$$\overline{B}^1_{r_0} = \mathrm{Conv}Q(\overline{B}_{r_0}), \quad \overline{B}^2_{r_0} = \mathrm{Conv}Q(\overline{B}^1_{r_0}), \quad \ldots .$$

Zauważmy, że wszystkie elementy tego ciągu są zbiorami niepustymi, ograniczonymi, domkniętymi i wypukłymi. Ponadto

$$\overline{B}^{n+1}_{r_0} \subset \overline{B}^n_{r_0} \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$\overline{B}^1_{r_0} \subset \overline{B}_{r_0}.$$

Rozważmy teraz miarę niezwartości χ_a w przestrzeni BC_0. Zauważmy, że z oszacowania (3.18) oraz założeń (iv), (ii) Definicji 2.1.1, dostajemy

$$\chi_a(\overline{B}_{r_0}^1) = \chi_a(ConvQ(\overline{B}_{r_0})) = \chi_a(Q(\overline{B}_{r_0})) \leqslant k\chi_a(\overline{B}_{r_0}),$$

gdzie oznaczyliśmy $k = Gh(r_0)l(r_0)$.
Analogicznie, dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$, mamy

$$\begin{aligned}\chi_a(Q(\overline{B}_{r_0}^n)) &= \chi_a(ConvQ(\overline{B}_{r_0}^n)) \leqslant k\chi_a(\overline{B}_{r_0}^n)\\ &= k\chi_a(ConvQ(\overline{B}_{r_0}^{n-1})) = k\chi_a(Q(\overline{B}_{r_0}^{n-1})) \leqslant k^2\chi_a(\overline{B}_{r_0}^{n-1})\end{aligned}$$

Powtarzając dalej ten tok rozumowania, dostajemy nierówność

$$\chi_a(\overline{B}_{r_0}^n) \leqslant k^n\chi_a(\overline{B}_{r_0}). \tag{3.19}$$

Wykorzystując założenie (x) otrzymujemy, że $k < 1$, co wraz z oszacowaniem (3.19) implikuje, że

$$\lim_{n\to\infty} \chi_a(\overline{B}_{r_0}^n) = 0.$$

Dalej, z warunku (vi) w Definicji 2.1.1 wnioskujemy, że zbiór

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_{r_0}^n$$

jest niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły oraz, co najważniejsze

$$\chi_a(\Omega) = 0.$$

Stąd oczywiście $\Omega \in ker\chi_a$. Zatem Ω jest szukanym zbiorem.

Zauważmy dodatkowo, ze operator Q przekształca zbiór Ω w siebie.

Pozostało nam wykazać, że Q jest ciągły na zbiorze Ω. W tym celu ustalmy $\varepsilon > 0$. Korzystając z faktu, że $\Omega \in ker\chi_a$ oraz podanego w poprzednim rozdziale opisu struktury jadra $ker\chi_a$ dostajemy m.in., że funkcje ze zbioru Ω dążą do zera z tą samą prędkością, czyli jednostajnie ze względu na zbiór Ω. Stąd możemy wybrać $T > 0$ tak, że dla każdego $x \in \Omega$ i $t \geqslant T$ spełniona jest nierówność

$$|x(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Ponadto, dla dowolnych $x,\ y \in \Omega$ takich, że $||x-y||_{BC_0} \leqslant \varepsilon$, biorąc pod uwagę, że $Q:\Omega \to \Omega$ dostajemy, że $Qx,\ Qy \in \Omega$. Stąd, dla $t \geqslant T$ otrzymujemy

$$|(Qx)(t)-(Qy)(t)| \leqslant |(Qx)(t)|+|(Qy)(t)| \leqslant 2\varepsilon. \tag{3.20}$$

Z drugiej strony, dla $t \in [0,T]$ oraz dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned}
&|(Q_n x)(t)-(Q_n y)(t)| \\
&= \left| f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau \right. \\
&\quad \left. - f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)d\tau \right| \\
&\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau \\
&\quad -f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau| \\
&\quad +|f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau \\
&\quad -f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)\int_0^\infty u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)d\tau| \\
&\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)|\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau \\
&\quad +|f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)|\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau.
\end{aligned}$$

Wykorzystując w powyższej nierówności oszacowania (3.7), (3.3) oraz założenie (iii), dostajemy

$$\begin{aligned}
&|(Q_n x)(t)-(Q_n y)(t)| \leqslant l(r_0)\sup\{|x_i(t)-y_i(t)| : i \geqslant n\}Gh(r_0) \\
&+\left(l(r_0)\sup\{|x_i(t)| : i \geqslant n\}+\overline{F}\right)\left[\int_0^T |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau \right. \\
&\quad \left. +\int_T^\infty (|u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|+|u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|)d\tau\right] \\
&\leqslant l(r_0)||x_i(t)-y_i(t)||_{c_0}Gh(r_0)+\left(r_0 l(r_0)+\overline{F}\right)\left[\int_0^T \omega_{r_0}^T(u,\varepsilon)d\tau+2\varepsilon\right] \\
&\leqslant l(r_0)Gh(r_0)\varepsilon+\left(r_0 l(r_0)+\overline{F}\right)\left[T\omega_{r_0}^T(u,\varepsilon)+2\varepsilon\right],
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\omega_{r_0}^T(u,\varepsilon) = \sup\{&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)-u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)| :\ t,\tau \in [0,T], \\
&n \in \mathbb{N},\ ||x||_{c_0}=||(x_i)||_{c_0} \leqslant r_0,\ ||y||_{c_0}=||(y_i)||_{c_0} \leqslant r_0,\ ||x-y||_{c_0} \leqslant \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

Wprost z założenia (vi) wynika, że $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_{r_0}^T(u,\varepsilon)=0$. Z powyższego oszacowania dostajemy, że

$$|(Qx)(t)-(Qy)(t)| \leqslant Gh(r_0)l(r_0)\varepsilon + \left[r_0 l(r_0)+\overline{F}\right]\left[T\omega_{r_0}^T(u,\varepsilon)+2\varepsilon\right] \tag{3.21}$$

dla dowolnego $t\in[0,T]$.

Ostatecznie, oszacowania (3.20) i (3.21) dowodzą, że operator Q przekształca w sposób ciągły zbiór Ω w siebie. Zbiór Ω jest niepustym, zwartym, wypukłym i domkniętym podzbiorem przestrzeni BC_0, więc możemy zastosować twierdzenie Schaudera o punkcie stałym (zob. Twierdzenie 3.3). Na jego podstawie istnieje co najmniej jeden punkt stały $x=x(t)=(x_n(t))$ operatora Q w zbiorze Ω. Oczywiście, ciąg funkcyjny $x(t)=(x_n(t))$ jest rozwiązaniem nieskończonego układu kwadratowych równań całkowych Urysohna (3.1).

□

Podamy teraz przykład ilustrujący rezultat uzyskany w Twierdzeniu 3.5.

Przykład 3.6. Rozważmy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna określony następująco

$$\begin{aligned} x_n(t) = -\frac{1}{2n}e^{-nt^2} + \Bigg(\frac{t}{4t^2+n} + \frac{x_n(t)}{4+x_n^2(t)} \\ +\frac{x_{n+1}(t)}{4+x_{n+1}^2(t)}\Bigg)\int_0^\infty \Bigg[e^{-\tau(4n+t)}\frac{\arctan(x_1(\tau)+x_n(\tau))}{(n+1)^2+t} \\ +e^{-\tau(4n+t+1)}\frac{\arctan(x_1(\tau)+x_{n+1}(\tau))}{(n+2)^2+t}\Bigg]d\tau, \end{aligned} \tag{3.22}$$

dla $t\in\mathbb{R}_+$ oraz $n=1,2,\dots$.

Zauważmy, że powyższy układ jest szczególnym przypadkiem rozważanego w tym rozdziale układu (3.1), jeżeli przyjmiemy:

$$a_n(t) = -\frac{1}{2n}e^{-nt^2}, \tag{3.23}$$

$$f_n(t,x_1,x_2,\dots) = \frac{t}{4t^2+n} + \frac{x_n}{4+x_n^2} + \frac{x_{n+1}}{4+x_{n+1}^2}, \tag{3.24}$$

$$u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) = e^{-\tau(4n+t)}\frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} + e^{-\tau(4n+t+1)}\frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+t} \tag{3.25}$$

dla $n\in\mathbb{N}$ oraz $t,\tau\in\mathbb{R}_+$.

Pokażemy, że podany przez nas układ (3.22) spełnia założenia (i)-(x) Twierdzenia 3.5.

Na początku zauważmy, że dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} a_n(t) = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2n}e^{-nt^2}\right) = 0.$$

Ponadto, korzystając z podstawowych narzędzi rachunku różniczkowego dostajemy, że

$$|a_n(t) - a_n(s)| = \left|\frac{1}{2n}e^{-nt^2} - \frac{1}{2n}e^{-ns^2}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}}|t-s|$$

dla $t,s \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1,2,\dots$. To dowodzi, że ciąg funkcyjny $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni BC_0.

Ponadto, dla dowolnej liczby naturalnej n oraz $t \in \mathbb{R}_+$ spełniony jest warunek

$$|a_n(t)| = \left|-\frac{1}{2n}e^{-nt^2}\right| \leqslant \frac{1}{2}e^{-t^2},$$

który implikuje, że spełniona jest druga część założenia (i). Stąd i z poprzedniego wniosku dostajemy, że ciąg $(a_n(t))$ określony wzorem (3.23) spełnia założenie (i). Zauważmy dodatkowo, że możemy określić stałą

$$A = \sup\{|a_n(t)| : t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\dots\} = \frac{1}{2}.$$

Pokażemy teraz, że spełnione jest założenie (ii). Rozważmy funkcję $f_n = f_n(t,x_1,x_2,\dots)$ określoną wzorem (3.24) i ustalmy dowolnie $t,s \in \mathbb{R}_+$ oraz $x = (x_n) \in c_0$. Wtedy

$$\begin{aligned}
&|f_n(t,x_1,x_2,\dots) - f_n(s,x_1,x_2,\dots)| \\
&= \left|\frac{t}{4t^2+n} + \frac{x_n}{4+x_n^2} + \frac{x_{n+1}}{4+x_{n+1}^2} - \frac{s}{4s^2+n} - \frac{x_n}{4+x_n^2} - \frac{x_{n+1}}{4+x_{n+1}^2}\right| \\
&= \left|\frac{t}{4t^2+n} - \frac{s}{4s^2+n}\right| \leqslant \frac{|4ts^2-4t^2s| + |tn-sn|}{(4t^2+n)(4s^2+n)} \\
&\leqslant \frac{4ts|t-s|}{(4t^2+n)(4s^2+n)} + \frac{n|t-s|}{(4t^2+n)(4s^2+n)} \leqslant 2|t-s|
\end{aligned}$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Stąd wnioskujemy, że funkcje f_n $(n = 1,2,\dots)$ spełniają założenie (ii).

Dalej, ustalmy liczbę $r > 0$ i dowolne ciągi $x = (x_i),\ y = (y_i) \in c_0$ takie, że $||x||_{c_0} \leqslant r$,

$||y||_{c_0} \leqslant r$. Wtedy, dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
&|f_n(t,x_1,x_2,\dots) - f_n(t,y_1,y_2,\dots)| \\
&= \left| \frac{t}{4t^2+n} + \frac{x_n}{4+x_n^2} + \frac{x_{n+1}}{4+x_{n+1}^2} - \frac{t}{4t^2+n} - \frac{y_n}{4+y_n^2} - \frac{y_{n+1}}{4+y_{n+1}^2} \right| \\
&\leqslant \left| \frac{x_n}{4+x_n^2} - \frac{y_n}{4+y_n^2} \right| + \left| \frac{x_{n+1}}{4+x_{n+1}^2} - \frac{y_{n+1}}{4+y_{n+1}^2} \right| \\
&= \frac{|4x_n + x_n y_n^2 - 4y_n - x_n^2 y_n|}{(4+x_n^2)(4+y_n^2)} + \frac{|4x_{n+1} + x_{n+1} y_{n+1}^2 - 4y_{n+1} - x_{n+1}^2 y_{n+1}|}{(4+x_{n+1}^2)(4+y_{n+1}^2)} \\
&\leqslant \frac{4}{(4+x_n^2)(4+y_n^2)}|x_n - y_n| + \frac{|x_n||y_n|}{(4+x_n^2)(4+y_n^2)}|x_n - y_n| \\
&+ \frac{4}{(4+x_{n+1}^2)(4+y_{n+1}^2)}|x_{n+1} - y_{n+1}| + \frac{|x_{n+1}||y_{n+1}|}{(4+x_{n+1}^2)(4+y_{n+1}^2)}|x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{1}{4}|x_n - y_n| + \frac{1}{16}|x_n - y_n| + \frac{1}{4}|x_{n+1} - y_{n+1}| + \frac{1}{16}|x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{5}{16}|x_n - y_n| + \frac{5}{16}|x_{n+1} - y_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{10}{16}\sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\} = \frac{5}{8}\sup\{|x_i - y_i| : i \geqslant n\}.
\end{aligned}$$

Otrzymana nierówność pokazuje, że funkcje f_n $(n = 1,2,\dots)$ spełniają założenie (iii) z funkcją $l(r) = \frac{5}{8}$.

Aby udowodnić kolejne, (iv) założenie rozważmy ciąg $(\overline{f}_n)$, który po uwzględnieniu wzoru (3.24) przyjmuje postać

$$\overline{f}_n(t) = |f_n(t,0,0,\dots)| = \frac{t}{4t^2+n}$$

dla $n = 1,2,\dots$ i $t \in \mathbb{R}_+$. Oczywistym jest, że dla $t \in \mathbb{R}_+$ dostajemy

$$\lim_{n\to\infty} \overline{f}_n(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{t}{4t^2+n} = 0.$$

Ponadto ze standardowych narzędzi rachunku różniczkowego, dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $t,s \in \mathbb{R}_+$, otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
|\overline{f}_n(t) - \overline{f}_n(s)| &= \left| \frac{t}{4t^2+n} - \frac{s}{4s^2+n} \right| = \frac{|4s^2t + tn - 4t^2s - sn|}{(4t^2+n)(4s^2+n)} \\
&\leqslant \frac{4ts}{(4t^2+n)(4s^2+n)}|t-s| + \frac{n}{(4t^2+n)(4s^2+n)}|t-s| \\
&\leqslant 4\frac{t}{4t^2+n} \cdot \frac{s}{4s^2+n}|t-s| + |t-s| \\
&\leqslant 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}|t-s| + |t-s| = \frac{5}{4}|t-s|.
\end{aligned}$$

Stąd wnioskujemy, że funkcja $(\overline{f}_n)$ odwzorowuje w sposób ciągły zbiór $\mathbb{R}_+$ w przestrzeń c_0. To zaś implikuje, że $(\overline{f}_n) \in BC_0$. Ponadto zauważmy, że dla ustalonych $t \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ dostajemy oszacowanie

$$\overline{f}_n(t) = \frac{t}{4t^2+n} \leqslant \frac{t}{4t^2+1}.$$

Korzystając z powyższej nierówności możemy stwierdzić, że $\lim\limits_{t\to\infty} \overline{f}_n(t) = 0$ jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$.

Łącząc powyższe oszacowania dotyczące funkcji $(\overline{f}_n)$ dostajemy, że spełnia ona założenie (iv).

Ponadto łatwo zauważyć, że

$$\overline{F} = \sup\{\overline{f}_n(t) : \ t \in \mathbb{R}_+, \ n = 1,2,\dots\} = \frac{1}{4}.$$

Ustalmy teraz $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$. Wtedy dla ustalonego ciągu $x = (x_i) \in c_0$, uwzględniając wzór (3.25), dostajemy

$$\begin{aligned}
&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)| \\
&= \left| e^{-\tau(4n+t)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} + e^{-\tau(4n+t+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+t} \right| \\
&\leqslant e^{-\tau(4n+t)} \frac{|x_1|+|x_n|}{(n+1)^2+t} + e^{-\tau(4n+t+1)} \frac{|x_1|+|x_{n+1}|}{(n+2)^2+t} \\
&\leqslant e^{-\tau(4n+t)} \left[\frac{|x_1|+|x_n|}{(n+1)^2+t} + \frac{|x_1|+|x_{n+1}|}{(n+1)^2+t} \right] \\
&\leqslant e^{-\tau(4n+t)} \frac{2|x_1|+|x_n|+|x_{n+1}|}{(n+1)^2} \\
&\leqslant 2e^{-\tau(4n+t)} \frac{|x_1|+|x_n|+|x_{n+1}|}{(n+1)^2} \\
&\leqslant 2e^{-\tau(4n+t)} \cdot \frac{3}{4} \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} \\
&= 2e^{-\tau(4n+t)} \cdot \frac{3}{4} ||x||_{c_0}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Na podstawie wyżej otrzymanej nierówności widzimy, że funkcja $u_n = u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)$ odwzorowuje zbiór $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times c_0$ w zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}_+$ i tym samym spełnia pierwszą część założenia (v).

Dalej, niech $\varepsilon > 0$ oraz $T > 0$ będą ustalonymi liczbami. Wtedy, dla $t,s \in [0,T]$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz

$x = (x_i) \in c_0$, mamy

$$
\begin{aligned}
&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(s,\tau,x_1,x_2,\dots)| \\
&\leqslant \left| e^{-\tau(4n+t)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} - e^{-\tau(4n+s)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} \right| \\
&+ \left| e^{-\tau(4n+s)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} - e^{-\tau(4n+s)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+s} \right| \\
&+ \left| e^{-\tau(4n+t+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+1)^2+t} - e^{-\tau(4n+s+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+t} \right| \\
&+ \left| e^{-\tau(4n+s+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+t} - e^{-\tau(4n+s+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+s} \right| \\
&\leqslant \frac{|\arctan(x_1+x_n)|}{(n+1)^2+t} \left| e^{-\tau(4n+t)} - e^{-\tau(4n+s)} \right| \\
&+ e^{-\tau(4n+s)} |\arctan(x_1+x_n)| \left| \frac{1}{(n+1)^2+t} - \frac{1}{(n+1)^2+s} \right| \\
&+ \frac{|\arctan(x_1+x_{n+1})|}{(n+2)^2+t} \left| e^{-\tau(4n+t+1)} - e^{-\tau(4n+s+1)} \right| \\
&+ e^{-\tau(4n+s+1)} |\arctan(x_1+x_{n+1})| \left| \frac{1}{(n+2)^2+t} - \frac{1}{(n+2)^2+s} \right| \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \left| e^{-\tau(4n+t)} - e^{-\tau(4n+s)} \right| + \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{(n+1)^2+t} - \frac{1}{(n+1)^2+s} \right| \\
&+ \frac{\pi}{2} \left| e^{-\tau(4n+t+1)} - e^{-\tau(4n+s+1)} \right| + \frac{\pi}{2} \left| \frac{1}{(n+2)^2+t} - \frac{1}{(n+2)^2+s} \right| \\
&\leqslant \frac{\pi}{2}|t-s| + \frac{\pi}{2}\frac{|t-s|}{(n+1)^4} + \frac{\pi}{2}|t-s| + \frac{\pi}{2}\frac{|t-s|}{(n+2)^4} \leqslant 2\pi|t-s|.
\end{aligned}
$$

Widzimy, że funkcje u_n spełniają warunek Lipschitza na przedziale $[0,T]$ ze wspólną stałą 2π, a tym samym rodzina $\{u_n(t,\tau,x_1,x_2)\}$ jest lokalnie jednakowo ciągła dla $t \in \mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $x = (x_i) \in c_0$. Stąd i z (3.26) dostajemy, że spełnione jest założenie (v).

W dalszym ciągu rozważmy założenie (vi) i zgodnie z nim ustalmy dowolny ograniczony podzbiór X przestrzeni c_0. Ponadto ustalmy $T > 0$ oraz $\varepsilon > 0$. Wtedy dla dowolnych ciągów $x = (x_i),\ y = (y_i) \in X$ otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)| \\
&\leqslant \left| e^{-\tau(4n+t)} \frac{\arctan(x_1+x_n)}{(n+1)^2+t} - e^{-\tau(4n+t)} \frac{\arctan(y_1+y_n)}{(n+1)^2+t} \right| \\
&+ \left| e^{-\tau(4n+t+1)} \frac{\arctan(x_1+x_{n+1})}{(n+2)^2+t} - e^{-\tau(4n+t+1)} \frac{\arctan(y_1+y_{n+1})}{(n+2)^2+t} \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{e^{-\tau(4n+t)}}{(n+1)^2}\left|\arctan(x_1+x_n)-\arctan(y_1+y_n)\right| \\
&+\frac{e^{-\tau(4n+t+1)}}{(n+1)^2}\left|\arctan(x_1+x_{n+1})-\arctan(y_1+y_{n+1})\right| \\
&\leqslant \frac{1}{4}|x_1+x_n-y_1-y_n|+\frac{1}{4}|x_1+x_{n+1}-y_1-y_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{1}{4}\left[|x_1-y_1|+|x_n-y_n|+|x_1-y_1|+|x_{n+1}-y_{n+1}|\right] \\
&\leqslant \frac{1}{4}\cdot 2\left[|x_1-y_1|+|x_n-y_n|+|x_{n+1}-y_{n+1}|\right] \\
&\leqslant \frac{3}{2}\sup\{|x_i-y_i| : i\in\mathbb{N}\}=\frac{3}{2}||x-y||_{c_0}.
\end{aligned}
$$

Otrzymana nierówność implikuje, że spełnione jest założenie (vi).

