Zielona Góra, dnia 4 maja 2026r.

dr hab. Elżbieta Sidorowicz
Wydział Matematyki Informatyki i Ekonometrii
Uniwersytet Zielonogórski

Recenzja
rozprawy doktorskiej mgr. Mateusza Pirgi
pt. *Zbiory niezależne i dominujące w grafach zawierające zbiór liści*

Przedłożona do recenzji rozprawa doktorska mgr. Mateusza Pirgi poświęcona jest analizie zbiorów niezależnych i dominujących w grafach, ze szczególnym uwzględnieniem roli wierzchołków będących liśćmi. Autor koncentruje się na problematyce zliczania tych zbiorów w specyficznych strukturach, takich jak drzewa oraz grafy jedno- i dwucyklowe. Praca wykazuje powiązania między strukturalnymi właściwościami grafów a klasycznymi ciągami liczbowymi, w tym liczbami Fibonacciego, Lucasa, Padovana oraz Perrina. Niezależność i dominowanie to fundamentalne pojęcia teorii grafów. Tematyka ta, zainicjowana w latach 60. XX wieku, pozostaje do dziś obszarem intensywnych badań. W literaturze zdefiniowano wiele wariantów tych pojęć oraz powiązanych z nimi parametrów. Autor wnosi wkład w ten obszar, rozważając szczególne rodzaje zbiorów niezależnych – w tym niezależne zbiory $(1, 2)$-dominujące oraz właściwe zbiory 2-dominujące – które obligatoryjnie zawierają zbiór liści grafu.

Rozprawa charakteryzuje się przejrzystą i logiczną strukturą. Składa się z pięciu rozdziałów, wykazu oznaczeń, podsumowania oraz bibliografii. W rozdziale pierwszym wprowadzono niezbędne definicje oraz omówiono własności znanych ciągów rekurencyjnych, stanowiących punkt odniesienia w dalszych częściach pracy. Rozdział drugi nakreśla motywację podjętych badań i cele rozprawy, prezentując aktualny stan wiedzy dotyczący zliczania zbiorów niezależnych w drzewach oraz grafach o małej liczbie cykli. Główne wyniki naukowe zostały zawarte w rozdziałach 3, 4 i 5.

Rozdział trzeci pracy koncentruje się na zbadaniu liczby zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści (parametru oznaczanego jako $\sigma_L(G)$) w szczególnej podklasie $(n, n+1)$-grafów. Rozważane w tym rozdziale grafy posiadają co najmniej jeden liść i zawierają podgraf indukowany w postaci tzw. ósemki $C_{k,l}$ dla $k \geqslant 3$ i $l \geqslant 3$. Głównym celem autora w tej części jest ustalenie najmniejszej i największej wartości tego parametru w zdefiniowanej klasie grafów, a także scharakteryzowanie grafów ekstremalnych. Wykazano, że najmniejsza możliwa liczba zbiorów niezależnych zawierających zbiór liści w badanej klasie grafów wynosi 1. Ma to miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór wierzchołków grafu składa się wyłącznie ze zbioru liści i zbioru wierzchołków podtrzymujących, czyli zachodzi równość $V(G) = L(G) \cup S(G)$.

Następnie autor definiuje i udowadnia własności specjalnych przekształceń grafu G w graf G', które zachowują całkowitą liczbę wierzchołków, ale sprawiają, że liczba badanych zbiorów niezależnych nie maleje ($\sigma_L(G) \leqslant \sigma_L(G')$). Zastosowanie sekwencji takich przekształceń pozwala zawęzić zbiór poszukiwań do szczególnej podrodziny grafów oznaczanych przez $G_n^{k,l,r}$, w której musi znajdować się graf o maksymalnej wartości parametru $\sigma_L(G)$. Warto jednak sformułować zastrzeżenie do treści twierdzeń 3.4 i 3.5: występujące w nich określenie „...gdzie q jest sąsiadem x należącym do cyklu..." celowe byłoby zastąpić sformułowaniem „...gdzie q jest sąsiadem x niebędącym liściem". Taka redakcja lepiej koresponduje z dowodami tych twierdzeń, w których własność sąsiedztwa wierzchołka x z wierzchołkiem cyklu jest bezpośrednio wykazywana. Rozdział kończy wyznaczenie grafu o maksymalnej wartości parametru $\sigma_L(G)$ ($G_n^{4,n-4,0}$) oraz podanie górnego oszacowania parametru dla klasy $(n, n+1)$-grafów posiadających co najmniej jeden liść i zawierających podgraf indukowany $C_{k,l}$ dla $k \geqslant 3$ i $l \geqslant 3$.

Rozdział czwarty pracy koncentruje się na interpretacjach grafowych ciągów liczbowych (takich jak liczby Padovana i Perrina) poprzez zliczanie specyficznych rodzajów zbiorów niezależnych w wybranych klasach grafów. Autor bada niezależne zbiory (1,2)-dominujące (w skrócie (1,2)-IDS) i zlicza je dla ścieżek oraz cykli. Wykazuje, że liczba tych zbiorów jest ściśle związana z odpowiednimi wyrazami ciągów Padovana oraz Perrina. Skutkiem tych rozważań i zdefiniowania odpowiednich rodzin podzbiorów jest wyprowadzenie nowych wzorów dwumianowych dla liczb Padovana i Perrina.