Zauważmy dalej, że z oszacowania (3.26) możemy wywnioskować, iż spełnione jest założenie (vii). Wystarczy bowiem jako funkcje $g_n = g_n(t,\tau)$ i $h(r)$ przyjąć

$$g_n(t,\tau) = 2e^{-\tau(4n+t)}$$

oraz

$$h(r) = \frac{3}{4}r.$$

Rozważmy teraz założenie (viii) i funkcję $\tau \to g_n(t,\tau) = 2e^{-\tau(4n+t)}$ określoną powyżej. Wówczas dla dowolnej liczby naturalnej n mamy

$$\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau = 2\int_0^\infty e^{-\tau(4n+t)}d\tau = \frac{2}{4n+t} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Stąd wnioskujemy, że spełnione jest założenie (viii).

Ponadto, korzystając z powyższego oszacowania możemy określić stałą G następująco

$$G = \sup\left\{\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau : t\in\mathbb{R}_+, n\in\mathbb{N}\right\} = \frac{1}{2}.$$

Przypomnijmy, że stała G występuje w założeniu (x).

Ustalmy teraz dowolnie $T>0$. Wówczas

$$\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau = 2\int_T^\infty e^{-\tau(4n+t)}d\tau = \frac{2}{4n+t}e^{-T(4n+t)} = \frac{2}{(4n+t)e^{T(4n+t)}} \leqslant \frac{2}{4ne^{Tn}} \leqslant \frac{1}{2e^T}$$

dla dowolnej liczby naturalnej n. Stąd otrzymujemy, że spełnione jest założenie (ix).

Do sprawdzenia pozostało ostatnie, czyli (x) założenie. Rozważymy zatem występującą w nim nierówność

$$A + \overline{F}Gh(r) + Grl(r)h(r) \leqslant r.$$

Zauważmy, że pojawiające się powyżej stałe zostały wyznaczone we wcześniejszych rozważaniach i wynoszą odpowiednio: $A = \frac{1}{2}$, $\overline{F} = \frac{1}{4}$, $G = \frac{1}{2}$. Uwzględniając także funkcje $h(r) = \frac{3}{4}r$ oraz $l(r) = \frac{5}{8}$ powyższą nierówność możemy zapisać następująco

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}r + \frac{1}{2}r \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4}r \leqslant r.$$

Równoważnie

$$\frac{15}{64}r^2 - \frac{29}{32}r + \frac{1}{2} \leqslant 0. \tag{3.27}$$

Stąd już łatwo obliczyć, że liczba $r_0 = \frac{2}{3}$ spełnia nierówność (3.27). Ponadto

$$Gl(r_0) \cdot h(r_0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{32} < 1.$$

To zaś oznacza, że liczba $r_0 = \frac{2}{3}$ spełnia obie nierówności występujące w założeniu (x).

Stąd, na podstawie Twierdzenia 3.5 wnioskujemy, że nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna (3.22) ma co najmniej jedno rozwiązanie w przestrzeni BC_0 należące do kuli $\overline{B}_{\frac{2}{3}}$.

Na koniec tego rozdziału pozwolimy sobie na przedstawienie kilku krótkich uwag na temat zawartych w nim rozważań.

Zacznijmy od dyskusji na temat założenia (ix). W tym celu załóżmy, że dla funkcji $g(t,s) = g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ całka

$$\int_0^\infty g(t,\tau)d\tau \tag{3.28}$$

istnieje dla dowolnie ustalonego $t \in \mathbb{R}_+$.

Wówczas możemy sformułować następującą definicję [47].

Definicja 3.7. Mówimy, że całka (3.28) jest *jednostajnie zbieżna względem* $t \in \mathbb{R}_+$ jeżeli

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T g(t,\tau)d\tau = \int_0^\infty g(t,\tau)d\tau$$

jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}_+$.

Równoważnie (por. [47]) możemy powiedzieć, że całka (3.28) jest jednostajnie zbieżna względem $t \in \mathbb{R}_+$ jeżeli

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_T^\infty g(t,\tau)d\tau \right\} = 0.$$

W przypadku, gdy rozważamy ciąg funkcyjny $(g_n(t,s))$, dla którego funkcja $\tau \to g_n(t,\tau)$ jest całkowalna na półosi $\mathbb{R}_+$ (por. założenie (viii)) oraz funkcje

$$t \to \int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau$$

są wspólnie ograniczone na zbiorze $\mathbb{R}_+$, to możemy sformułować warunek występujący w Definicji 3.7 następująco

Definicja 3.8. Mówimy, że ciąg całek

$$\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau \tag{3.29}$$

jest *jednostajnie zbieżny* względem $t \in \mathbb{R}_+$ jeżeli

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T g_n(t,\tau)d\tau = \int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau$$

jednostajnie względem $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

Na podstawie powyżej sformułowanego warunku możemy przedstawić Definicję 3.8 w następujący, równoważny sposób.

Mówimy, że ciąg (3.29) jest jednostajnie zbieżny względem $t \in \mathbb{R}_+$ jeżeli

$$\lim_{T\to\infty} \left\{ \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau \right\} \right\} = 0.$$

Zauważmy ponadto, że jeżeli ciąg całek (3.29) jest jednostajnie zbieżny względem $t \in \mathbb{R}_+$, to spełniona jest równość występująca w założeniu (ix).

Rzeczywiście, implikacja ta jest konsekwencją nierówności

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau$$

prawdziwej dla dowolnych $T > 0$ oraz $n \in \mathbb{N}$.
Można wykazać, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa [21].

Dalsze zależności dotyczące założeń (viii) i (ix) można znaleźć w zacytowanej wyżej pracy [21].

Warto także zwrócić uwagę na założenie (x). Zauważmy bowiem, że jeżeli liczba r_0 spełnia pierwszą nierówność występującą w tym założeniu, to dostajemy

$$Gl(r_0)h(r_0) \leqslant 1 - \frac{A}{r_0} - \frac{\overline{F}Gh(r_0)}{r_0}.$$

Stąd natomiast widać, że druga z nierówności z założenia (x), czyli

$$Gl(r_0)h(r_0) < 1$$

jest spełniona pod warunkiem, że $A > 0$ lub $\overline{F}Gh(r_0) > 0$. Na przykład, jeżeli funkcja $t \to a_n(t)$ nie znika na $\mathbb{R}_+$ dla przynajmniej jednej liczby naturalnej n, wtedy $A > 0$. Podobnie możemy stwierdzić, że jeżeli $h(r_0) \neq 0$ oraz istnieją liczby naturalne n, m takie, że $\overline{f}_n(t)$ nie znika na zbiorze $\mathbb{R}_+$ tak samo jak funkcja $g_m(t,\tau)$ nie znika na $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, wtedy $\overline{F}Gh(r_0) > 0$. Możemy więc zauważyć, że nierówność $Gl(r_0)h(r_0) < 1$ jest spełniona w przypadku, gdy nieskończony układ równań całkowych (3.1) nie jest trywialny.

4 Asymptotycznie stabilne rozwiązania nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Urysohna

Rozdział ten poświęcimy przedstawieniu wyników dotyczących istnienia asymptotycznie stabilnych rozwiązań nieskończonego układu kwadratowych równań całkowych Urysohna. Rozważania będziemy prowadzić w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty) = BC_\infty$, którą omówiliśmy w podrozdziale 1.2. Podobnie jak wcześniej głównym narzędziem wykorzystywanym w dowodzie przedstawionego twierdzenia egzystencjalnego będzie technika miar niezwartości. Tym razem wykorzystamy miarę niezwartości μ_c^3, która została omówiona w podrozdziale 2.4 i określona wzorem (2.28). Kluczowe będzie dla nas także twierdzenie Darbo o punkcie stałym, które pozwolimy sobie przypomnieć [39].

Twierdzenie 4.1. *Niech Ω będzie niepustym, ograniczonym, domkniętym i wypukłym podzbiorem przestrzeni Banacha E oraz niech μ będzie miarą niezwartości określoną w przestrzeni E. Załóżmy także, że operator $Q : \Omega \to \Omega$ jest ciągły oraz istnieje stała $k \in [0,1)$ taka, że dla dowolnego niepustego podzbioru X zbioru Ω spełniona jest nierówność*

$$\mu(QX) \leqslant k\mu(X).$$

Wtedy Q ma co najmniej jeden punkt stały w zbiorze Ω.

Uwaga 4.2. Można wykazać, że zbiór $FixQ$ złożony z punktów stałych operatora Q jest elementem jądra $ker\mu$ (zob. [10]).

Powyższa własność jest niezwykle istotna, ponieważ dzięki znajomości struktury jądra danej miary niezwartości jesteśmy w stanie scharakteryzować rozwiązania rozważanego równania operatorowego.

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna określony następująco

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^\infty u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau, \tag{4.1}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

Będziemy zakładać, że powyższy układ spełnia następujące założenia.

(i) Ciąg $(a_n(t))$ należy do przestrzeni BC_∞. Ponadto funkcje $a_n = a_n(t)$ są jednakowo ciągłe na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Do dalszych celów oznaczmy przez A normę funkcji $(a_n(t))$ w przestrzeni BC_∞ tzn. połóżmy

$$A = \sup\{\sup\{|a_n(t)| : \ n = 1,2,\dots\} : \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

(ii) Funkcje f_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla każdego $n = 1,2,\dots$. Ponadto funkcje $t \to f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_\infty$, tzn. spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in l_\infty}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ [|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |f_n(t_2, x_1, x_2, \dots) - f_n(t_1, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \varepsilon].$$

Dodatkowo zakładamy, że funkcje f_n są wspólnie ograniczone, czyli istnieje stała $\phi \geqslant 0$ taka, że

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \phi$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$, $(x_n) \in l_\infty$ oraz $n = 1,2,\dots$.

(iii) Istnieje funkcja $p : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ niemalejąca na zbiorze $\mathbb{R}_+$ oraz ciągła w punkcie 0. Ponadto spełniony jest następujący warunek

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant p(r) \sup\{|x_i - y_i| : \ i \geqslant n\}$$

dla dowolnego $r > 0$, dla $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\| x \|_{l_\infty} \leqslant r,\ \| y \|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla liczb $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1,2,\dots$.

(iv) Ciąg funkcyjny $\left(\overline{f}_n\right)$ określony wzorem

$$\overline{f}_n(t) = |f_n(t, 0, 0, \dots)|$$

należy do przestrzeni BC_∞.

Zauważmy, że na podstawie założenia (iv) możemy zdefiniować następującą stałą

$$\overline{F} = \sup\left\{\overline{f}_n(t) : \ t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\dots\right\}.$$

Oczywiście $\overline{F} < \infty$.

(v) Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ funkcja u_n przekształca zbiór $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times l_\infty$ w $\mathbb{R}$. Ponadto rodzina funkcji $\{u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)\}$ jest jednakowo ciągła dla $t \in \mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $x = (x_i) \in l_\infty$ tzn.:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{t,s,\tau\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{x=(x_i)\in l_\infty}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \left[|t-s| \leqslant \delta \Rightarrow |u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(s,\tau,x_1,x_2,\dots)| \leqslant \varepsilon\right].$$

(vi) Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje funkcja ciągła $g_n : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ oraz ciągła i niemalejąca funkcja $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ taka, że

$$|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)| \leqslant g_n(t,\tau)h(||(x_i)||_{l_\infty})$$

dla wszystkich $t,\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $(x_i) \in l_\infty$.

(vii) Dla dowolnych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ funkcja $\tau \to g_n(t,\tau)$ jest całkowalna na przedziale $\mathbb{R}_+$ oraz funkcje $t \to \int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau$ są wspólnie ograniczone na zbiorze $\mathbb{R}_+$.

Opierając się na założeniu (vii) oznaczmy przez G skończoną stałą określoną równością

$$G = \sup\left\{\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau :\ n = 1,2,\dots,\ t \in \mathbb{R}_+\right\}.$$

(viii) Istnieje funkcja $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, która jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w punkcie 0 oraz taka, ze $q(0) = 0$. Ponadto zakładamy, że spełniony jest następujący warunek

$$|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)| \leqslant q(r)g_n(t,\tau)\sup\{|x_i - y_i| :\ i \geqslant n\}$$

dla dowolnego $r > 0$, dla $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $||x||_{l_\infty} \leqslant r,\ ||y||_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla $t,\tau \in \mathbb{R}_+$, $n = 1,2,\dots$.

(ix) Poniższa równość

$$\lim_{T\to\infty}\left\{\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau :\ t \in \mathbb{R}_+\right\}\right\} = 0$$

jest spełniona jednostajnie względem $n \in \mathbb{N}$.

(x) Istnieje stała dodatnia r_0 będąca rozwiązaniem nierówności

$$A + \phi G h(r) \leqslant r.$$

Dodatkowo zakładamy, że

$$Gh(r_0)p(r_0) + \left(\overline{F} + r_0 p(r_0)\right)Gq(r_0) < 1.$$

Uwaga 4.3. Zauważmy, że z założenia (iii) otrzymujemy następującą nierówność

$$|f_n(t,x_1,x_2,\dots)-f_n(t,y_1,y_2,\dots)| \leqslant p(r)||x-y||_{l_\infty},$$

która jest spełniona dla dowolnych ciągów $x=(x_i),\ y=(y_i)\in l_\infty$ takich, że $||x||_{l_\infty}\leqslant r,\ ||y||_{l_\infty}\leqslant r$ oraz dla $t,\tau\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N}$. Ponadto $p(r)$ jest funkcją występującą w założeniu (iii).
W podobny sposób z założenia (viii) wnioskujemy, że

$$|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)-u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)| \leqslant q(r)g_n(t,\tau)||x-y||_{l_\infty},$$

dla $t,\tau\in\mathbb{R}_+,\ n\in\mathbb{N}$ oraz dla $r>0$, gdzie $x=(x_i),\ y=(y_i)\in l_\infty$ i $||x||_{l_\infty}\leqslant r,\ ||y||_{l_\infty}\leqslant r$. Funkcja $q=q(r)$ z powyższej nierówności występuje w założeniu (viii), podczas gdy funkcja $g_n=g_n(t,\tau)$ pojawia się w założeniu (vi).

Wykorzystując powyższe założenia możemy sformułować twierdzenie stanowiące główny rezultat tego rozdziału.

Twierdzenie 4.4. *Rozważmy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna* (4.1) *oraz załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(x). Wtedy układ ten ma co najmniej jedno rozwiązanie $x=x(t)=(x_n(t))$ w przestrzeni BC_∞. Ponadto rozwiązania tego układu mają tę własność, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji tworzących te rozwiązania dąży do zera w nieskończoności.*

Dowód. Zacznijmy od zdefiniowania operatorów $F,\ U,\ Q$ w przestrzeni BC_∞ następująco:

$$(Fx)(t)=((F_nx)(t))=(f_n(t,x(t)))=(f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)),$$
$$(Ux)(t)=((U_nx)(t))=\left(\int_o^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau\right),$$
$$(Qx)(t)=((Q_nx)(t))=(a_n(t)+(F_nx)(t)(U_nx)(t)).$$

Na początku wykażemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie. W tym celu ustalmy dowolną funkcję $x=x(t)=(x_n(t))\in BC_\infty$. Wtedy, na podstawie drugiej części założenia (ii), dla dowolnej liczby $t\in\mathbb{R}_+$ oraz $n\in\mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$|(F_nx)(t)|=|f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)|\leqslant\phi. \tag{4.2}$$

Stąd wnioskujemy, że funkcja Fx jest ograniczona na zbiorze $\mathbb{R}_+$.

Dalej pokażemy, że funkcja ta jest ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. W tym celu wykorzystamy fakt, że funkcja $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$ jest ciągła na $\mathbb{R}_+$, co jest równoważne następującemu warunkowi

$$\underset{t_0\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{t\in\mathbb{R}_+}{\forall}\ \left[|t-t_0| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t)-x(t_0)||_{l_\infty} \leqslant \varepsilon\right].$$

Ustalmy więc $t_0 \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ i dobierzmy $\delta > 0$ zgodnie z powyższym założeniem. Wtedy biorąc $t \in \mathbb{R}_+$ takie, że $|t-t_0| \leqslant \delta$ oraz uwzględniając Uwagę 4.3, dostajemy

$$\begin{aligned}
|(F_nx)(t)-(F_nx)(t_0)| &= |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t_0),x_2(t_0),\dots)| \\
&\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t),x_2(t),\dots)| \\
&\quad +|f_n(t_0,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t_0),x_2(t_0),\dots)| \qquad (4.3)\\
&\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t),x_2(t),\dots)| + p(||x(t)||_{l_\infty})||x(t)-x(t_0)||_{l_\infty} \\
&\leqslant |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t),x_2(t),\dots)| + p(||x||_{BC_\infty})\varepsilon.
\end{aligned}$$

Wykorzystując założenie (ii) dostajemy następujące oszacowanie pierwszego składnika wyżej otrzymanej sumy

$$|f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t_0,x_1(t),x_2(t),\dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla $n = 1,2,\dots$. Uwzględniając je w nierówności (4.3), mamy

$$|(F_nx)(t)-(F_nx)(t_0)| \leqslant (1+p(||x||_{BC_\infty}))\varepsilon$$

dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t-t_0| \leqslant \delta$.

Stąd wnioskujemy, że funkcja Fx jest ciągła w punkcie t_0. Ponieważ punkt t_0 był wybrany dowolnie możemy stwierdzić, że funkcja Fx jest ciągła na całym zbiorze $\mathbb{R}_+$. Łącząc ten fakt z ograniczonością funkcji Fx na przedziale $\mathbb{R}_+$ otrzymujemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Pokażemy teraz, że także operator U przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie. Ustalmy zatem funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Wtedy, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, korzystając kolejno z założeń (vi) i (vii), dostajemy oszacowanie

$$
\begin{aligned}
|(U_n x)(t)| &= \left| \int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)d\tau \right| \\
&\leqslant \int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|\,d\tau \leqslant \int_0^\infty g_n(t,\tau)h(||x_i(\tau)||_{l_\infty})d\tau \\
&\leqslant \int_0^\infty g_n(t,\tau)h(||x||_{BC_\infty})d\tau = h(||x||_{BC_\infty})\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau \\
&\leqslant G\cdot h(||x||_{BC_\infty}),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

gdzie G jest stałą zdefiniowaną po założeniu (vii).

Powyższe oszacowanie dowodzi, ze funkcja Ux jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

W celu udowodnienia ciągłości funkcji Ux na $\mathbb{R}_+$ ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $T > 0$. Wybierzmy dowolną liczbę $t_0 \in [0,T]$. Wtedy na podstawie założeń (v), (viii) i (ix) znajdziemy $\delta > 0$ taką, że dla $t \in [0,T]$, $|t-t_0| \leqslant \delta$ (bez straty ogólności możemy założyć, że $t > t_0$) oraz dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|d\tau \\
&\leqslant \int_0^T |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|d\tau \\
&+ \int_T^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \omega_\infty(u,\varepsilon) + \int_T^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|d\tau.
\end{aligned}
$$

W powyższej nierówności oznaczyliśmy

$$
\omega_\infty(u,\varepsilon) = \sup\left\{|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\ldots) - u_n(s,\tau,x_1,x_2,\ldots)| :\ t,s,\tau \in \mathbb{R}_+,\ |t-s| \leqslant \varepsilon,\ (x_i) \in l_\infty,\ n \in \mathbb{N}\right\}.
$$

Zauważmy, że na podstawie założenia (v) granica $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_\infty(u,\varepsilon) = 0$.