Następnie, inspirując się znanymi z literatury wielomianami Fibonacciego, autor definiuje pojęcie wielomianu Padovana grafu, wykorzystując operację kompozycji dwóch grafów ($G[H]$). Sugeruję jednak doprecyzowanie zapisu wzoru $Pv(G, x) = \sigma_{\pi G}^{(1,2)}(G[H])$, w którym zmienna x odnosi się do liczności maksymalnych zbiorów niezależnych grafu H. Wyraźniejsze byłoby dopisanie indeksu x bezpośrednio przy symbolu grafu H.

W kolejnym podrozdziale rozważane są maksymalne zbiory k-niezależne zawierające zbiór liści. Liczba maksymalnych zbiorów k-niezależnych zawierających zbiór liści jest związana z uogólnionym ciągiem Padovana. Na drodze złożonych przekształceń kombinatorycznych autor wyprowadza wzór dwumianowy dla uogólnionych liczb Padovana, które do tej pory znane były w literaturze wyłącznie w postaci rekurencyjnej. W ostatniej części rozdziału autor wprowadza definicję uogólnionych wielomianów Padovana. W tym miejscu, podobnie jak przy definicji wielomianu Padovana grafu, sugeruję doprecyzowanie definicji (dotyczące jawnego wskazania zmiennej x w zapisie). Autor kończy rozdział, podając dokładne wzory – zarówno w postaci rekurencyjnej, jak i nowej postaci dwumianowej – na uogólniony wielomian Padovana dla ścieżek.

Rozdział piąty pracy poświęcony jest badaniu specjalnego wariantu zbiorów dominujących, które ze swojej natury muszą zawierać zbiór wszystkich liści grafu. Autor definiuje właściwy zbiór 2-dominujący (w skrócie $\bar{2}$-DS) jako taki zbiór 2-dominujący, który jednocześnie nie jest zbiorem p-dominującym dla $p \geqslant 3$. W praktyce oznacza to, że aby zbiór był właściwy, w grafie musi istnieć co najmniej jeden wierzchołek (nienależący do tego zbioru), który ma w nim dokładnie dwóch sąsiadów (tzw. wierzchołek właściwie 2-dominowany). Autor dowodzi, że do każdego właściwego zbioru 2-dominującego w grafie musi należeć każdy jego liść. Na tej podstawie sformułowano też nowy parametr: liczbę właściwego 2-dominowania, określającą moc najmniejszego takiego zbioru.

Z uwagi na fakt, że nie każdy graf posiada właściwy zbiór 2-dominujący, autor podaje pełne warunki konieczne i wystarczające na jego istnienie. Udowodniono, że spójny graf (o co najmniej 3 wierzchołkach) ma właściwy zbiór 2-dominujący wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w nim wierzchołek o stopniu co najmniej 2, który sąsiaduje z co najwyżej dwoma liśćmi. Ponadto zbadano relacje pomiędzy nową liczbą właściwego 2-dominowania a standardowymi liczbami 2-dominowania i 3-dominowania. Głównym wynikiem jest wykazanie przez autora, że dla spójnego grafu, który posiada właściwy zbiór 2-dominujący, liczba właściwego 2-dominowania jest równa klasycznej liczbie 2-dominowania albo jest od niej dokładnie o 1 większa. Autor szczegółowo bada też ten problem w odniesieniu do drzew, wykazując związek między parametrami właściwego 2-dominowania a istnieniem w drzewie niezależnych zbiorów 2-dominujących.

Rozprawa zawiera wiele oryginalnych i interesujących wyników. Stanowi istotny wkład w rozwój teorii grafów, zarówno poprzez kontynuację badań nad istniejącymi już problemami, takimi jak zliczanie zbiorów niezależnych grafu, jak i poprzez wprowadzenie nowych, oryginalnych problemów. Zliczanie specyficznych zbiorów niezależnych pozwoliło odkrywać nowe formuły i właściwości dla znanych w matematyce ciągów liczbowych.

Za najciekawsze wyniki uważam: wyznaczenie górnego oszacowania parametru $\sigma_L(G)$ w podklasie $(n, n+1)$-grafów wraz z wyznaczeniem grafów ekstremalnych, pełną charakteryzację grafów posiadających właściwe zbiory 2-dominujące oraz określenie zależności między liczbą właściwego 2-dominowania a klasyczną liczbą 2-dominowania. W rozprawie autor nie stosuje zaawansowanych metod dowodowych, lecz korzysta z podejścia opartego na standardowych metodach. Nie są to dowody trywialne, wymagały pomysłowości i biegłości w przekształceniach kombinatorycznych oraz znajomości tożsamości Fibonacciego.

Praca jest napisana bardzo starannie, w dobrym stylu językowym, z odpowiednią liczbą ilustracji i przykładów ułatwiających lekturę. Bibliografia (76 pozycji) jest adekwatna i świadczy o dobrym rozeznaniu autora w literaturze. Większość wyników rozprawy została opublikowana w recenzowanych czasopismach o zasięgu międzynarodowym, takich jak *Symmetry*, *Opuscula Mathematica* czy *Proceedings of the Romanian Academy*.

Podsumowując, stwierdzam, że rozprawa mgr. Mateusza Pirgi stanowi szereg nowych i wartościowych rezultatów, a jej autor wykazał się dobrym opanowaniem warsztatu badawczego. Uważam, że przedłożona praca spełnia wszystkie wymogi ustawowe stawiane rozprawom doktorskim i wnoszę o dopuszczenie mgr. Mateusza Pirgi do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Elżbieta Sidorowicz

Elżbieta Sidorowicz