Dalej, wykorzystując założenie (vi) oraz wyżej otrzymane oszacowanie, dostajemy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots) - u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|d\tau \leqslant T\omega^T(u,\varepsilon) \\
&+ \int_T^\infty [|u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)| + |u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\ldots)|]\,d\tau \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon) + \int_T^\infty g_n(t,\tau)h\left(||(x_i(\tau))||_{l_\infty}\right)d\tau \\
&+ \int_T^\infty g_n(t_0,\tau)h\left(||(x_i(\tau))||_{l_\infty}\right)d\tau \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon) + h\left(||x||_{BC_\infty}\right)\left[\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau + \int_T^\infty g_n(t_0,\tau)d\tau\right].
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Następnie, uwzględniając założenie (viii) oraz oszacowanie (4.5) otrzymujemy następującą nierówność

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_\infty})\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau :\ t\in[0,T]\right\} \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_\infty})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau :\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Uwzględniając dodatkowo w (4.6) wzór wyrażający operator U, dostajemy

$$\begin{aligned}
|(U_nx)(t)-(U_nx)(t_0)| &= \left|\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau-\int_0^\infty u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau\right| \\
&\leqslant \int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t_0,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|d\tau \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon)+2h(||x||_{BC_\infty})\sup\left\{\int_T^\infty g_j(t,\tau)d\tau :\ t\in[0,T],\ j\in\mathbb{N}\right\}.
\end{aligned}$$

Stąd natomiast na podstawie założenia (ix) wnioskujemy, że funkcja Ux jest ciągła na przedziale $[0,T]$ dla dowolnego $T>0$. To zaś implikuje ciągłość funkcji Ux na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Łącząc ten fakt z ograniczonością funkcji Ux na przedziale $\mathbb{R}_+$ dostajemy, że operator U przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Teraz, biorąc pod uwagę wzór określający operator Q podany na początku dowodu oraz powyżej wykazane własności operatorów F i U możemy wywnioskować, że operator Q także przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie. Ponadto z nierówności (4.4) i (4.2) oraz założenia (i) dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned}
|(Q_nx)(t)| &\leqslant |a_n(t)|+|(F_nx)(t)||(U_nx)(t)| \\
&\leqslant A+\phi\cdot Gh(||x||_{BC_\infty}),
\end{aligned}$$

które jest prawdziwe dla dowolnej funkcji $x=x(t)\in BC_\infty$ i dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n. Stąd otrzymujemy

$$||Qx||_{BC_\infty}\leqslant A+\phi\cdot Gh(||x||_{BC_\infty}). \tag{4.7}$$

Z powyższej nierówności oraz założenia (x) wnioskujemy, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie, gdzie r_0 jest liczbą występującą w założeniu (x).

W dalszym ciągu udowodnimy, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. W tym celu najpierw wykażemy, że operatory F i U są ciągłe na zbiorze $\overline{B}_{r_0}$.

Ustalmy zatem dowolny $\varepsilon > 0$ oraz weźmy $x \in \overline{B}_{r_0}$. Następnie ustalmy dowolną funkcję $y \in \overline{B}_{r_0}$ taką, że $||x-y||_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon$. Wtedy, dla ustalonych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, na podstawie założenia (iii) oraz Uwagi 4.3, dostajemy

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots)| \\ &\leqslant p(r_0)||x-y||_{BC_\infty} \leqslant p(r_0)\varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$||Fx - Fy||_{BC_\infty} \leqslant p(r_0)\varepsilon.$$

Oczywiście powyższe oszacowanie dowodzi ciągłości operatora F na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Rozważmy teraz operator U i ustalmy liczbę $\varepsilon > 0$. Wtedy, na podstawie założenia (ix) możemy dobrać $T_0 > 0$ tak, aby

$$\int_{T_0}^{\infty} g_n(t,\tau)d\tau \leqslant \frac{\varepsilon}{4h(r_0)} \tag{4.8}$$

dla dowolnego $t \in [0, T_0]$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

Weźmy dalej dowolną funkcję $x = (x_i) \in \overline{B}_{r_0}$. Następnie wybierzmy $y = (y_i) \in BC_\infty$ tak, aby

$$||x(t) - y(t)||_{l_\infty} \leqslant \frac{\varepsilon}{2T_0 q(r_0)} \tag{4.9}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Wówczas dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, na podstawie założeń (vi), (viii) oraz oszacowań (4.8), (4.9), otrzymujemy

$$\begin{aligned} &|(U_n x)(t) - (U_n y)(t)| \\ &\leqslant \int_0^{\infty} |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau \\ &\leqslant \int_0^{T_0} |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau \\ &+ \int_{T_0}^{\infty} |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau \\ &\leqslant q(r_0)\int_0^{T_0} \sup\{|x_i(\tau) - y_i(\tau)| : \ i \geqslant n\}\, d\tau \\ &+ \int_{T_0}^{\infty} [|u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| + |u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|]\, d\tau \\ &\leqslant q(r_0)T_0 \cdot \frac{\varepsilon}{2T_0 q(r_0)} + \int_{T_0}^{\infty} g_n(t,\tau)\, [h(||x_i(\tau)||_{l_\infty}) + h(||y_i(\tau)||_{l_\infty})]\, d\tau \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2h(r_0)\int_{T_0}^{\infty} g_n(t,\tau) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2h(r_0)\cdot\frac{\varepsilon}{4h(r_0)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Stąd dostajemy następującą nierówność

$$||Ux - Uy||_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon,$$

która dowodzi, że operator U jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Łącząc ciągłość operatorów F i U na kuli $\overline{B}_{r_0}$ oraz uwzględniając postać operatora Q dostajemy, że operator Q jest ciągły na zbiorze $\overline{B}_{r_0}$.

W dalszej części przeanalizujemy zachowanie operatorów F, U i Q względem kolejnych składników miary niezwartości μ_c^3, czyli funkcji ω_0^∞, $\overline{\mu}_\infty^3$, c określonych wzorami (2.25), (2.26) i (2.27).

Na początku rozważmy funkcję ω_0^∞ oraz ustalmy dowolnie $\varepsilon > 0$. Następnie dobierzmy $t, s \in \mathbb{R}_+$ tak, aby $|t-s| \leqslant \varepsilon$ oraz weźmy niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$. Wówczas, biorąc $x = x(t) = (x_n(t)) \in X$ oraz $n \in \mathbb{N}$, w podobny sposób jak w (4.3), dostajemy

$$\begin{aligned}
&|(F_n x)(t) - (F_n x)(s)| = |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(s, x_1(s), x_2(s), \ldots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(s, x_1(t), x_2(t), \ldots)| + |f_n(s, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(s, x_1(s), x_2(s), \ldots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(s, x_1(t), x_2(t), \ldots)| + p(r_0) \sup\{|x_i(t) - x_i(s)| : \ i \geqslant n\} \\
&\leqslant \sup\{|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(s, x_1, x_2, \ldots)| : \ ||x||_{l_\infty} = ||(x_n)||_{l_\infty} \leqslant r_0\} + p(r_0)||x(t) - x(s)||_{l_\infty} \\
&\leqslant \omega_\infty^1(f, \varepsilon) + p(r_0)\omega^\infty(x, \varepsilon),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\omega_\infty^1(f, \varepsilon) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{\sup\{|f_n(t, x_1, x_2, \ldots) - f_n(s, x_1, x_2, \ldots)| : |t-s| \leqslant \varepsilon, \ ||x||_{l_\infty} = ||(x_n)||_{l_\infty} \leqslant r_0\}\}.$$

Zauważmy, że na podstawie założenia (ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \omega_\infty^1(f, \varepsilon) = 0$. Ponadto z powyższego oszacowania otrzymujemy

$$\omega^\infty(Fx, \varepsilon) \leqslant \omega_\infty^1(f, \varepsilon) + p(r_0)\omega^\infty(x, \varepsilon). \tag{4.10}$$

Rozważmy teraz operator U. Podobnie jak wyżej dostajemy

$$\begin{aligned}
&|(U_n x)(t) - (U_n x)(s)| \\
&= \left| \int_0^\infty u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots) d\tau - \int_0^\infty u_n(s, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots) d\tau \right| \\
&\leqslant \int_0^\infty |u_n(t, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots) - u_n(s, \tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \ldots)| d\tau.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Dalej, wykorzystując założenie (ix) możemy wybrać liczbę $T > 0$ tak, aby

$$\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau \leqslant \varepsilon \tag{4.12}$$

dla dowolnych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wówczas na podstawie nierówności (4.11) i założenia (vi), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&|(U_n x)(t) - (U_n x)(s)| \\
&\leqslant \int_0^T |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(s,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|\,d\tau \\
&+ \int_T^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(s,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|\,d\tau \\
&\leqslant \int_0^T |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots) - u_n(s,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|\,d\tau \\
&+ \int_T^\infty [|u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)| + |u_n(s,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)|]\,d\tau \\
&\leqslant \int_0^T \omega_\infty(u,\varepsilon)d\tau + \int_T^\infty g_n(t,\tau)h(||x_i(\tau)||_{l_\infty})d\tau + \int_T^\infty g_n(s,\tau)h(||x_i(\tau)||_{l_\infty})d\tau \\
&\leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon) + h(r_0)\int_T^\infty [g_n(t,\tau)+g_n(s,\tau)]\,d\tau,
\end{aligned}$$

gdzie $\omega_\infty(u,\varepsilon)$ oznacza zdefiniowany wcześniej moduł ciągłości ciągu funkcyjnego (u_n) na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Oczywiście $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_\infty(u,\varepsilon) = 0$, co jest konsekwencją założenia (v).
Łącząc wyżej otrzymaną nierówność z (4.12) oraz biorąc kolejno supremum po wszystkich $t,s \in \mathbb{R}_+$, $|t-s| \leqslant \varepsilon$ oraz $n \in \mathbb{N}$, dostajemy

$$\omega^\infty(Ux,\varepsilon) \leqslant T\omega_\infty(u,\varepsilon) + 2h(r_0)\varepsilon. \tag{4.13}$$

Ustalmy teraz dowolną funkcję $x \in X$. Wtedy, dla dowolnych liczb $t,s \in \mathbb{R}_+$, wykorzystując wzór określający operator Q i kładąc $a(t) = a_n(t)$, dostajemy

$$\begin{aligned}
&||(Qx)(t) - (Qx)(s)||_{l_\infty} \leqslant ||a(t)-a(s)||_{l_\infty} + ||(Fx)(t)(Ux)(t) - (Fx)(s)(Ux)(s)||_{l_\infty} \\
&= ||a(t)-a(s)||_{l_\infty} + ||(Fx)(t)(Ux)(t) - (Fx)(s)(Ux)(t) + (Fx)(s)(Ux)(t) - (Fx)(s)(Ux)(s)||_{l_\infty} \\
&\leqslant ||a(t)-a(s)||_{l_\infty} + ||(Ux)(t)||_{l_\infty}\,||(Fx)(t)-(Fx)(s)||_{l_\infty} \\
&+ ||(Fx)(s)||_{l_\infty}\,||(Ux)(t)-(Ux)(s)||_{l_\infty}.
\end{aligned}$$

Niech dalej $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ będą ustalonymi liczbami. Wówczas, korzystając z założeń (iii), (iv), dostajemy następującą nierówność

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t)| &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, 0, 0, \dots)| + |f_n(t, 0, 0, \dots)| \\ &\leqslant p(r_0) \sup\{|x_i(t)| : i \geqslant n\} + \overline{F} \\ &\leqslant p(r_0) r_0 + \overline{F} \end{aligned} \tag{4.14}$$

spełnioną dla dowolnej funkcji $x \in X \subset \overline{B}_{r_0}$.

Następnie ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz załóżmy, że $t, s \in \mathbb{R}_+$, $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Łącząc nierówności (2.21), (4.4), (4.10), (4.13) oraz (4.14), otrzymujemy

$$\begin{aligned} \omega^\infty(Qx, \varepsilon) \leqslant{} & \omega^\infty(a, \varepsilon) + h(r_0) G \left[p(r_0) \omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega^1_\infty(f, \varepsilon) \right] \\ & + \left[p(r_0) r_0 + \overline{F} \right] \left[T \omega_\infty(u, \varepsilon) + 2h(r_0) \varepsilon \right]. \end{aligned}$$

Przechodząc w powyższej nierówności z $\varepsilon \to 0$ i uwzględniając dodatkowo omówione wcześniej własności funkcji $\varepsilon \to \omega^1_\infty(f, \varepsilon)$, $\varepsilon \to T\omega_\infty(u, \varepsilon)$ (dla ustalonego $T > 0$) oraz założenie (i), dostajemy oszacowanie

$$\omega_0^\infty(QX) \leqslant G h(r_0) p(r_0) \omega_0^\infty(X). \tag{4.15}$$

W analogiczny sposób zbadamy drugi składnik miary μ_c^3, czyli funkcję $\overline{\mu}^3_\infty$ określoną wzorem (2.26). W tym celu ustalmy dowolny niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ oraz weźmy dowolne funkcje $x = x(t) = (x_n(t)),\ y = y(t) = (y_n(t)) \in X$. Wtedy, dla ustalonych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$\begin{aligned} & |(Q_n x)(t) - (Q_n y)(t)| \\ & \leqslant |(F_n x)(t)(U_n x)(t) - (F_n y)(t)(U_n y)(t)| \\ & = |(F_n x)(t)(U_n x)(t) - (F_n y)(t)(U_n x)(t) + (F_n y)(t)(U_n x)(t) - (F_n y)(t)(U_n y)(t)| \\ & \leqslant |(U_n x)(t)||(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| + |(F_n y)(t)||(U_n x)(t) - (U_n y)(t)|. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Oszacujemy teraz wyrażenia występujące po prawej stronie nierówności (4.16). Niech zatem $T > 0$ będzie ustaloną liczbą. Wtedy, biorąc $t \in [0, T]$, $n \in \mathbb{N}$, funkcje $x, y \in X$ i korzystając z założeń (viii) oraz (vii), dostajemy

$$\begin{aligned}|(U_nx)(t)-(U_ny)(t)| &= \left|\int_0^\infty u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)d\tau-\int_0^\infty u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)d\tau\right|\\ &\leqslant \int_0^\infty |u_n(t,\tau,x_1(\tau),x_2(\tau),\dots)-u_n(t,\tau,y_1(\tau),y_2(\tau),\dots)|d\tau\\ &\leqslant \int_0^\infty q(r_0)g_n(t,\tau)\sup\{|x_i(\tau)-y_i(\tau)|:\ i\geqslant n\}d\tau\\ &\leqslant Gq(r_0)\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\sup_{i\geqslant n}\{\sup\{|x_i(t)-y_i(t)|:\ x=x(t),\ y=y(t)\in X\}\}\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Biorąc odpowiednie kresy górne po lewej stronie otrzymanej nierówności, mamy

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left\{\sup_{i\geqslant n}\{\sup\{|(U_ix)(t)-(U_iy)(t)|:\ x=x(t),\ y=y(t)\in X\}\}\right\}\\ &\leqslant G\cdot q(r_0)\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\sup_{i\geqslant n}\{\sup\{|x_i(t)-y_i(t)|:\ x=x(t),\ y=y(t)\in X\}\}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Uwzględniając dodatkowo wzór (2.26) określający wartość $\overline{\mu}^3_\infty(X)$ otrzymujemy oszacowanie

$$\overline{\mu}^3_\infty(UX)\leqslant Gq(r_0)\overline{\mu}^3_\infty(X). \tag{4.18}$$

Podobnie, z założenia (iii) wnioskujemy, że nierówność

$$\begin{aligned}|(F_nx)(t)-(F_ny)(t)| &= |f_n(t,x_1(t),x_2(t),\dots)-f_n(t,y_1(t),y_2(t),\dots)|\\ &\leqslant p(r_0)\sup\{|x_i(t)-y_i(t)|: i\geqslant n\}\end{aligned}$$

jest spełniona dla dowolnie ustalonych $n\in\mathbb{N}$, $t\in\mathbb{R}_+$ oraz dla $x=x(t),\ y=y(t)\in X$. Kierując się wzorem (2.26) określającym funkcję $\overline{\mu}^3_\infty(X)$ łatwo zauważyć, że

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\left\{\sup_{i\geqslant n}\{\sup\{|(F_ix)(t)-(F_iy)(t)|:\ x=x(t),\ y=y(t)\in X\}\}\right\}\\ &\leqslant p(r_0)\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\{\sup_{i\geqslant n}\{\sup\{|x_i(t)-y_i(t)|:\ x=x(t),\ y=y(t)\in X\}\}\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Na podstawie (2.26) i powyższej nierówności, dostajemy

$$\overline{\mu}^3_\infty(FX)\leqslant p(r_0)\overline{\mu}^3_\infty(X). \tag{4.20}$$

Ostatecznie, łącząc oszacowania (4.16), (4.4), (4.20), (4.14) i (4.18) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\overline{\mu}^3_\infty(QX) &\leqslant Gh(r_0)p(r_0)\overline{\mu}^3_\infty(X)+\left[p(r_0)r_0+\overline{F}\right]Gq(r_0)\overline{\mu}^3_\infty(X)\\ &= G\left[h(r_0)p(r_0)+r_0p(r_0)q(r_0)+\overline{F}q(r_0)\right]\overline{\mu}^3_\infty(X).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Pozostał nam ostatni składnik miary μ_c^3, czyli $c(X)$ określony równością (2.27). W celu jego oszacowania ustalmy niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ oraz wybierzmy dowolne funkcje $x = x(t),\ y = y(t) \in X$ i liczbę $T > 0$. Wówczas dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \geqslant T$, postępując analogicznie do (4.17), dostajemy

$$|(U_n x)(t) - (U_n y)(t)| \leqslant Gq(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup_{i \geqslant n} |x_i(t) - y_i(t)| \right\} \right\}.$$

Stąd dedukujemy poniższą nierówność

$$\sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |(U_n x)(t) - (U_n y)(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X \right\} \right\}$$
$$\leqslant Gq(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n(t) - y_n(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X \right\} \right\} \right\}.$$

Uwzględniając dodatkowo wzór (2.27), dostajemy

$$c(UX) \leqslant Gq(r_0) c(X). \tag{4.22}$$

W podobny sposób możemy oszacować wielkość $c(FX)$. Mianowicie, postępując analogicznie jak w (4.19) otrzymujemy kolejno

$$|(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| \leqslant p(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup_{i \geqslant n} |x_i(t) - y_i(t)| \right\} \right\}$$

oraz

$$\sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X \right\} \right\}$$
$$\leqslant p(r_0) \left\{ \sup_{t \geqslant T} \left\{ \sup \left\{ \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n(t) - y_n(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X \right\} \right\} \right\}.$$

Stąd już łatwo zauważyć, że

$$c(FX) \leqslant p(r_0) c(X). \tag{4.23}$$

Łącząc oszacowania (4.16), (4.4), (4.23), (4.14), (4.22) oraz (2.27), otrzymujemy

$$\begin{aligned} c(QX) &\leqslant Gh(r_0)p(r_0)c(X) + \left(r_0 p(r_0) + \overline{F}\right) Gq(r_0)c(X) \\ &= \left[Gh(r_0)p(r_0) + Gr_0 p(r_0)q(r_0) + G\overline{F}q(r_0)\right] c(X). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Teraz, uwzględniając nierówności (4.15), (4.21), (4.24) oraz wzór (2.28) określający miarę niezwartości μ_c^3 w przestrzeni BC_∞, otrzymujemy

$$\mu_c^3(QX) \leqslant Gh(r_0)p(r_0)\omega_0^\infty(X)$$
$$+ \left[Gh(r_0)p(r_0) + Gr_0 p(r_0)q(r_0) + G\overline{F}q(r_0)\right] \overline{\mu}_\infty^3(X)$$
$$+ \left[Gh(r_0)p(r_0) + Gr_0 p(r_0)q(r_0) + G\overline{F}q(r_0)\right] c(X).$$

To natomiast prowadzi do następującej nierówności

$$\mu_c^3(QX) \leqslant G\left[h(r_0)p(r_0) + \overline{F}q(r_0) + r_0 p(r_0)q(r_0)\right] \mu_c^3(X).$$

Podsumowując, wyżej otrzymana nierówność, założenie (x) oraz poprzednie części dowodu pozwalają nam stwierdzić, że operator $Q : \overline{B}_{r_0} \to \overline{B}_{r_0}$ jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$ oraz istnieje nieujemna stała

$$k = G\left[h(r_0)p(r_0) + \overline{F}q(r_0) + r_0 p(r_0)q(r_0)\right] < 1$$

taka, że dla dowolnego niepustego podzbioru X kuli $\overline{B}_{r_0}$ spełniona jest nierówność

$$\mu_c^3(QX) \leqslant k\mu_c^3(X).$$

Zatem na podstawie twierdzenia Darbo o punkcie stałym (por. Twierdzenie 4.1) wnioskujemy, że istnieje co najmniej jeden element $x \in \overline{B}_{r_0}$ będący punktem stałym operatora Q w kuli $\overline{B}_{r_0}$. Oczywiście funkcja $x = x(t)$ jest jednocześnie rozwiązaniem nieskończonego układu kwadratowych równań całkowych Urysohna (4.1) w przestrzeni BC_∞.
Ponadto korzystając z Uwagi 4.2 dotyczącej faktu, że $FixQ \in ker\mu_c^3$ oraz charakterystyki struktury jądra $ker\mu_c^3$ miary μ_c^3 podanej w podrozdziale 2.4 tuż po wzorze (2.28) możemy stwierdzić, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji będących rozwiązaniami układu (4.1) dąży do zera w nieskończoności.

□

W celu dokładniejszego scharakteryzowania rozwiązań rozważanego przez nas układu podamy definicję asymptotycznej stabilności (por. [22, 58]).
Rozważmy zatem niepusty podzbiór Ω przestrzeni BC_∞ oraz niech Q będzie operatorem określonym na zbiorze Ω o wartościach w przestrzeni BC_∞. Rozważmy równanie operatorowe postaci

$$x(t) = (Qx)(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.25}$$

Definicja 4.5. Mówimy, że rozwiązania równania (4.25) są *asymptotycznie stabilne* jeżeli istnieje kula $\overline{B}(x_0, r)$ w przestrzeni BC_∞ taka, że $\overline{B}(x_0, r) \cap \Omega \neq \emptyset$ oraz dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że

$$||x(t) - y(t)||_{l_\infty} \leqslant \varepsilon$$

dla $t \geqslant T$ i dla wszystkich rozwiązań x, y równania (4.25) takich, że $x, y \in \overline{B}(x_0, r) \cap \Omega$.

Zauważmy, że posługując się powyższą definicją możemy sformułować Twierdzenie 4.4 w kontekście asymptotycznej stabilności.

Twierdzenie 4.6. *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(x). Wtedy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna* (4.1) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *w przestrzeni* BC_∞*. Ponadto rozwiązania tego układu są asymptotycznie stabilne.*

Zaprezentujemy teraz przykład ilustrujący zastosowanie Twierdzenia 4.4 oraz równoważnego mu Twierdzenia 4.5.

Przykład 4.7. Rozważmy nieskończony układ równań całkowych Urysohna określony następująco

$$\begin{aligned} x_n(t) = \sin\left(\frac{n^2 t + 1}{t + n^2}\right) + \left(\frac{2x_n(t)}{x_n^2(t) + n} + \frac{x_{n+1}^2(t)}{2x_{n+1}^2(t) + n}\right) \\ \times \int_0^\infty \left(\frac{1}{36n + t^2 + \tau^2} \cdot \frac{\arctan(n + x_n^2(\tau))}{38 + 2n + \tau^2} + \frac{1}{38n + t^2 + \tau^2} \cdot \frac{\arctan(n + 1 + x_n^2(\tau))}{36 + 2n + \tau^2}\right) d\tau, \end{aligned} \tag{4.26}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ i $n = 1, 2, \ldots$.

Zauważmy, że podany układ stanowi szczególny przypadek układu (4.1), jeśli przyjmiemy

$$a_n(t) = \sin\left(\frac{n^2 t + 1}{t + n^2}\right), \tag{4.27}$$

$$f_n(t, x_1, x_2, \ldots) = \frac{2x_n}{x_n^2 + n} + \frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2 + n}, \tag{4.28}$$

$$u_n(t, \tau, x_1, x_2, \ldots) = \frac{1}{36n + t^2 + \tau^2} \cdot \frac{\arctan(n + x_n^2)}{38 + 2n + \tau^2} + \frac{1}{38n + t^2 + \tau^2} \cdot \frac{\arctan(n + 1 + x_n^2)}{36 + 2n + \tau^2}, \tag{4.29}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $t, \tau \in \mathbb{R}_+$.

Wykorzystamy Twierdzenie 4.4 aby pokazać, że powyższy układ ma rozwiązanie w przestrzeni BC_∞. Udowodnimy zatem, że funkcje określone wyżej wzorami (4.27)-(4.29) spełniają założenia (i)-(x) wspomnianego twierdzenia.

Na początku zauważmy, że funkcja $a_n(t)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$ dla

$n = 1, 2, \dots$. Ten fakt pozawala nam stwierdzić, że funkcje te są jednakowo ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Ponadto, mamy

$$A = \sup\{|a_n(t)| : n = 1, 2, \dots,\ t \in \mathbb{R}_+\} = 1.$$

Podsumowując widzimy, że spełnione jest założenie (i).

Dalej zwróćmy uwagę na to, że funkcje $f_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots)$ zadane wzorem (4.28) są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ i przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1, 2, \dots$. Ponieważ funkcje te nie zależą jawnie od zmiennej t możemy stwierdzić, że spełniona jest pierwsza część założenia (ii).

Zauważmy ponadto, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla dowolnego ciągu $(x_n) \in l_\infty$ prawdziwa jest nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \left|\frac{2x_n}{x_n^2 + n}\right| + \left|\frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2 + n}\right| \leqslant 2\left|\frac{x_n}{x_n^2 + 1}\right| + \left|\frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2}\right| \leqslant 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

która implikuje, że spełnione jest założenie (ii) ze stałą $\phi = \frac{3}{2}$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę $r > 0$ oraz weźmy dowolne ciągi $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takie, że $||x||_{l_\infty} \leqslant r,\ ||y||_{l_\infty} \leqslant r$. Wówczas dla dowolnie ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$, korzystając ze wzoru (4.28), dostajemy

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant 2\left|\frac{x_n}{x_n^2 + n} - \frac{y_n}{y_n^2 + n}\right| + \left|\frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2 + n} - \frac{y_{n+1}^2}{2y_{n+1}^2 + n}\right|$$

$$\leqslant 2\left|\frac{x_n y_n (y_n - x_n) + n(x_n - y_n)}{(x_n^2 + n)(y_n^2 + n)}\right| + \left|\frac{n(x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2)}{(2x_{n+1}^2 + n)(2y_{n+1}^2 + n)}\right|$$

$$\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2 + n} \cdot \frac{y_n}{y_n^2 + n}\right| + \frac{n}{(x_n^2 + n)(y_n^2 + n)}\right] \cdot |x_n - y_n| + \left|\frac{n(x_{n+1} + y_{n+1})}{(2x_{n+1}^2 + n)(2y_{n+1}^2 + n)}\right| \cdot |x_{n+1} - y_{n+1}|$$

$$\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2 + n} \cdot \frac{y_n}{y_n^2 + n}\right| + n\frac{1}{x_n^2 + n} \cdot \frac{1}{y_n^2 + n}\right] \cdot |x_n - y_n|$$

$$+ n\left[\frac{|x_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2 + n)(2y_{n+1}^2 + n)} + \frac{|y_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2 + n)(2y_{n+1}^2 + n)}\right] \cdot |x_{n+1} - y_{n+1}|$$

$$\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2 + n}\right| \cdot \left|\frac{y_n}{y_n^2 + n}\right| + n\frac{1}{x_n^2 + n} \cdot \frac{1}{y_n^2 + n}\right] \cdot |x_n - y_n|$$

$$+ n\left[\frac{|x_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2 + n)n} + \frac{|y_{n+1}|}{(2y_{n+1}^2 + n)n}\right] \cdot |x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant 2\left(\frac{1}{4n} + \frac{1}{n}\right)|x_n - y_n| + \frac{1}{\sqrt{2n}}|x_{n+1} - y_{n+1}|$$

$$\leqslant \frac{5}{2}|x_n - y_n| + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_{n+1} - y_{n+1}| \leqslant \frac{5}{2}\left[|x_n - y_n| + |x_{n+1} - y_{n+1}|\right] \leqslant 5 \sup\{|x_i - y_i| :\ i \geqslant n\}.$$

Powyższa nierówność dowodzi, że spełnione jest założenie (iii) z funkcją $p(r) = 5$.

Przyjrzyjmy się teraz ciągowi $\left(\overline{f}_n\right)$ określonemu w założeniu (iv). Korzystając ze wzoru (4.28) otrzymujemy, że $\left(\overline{f}_n\right) = |f_n(t,0,0,\dots)| = 0$. Oczywiście funkcje f_n, $n = 1,2,\dots$ spełniają założenie (iv) ze stałą $\overline{F} = 0$.

Zauważmy dalej, że dla dowolnej liczby naturalnej n funkcje u_n określone wzorem (4.29) przekształcają zbiór $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times l_\infty$ w zbiór $\mathbb{R}$. Ustalmy ponadto dowolnie $t,s \in \mathbb{R}_+$ (bez straty ogólności możemy założyć, że $s < t$), $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $x = (x_i) \in l_\infty$. Wówczas spełniona jest nierówność

$$
\begin{aligned}
&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots) - u_n(s,\tau,x_1,x_2,\dots)| \\
&\leqslant \left| \frac{1}{36n+t^2+\tau^2} \cdot \frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2} - \frac{1}{36n+s^2+\tau^2} \cdot \frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2} \right| \\
&+ \left| \frac{1}{38n+t^2+\tau^2} \cdot \frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2} - \frac{1}{38n+s^2+\tau^2} \cdot \frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2} \right| \\
&\leqslant \frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2} \left(\frac{1}{36n+s^2+\tau^2} - \frac{1}{36n+t^2+\tau^2} \right) \\
&+ \frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2} \left(\frac{1}{38n+s^2+\tau^2} - \frac{1}{38n+t^2+\tau^2} \right) \\
&\leqslant \frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2} \cdot \frac{t+s}{(36n+s^2+\tau^2)(36n+t^2+\tau^2)} \cdot (t-s) \\
&+ \frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2} \cdot \frac{t+s}{(38n+s^2+\tau^2)(38n+t^2+\tau^2)} \cdot (t-s) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{38} \cdot \left(\frac{t}{36 \cdot (36n+t^2+\tau^2)} + \frac{s}{36 \cdot (36n+s^2+\tau^2)} \right) \cdot (t-s) \\
&+ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \left(\frac{t}{38 \cdot (38n+t^2+\tau^2)} + \frac{s}{38 \cdot (38n+s^2+\tau^2)} \right) \cdot (t-s) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{36 \cdot \sqrt{36n+\tau^2}} \cdot (t-s) + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{38 \cdot \sqrt{38n+\tau^2}} \cdot (t-s) \\
&\leqslant \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{6} \cdot (t-s) + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{38} \cdot \frac{1}{6} \cdot (t-s) \\
&\leqslant \frac{\pi}{3 \cdot 36 \cdot 76} |t-s|.
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania wnioskujemy, że rodzina funkcji $\{u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)\}$ jest jednakowo ciągła dla $t \in \mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $\tau \in \mathbb{R}_+$ i $x = (x_i) \in l_\infty$. To zaś oznacza, że spełnione jest założenie (v).

Pokażemy teraz, że spełnione jest kolejne założenie (vi). W tym celu ustalmy dowolne liczby $n \in \mathbb{N}$ oraz $t,\tau \in \mathbb{R}_+$. Następnie wybierzmy dowolny ciąg $x = (x_i) \in l_\infty$. Wówczas korzystając ze wzoru (4.29) określającego funkcje u_n, otrzymujemy

$$\begin{aligned}&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)|\\ &\leqslant \frac{1}{36n+t^2+\tau^2}\cdot\frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2}+\frac{1}{38n+t^2+\tau^2}\cdot\frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2}\\ &\leqslant \frac{2}{36+t^2+\tau^2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{38}=\frac{1}{36+t^2+\tau^2}\cdot\frac{\pi}{38}.\end{aligned}$$

Powyższe oszacowanie dowodzi, że spełnione jest założenie (vi) z funkcjami $h(r)=\frac{\pi}{38}$ oraz $g_n(t,\tau)=\frac{1}{36+t^2+\tau^2}$ dla $n=1,2,\dots$.

Rozważmy dalej funkcję $g_n(t,\tau)$ wyznaczoną i określoną powyżej wzorem

$$g_n(t,\tau)=\frac{1}{36+t^2+\tau^2} \tag{4.30}$$

dla $n=1,2,\dots$. Funkcja ta jest oczywiście ciągła na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$. Ponadto łatwo obliczyć, że

$$\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau=\int_0^\infty\frac{1}{36+t^2+\tau^2}d\tau=\frac{\pi}{2\sqrt{t^2+36}}$$

dla dowolnego $t\in\mathbb{R}_+$. Stąd zaś wynika następująca nierówność

$$\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau\leqslant\frac{\pi}{12},$$

która pokazuje, że spełnione jest założenie (vii). Ponadto mamy

$$G=\sup\left\{\int_0^\infty g_n(t,\tau)d\tau:\ n=1,2,\dots\right\}=\frac{\pi}{12}.$$

W dalszym ciągu ustalmy liczby $t,\tau\in\mathbb{R}_+$ oraz weźmy ciągi $x=(x_i),\ y=(y_i)\in l_\infty$ takie, że $||x||_{l_\infty}\leqslant r,\ ||y||_{l_\infty}\leqslant r$, gdzie $r>0$ jest ustaloną liczbą. Wówczas korzystając z (4.29) wnioskujemy, że dla dowolnego $n\in\mathbb{N}$ spełnione są nierówności

$$\begin{aligned}&|u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)-u_n(t,\tau,y_1,y_2,\dots)|\\ &\leqslant\frac{1}{36n+t^2+\tau^2}\left|\frac{\arctan(n+x_n^2)}{38+2n+\tau^2}-\frac{\arctan(n+y_n^2)}{38+2n+\tau^2}\right|\\ &+\frac{1}{38n+t^2+\tau^2}\left|\frac{\arctan(n+1+x_n^2)}{36+2n+\tau^2}-\frac{\arctan(n+1+y_n^2)}{36+2n+\tau^2}\right|\\ &\leqslant\frac{1}{36+t^2+\tau^2}\cdot\frac{1}{36+2n+\tau^2}\left|\arctan(n+x_n^2)-\arctan(n+y_n^2)\right|\\ &+\frac{1}{36+t^2+\tau^2}\cdot\frac{1}{36+2n+\tau^2}\left|\arctan(n+1+x_n^2)-\arctan(n+1+y_n^2)\right|\\ &\leqslant\frac{1}{36+t^2+\tau^2}\cdot\frac{1}{36+2n+\tau^2}\left[\left|\arctan(n+x_n^2)-\arctan(n+y_n^2)\right|\right.\\ &\left.+\left|\arctan(n+1+x_n^2)-\arctan(n+1+y_n^2)\right|\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{1}{36+t^2+\tau^2} \cdot \frac{1}{36}\ \left[|x_n^2 - y_n^2| + |x_n^2 - y_n^2|\right] \\
&\leqslant \frac{1}{36+t^2+\tau^2} \cdot \frac{1}{36} \cdot 2\ |x_n - y_n| \cdot |x_n + y_n| \\
&\leqslant \frac{1}{36+t^2+\tau^2} \cdot \frac{1}{18}\ |x_n - y_n|\,(|x_n| + |y_n|) \\
&\leqslant \frac{1}{36+t^2+\tau^2} \cdot \frac{r}{9}\ |x_n - y_n| \\
&\leqslant \frac{1}{36+t^2+\tau^2} \cdot \frac{r}{9} \cdot \sup\{|x_i - y_i| :\ i \geqslant n\}\,.
\end{aligned}
$$

Widzimy zatem, że przyjmując $g_n(t,\tau)$ jako funkcję określoną wzorem (4.30) oraz $q(r) = \frac{r}{9}$ spełnione jest założenie (viii).

Rozważmy teraz założenie (ix). Najpierw zauważmy, że dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $T > 0$ prawdziwa jest równość

$$
\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau = \frac{1}{T} \cdot \frac{T}{\sqrt{36+t^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{T}{\sqrt{36+t^2}}\right). \tag{4.31}
$$

Kładąc $s = \frac{T}{\sqrt{36+t^2}}$ przekształcamy ją do postaci

$$
\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau = \frac{1}{T} \cdot s \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right). \tag{4.32}
$$

Zauważmy, że gdy t przebiega zbiór $\mathbb{R}_+$, to zmienna s przybiera wartości z przedziału $\left[0, \frac{T}{6}\right]$. Rozważmy pomocniczo funkcję

$$
g(s) = s\ \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right)
$$

dla $s \in \left[0, \frac{T}{6}\right]$. Wtedy, dla dowolnie ustalonego $s \geqslant 0$ dostajemy

$$
g'(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s - \frac{s}{1+s^2}.
$$

Oznaczmy dalej funkcję $m(s) = g'(s)$ dla $s \in \mathbb{R}_+$. Wówczas $m(0) = \frac{\pi}{2}$ oraz

$$
m'(s) = -\frac{1}{1+s^2} - \frac{1-s^2}{(1+s^2)^2} = -\frac{2}{(1+s^2)^2}.
$$

Stąd otrzymujemy, że $m'(s) < 0$ dla $s \in \mathbb{R}_+$, czyli funkcja $m(s)$ jest malejąca na przedziale $\mathbb{R}_+$. Ponadto $\lim\limits_{s\to\infty} m(s) = 0$.

Łącząc powyżej otrzymane własności dotyczące funkcji $m(s)$ wnioskujemy, że $m(s) > 0$ dla

$s \in \mathbb{R}_+$. To zaś implikuje, że $g'(s) = m(s) > 0$ dla $s \in \mathbb{R}_+$. Funkcja $g(s)$ jest zatem rosnąca na półosi $\mathbb{R}_+$. Biorąc dodatkowo pod uwagę zależność (4.32), dostajemy

$$\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau : \ t \geqslant 0\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{1}{T}\, s\, \left(\frac{\pi}{2} - \arctan s\right) : \ s \in \left[0, \frac{T}{6}\right]\right\}$$
$$= \frac{1}{T}\sup\left\{g(s) : \ s \in \left[0, \frac{T}{6}\right]\right\} = \frac{1}{T}\, g\left(\frac{T}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{T}{6}\right).$$

Powyższa równość prowadzi do następującej

$$\lim_{T\to\infty}\left[\sup\left\{\int_T^\infty g_n(t,\tau)d\tau : \ t \geqslant 0\right\}\right] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{T}{6}\right) = 0.$$

Widzimy zatem, że spełnione jest założenie (ix).

Rozważmy teraz nierówność występującą w założeniu (x), czyli $A + \phi G h(r) \leqslant r$. Wykorzystując wyznaczone wcześniej stałe $A = 1$, $\phi = \frac{3}{2}$, $G = \frac{\pi}{12}$ oraz funkcję $h(r) = \frac{\pi}{38}$ widzimy, że nierówność ta przybiera następującą postać

$$1 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{38} \leqslant r.$$

Łatwo sprawdzić, że liczba $r_0 = 1,1$ spełnia otrzymaną nierówność.
Dalej, uwzględniając dodatkowo funkcje $p(r) = 5,\ q(r) = \frac{r}{9}$ oraz stałą $\overline{F} = 0$ widzimy, że druga nierówność występująca w założeniu (x) jest postaci

$$\frac{\pi}{12}\cdot\frac{\pi}{38}\cdot 5 + r\cdot 5\cdot\frac{\pi}{12}\cdot\frac{r}{9} < 1,$$

którą jak łatwo sprawdzić, spełnia znaleziona wyżej liczba $r_0 = 1,1$. Podsumowując, liczba $r_0 = 1,1$ spełnia założenie (x).

Ostatecznie, na podstawie Twierdzenia 4.4 wnioskujemy, że rozważany w tym przykładzie nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Urysohna (4.26) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$ należące do kuli $\overline{B}_{1,1}$ w przestrzeni BC_∞. Uwzględniając dodatkowo Twierdzenie 4.5 otrzymujemy, że wszystkie rozwiązania układu (4.26) należące do kuli $\overline{B}_{1,1}$ są asymptotycznie stabilne.

5 Nieskończone układy kwadratowych równań całkowych Hammersteina i ich rozwiązania asymptotycznie stabilne

W tym rozdziale przedstawimy wyniki dotyczące istnienia rozwiązań nieskończonych układów kwadratowych równań całkowych Hammersteina postaci

$$x_n(t) = a_n(t) + f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) \int_0^\infty g_n(t,\tau) h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau, \tag{5.1}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ oraz $n = 1, 2, \dots$.

Zauważmy, że układy równań całkowych Hammersteina stanowią szczególny przypadek równań całkowych Urysohna (przyjmując jako funkcje $u_n(t,\tau,x_1,x_2,\dots)$ iloczyn funkcji $g_n(t,\tau)h_n(\tau,x_1,x_2,\dots)$). Podobnie jak poprzednio będziemy pracować w przestrzeni BC_∞ i tym samym wykorzystamy określoną w niej miarę niezwartości μ_c^3 oraz twierdzenie Darbo o punkcie stałym (por. Twierdzenie 4.1). Możemy zatem potraktować ten rozdział jako szczególny przypadek Rozdziału 4.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że spełnione są następujące założenia.

(i) Ciąg $(a_n(t))$ jest elementem przestrzeni BC_∞. Ponadto funkcje $a_n = a_n(t)$ są jednakowo ciągłe na półosi $\mathbb{R}_+$.

Do dalszych celów oznaczmy przez A normę funkcji $(a_n(t))$ w przestrzeni BC_∞, tzn.

$$A = \sup\{\sup\{|a_n(t)| : \ n = 1, 2, \dots\} : \ t \in \mathbb{R}_+\}.$$

(ii) Funkcje $g_n(t,\tau) = g_n : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ są ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ponadto funkcje $t \to g_n(t,\tau)$ są jednakowo ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $\tau \in \mathbb{R}_+$, czyli spełniony jest następujący warunek

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall} \ \underset{\tau\in\mathbb{R}_+}{\forall} \ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall} \ [|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |g_n(t_2,\tau) - g_n(t_1,\tau)| \leqslant \varepsilon].$$

(iii) Dla dowolnych liczb $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty |g_n(t,\tau)| d\tau$$

jest zbieżna. Dodatkowo zakładamy, że całki $\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau$ są wspólnie ograniczone dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Oznaczmy zatem przez G_1 skończoną stałą określoną równością

$$G_1 = \sup\left\{ \int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau : \ n = 1,2,\ldots,\ t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

(iv) Ciąg $(g_n(t,\tau))$ jest wspólnie ograniczony na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$, tzn. istnieje stała $G_2 > 0$ taka, że

$$|g_n(t,\tau)| \leqslant G_2$$

dla $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1,2,\ldots$.

(v) Funkcje f_n są określone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ oraz przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1,2,\ldots$. Ponadto funkcje $t \to f_n(t,x_1,x_2,\ldots)$ są jednakowo ciągłe na $\mathbb{R}_+$ jednostajnie względem $x = (x_n) \in l_\infty$, tzn.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ \underset{(x_i)\in l_\infty}{\forall}\ \underset{n\in\mathbb{N}}{\forall}\ \underset{t_1,t_2\in\mathbb{R}_+}{\forall} \left[|t_2 - t_1| \leqslant \delta \Rightarrow |f_n(t_2,x_1,x_2,\ldots) - f_n(t_1,x_1,x_2,\ldots)| \leqslant \varepsilon\right].$$

Ponadto funkcje f_n są wspólnie ograniczone, czyli istnieje stała $\phi > 0$ taka, że

$$|f_n(t,x_1,x_2,\ldots)| \leqslant \phi$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$.

(vi) Istnieje funkcja $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, która jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w punkcie 0 oraz taka, że $k(0) = 0$. Dodatkowo zakładamy, że spełniony jest następujący warunek

$$|f_n(t,x_1,x_2,\ldots) - f_n(t,y_1,y_2,\ldots)| \leqslant k(r)\sup\{|x_i - y_i| : \ i \geqslant n\}$$

dla $r > 0$, dla dowolnych ciągów $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\| x \|_{l_\infty} \leqslant r,\ \| y \|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$, $n = 1,2,\ldots$.

(vii) Ciąg funkcyjny $\left(\overline{f}_n\right)$, gdzie $\overline{f}_n(t) = |f_n(t,0,0,\ldots)|$ jest elementem przestrzeni BC_∞.

Zauważmy, że na podstawie założenia (vii) możemy zdefiniować skończoną stałą

$$\overline{F} = \sup\left\{\overline{f}_n(t) : \ t \in \mathbb{R}_+,\ n = 1,2,\ldots\right\}.$$

(viii) Funkcje h_n są okreslone na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ oraz przyjmują wartości rzeczywiste dla $n = 1,2,\dots$. Ponadto istnieje funkcja $m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, która jest niemalejąca na $\mathbb{R}_+$, ciągła w $r = 0$, $m(0) = 0$ oraz spełniająca warunek

$$|h_n(t,x_1,x_2,\dots) - h_n(t,y_1,y_2,\dots)| \leqslant m(r) \sup\{|x_i - y_i| : \ i \geqslant n\}$$

dla dowolnej liczby $r > 0$, dla $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\| x \|_{l_\infty} \leqslant r,\ \| y \|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla wszystkich $t \in \mathbb{R}_+$, $n = 1,2,\dots$.

(ix) Operator h określony na zbiorze $\mathbb{R}_+ \times l_\infty$ wzorem $(hx)(t) = (h_n(t,x)) = (h_1(t,x), h_2(t,x),\dots)$ jest ograniczony, tzn. istnieje stała dodatnia $\overline{h}$ taka, że

$$\| (hx)(t) \|_{l_\infty} \leqslant \overline{h}$$

dla dowolnego ciągu $x \in l_\infty$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$.

(x) Dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$ i dla każdej funkcji $x = x(t) = (x_i(t)) \in BC_\infty$ całka niewłaściwa

$$\int_0^\infty |h_n(s,x(s))|ds = \int_0^\infty |h_n(s,x_1(s),x_2(s),\dots)|ds$$

jest zbieżna. Dodatkowo, całki $\int_0^\infty |h_n(s,x(s))|ds$ są wspólnie ograniczone dla dowolnych $n \in \mathbb{N}$ i $x = x(t) \in BC_\infty$.

Na podstawie powyższego założenia możemy zdefiniować skończoną stałą $\overline{H}$, kładąc

$$\overline{H} = \sup\left\{ \int_0^\infty |h_n(s,x(s))|ds : \ x \in BC_\infty,\ n = 1,2,\dots \right\}.$$

(xi) Istnieje stała $r_0 > 0$ będąca rozwiązaniem nierówności

$$A + \overline{F} G_1 \overline{h} + G_1 \overline{h} r k(r) \leqslant r$$

oraz taka, że

$$G_1 \overline{h} k(r_0) + \phi G_1 m(r_0) < 1.$$

Stałe $\overline{F},\ G_1,\ \overline{h},\ A$ oraz funkcje $k(r)$, $m(r)$ występujące w powyższych nierównościach zostały określone w poprzednich założeniach.

Uwaga 5.1. Zauważmy, że na podstawie założenia (vi) możemy wywnioskować, że dla dowolnych ciągów $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ takich, że $\| x \|_{l_\infty} \leqslant r,\ \| y \|_{l_\infty} \leqslant r$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$ i $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest nierówność

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant k(r) \| x - y \|_{l_\infty},$$

gdzie $k = k(r)$ jest funkcją występującą w założeniu (vi).
W ten sam sposób z założenia (viii) wnioskujemy, że

$$|h_n(t, x_1, x_2, \dots) - h_n(t, y_1, y_2, \dots)| \leqslant m(r) \| x - y \|_{l_\infty},$$

dla $t \in \mathbb{R}_+,\ n \in \mathbb{N}$ oraz $r > 0$, gdzie $x = (x_i),\ y = (y_i) \in l_\infty$ są takie, że $\| x \|_{l_\infty} \leqslant r,\ \| y \|_{l_\infty} \leqslant r$. Ponadto $m = m(r)$ jest funkcją określoną w założeniu (viii).

Zauważmy, że powyższa uwaga pozwala nam wywnioskować, że założenia (vi) i (viii) są istotnie silniejsze niż założenia wymagające, aby funkcje f_n oraz h_n spełniały klasyczny warunek Lipschitza z funkcjami $k(r)$ oraz $m(r)$.

Teraz, na podstawie podanych wyżej założeń możemy sformułować twierdzenie stanowiące główny wynik tego rozdziału.

Twierdzenie 5.2. *Załóżmy, że spełnione są założenia (i)-(xi). Wtedy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Hammersteina* (5.1) *ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = (x_n(t))$ w przestrzeni BC_∞. Ponadto rozwiązania układu* (5.1) *mają tę własność, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji należących do tych rozwiązań dąży do zera w nieskończoności.*

Dowód. Na początku zdefiniujmy operatory $F,\ H,\ Q$ na przestrzeni BC_∞ następująco:

$$(Fx)(t) = ((F_n x)(t)) = (f_n(t, x(t))) = (f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)),$$

$$(Hx)(t) = ((H_n x)(t)) = \left(\int_0^\infty g_n(t,\tau) h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau \right),$$

$$(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) = (a_n(t) + (F_n x)(t)(H_n x)(t)).$$

Najpierw wykażemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

W tym celu ustalmy funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Korzystając z drugiej części założenia (v) otrzymujemy nierówność

$$|(F_nx)(t)| = |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots)| \leqslant \phi \tag{5.2}$$

spełnioną dla dowolnych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Stąd oczywiście wynika, że funkcja Fx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Pozostało nam udowodnić, że Fx jest funkcją ciągłą na półosi $\mathbb{R}_+$. Skorzystamy tutaj z ciągłości funkcji $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$ na $\mathbb{R}_+$. Ciągłość funkcji x oznacza, że spełniony jest następujący warunek

$$\underset{t_0 \in \mathbb{R}_+}{\forall} \; \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \; \underset{\delta > 0}{\exists} \; \underset{t \in \mathbb{R}_+}{\forall} \left[|t - t_0| \leqslant \delta \Rightarrow ||x(t) - x(t_0)||_{l_\infty} \leqslant \varepsilon \right].$$

Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$ oraz $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Następnie wybierzmy $\delta > 0$ według powyższego warunku. Wtedy, dla $t \in \mathbb{R}_+$ takiego, że $|t - t_0| \leqslant \delta$, na podstawie Uwagi 5.1, otrzymujemy

$$\begin{aligned}
|(F_nx)(t) - (F_nx)(t_0)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\
&\quad + |f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)| \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \\
&\quad + k(|||x(t)||_{l_\infty})||x(t) - x(t_0)||_{l_\infty} \\
&\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| + k(||x||_{BC_\infty})\varepsilon.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Następnie, wykorzystując założenie (v) znajdziemy liczbę $\delta > 0$ taką, że

$$|f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t_0, x_1(t), x_2(t), \dots)| \leqslant \varepsilon$$

dla $|t - t_0| \leqslant \delta$ oraz $n = 1, 2, \dots$. Łącząc ten fakt z (5.3) otrzymujemy następujące oszacowanie

$$|(F_nx)(t) - (F_nx)(t_0)| \leqslant (1 + k(||x||_{BC_\infty}))\,\varepsilon$$

dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t - t_0| \leqslant \delta$.

Powyższe rozważania pozwalają nam stwierdzić, że funkcja Fx jest ciągła w punkcie t_0. Ponieważ punkt t_0 był wybrany dowolnie dostajemy, że jest ona ciągła na przedziale $\mathbb{R}_+$. Łącząc to z wykazaną wcześniej ograniczonością funkcji Fx otrzymujemy, że operator F przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

W dalszym ciągu udowodnimy, że także operator H przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie. Ustalmy zatem dowolną funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Wówczas, dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$, na podstawie założeń (ix) i (iii), dostajemy nierówność

$$\begin{aligned} |(Hx)(t)| &\leqslant \int_0^\infty |g_n(t,\tau)||h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots)|d\tau \\ &\leqslant \int_0^\infty |g_n(t,\tau)|\overline{h}\, d\tau \leqslant \overline{h} \int_0^\infty |g_n(t,\tau)| d\tau \leqslant G_1 \overline{h}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Widzimy zatem, że funkcja Hx jest ograniczona na przedziale $\mathbb{R}_+$.

Ustalmy dalej $\varepsilon > 0$ i wybierzmy $\delta > 0$ z założenia (ii). Wówczas dla dowolnych liczb $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ takich, że $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, na podstawie założeń (ii) i (x) (zakładając, że $t_1 < t_2$), dostajemy

$$\begin{aligned} &|(H_n x)(t_2) - (H_n x)(t_1)| \\ &\leqslant \left| \int_0^\infty g_n(t_2,\tau) h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau - \int_0^\infty g_n(t_1,\tau) h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) d\tau \right| \\ &\leqslant \int_0^\infty |g_n(t_2,\tau) - g_n(t_1,\tau)||h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots)| d\tau \\ &\leqslant \int_0^\infty \omega_g(\delta) |h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots)| d\tau, \end{aligned}$$

gdzie $\omega_g(\delta)$ oznacza wspólny moduł ciągłości ciągu funkcji $t \to g_n(t,\tau)$ (zgodnie z założeniem (ii)), czyli

$$\omega_g(\delta) = \sup\{|g_n(t_2,\tau) - g_n(t_1,\tau)| : \ t_1, t_2, \tau \in \mathbb{R}_+, \ |t_1 - t_2| \leqslant \delta, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Oczywiście mamy, że $\lim\limits_{\delta \to 0} \omega_g(\delta) = 0$.

Korzystając z powyższej nierówności dostajemy

$$|(H_n x)(t_2) - (H_n x)(t_1)| \leqslant \overline{H} \omega_g(\delta). \tag{5.5}$$

Stąd natomiast wynika następująca nierówność

$$||(Hx)(t_2) - (Hx)(t_1)||_{l_\infty} \leqslant \overline{H} \omega_g(\delta),$$

która dowodzi ciągłości funkcji Hx na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Łącząc ten fakt z wykazaną wcześniej ograniczonością funkcji Hx na $\mathbb{R}_+$ wnioskujemy, że operator H przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Do dalszych rozważań wykorzystamy jedną z własności przestrzeni BC_∞ mówiącą o tym, że stanowi ona algebrę Banacha względem mnożenia po współrzędnych ciągów funkcyjnych. Uwzględniając dodatkowo definicję operatora Q oraz założenie (i) możemy stwierdzić, że dla dowolnie ustalonej funkcji $x = x(t) \in BC_\infty$ funkcja

$$(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) = (a_n(t) + (F_n x)(t)(H_n x)(t))$$

przekształca przedział $\mathbb{R}_+$ w przestrzeń l_∞. Biorąc bowiem pod uwagę fakt, że $((F_n x)(t)) \in l_\infty$ dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oraz oszacowanie (5.4), dostajemy nierówność

$$|(Q_n x)(t)| \leqslant |a_n(t)| + G_1 \overline{h} |(F_n x)(t)|$$

dla dowolnej liczby $n \in \mathbb{N}$. Zatem na podstawie (5.2) wnioskujemy, że $(Qx)(t) = ((Q_n x)(t)) \in l_\infty$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}_+$.

Zauważmy dalej, że ciągłość funkcji Qx na półosi $\mathbb{R}_+$ jest prostą konsekwencją ciągłości funkcji Fx oraz Hx na tym zbiorze. W podobny sposób, wykorzystując dodatkowo założenie (i) dowodzimy ograniczoności funkcji Qx na $\mathbb{R}_+$.

Podsumowując, otrzymane do tej pory wnioski dotyczące funkcji Qx pozwalają nam stwierdzić, że operator Q przekształca przestrzeń BC_∞ w siebie.

Do dalszych celów wybierzmy dowolną funkcję $x = x(t) = (x_n(t)) \in BC_\infty$. Ustalmy także liczbę naturalną n oraz $t \in \mathbb{R}_+$. Wówczas, na podstawie Uwagi 5.1 oraz założenia (vii), dostajemy oszacowanie

$$\begin{aligned} |(F_n x)(t)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(t, 0, 0, \ldots) + f_n(t, 0, 0, \ldots)| \\ &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots) - f_n(t, 0, 0, \ldots)| + |f_n(t, 0, 0, \ldots)| \\ &\leqslant k(||x(t)||_{l_\infty}) \sup\{|x_i(t)| : \ i \geqslant n\} + |\overline{f}_n(t)| \leqslant k(||x||_{BC_\infty}) ||x||_{BC_\infty} + \overline{F}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Wykorzystując powyższe oszacowanie, założenie (i) oraz (5.4), dla dowolnie ustalonych $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$ dostajemy

$$\begin{aligned} |(Q_n x)(t)| &\leqslant |a_n(t)| + |(F_n x)(t)||(H_n x)(t)| \\ &\leqslant A + \left(k(||x(t)||_{l_\infty})||x(t)||_{l_\infty} + \overline{F}\right) G_1 \overline{h} \\ &\leqslant A + \overline{F} G_1 \overline{h} + G_1 \overline{h} k(||x||_{BC_\infty})||x||_{BC_\infty}. \end{aligned}$$

Stąd natomiast wynika następująca nierówność

$$||Qx||_{BC_\infty} \leqslant A + \overline{F}G_1\overline{h} + G_1\overline{h}k(||x||_{BC_\infty})||x||_{BC_\infty},$$

która wraz z pierwszą częścią założenia (xi) pozwala nam wywnioskować, że istnieje liczba $r_0 > 0$ taka, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ ($\overline{B}_{r_0} \subset BC_\infty$) w siebie.

Udowodnimy teraz, że operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$. Ze względu na postać operatora Q najpierw wykażemy ciągłość operatorów F i H na zbiorze $\overline{B}_{r_0}$.
Ustalmy zatem $\varepsilon > 0$ i wybierzmy dowolnie $x \in \overline{B}_{r_0}$. Wtedy dla dowolnej funkcji $y \in \overline{B}_{r_0}$ takiej, że $||x-y||_{BC_\infty} \leqslant \varepsilon$, dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $t \in \mathbb{R}_+$, na podstawie założenia (vi) oraz Uwagi 5.1, mamy

$$\begin{aligned}|(F_nx)(t) - (F_ny)(t)| &\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots)| \\ &\leqslant k(r_0)||x-y||_{BC_\infty} \leqslant k(r_0)\varepsilon.\end{aligned}$$

Stąd natomiast dostajemy nierówność

$$||Fx - Fy||_{BC_\infty} \leqslant k(r_0)\varepsilon.$$

Na podstawie powyższej nierówności wnioskujemy, że operator F jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

Wykażemy teraz ciągłość operatora H. Ustalmy zatem dowolnie $x = (x_i),\ y = (y_i) \in \overline{B}_{r_0}$. Wykorzystując założenie (viii), dla dowolnej liczby $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy oszacowanie

$$\begin{aligned}&|(H_nx)(t) - (H_ny)(t)| \\ &= \left|\int_0^\infty g_n(t,\tau)h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots)d\tau - \int_0^\infty g_n(t,\tau)h_n(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots)d\tau\right| \\ &\leqslant \int_0^\infty |g_n(t,\tau)||h_n(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) - h_n(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots)|d\tau \\ &\leqslant \int_0^\infty |g_n(t,\tau)|m(r_0)\sup\{|x_i(\tau) - y_i(\tau)| :\ i \geqslant n\}\,d\tau \\ &\leqslant m(r_0)\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|\,(||x(\tau) - y(\tau)||_{l_\infty})\,d\tau \\ &\leqslant m(r_0)\sup\{||x(s) - y(s)||_{l_\infty} :\ s \in \mathbb{R}_+\}\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau.\end{aligned}$$

Uwzględniając dodatkowo założenie (iii) dostajemy nierówność

$$|(H_nx)(t) - (H_ny)(t)| \leqslant G_1m(r_0)||x-y||_{BC_\infty},$$

na podstawie której wnioskujemy, że

$$||Hx - Hy||_{BC_\infty} \leqslant G_1 m(r_0)||x - y||_{BC_\infty}.$$

Otrzymana nierówność dowodzi ciągłości operatora H na kuli $\overline{B}_{r_0}$. Uwzględniając ciągłość operatorów F i H dostajemy, że także operator Q jest ciągły na kuli $\overline{B}_{r_0}$.

W dalszej części dowodu będziemy badać wartości miary niezwartości w przestrzeni BC_∞ w odniesieniu do operatorów F, H i Q. Przypomnijmy, że miarę tą oznaczyliśmy jako μ_c^3 i zdefiniowaliśmy wzorem (2.28). Celem poniżej przedstawionych oszacowań będzie wykorzystanie miary μ_c^3 oraz zbioru $\overline{B}_{r_0}$ do twierdzenia Darbo o punkcie stałym.

Ze względu na to, że miara μ_c^3 jest określona jako suma trzech składników rozważymy każdy z nich osobno. Na początku weźmy funkcję ω_0^∞ określoną wzorem (2.25).

Dalej, ustalmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ oraz wybierzmy $t, s \in \mathbb{R}_+$ takie, aby $|t - s| \leqslant \varepsilon$. Ponadto weźmy dowolny niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$. Wtedy, dla funkcji $x = x(t) = (x_n(t)) \in X$ oraz dla ustalonej liczby naturalnej n, w podobny sposób jak w (5.3), dostajemy

$$\begin{gathered}
|(F_n x)(t) - (F_n x)(s)| \\
\leqslant |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, x_1(s), x_2(s), \dots)| \\
+ |f_n(t, x_1(s), x_2(s), \dots) - f_n(s, x_1(s), x_2(s), \dots)| \\
\leqslant k(r_0) \sup\{|x_i(t) - x_i(s)| :\ i \geqslant n\} \\
+ \sup\{|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(s, x_1, x_2, \dots)| :\ |t - s| \leqslant \varepsilon,\ ||x||_{l_\infty} = ||(x_n)||_{l_\infty} \leqslant r_0\} \\
\leqslant k(r_0)\omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega_\infty^1(f, \varepsilon),
\end{gathered}$$

gdzie

$$\omega_\infty^1(f, \varepsilon) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sup\{|f_n(t, x_1, x_2, \dots) - f_n(s, x_1, x_2, \dots)| : |t - s| \leqslant \varepsilon,\ ||x||_{l_\infty} = ||(x_n)||_{l_\infty} \leqslant r_0\} \right\}.$$

oraz $\omega^\infty(x, \varepsilon)$ została określona w podrozdziale 2.4 jako

$$\omega^\infty(x, \varepsilon) = \sup \left\{ \sup\{|x_n(t) - x_n(s)| :\ n = 1, 2, \dots\} :\ t, s \in \mathbb{R}_+,\ |t - s| \leqslant \varepsilon \right\}.$$

Oczywiście na podstawie założenia (v) otrzymujemy, że $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \omega_\infty^1(f, \varepsilon) = 0$.
Z ostatniej nierówności otrzymujemy oszacowanie

$$\omega^\infty(Fx, \varepsilon) \leqslant k(r_0)\omega^\infty(x, \varepsilon) + \omega_\infty^1(f, \varepsilon). \tag{5.7}$$

Zauważmy, że korzystając z założeń (ii), (ix) i (x) oraz zakładając dodatkowo, że $s < t$, podobnie jak w (5.5), otrzymujemy oszacowanie

$$|(H_n x)(t) - (H_n x)(s)| \leqslant \overline{H}\omega_g(\varepsilon),$$

gdzie wartość $\omega_g(\varepsilon)$ była zdefiniowana wcześniej jako wspólny moduł ciągłości ciągu funkcyjnego $t \to g_n(t,\tau)$. Przypomnijmy, że $\lim_{\varepsilon\to 0} \omega_g(\varepsilon) = 0$.
Analogicznie jak w (5.7), na podstawie powyższego oszacowania dostajemy następujące

$$\omega^\infty(Hx,\varepsilon) \leqslant \overline{H}\omega_g(\varepsilon). \tag{5.8}$$

Ustalmy teraz dowolną funkcję $x \in X$ oraz $t, s \in \mathbb{R}_+$. Wówczas, korzystając z postaci operatora Q zdefiniowanego na początku dowodu i kładąc $a(t) = (a_n(t))$, dostajemy nierówność

$$\begin{aligned}||(Qx)(t) - (Qx)(s)||_{l_\infty} \leqslant ||a(t) - a(s)||_{l_\infty} + ||(Hx)(t)||_{l_\infty}||(Fx)(t) - (Fx)(s)||_{l_\infty} \\ +||(Fx)(s)||_{l_\infty}||(Hx)(t) - (Hx)(s)||_{l_\infty}.\end{aligned}$$

Ustalmy dalej $\varepsilon > 0$ oraz załóżmy, że $|t-s| \leqslant \varepsilon$. Wtedy, na podstawie powyższej nierówności oraz (5.4), (5.7), (5.2), (5.8), otrzymujemy

$$\omega^\infty(Qx,\varepsilon) \leqslant \omega^\infty(a,\varepsilon) + G_1\overline{h}[k(r_0)\omega^\infty(x,\varepsilon) + \omega^1_\infty(f,\varepsilon)] + \phi\overline{H}\omega_g(\varepsilon).$$

Przechodząc w powyższej nierówności z $\varepsilon \to 0$ i biorąc pod uwagę omówione wyżej własności funkcji $\varepsilon \to \omega^1_\infty(f,\varepsilon)$, $\varepsilon \to \omega_g(\varepsilon)$, założenie (i) oraz wzór (2.25), otrzymujemy

$$\omega^\infty_0(QX) \leqslant G_1\overline{h}k(r_0)\omega^\infty_0(X). \tag{5.9}$$

Rozważymy teraz kolejny składnik miary niezwartości μ^3_c, czyli funkcję $\overline{\mu}^3_\infty$ zdefiniowaną wzorem (2.26). W tym celu ustalmy dowolny niepusty zbiór $X \subset \overline{B}_{r_0}$ oraz weźmy dowolne funkcje $x = x(t),\ y = y(t) \in X$. Wtedy, dla ustalonych liczb $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$, dostajemy

$$\begin{aligned}|(Q_n x)(t) - (Q_n y)(t)| \leqslant |(F_n x)(t)(H_n x)(t) - (F_n y)(t)(H_n y)(t)| \\ \leqslant |(H_n x)(t)||(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| + |(F_n y)(t)||(H_n x)(t) - (H_n y)(t)|.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Oszacujemy osobno poszczególne składniki występujące po prawej stronie nierówności (5.10). W związku z tym ustalmy dowolną liczbę naturalną n oraz $T > 0$. Wtedy, dla $t \in [0,T]$ oraz dla

$k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant n$, korzystając z założeń (viii) i (iii), dla dowolnych funkcji $x, y \in X$ dostajemy

$$
\begin{aligned}
&|(H_k x)(t) - (H_k y)(t)| \\
&\leqslant \int_0^\infty |g_k(t,\tau)||h_k(\tau, x_1(\tau), x_2(\tau), \dots) - h_k(\tau, y_1(\tau), y_2(\tau), \dots)|d\tau \\
&\leqslant m(r_0) \int_0^\infty |g_k(t,\tau)| \left(\sup\{|x_i(\tau) - y_i(\tau)| : \ i \geqslant k\}\right) d\tau \\
&\leqslant m(r_0) \int_0^\infty |g_k(t,\tau)| \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{i\geqslant k} |x_i(t) - y_i(t)| \right\} \right\} d\tau \\
&\leqslant G_1 m(r_0) \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{i\geqslant k} \{\sup\{|x_i(t) - y_i(t)| : \ x = x(t), \ y = y(t) \in X\}\} \right\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania mamy

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{k\geqslant n} \{\sup\{|(H_k x)(t) - (H_k y)(t)| : \ x = x(t), \ y = y(t) \in X\}\} \right\} \\
&\leqslant G_1 m(r_0) \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{i\geqslant n} \{\sup\{|x_i(t) - y_i(t)| : \ x = x(t), \ y = y(t) \in X\}\} \right\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Uwzględniając dodatkowo wzór (2.26) wnioskujemy, że spełniona jest następująca nierówność

$$
\overline{\mu}^3_\infty(HX) \leqslant G_1 m(r_0) \overline{\mu}^3_\infty(X). \tag{5.11}
$$

W podobny sposób jak powyżej, dla ustalonych liczb $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ oraz dla dowolnych funkcji $x = x(t), \ y = y(t) \in X$, na podstawie założenia (vi), dostajemy

$$
\begin{aligned}
|(F_n x)(t) - (F_n y)(t)| &= |f_n(t, x_1(t), x_2(t), \dots) - f_n(t, y_1(t), y_2(t), \dots)| \\
&\leqslant k(r_0) \sup\{|x_i(t) - y_i(t)| : i \geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

To zaś prowadzi do następującej nierówności

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{i\geqslant n} \{\sup\{|(F_i x)(t) - (F_i y)(t)| : \ x = x(t), \ y = y(t) \in X\}\} \right\} \\
&\leqslant k(r_0) \left\{ \sup_{t\in[0,T]} \left\{ \sup_{i\geqslant n} \{\sup\{|x_i(t) - y_i(t)| : \ x = x(t), \ y = y(t) \in X\}\} \right\} \right\}.
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania oraz (2.26) dostajemy

$$
\overline{\mu}^3_\infty(FX) \leqslant k(r_0) \overline{\mu}^3_\infty(X). \tag{5.12}
$$

Ostatecznie, łącząc oszacowania (5.10), (5.4), (5.12), (5.2) oraz (5.11), mamy

$$\overline{\mu}_{\infty}^{3}(QX) \leqslant G_1\overline{h}k(r_0)\overline{\mu}_{\infty}^{3}(X) + \phi G_1 m(r_0)\overline{\mu}_{\infty}^{3}(X). \tag{5.13}$$

Pozostał nam do oszacowania ostatni składnik miary μ_c^3, czyli funkcja $c(X)$ określona wzorem (2.27). W tym celu ustalmy dowolny niepusty podzbiór X kuli $\overline{B}_{r_0}$. Wybierzmy dalej dwie funkcje $x = x(t),\ y = y(t) \in X$, liczbę $T > 0$ oraz weźmy $t \geqslant T$. Wtedy dla dowolnej liczby naturalnej n, bazując na przekształceniach wykonanych przed oszacowaniem (5.11), dostajemy

$$|(H_n x)(t) - (H_n y)(t)| \leqslant G_1 m(r_0)\left\{\sup_{t\geqslant T}\left\{\sup_{i\geqslant n}|x_i(t) - y_i(t)|\right\}\right\}.$$

Powyższa nierówność prowadzi nas do następującej

$$\begin{aligned}&\sup_{t\geqslant T}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|(H_n x)(t) - (H_n y)(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X\right\}\right\}\\ &\leqslant G_1 m(r_0)\left\{\sup_{t\geqslant T}\left\{\sup\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n(t) - y_n(t)| :\ x = x(t),\ y = y(t) \in X\right\}\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Uwzględniając dodatkowo wzór (2.27) określający wartość $c(X)$, otrzymujemy

$$c(HX) \leqslant G_1 m(r_0) c(X). \tag{5.14}$$

W dalszym ciągu, postępując analogicznie jak wyżej i opierając się na oszacowaniach poprzedzających (5.12), dostajemy nierówność

$$c(FX) \leqslant k(r_0) c(X). \tag{5.15}$$

Łącząc oszacowania (5.10), (5.4), (5.15), (5.2) oraz (5.14), otrzymujemy

$$c(QX) \leqslant G_1\overline{h}k(r_0)c(X) + \phi G_1 m(r_0) c(X). \tag{5.16}$$

Teraz, uwzględniając nierówności (5.9), (5.13) i (5.16) we wzorze (2.28) określającym miarę niezwartości μ_c^3 w przestrzeni BC_∞, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\mu_c^3(QX) &\leqslant G_1\overline{h}k(r_0)\omega_0^{\infty}(X)\\ &+ G_1\overline{h}k(r_0)\overline{\mu}_{\infty}^{3}(X) + \phi G_1 m(r_0)\overline{\mu}_{\infty}^{3}(X)\\ &+ G_1\overline{h}k(r_0)c(X) + \phi G_1 m(r_0)c(X)\\ &\leqslant [G_1\overline{h}k(r_0) + \phi G_1 m(r_0)][\omega_0^{\infty}(X) + \overline{\mu}_{\infty}^{3}(X) + c(X)].\end{aligned}$$

Stąd już łatwo wywnioskować, że spełniona jest następująca nierówność

$$\mu_c^3(QX) \leqslant [G_1\overline{h}k(r_0) + \phi G_1 m(r_0)]\mu_c^3(X).$$

Z założenia (xi) dostajemy, że $G_1\overline{h}k(r_0) + \phi G_1 m(r_0) < 1$.

Podsumowując, powyższa własność wraz z pozostałymi poprzednio udowodnionymi pozwala nam stwierdzić, że operator Q przekształca kulę $\overline{B}_{r_0}$ w siebie, jest ciągły na zbiorze $\overline{B}_{r_0}$ oraz istnieje nieujemna stała $k = G_1\overline{h}k(r_0) + \phi G_1 m(r_0) < 1$ taka, że dla dowolnego niepustego zbioru $X \subset \overline{B}_{r_0}$ spełniona jest nierówność

$$\mu_c^3(QX) \leqslant k\mu_c^3(X),$$

gdzie μ_c^3 określa miarę niezwartości w przestrzeni BC_∞. Zatem na podstawie twierdzenia Darbo o punkcie stałym (Twierdzenie 4.1) możemy stwierdzić, że istnieje przynajmniej jeden element $x \in \overline{B}_{r_0}$ będący punktem stałym operatora Q w kuli $\overline{B}_{r_0}$. Oczywiście funkcja $x = x(t)$ jest rozwiązaniem układu (5.1) w przestrzeni BC_∞.

Ponadto na podstawie Uwagi 4.2 wiemy, że rozwiązania te należą do jądra $ker\mu_c^3$ miary μ_c^3. Fakt ten dzięki znajomości struktury jądra miary μ_c^3 opisanej w podrozdziale 2.4 tuż po wzorze (2.24) implikuje, że grubość wiązki utworzonej przez wykresy funkcji będących rozwiązaniami układu (5.1) dąży do zera w nieskończoności. □

Uwzględniając powyższą własność oraz Definicję 4.5 możemy podobnie jak w poprzednim rozdziale sformułować Twierdzenie 5.2 następująco

Twierdzenie 5.3 *Załóżmy, że nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Hammersteina* (5.1) *spełnia założenia (i)-(xi). Wówczas układ ten ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = (x_n(t))$ w przestrzeni BC_∞. Ponadto rozwiązania tego układu są asymptotycznie stabilne.*

Podamy teraz przykład ilustrujący wyniki przedstawione w tym rozdziale.

Przykład 5.4. Rozważmy nieskończony układ kwadratowych równań całkowych Hammersteina określony następująco

$$
\begin{aligned}
x_n(t) &= \cos\left(\frac{n^2t+1}{t+n^2}\right) \\
&+ \left(\frac{2x_n(t)}{x_n^2(t)+n} + \frac{x_{n+1}^2(t)}{2x_{n+1}^2(t)+n}\right)\int_0^\infty \frac{1}{\beta n+t^2+\tau^2}\,\frac{\arctan(n+x_n^2(\tau))}{\gamma+2n+\tau^2}d\tau
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$ oraz $n = 1,2,\ldots$. Ponadto β i γ są dodatnimi stałymi, których wartości zostaną dokładniej określone później.

Zauważmy, że podany układ stanowi szczególny przypadek układu (5.1), jeżeli przyjmiemy

$$a_n(t) = \cos\left(\frac{n^2t+1}{t+n^2}\right), \tag{5.18}$$

$$f_n(t,x_1,x_2,\ldots) = \frac{2x_n}{x_n^2+n} + \frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2+n}, \tag{5.19}$$

$$g_n(t,\tau) = \frac{1}{\beta n+t^2+\tau^2}, \tag{5.20}$$

$$h_n(t,x_1,x_2,\ldots) = \frac{\arctan(n+x_n^2)}{\gamma+2n+\tau^2} \tag{5.21}$$

dla $n = 1,2,\ldots$ oraz dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Zastosujemy Twierdzenie 5.2 aby udowodnić, że układ (5.17) ma rozwiązanie w przestrzeni BC_∞. W tym celu pokażemy, że funkcje określone powyżej wzorami (5.18)-(5.21) spełniają kolejno założenia (i)-(xi) tego twierdzenia.

Na początku rozważmy funkcje $a_n(t)$ określone wzorem (5.18). Zauważmy, że funkcja $a_n(t)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą $L = 1$ dla $n = 1,2,\ldots$. Stąd możemy wywnioskować, że funkcje te są jednakowo ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+$. Ponadto

$$A = \sup\{|a_n(t)| :\ n = 1,2,\ldots,\ t \in \mathbb{R}_+\} = 1.$$

Otrzymujemy zatem, że spełnione jest założenie (i).

Rozważmy dalej funkcje $g_n(t,\tau)$ określone wzorem (5.20). Zauważmy, że są one ciągłe na zbiorze $\mathbb{R}_+^2$ dla $n = 1,2,\ldots$. Następnie ustalmy dowolne liczby $t_1,t_2 \in \mathbb{R}_+$ (bez straty ogólności załóżmy, że $t_1 < t_2$) oraz $n \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathbb{R}_+$. Wtedy otrzymujemy następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
|g_n(t_2,\tau) - g_n(t_1,\tau)| &= \frac{1}{\beta n+\tau^2+t_1^2} - \frac{1}{\beta n+\tau^2+t_2^2} \\
&\leqslant |t_2-t_1| \frac{t_1+t_2}{(\beta n+\tau^2+t_1^2)(\beta n+\tau^2+t_2^2)} \\
&\leqslant |t_2-t_1| \left(\frac{t_1}{\beta n+\tau^2+t_1^2} + \frac{t_2}{\beta n+\tau^2+t_2^2} \right) \\
&\leqslant |t_2-t_1| \left(\frac{\sqrt{\beta n+\tau^2}}{2(\beta n+\tau^2)} + \frac{\sqrt{\beta n+\tau^2}}{2(\beta n+\tau^2)} \right) \\
\leqslant \frac{1}{\sqrt{\beta n+\tau^2}}|t_2-t_1| &\leqslant \frac{1}{\sqrt{\beta n}}|t_2-t_1| \leqslant \frac{1}{\sqrt{\beta}}|t_2-t_1|.
\end{aligned}$$

Możemy zatem wywnioskować, że funkcje $g_n(t,\tau)$, $n = 1,2,\ldots$ spełniają założenie (ii).

Mając na uwadze, że funkcje $g_n(t,\tau)$ $(n = 1,2,\ldots)$ są ciągłe na $\mathbb{R}^2_+$, dla dowolnie ustalonej liczby $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty |g_n(t,\tau)|d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{\beta n+t^2+\tau^2} d\tau = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta n+t^2}} \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}.$$

Powyższe oszacowanie pozwala nam wywnioskować, że spełnione jest założenie (iii) ze stałą $G_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}$.

Ponadto dla dowolnych $t,\tau \in \mathbb{R}_+$ oraz $n \in \mathbb{N}$ spełniona jest następująca nierówność

$$|g_n(t,\tau)| = \frac{1}{\beta n+t^2+\tau^2} \leqslant \frac{1}{\beta n} \leqslant \frac{1}{\beta},$$

która dowodzi, że funkcje $g_n(t,\tau)$ spełniają założenie (iv) ze stałą $G_2 = \frac{1}{\beta}$.

Zauważmy dalej, że funkcje $f_n = f_n(t,x_1,x_2,\ldots)$ określone wzorem (5.19) odwzorowują zbiór $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^\infty$ w $\mathbb{R}$ dla $n = 1,2,\ldots$. Ponieważ funkcje te nie zależą jawnie od zmiennej t możemy natychmiast stwierdzić, że spełniają one pierwszą część założenia (v).

Zauważmy także, że dla dowolnej liczby naturalnej n oraz dla dowolnego ciągu $(x_n) \in l_\infty$ prawdziwa jest nierówność

$$|f_n(t,x_1,x_2,\ldots)| \leqslant \left| \frac{2x_n}{x_n^2+n} \right| + \left| \frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2+n} \right| \leqslant 2\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Dostajemy zatem, że spełniona jest druga część założenia (v) ze stałą $\phi = \frac{3}{2}$.

Ustalmy teraz dowolną liczbę $r > 0$ oraz wybierzmy dwa ciągi $x = (x_i)$, $y = (y_i) \in l_\infty$ takie, że $||x||_{l_\infty} \leqslant r,\ ||y||_{l_\infty} \leqslant r$. Wtedy na podstawie (5.19), dla dowolnej liczby naturalnej n otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
|f_n(t,x_1,x_2,\dots)-f_n(t,y_1,y_2,\dots)| &\leqslant 2\left|\frac{x_n}{x_n^2+n}-\frac{y_n}{y_n^2+n}\right|+\left|\frac{x_{n+1}^2}{2x_{n+1}^2+n}-\frac{y_{n+1}^2}{2y_{n+1}^2+n}\right| \\
&\leqslant 2\left|\frac{x_ny_n(y_n-x_n)+n(x_n-y_n)}{(x_n^2+n)(y_n^2+n)}\right|+\left|\frac{n(x_{n+1}^2-y_{n+1}^2)}{(2x_{n+1}^2+n)(2y_{n+1}^2+n)}\right| \\
\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2+n}\cdot\frac{y_n}{y_n^2+n}\right|+\frac{n}{(x_n^2+n)(y_n^2+n)}\right]\cdot|x_n-y_n| &+\left|\frac{n(x_{n+1}+y_{n+1})}{(2x_{n+1}^2+n)(2y_{n+1}^2+n)}\right|\cdot|x_{n+1}-y_{n+1}| \\
&\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2+n}\cdot\frac{y_n}{y_n^2+n}\right|+n\frac{1}{x_n^2+n}\cdot\frac{1}{y_n^2+n}\right]\cdot|x_n-y_n| \\
&+n\left[\frac{|x_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2+n)(2y_{n+1}^2+n)}+\frac{|y_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2+n)(2y_{n+1}^2+n)}\right]\cdot|x_{n+1}-y_{n+1}| \\
&\leqslant 2\left[\left|\frac{x_n}{x_n^2+n}\right|\cdot\left|\frac{y_n}{y_n^2+n}\right|+n\frac{1}{x_n^2+n}\cdot\frac{1}{y_n^2+n}\right]\cdot|x_n-y_n| \\
&+n\left[\frac{|x_{n+1}|}{(2x_{n+1}^2+n)n}+\frac{|y_{n+1}|}{(2y_{n+1}^2+n)n}\right]\cdot|x_{n+1}-y_{n+1}| \\
&\leqslant 2\left(\frac{1}{4n}+\frac{1}{n}\right)|x_n-y_n|+\frac{1}{\sqrt{2n}}|x_{n+1}-y_{n+1}| \\
&\leqslant \frac{5}{2}|x_n-y_n|+\frac{1}{\sqrt{2}}|x_{n+1}-y_{n+1}| \leqslant \frac{5}{2}\left[|x_n-y_n|+|x_{n+1}-y_{n+1}|\right] \\
&\leqslant 5\sup\{|x_i-y_i|:\ i\geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

Powyższa nierówność implikuje, że spełnione jest założenie (vi) z funkcją $k(r)=5$.

Rozważmy teraz ciąg funkcyjny $(\overline{f}_n)$, który po uwzględnieniu (5.19) ma postać

$$\overline{f}_n(t)=|f_n(t,0,0,\dots)|=0.$$

Stąd oczywiście możemy wywnioskować, że spełnione jest założenie (vii) ze stałą $\overline{F}=0$.

Przejdźmy teraz do założenia (viii). Zgodnie z nim ustalmy $r>0$ i wybierzmy dowolne ciągi $x=(x_i),\ y=(y_i)\in l_\infty$ takie, że $||x||_{l_\infty}\leqslant r,\ ||y||_{l_\infty}\leqslant r$. Wtedy dla dowolnej liczby $t\in\mathbb{R}_+$ oraz $n\in\mathbb{N}$, na podstawie wzoru (5.21) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
|h_n(t,x_1,x_2,\dots)-h_n(t,y_1,y_2,\dots)| &= \frac{1}{\gamma+2n+t^2}|\arctan(n+x_n^2)-\arctan(n+y_n^2)| \\
\leqslant \frac{1}{\gamma+2}|x_n^2-y_n^2| \leqslant \frac{1}{\gamma+2}|x_n-y_n|(|x_n|+|y_n|) &\leqslant \frac{1}{\gamma+2}2r|x_n-y_n| \leqslant \frac{2r}{\gamma+2}\sup\{|x_i-y_i|:\ i\geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

Z powyższej nierówności dostajemy, że funkcje $h_n(t,x_1,x_2,\dots)$, $n=1,2,\dots$ spełniają założenie (viii) z funkcją $m(r)=\frac{2r}{\gamma+2}$.

Ponadto, mamy

$$|h_n(t,x_1,x_2,\dots)| = \frac{\arctan(n+x_n^2)}{\gamma+2n+\tau^2} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\gamma+2n} \leqslant \frac{\pi}{2(\gamma+2)}$$

dla $n\in\mathbb{N}$ oraz $t\in\mathbb{R}_+$. Widzimy zatem, że funkcje $h_n(t,x_1,x_2,\dots)$ spełniają także założenie (ix) ze stałą $\overline{h}=\frac{\pi}{2(\gamma+2)}$.

Następnie, ustalając dowolnie $n\in\mathbb{N}$ i wykorzystując wzór (5.21), dla dowolnej funkcji $x=(x_n(t))\in BC_\infty$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty |h_n(s,x_1(s),x_2(s),\dots)|ds = \int_0^\infty \frac{\arctan(n+x_n^2(s))}{\gamma+2n+s^2}ds$$
$$\leqslant \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{ds}{\gamma+2n+s^2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma+2n}} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{\gamma+2n}} \leqslant \frac{\pi^2}{4\sqrt{\gamma+2}}.$$

Powyższe oszacowanie pozwala nam stwierdzić, że spełnione jest założenie (x) dla $\overline{H}=\frac{\pi^2}{4\sqrt{\gamma+2}}$.

W dalszym ciągu rozważmy wyznaczone wcześniej stałe

$$A=1,\quad \overline{F}=0,\quad G_1=\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}},\quad \overline{h}=\frac{\pi}{2(\gamma+2)},\quad \phi=\frac{3}{2}$$

oraz funkcje

$$k(r)=5,\quad m(r)=\frac{2r}{\gamma+2}.$$

Uwzględniając je w pierwszej z nierówności występujących w założeniu (xi), otrzymujemy

$$1+\frac{\pi}{2\sqrt{\beta}}\cdot\frac{\pi}{2(\gamma+2)}\cdot r\cdot 5\leqslant r.$$

Biorąc w wyżej otrzymanej nierówności $\beta=16$ i $\gamma=9$ przekształcamy ją do postaci

$$1+\frac{5\pi^2}{176}\,r\leqslant r. \tag{5.22}$$

Łatwo sprawdzić, że liczba $r=r_0=3$ spełnia nierówność (5.22).

Podobnie jak poprzednio, wykorzystując odpowiednie stałe i funkcje oraz przyjmując wybrane wcześniej wartości $\beta=16$ i $\gamma=9$, druga nierówność z założenia (xi) przybiera postać

$$\frac{5\pi^2}{176}+\frac{3\pi}{88}\,r_0<1. \tag{5.23}$$

Okazuje się, że wyznaczona wyżej liczba $r_0 = 3$ spełnia także nierówność (5.23).

Zatem na podstawie Twierdzenia 5.2 otrzymujemy, że rozważany przez nas nieskończony układ równań całkowych (5.17) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x(t) = (x_n(t))$, które należy do kuli $\overline{B}_3$ w przestrzeni BC_∞. Ponadto z Twierdzenia 5.3 wnioskujemy, że rozwiązania tego układu należące do kuli $\overline{B}_3$ są asymptotycznie stabilne.

6 Nieskończony układ równań całkowych modelujący proces urodzin i śmierci

Rozdział ten poświęcimy omówieniu konkretnego zagadnienia, które jest modelowane nieskończonym układem nieliniowych równań całkowych. W odróżnieniu od rozważanych wcześniej układów będzie to nieskończony układ równań całkowych typu Volterry. Mianowicie, będziemy rozważać proces stochastyczny urodzin i śmierci, w efekcie czego otrzymamy nieskończony układ równań różniczkowych oraz równoważny mu nieskończony układ równań całkowych.

Na początku pokrótce przypomnijmy [86], że mówiąc o procesie stochastycznym mamy na myśli zmienną losową X_t zmieniającą się wraz z upływem czasu t. Procesem stochastycznym nazywamy zatem funkcję zmiennej rzeczywistej t (traktowanej jako czas), której wartości przy każdym ustalonym t są zmiennymi losowymi. Zazwyczaj proces stochastyczny oznacza się przez $\{X_t,\ t \in I\}$, $I \subset \mathbb{R}$ i rozumie jako zbiór zmiennych losowych zależnych od parametru t. W związku z tym własności procesu stochastycznego X_t są określone przez łączne rozkłady prawdopodobieństwa zmiennych losowych X_t w danych momentach czasu.

Warto tutaj także wspomnieć, że rozważany przez nas proces stochastyczny urodzin i śmierci pojawia się między innymi w analizie zjawisk finansowych (np. notowań na giełdzie). Typowym zjawiskiem opisywanym za pomocą procesu urodzin i śmierci jest zjawisko towarzyszące wybuchowi bomby atomowej. Dokładniej, zasada działania bomby atomowej polega na rozszczepieniu izotopu uranu 235 lub izotopu plutonu 239. Bombardując jądro uranu (plutonu) neutronami doprowadza się do jego rozszczepienia, któremu towarzyszy emisja energii i neutronów. Neutrony te mogą uciec z próbki uranu (wtedy następuje zjawisko śmierci neutronów) albo mogą spowodować rozszczepienie kolejnych jąder (zjawisko urodzin).

Oczywiście możemy wskazać inne zjawiska, które mogą być opisane za pomocą procesu stochastycznego urodzin i śmierci [44, 54].

Ponieważ proces stochastyczny urodzin i śmierci jest obecnie dobrze znanym i opisanym procesem stochastycznym, nie będziemy tutaj przytaczać dalszych przykładów jego realizacji, ani analizować jego przebiegu. Skupimy się przede wszystkim na podstawowych, matematycznych własnościach procesu urodzin i śmierci.

W tym celu rozważmy proces stochastyczny $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ o którym będziemy zakładać, że modeluje on liczbę zaobserwowanych zdarzeń losowych zachodzących w przedziale czasu $[0,t)$, gdzie $0 < t < \infty$ (por. [44, 54, 62, 85, 88]). Zatem proces $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ może przyjmować tylko wartości będące liczbami całkowitymi nieujemnymi $i = 0,1,2,\dots$.
Ponadto dla dowolnych chwil czasu $t_1,\ t_2\ (t_1 < t_2)$ przyrost wartości $X_{t_2} - X_{t_1}$ może być równy $0,\ 1,\ 2,\dots$. Jeżeli potraktujemy zdarzenie jako tzw. sygnał, to taki proces możemy nazwać *procesem sygnałowym*.

Załóżmy dalej, że rozważany przez nas proces $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ spełnia następujące warunki

I. Proces $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ jest *procesem o przyrostach niezależnych*.
Oznacza to, że ilości sygnałów w rozłącznych przedziałach czasu $[t_0,t_1),\ [t_1,t_2),\dots[t_{n-1},t_n)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi.

II. Proces $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ jest *procesem o przyrostach jednorodnych*.
Warunek ten oznacza, że prawdopodobieństwo pojawienia się określonej ilości sygnałów w przedziałach czasu o jednakowej długości jest stałe.

Do dalszych celów, dla $t > 0$ oznaczmy:

$$V_i(t) = P(X_t - X_0 = i),$$

gdzie $i = 1,2,\dots$. Wielkość $V_i(t)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że w przedziale czasu o długości t sygnał pojawi się i razy.

Korzystając z powyżej przyjętego oznaczenia możemy zdefiniować kolejne założenie.

III. Spełnione są następujące zależności

1° $\lim\limits_{t\to 0} \frac{V_1(t)}{t} = \lambda$,
gdzie $\lambda > 0$ jest stałą.

2° $\lim\limits_{t\to 0} \frac{1-V_0(t)-V_1(t)}{t} = 0$.

Zwróćmy uwagę na to, że warunek 1° oznacza, iż prawdopodobieństwo pojawienia się jednego sygnału w małym przedziale czasu o długości t jest równe $\lambda t + o(t)$. Natomiast warunek 2° mówi, że prawdopodobieństwo pojawienia się przynajmniej dwóch sygnałów w przedziale czasu o długości t jest równe $o(t)$.
Podsumowując, warunek III orzeka, że sygnały pojawiają się nagle, w małych odcinkach czasu, ale tylko pojedynczo, natomiast nie pojawiają się parami, trójkami itd.

Procesy stochastyczne spełniające warunki I-III możemy scharakteryzować przy pomocy poniższej definicji.

Definicja 6.1. Skokowy proces stochastyczny $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$ o przyrostach niezależnych i jednorodnych, o stanach $i = 0, 1, 2, \ldots$ będziemy nazywać *jednorodnym procesem Poissona*, jeżeli dla dowolnego t $(0 \leqslant t < \infty)$ ma miejsce równość

$$P(X_t = i) = \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

dla $i = 0, 1, 2, \ldots$, gdzie $\lambda > 0$, $\lambda = \text{const}$.

Mamy także następujące twierdzenie (por. [44, 88]).

Twierdzenie 6.2. *Proces stochastyczny $\{X_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$, gdzie X_t oznacza ilość sygnałów w czasie $[0,t)$ spełniający warunki I-III oraz równość $P(X_0 = 0) = 1$, jest jednorodnym procesem Poissona.*

Zwróćmy uwagę na to, że pojawiająca się w założeniu III stała λ oznacza tzw. *intensywność* rozpatrywanego procesu stochastycznego [28].

W dalszym ciągu załóżmy, że długość "życia" sygnału jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym. Oznaczmy tę zmienną losową przez T. Wówczas na podstawie wiadomości dotyczących zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym (por. [44, 88]) wnioskujemy, że funkcja gęstości $g(t)$ zmiennej losowej T ma postać

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \leqslant 0 \\ \mu e^{-\mu t} & \text{dla} \quad t > 0, \end{cases}$$

gdzie $\mu > 0$ jest pewną stałą.

Przyjęte tutaj założenie o rozkładzie wykładniczym długości życia sygnału okazuje się być dobrym przybliżeniem w wielu zastosowaniach i ma duże znaczenie teoretyczne. Można bowiem pokazać, że mają miejsce równości

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(T\leqslant t+\Delta t/T\geqslant t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\leqslant T\leqslant t+\Delta t)}{\Delta t\cdot P(T\geqslant t)}\\ =\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\leqslant T\leqslant t+\Delta t)}{\Delta t}\cdot\frac{1}{P(T\geqslant t)}=g(t)\cdot\frac{1}{P(T\geqslant t)}\\ =g(t)\cdot\frac{1}{P(T\geqslant t)}=\frac{g(t)}{P(T\geqslant t)}=\mu.\end{gathered}\tag{6.1}$$

W celu uzasadnienia powyższych równości zauważmy najpierw, że równość

$$\frac{P(T\leqslant t+\Delta t/T\geqslant t)}{\Delta t}=\frac{P(t\leqslant T\leqslant t+\Delta t)}{P(T\geqslant t)}\cdot\frac{1}{\Delta t}\tag{6.2}$$

jest prostą konsekwencją definicji prawdopodobieństwa warunkowego. Z drugiej strony mamy, że

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t\leqslant T\leqslant t+\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}g(s)ds=g(t).\tag{6.3}$$

Ostatnia równość wynika natomiast z własności całki oznaczonej.

Ponadto mamy

$$\begin{aligned}P(T\geqslant t)&=1-P(T<t)=1-\int_{-\infty}^t g(s)ds=1-\int_0^t g(s)ds\\ &=1-\mu\int_0^t e^{-\mu s}ds=1+\frac{\mu}{\mu}\left[e^{-\mu s}\right]_0^t=1+e^{-\mu t}-1=e^{-\mu t}.\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy

$$\frac{g(t)}{P(T\geqslant t)}=\frac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}}=\mu.\tag{6.4}$$

Teraz, łącząc (6.2), (6.3) oraz (6.4) dostajemy równość (6.1).

Zatem prawdopodobieństwo tego, że sygnał wygaśnie w przedziale $[t,t+\Delta t)$, jeżeli przetrwał t jednostek czasu, jest dla małych Δt równe $\mu\Delta t+o(\Delta t)$ i to prawdopodobieństwo nie zależy od t, tzn. nie zależy od tego, jak długo w przeszłości trwał sygnał. W tych warunkach proces pojawiania się i zanikania sygnałów jest procesem Markowa. Jeżeli założymy, że w chwili t czynnych jest i sygnałów, to prawdopodobieństwo wygaśnięcia jednego sygnału w przedziale $[t,t+\Delta t)$ jest równe $\mu i\Delta t+o(\Delta t)$, a prawdopodobieństwo tego, że wygaśnie więcej niż jeden sygnał jest rzędu $o(\Delta t)$.

Oznaczmy teraz przez Y_t ilość sygnałów czynnych w chwili t oraz rozważmy proces stochastyczny $\{Y_t,\ 0 \leqslant t < \infty\}$. Mówimy, że proces jest w stanie j, jeżeli w chwili t trwa j sygnałów. Znajdziemy prawdopodobieństwo całkowite $c_j(t)$ tego, że w chwili t proces będzie w stanie j, tzn.

$$c_j(t) = P(Y_t = j)$$

dla $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Mamy następujące równości

$$c_0(t+\Delta t) = c_0(t)[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)] + c_1(t)[\mu\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t),$$

$$c_j(t+\Delta t) = c_j(t)[1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)][1-\mu j\Delta t + o(\Delta t)] + c_{j-1}(t)[\lambda\Delta t + o(\Delta t)]$$
$$+c_{j+1}(t)[\mu(j+1)\Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t)$$

dla $j = 1, 2, \ldots$.

Wyjaśnienie pierwszej równości jest następujące:

Sytuacja, w której w chwili $t+\Delta t$ proces jest w stanie 0 ma miejsce wtedy, gdy był w stanie 0 w chwili t oraz w przedziale czasu $[t, t+\Delta t)$ nie pojawił się nowy sygnał bądź gdy w chwili t był w stanie 1, ale w przedziale $[t, t+\Delta t)$ ten sygnał wygasł.

Uzasadnienie drugiej z powyższych równości:

Proces w chwili $t+\Delta t$ jest w stanie j $(j \geqslant 1)$, jeżeli w chwili t był w stanie j oraz w przedziale czasu $[t, t+\Delta t)$ nie pojawił się nowy sygnał i żaden z czynnych sygnałów nie wygasł lub proces był w stanie $j-1$ w chwili t oraz w przedziale czasu $[t, t+\Delta t)$ pojawił się nowy sygnał lub proces w chwili t był w stanie $j+1$ oraz w przedziale $[t, t+\Delta t)$ wygasł jeden z czynnych sygnałów.

Teraz, przekształcając pierwszą z wyżej otrzymanych równości, dostajemy

$$c_0(t+\Delta t) = c_0(t) - \lambda c_0(t)\Delta t + c_0(t)o(\Delta t) + \mu c_1(t)\Delta t + c_1(t)o(\Delta t) + o(\Delta t).$$

Stąd mamy

$$\frac{c_0(t+\Delta t) - c_0(t)}{\Delta t} = -\lambda c_0(t) + c_0(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \mu c_1(t) + c_1(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

Przechodząc w powyższej równości z $\Delta t \to 0$, otrzymujemy

$$c_0'(t) = -\lambda c_0(t) + \mu c_1(t). \tag{6.5}$$

Przekształcając w analogiczny sposób drugą z równości, dostajemy kolejno

$$\begin{aligned}
c_j(t+\Delta t) &= \left\{c_j(t) - \lambda c_j(t)\Delta t + c_j(t)o(\Delta t)\right\}[1-\mu j\Delta t + o(\Delta t)] \\
&+\lambda c_{j-1}(t)\Delta t + c_{j-1}(t)o(\Delta t) + \mu(j+1)c_{j+1}(t)\Delta t + c_{j+1}(t)o(\Delta t) + o(\Delta t) \\
&= c_j(t) - \lambda c_j(t)\Delta t + c_j(t)o(\Delta t) - \mu j c_j(t)\Delta t + \mu j\lambda c_j(t)(\Delta t)^2 - \mu j c_j(t)\Delta t o(\Delta t) \\
&+c_j(t)o(\Delta t) - \lambda c_j(t)\Delta t o(\Delta t) + c_j(t)(o(\Delta t))^2 + \lambda c_{j-1}(t)\Delta t + c_{j-1}(t)o(\Delta t) \\
&+\mu(j+1)c_{j+1}(t)\Delta t + c_{j+1}(t)o(\Delta t) + o(\Delta t).
\end{aligned}$$

Dalej, mamy

$$\begin{aligned}
\frac{c_j(t+\Delta t)-c_j(t)}{\Delta t} &= -\lambda c_j(t) + c_j(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} - \mu j c_j(t) \\
+\mu j\lambda c_j(t)\Delta t - \mu j c_j(t)o(\Delta t) &+ c_j(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} - \lambda c_j(t)o(\Delta t) + c_j(t)\frac{(o(\Delta t))^2}{\Delta t} + \lambda c_{j-1}(t) \\
&+c_{j-1}(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \mu(j+1)c_{j+1}(t) + c_{j+1}(t)\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.
\end{aligned}$$

Teraz, przechodząc w powyższej równości z $\Delta t \to 0$, dostajemy

$$c_j'(t) = -\lambda c_j(t) - \mu j c_j(t) + \lambda c_{j-1}(t) + \mu(j+1)c_{j+1}(t).$$

Otrzymane wyżej równanie różniczkowe po uporządkowaniu może zostać zapisane w następującej postaci

$$c_j'(t) = \lambda c_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)c_j(t) + \mu(j+1)c_{j+1}(t), \tag{6.6}$$

dla $j = 1, 2, \ldots$.

Teraz, łącząc równania (6.5) i (6.6) widzimy, że otrzymujemy następujący nieskończony układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} c_0'(t) = -\lambda c_0(t) + \mu c_1(t) \\ c_j'(t) = \lambda c_{j-1}(t) - (\lambda + j\mu)c_j(t) + \mu(j+1)c_{j+1}(t) \end{cases}$$

dla $j = 1, 2, \ldots$.

Nawiązując do zazwyczaj używanych oznaczeń zapiszemy powyższy nieskończony układ równań różniczkowych używając wskaźnika n, $n = 1, 2, \ldots$ w miejsce j. Wówczas układ ten wygląda następująco

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\lambda c_1(t) + \mu c_2(t), \\ c_2'(t) = \lambda c_1(t) - (\lambda + 2\mu) c_2(t) + 3\mu c_3(t), \\ c_3'(t) = \lambda c_2(t) - (\lambda + 3\mu) c_3(t) + 4\mu c_4(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n'(t) = \lambda c_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) c_n(t) + (n+1)\mu c_{n+1}(t), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

dla $n = 2, 3, \dots$.

Zauważmy, że powyższy nieskończony układ równań różniczkowych został otrzymany jako pewne przybliżenie, tzn. prawe strony tego układu są pewnym przybliżeniem rzeczywistych zależności. Przybliżenia te możemy wyrazić jako nieliniowe zaburzenia będące funkcjami zmiennej t oraz funkcji $c_1(t),\ c_2(t), \dots$.

Nawiązując do powyższych rozważań będziemy dalej rozpatrywać następujący nieskończony układ równań różniczkowych modelujący proces urodzin i śmierci:

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\lambda c_1(t) + \mu c_2(t) + f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \\ c_2'(t) = \lambda c_1(t) - (\lambda + 2\mu) c_2(t) + 3\mu c_3(t) + f_2(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \\ c_3'(t) = \lambda c_2(t) - (\lambda + 3\mu) c_3(t) + 4\mu c_4(t) + f_3(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_n'(t) = \lambda c_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) c_n(t) + (n+1)\mu c_{n+1}(t) + f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{6.7}$$

dla $n = 2, 3, \dots$.

Otrzymany tutaj nieskończony układ równań różniczkowych jest semiliniowym układem około-przekątniowym o stałej szerokości $p = 3$ (por. [12]). Układ ten może zostać zapisany w postaci

$$c'(t) = Ac(t) + f(t, c(t)), \tag{6.8}$$

gdzie $c(t)$ jest wektorem w przestrzeni ciągów funkcyjnych następującej postaci

$$c(t) = (c_n(t)) = (c_1(t), c_2(t), \dots)$$

dla $t \in [0, T]$ (lub dla $t \in \mathbb{R}_+$), przy czym $T > 0$ jest ustaloną liczbą. Ponadto macierz A jest macierzą stałą postaci

$$\begin{bmatrix} -\lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & 2\mu & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \lambda & -(\lambda+2\mu) & 3\mu & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \lambda & -(\lambda+3\mu) & 4\mu & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Zauważmy, że w każdym wierszu macierzy A (za wyjątkiem wiersza pierwszego) oprócz elementu na głównej przekątnej znajdują się jeszcze dwa, spośród których jeden poprzedza element znajdujący się na tej przekątnej, a drugi następuje po tym elemencie.

Otrzymany nieskończony układ równań różniczkowych (6.7) (lub równoważny mu (6.8)) można rozważać w ciągowych przestrzeniach Banacha takich jak na przykład $BC([0,T],l_\infty)$. Oznacza to, że wówczas szukamy rozwiązania układu (6.7) będącego ciągiem funkcyjnym $c(t) = (c_n(t))$ takim, że dla dowolnie ustalonego $t \in [0,T]$ ciąg

$$(c_n(t)) = (c_1(t), c_2(t), \dots)$$

należy do przestrzeni l_∞.
Z drugiej strony wspomniana przestrzeń $BC([0,T],l_\infty)$ składa się z funkcji $x : [0,T] \to l_\infty$ ciągłych i ograniczonych na przedziale $[0,T]$.

Zauważmy, że w podobny sposób możemy zdefiniować przestrzenie takie jak $BC([0,T],c)$ oraz $BC([0,T],c_0)$. Zastępując przedział $[0,T]$ półosią $\mathbb{R}_+$ otrzymujemy omawiane wcześniej przestrzenie $BC(\mathbb{R}_+,l_\infty)$, $BC(\mathbb{R}_+,c)$ oraz $BC(\mathbb{R}_+,c_0)$.

Okazuje się, że w opisanej powyżej sytuacji napotykamy poważny problem, ponieważ operator generowany przez nieskończony układ równań różniczkowych (6.7) lub (6.8) określony na którejkolwiek z powyżej wymienionych przestrzeni nie jest ograniczony. Jeżeli bowiem oznaczymy ten operator przez Q i zdefiniujemy na przestrzeni $BC([0,T],l_\infty)$, to można go zapisać w następującej postaci [15, 66]:

$$(Qc)(t) = Ac(t) + f(t,c(t)) = A(c_n(t)) + (f_n(t,c_1(t),c_2(t),\dots)).$$

Niestety, jak się okazuje, ten operator nie jest ograniczony na przestrzeni $BC([0,T],l_\infty)$, więc nie możemy zastosować dobrze znanych wyników z teorii równań różniczkowych [18, 40].

Powyższe stwierdzenie ilustrują następujące przykłady.

Przykład 6.3. Rozważmy przestrzeń Banacha l_∞ oraz ustalmy dowolną funkcję $c(t) = (c_n(t))$ należącą do przestrzeni $BC([0,T], l_\infty)$. To oznacza, że $c(t) \in l_\infty$ dla każdego $t \in [0,T]$ oraz funkcja $t \to c(t)$ jest ciągła na przedziale $[0,T]$. To implikuje, że funkcja $t \to ||c(t)||$ jest ograniczona na przedziale $[0,T]$, czyli istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$||c(t)|| = \sup\{|c_n(t)| : \ n = 1, 2, \dots\} \leqslant M$$

dla $t \in [0,T]$.

Dalej zauważmy, że dla dowolnie ustalonego $t \in [0,T]$ dostajemy

$$||(Qc)(t)|| = \sup\{|(Q_n c)(t)| : \ n = 1, 2, \dots\}.$$

Z drugiej strony, na podstawie (6.8) i (6.7), dla dowolnie ustalonej liczby $n = 2, 3, \dots$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} |(Q_n c)(t)| &\leqslant |\lambda c_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu)c_n(t) + (n+1)\mu c_{n+1}(t)| + |f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots)| \\ &\leqslant \lambda |c_{n-1}(t)| + (\lambda + n\mu)|c_n(t)| + (n+1)\mu |c_{n+1}(t)| + |f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots)| \\ &\leqslant \ [\lambda + (\lambda + n\mu) + (n+1)\mu]M + |f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots)|. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Dla $n = 1$ mamy natomiast

$$\begin{aligned} |(Q_1 c)(t)| &\leqslant |-\lambda c_1(t) + \mu c_2(t)| + |f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots)| \\ &\leqslant \ \lambda |c_1(t)| + \mu |c_2(t)| + |f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots)| \\ &\leqslant \ (\lambda + \mu)M + |f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots)| \\ &< \ (2\lambda + 3\mu)M + |f_1(t, c_1(t), c_2(t), \dots)|. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Zatem, z oszacowań (6.9) oraz (6.10) wynika, że dla dowolnej liczby naturalnej $n = 1, 2, \dots$

$$|(Q_n c)(t)| \leqslant (2\lambda + (2n+1)\mu)M + |f_n(t, c_1(t), c_2(t), \dots)|.$$

Powyższe oszacowanie pokazuje, że norma $||Qc||$ nie musi być ograniczona, ponieważ wielkość $2\lambda + (2n+1)\mu$ nie jest ograniczona, gdy $n \to \infty$.

Przykład 6.4. Załóżmy teraz, że rozważamy operator Q określony na przestrzeni złożonej z ciągów funkcyjnych $c(t) = (c_n(t))$ takich, że dla dowolnie ustalonej liczby $t \in [0,T]$ ciąg $(c_n(t))$

jest temperowany przez ciąg zmierzający szybko do zera.
Na przykład, możemy wybrać ciąg $x_n = \frac{1}{n!}$ i rozważyć te ciągi $(c_n(t))$, dla których

$$|c_n(t)|x_n \leqslant M$$

dla dowolnego $n = 1, 2, \ldots$ i danej dodatniej stałej M.
Podobnie jak w poprzednim przykładzie możemy pokazać, że ciąg $|(Q_n c)(t)|$ jest także nieograniczony ze względu na ciąg $M \cdot n!$.

Niestety sytuacja staje się bardziej skomplikowana, gdy rozważamy nieskończony układ równań różniczkowych na przedziale nieograniczonym, czyli w przypadku, gdy rozważamy układ (6.7) na przykład w przestrzeni $BC(\mathbb{R}_+, l_\infty)$.
Oczywiście, zamiast nieskończonego układu równań różniczkowych (6.7) lub (6.8) możemy rozważać nieskończony układ równań całkowych otrzymany z (6.7) bądź (6.8) mający postać

$$c(t) = A\int_0^t c(s)ds + \int_0^t f(s, c(s))ds \tag{6.11}$$

dla $t \in \mathbb{R}_+$.

Zwróćmy uwagę na to, że jeżeli rozważany operator generowany przez nieskończony układ równań całkowych okazuje się być nieograniczony we wszystkich znanych ciągowych przestrzeniach Banacha (lub Frécheta), to wówczas nie możemy, tak jak w poprzednich rozdziałach pracy zastosować klasycznych twierdzeń o punktach stałych takich jak twierdzenie Darbo [39] lub Schaudera [53], by udowodnić istnienie rozwiązań rozważanego układu. To powoduje, że otrzymujemy otwarty problem dotyczący istnienia rozwiązań danego układu.

Podsumowując, otrzymujemy następujący otwarty problem: *Znaleźć ciągową przestrzeń Banacha (lub Frécheta) oraz sformułować odpowiednie założenia gwarantujące, że nieskończony układ równań różniczkowych* (6.8) *lub nieskończony układ równań całkowych* (6.11) *ma rozwiązanie należące do wspomnianej przestrzeni Banacha (Frécheta).*

Literatura

[1] E. Ablet, L. Cheng, Q. Cheng, W. Zhuang, *Every Banach space admits a homogeneous measure of non-compactness not equivalent to the Hausdorff measure*, Sci. China Math. 62 (2019), 147-156.

[2] R.R. Akhmerov, M.I. Kamenskii, A.S. Potapov, A.E. Rodkina, B.N. Sadovskii, *Measures of Noncompactness and Condensing Operators*; Birkhäuser Verlag: Basel, Switzerland, 1992.

[3] J.M. Ayerbe Toledano, T. Dominiguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory,* Birkhäuser Verlag: Basel, Switzerland, 1997.

[4] E.S. Allen, *The scientific work of Vito Volterra*, The American Mathematical Monthly, Vol. 48, No. 8, Part I, pp. 516-519 (1941).

[5] N. Arley, V. Borchsenius, *On the theory of infinite systems of differential equations and their application to the theory of stochastic processes and the perturbation theory of quantum mechanics.* Acta Math. 76, 261-322 (1945).

[6] J. Banaś, A. Chlebowicz, *On solutions of an infinite system of nonlinear integral equations on the real half-axis*, Banach J. Math. Anal. 13 (2019), 944-968.

[7] J. Banaś, A. Chlebowicz, J. Madej, *Asymptotic stability of solutions of infinite systems of quadratic Urysohn integral equations*, Numerical Functional Analysis and Optimization (w recenzji).

[8] J. Banaś, A. Chlebowicz, M.-A. Taoudi, *On solutions of infinite systems of integral equations coordinatewise converging at infinity*, J. Appl. Anal. Comp. 12(5) (2022), 1901-1921.

[9] J. Banaś, A. Chlebowicz, W. Woś, *On measures of noncompactness in the space of functions defined on the half-axis with values in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. 489, (2020), 124187.

[10] J. Banaś, K. Goebel, *Measures of Noncompactness in Banach Spaces*, Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 60, Marcel Dekker, New York, 1980.

[11] J. Banaś, M. Krajewska, *On solutions of semilinear infinite systems of differential equations*, Dyn. Syst. Appl. 22 (2013) 301–316.

[12] J. Banaś, M. Krajewska, *On solutions of semilinear upper diagonal infinite systems of differential equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. 12, 189– 202 (2019).

[13] J. Banaś, M. Lecko, *Solvability of infinite systems of differential equations in Banach sequence spaces*, J. Comput. Appl. Math. 137 (2001) 363–375.

[14] J. Banaś, J. Madej, *On solutions vanishing at infinity of infinite systems of quadratic Urysohn integral equations,* Topol. Meth. Nonlin. Anal. 2024, 63, 53-57.

[15] J. Banaś, J. Madej, *Asymptotically stable solutions of infinite systems of quadratic Hammerstein integral equations,* Symmetry, 2024, 16, 107.

[16] J. Banaś, J. Madej, B. Rzepka, *Infinite system of integral equations associated with birth-and-death stochastic process: a challenge to solve*, Georgian Mathematical Journal (w druku).

[17] J. Banaś, A. Martinon, *Measures of noncompactness in Banach sequence spaces*, Math. Slovaca 42 (1992) 497–503.

[18] J. Banaś, M. Mursaleen, *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi, 2014.

[19] J. Banaś, M. Mursaleen, Syed M.H. Rizvi, *Existence of solutions to a boundary-value problem for an infinite system of differential equations*, Electr. J. Diff. Equations, Vol. 2017 (2017), No. 262, pp. 1-12.

[20] J. Banaś, R. Nalepa, B. Rzepka, *The study of the solvability of infinite systems of integral equations via measures of noncompactness*, Numer. Funct. Anal. Optim. 43 (2022), 961-986.

[21] J. Banaś, L. Olszowy, *On solutions of a quadratic Urysohn integral equation on an unbounded interval*, Dyn. Syst. Appl. 17 (2008), 255-270.

[22] J. Banaś, B. Rzepka, *An application of a measure of noncompactness in the study of asymptotic stability,* Appl. Math. Lett. 2003, 16, 1–6.

[23] J. Banaś, B. Rzepka, *On solutions of infinite systems of integral equations of Hammerstein type*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis 18, 2(2017), 261-278.

[24] J. Banaś, R. Taktak, *Measures of noncompactness in the study of solutions of infinite systems of Volterra-Hammerstein-Stieltjes integral equations*, Rev. Real Acad. Cien. Exact. Fis. Natur. Serie A. Mat. 2023, 117, 95.

[25] J. Banaś, W. Woś, *Solvability of an infinite system of integral equations on the real half-axis,* Adv. Nonlinear Anal. 10 (2021), 202-216.

[26] R. Bellman, *Methods in Nonlinear Analysis II*, Academic Press, New York, 1973.

[27] T.D. Benavides, *Set-contractions and ball-contractions in some classes of spaces*, J. Math. Anal. Appl.159(1991), 500-506.

[28] M. Bratijczuk, *Piętnaście Wykładów z Procesów Stochastycznych*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 2018.

[29] T.A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations*, Academic Press, New York, 1983.

[30] L.W. Busbridge, *The Mathematics of Radiative Transfer*, Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

[31] B. Cahlon, M. Eskin, *Existence theorems for an integral equation of the Chandrasekhar H-equation with perturbation,* J. Math. Anal. Appl. 1981, 83, 159-171.

[32] K.M. Case, P.F. Zweigel, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

[33] S. Chandrasekhar, *Radiative Transfer,* Oxford University Press, London, 1950.

[34] A. Chlebowicz, *Solvability of an infinite system of nonlinear integral equations of Volterra-Hammerstein type*, Adv. Nonlinear Anal. 2020, 9: 1187-1204.

[35] A. Chlebowicz, *Existence of solutions to infinite systems of nonlinear integral equations on the real half-axis*, Electron. J. Differential Equations, Vol. 2021 (2021), No. 61, 1-20.

[36] C. Corduneanu, *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[37] J.M. Cushing, *Integrodifferential Equations and Delay Models in Population Dynamics Lecture Notes in Biomathematics*, vol. 20. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[38] J. Daneš, *On the Istratescu's measure of noncompactness*, Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie, 16, 64 (1972), 403-406.

[39] G. Darbo, *Punti uniti in trasformazioni a condominio non compacto*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 24 (1955) 84–92.

[40] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin, 1985.

[41] K. Deimling, *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces,* Springer, 1977.

[42] N. Dunford, J.T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory,* International Publications, Leyden, 1963.

[43] G. Edgar, *Measure, Topology and Fractal Geometry,* Springer, 2008.

[44] M. Fisz, *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Krieger Publishing Company, New York, USA, 1980.

[45] I. Fredholm, *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, Acta Mathematica, 27, 365-390 (1903).

[46] I. Fredholm, *Les équations intégrales linéaires*, Comptes Rendus du Congrés de Mathematiciens tenu á Stockholm, 92–100, 1909.

[47] G.M. Fichtenholz, *Rachunek Różniczkowy i Całkowy*, tom II, PWN, Warszawa, 1980.

[48] M. Furi, A. Vignoli, *On a property of the unit sphere in a linear normed space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér Sci. Math. Astron. Phys. 18, 6(1970), 333-334.

[49] J. Garcia-Falset, K. Latrach, *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, De Gruyter, Series in Nonlinear Analysis and Applications, 41, 2023.

[50] K. Goebel, W. Rzymowski, *An existence theorem for the equations $x' = f(t,x)$ in Banach spaces,* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math. Astronom. Phys., 18, 7(1970), 367-370.

[51] L.S. Goldenštein, I.T. Gohberg, A.S. Markus, *Investigation of some properties of bounded linear operators in connection with their q-norms*, Učen. Zap. Kishinevsk, Un-ta 29 (1957), 29–36.

[52] L.S. Goldenštein, A.S. Markus, *On a measure of noncompactness of bounded sets and linear operators,* Studies in Algebra and Mathematical Analysis, Kishinev, (1965), 45-54.

[53] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory,* Springer Science and Business Media, New York, USA (2013).

[54] A.M. Haghighi, I. Wickramasinghe, *Probability, Statistics, and Stochastic Processes for Engineers and Scientists,* CRC Press, Taylor and Francis Group, New York, USA (2021).

[55] A. Hammerstein, *Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen*, Acta Mathematica, 54 (1930) 117-176.

[56] B. Hazarika, R. Arab, M. Mursaleen, *Application measure of noncompactness and operator type contraction for solvability of an infinite system of differential equations in l_p - Space*, Filomat 33:7 (2019), 2181–2189.

[57] E. Hille, *Pathology of infinite systems of linear first order differential equations with constant coefficients*, Ann. Mat. Pura. Appl. 55 (1961) 135–144.

[58] X. Hu, J. Yan, *The global attractivity and asymptotic stability of solution of a nonlinear integral equation,* J. Math. Anal. Appl. 2006, 321, 147–156.

[59] T. Insperger, G. Stépán, *Semi-Discretization Stability and Engineering Applications for Time-Delay Systems*, Springer, New York, USA, 2011.

[60] V.I. Intrătescu, *On a measure of noncompactness,* Bull. Math. Soc. R. S. Roumanie, 16, 64 2(1972), 195-197.

[61] T. Jalal, A.H. Jan, *Measures of noncompactness in the Banach space* $BC(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, E)$ *and its application to infinite system of integral equations in two variables*, Filomat 37:12 (2023), 3791–3817.

[62] D. Kannan, *An Introduction to Stochastic Processes,* Elsevier, North Holland (1979).

[63] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, Fund. Math. 15 (1930), 301-309.

[64] K. Kuratowski, *Topology I*, Academic Press – PWN, New York, London, Warszawa 1966.

[65] K. Kuratowski, *Wstęp do Teorii Mnogości i Topologii*, PWN, Warszawa, 1977.

[66] A.H. Jan, T. Jalal, *On infinite systems of nonlinear integral equations in two variables in Banach space* $BC(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, c_0)$. Topol. Methods Nonlin. Anal. 63, 263–284 (2024).

[67] J. Liouville, *Second mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable*, Journ. de Mathém. pures et appl. 1re série, tome 2 (1837), 16-35.

[68] I.A. Malik, T. Jalal, *Infinite system of integral equations in two variables of Hammerstein type in* c_0 *and* l_1 *spaces*, Filomat 33 (2019), 3441-3455.

[69] E. Malkowsky, V. Rakočević, *Advanced Functional Analysis*, CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2019.

[70] E. Malkovsky, V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, Jordan J. Math. Stat. 1(1), 1-29 (2008).

[71] J. Mallet-Paret, R.D. Nussbaum, *Inequivalent measures of noncompactness and the radius of the essential spectrum*, Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011), 917-930.

[72] H. Mehravaran, H. Amiri Kayvanloo, *Solvability of infinite system of nonlinear convolution type integral equations in the tempered sequence space* $m^{\beta}(\rho, p)$, Asian- European J. of Mathematics 16 (2023), 2350004.

[73] M. Mursaleen, B. Bilalov, Syed M.H. Rizvi, *Applications of measures of noncompactness to infinite system of fractional differential equations*, Filomat 31:11 (2017), 3421–3432.

[74] M. Mursaleen, Syed M.H. Rizvi, B. Samet, *Solvability of a class of boundary value problems in the space of convergent sequences*, Applicable Analysis, 2017.

[75] M. Mursaleen, Syed M.H. Rizvi, B. Samet, *Measures of Noncompactness and Their Applications*, Advances in Nonlinear Analysis via the Concept of Measure of Noncompactness, Springer, Singapore, 59-125 (2017).

[76] J. Musielak, *Wstęp do Analizy Funkcjonalnej*, PWN, Warszawa 1976.

[77] R.D. Nussbaum, *A generalization of the Ascoli theorem and an application to functional differential equations*, J. Math. Anal. Appl., 35(1971), 600-610.

[78] M.N. Oguztöreli, *On an infinite system of differential equations occurring in the degradations of polymers.* Utilitas Math. 1, 141-155 (1972).

[79] M.N. Oguztöreli, *On the neural equations of Cowan and Stein*, Utilitas Math. 2 (1972) 305-315.

[80] K.P. Persidskii, *Countable system of differential equations and stability of their solutions* Izv. Akad. Nauk Kazach. SSR, 7 (1959), 52-71.

[81] K.P. Persidskii, *Countable systems of differential equations and stability of their solutions III: Fundamental theorems on stability of solutions of countable many differential equations*, Izv. Akad. Nauk. Kazach. SSR, 9 (1961), 11-34.

[82] W. Pogorzelski, *Równania Calkowe i ich Zastosowania*, PWN, Warszawa; Tom I - 1953, Tom II - 1958, Tom III - 1960, Tom IV - 1962 (wyd. w j. angielskim: W. Pogorzelski, *Integral Equations and Their Applications*, Pergamon Press, Oxford-New York-Frankfurt, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1966).

[83] M. Rahman, *Integral Equations and their Applications*, WIT Press, Southampton, Boston, 2007.

[84] V. Rakočević, *Measures of noncompactness and some applications,* Filomat, 12:2(1998), 87-120.

[85] S. Ross, *Stochastic Processes,* J. Wiley and Sons, New York, USA (1996).

[86] J.A. Rozanow, *Wstęp do Teorii Procesów Stochastycznych*, PWN, Warszawa, 1974.

[87] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), 171–180.

[88] R.S. Varadhan, *Stochastic Processes*, AMS, Rhode Island, USA (2007).

[89] A. Voigt, *Line method approximations to the Cauchy Problem for nonlinear parabolic differential equations*, Numer. Math. 23, 26-36 (1974).

[90] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities,* Springer-Verlag, 1970.

[91] J.R.L. Webb, W. Zhao, *On connections between set and ball measures of noncompactness,* Bull. London Math. Soc. 22, 471-477 (1990).

[92] P.P. Zabrejko, A.I. Koshelev, M.A. Krasnosel'skii, S.G. Mikhlin, L.S. Rakovshchik, V.J. Stetsenko, *Integral Equations*, Noordhoff, Leyden, 1975.

[93] O.A. Zautykov, K.G. Valeev, *Infinite Systems of Differential Equations*, Izdat. "Nauka" Kazach. SSR, Alma-Ata, 1974.