Poznań, 2 lipca 2025

prof. dr hab. Mieczysław Mastyło
Wydział Matematyki i Informatyki
Uniwersytetu im. Adama Mickiewicza

Recenzja

rozprawy doktorskiej mgra Karola Aleksandrowicza

„Wybrane geometryczne własności przestrzeni interpolacyjnych"

Rozprawa doktorska mgra Aleksandrowicza, przygotowana pod opieką prof. dr. hab. Stanisława Prusa, poświęcona jest badaniu własności geometrycznych krat Banacha oraz przestrzeni Banacha generowanych za pomocą metod interpolacyjnych. Autor rozważa ogólną dyskretną metodę interpolacji, ciągłą i dyskretną wersję metody interpolacji Yoshikawy–Sparra oraz zespoloną metodę interpolacji Calderóna. Część wyników przedstawionych w rozprawie została opublikowana w dwóch artykułach (współautor: S. Prus), które ukazały się w Journal of Mathematical Analysis and Applications (2022) oraz Mathematische Nachrichten (2024).

Rozprawa składa się ze wstępu oraz czterech rozdziałów. W niniejszym omówieniu ograniczę się do przedstawienia wybranych rezultatów. Numeracja cytowanych twierdzeń jest zgodna z numeracją zawartą w rozprawie. Ze względu na techniczną złożoność pominięto definicje badanych przestrzeni interpolacyjnych oraz klasyczne definicje własności geometrycznych przestrzeni Banacha, dobrze znanych w literaturze.

Rozdział pierwszy zawiera kluczowe definicje geometrycznych własności przestrzeni Banacha badanych w rozprawie. W podrozdziale 1.1 podane są definicje modułów: jednostajnej wypukłości, lokalnej jednostajnej wypukłości, niemal jednostajnej wypukłości, własności Kadeca–Klee'ego oraz własności (β) przestrzeni Banacha. W podrozdziale 1.3 autor prezentuje nowe wyniki dotyczące własności geometrycznych krat Banacha. Przedstawione tam Twierdzenie 1.2 (oraz odpowiednio Twierdzenie 1.3) dotyczy charakteryzacji porządkowej (odpowiednio: porządkowo jednostajnej) gładkości w punkcie. Te twierdzenia stanowią warianty kratowych twierdzeń o charakteryzacji Szmuliana gładkości normy w dowolnej przestrzeni Banacha. Kratę Banacha X nazywamy porządkowo gładką w punkcie $x \in S(X_+)$, jeśli nie istnieje nietrywialny przedział porządkowy $[g, f] \subset S(X_+^*)$ taki, że $f(x) = g(x) = 1$. Tutaj $X_+ = \{x \in X \colon x \geq 0\}$ oznacza dodatni stożek kraty X, a $S(X_+) := S_X \cap X_+$. Mówimy, że X jest porządkowo jednostajnie gładka w punkcie $x \in S(X_+)$, jeśli $\lim_{\|y\|\to 0} (\|x \vee y\| - 1)/\|y\| = 0$.

Uzyskane wyniki dobrze motywują wprowadzenie przez mgra Aleksandrowicza nowych własności geometrycznych, dualnych do lokalnych wersji jednostajnej monotoniczności. Dla kompletności prezentacji przypomnijmy, że modułem monotoniczności (odpowiednio porządkowej gładkości) kraty Banacha X nazywamy funkcję $\delta_{m,X} \colon [0,1] \to [0,1]$ (odpowiednio $\rho_X \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$) określoną wzorem $\delta_{m,X}(\varepsilon) = \inf\{1 - \|x-y\| \colon x, y \in X,\ 0 \leq y \leq x,\ \|x\| \leq 1,\ \|y\| \geq \varepsilon\}$ dla $\varepsilon \in [0,1]$

(odpowiednio $\rho_X(\tau) = \sup\{\|x \vee \tau y\| - 1 \colon x, y \in B(X),\ x, y \geq 0\}$ dla $\tau \in [0,1]$). Kratę Banacha X nazywamy jednostajnie monotoniczną (odpowiednio porządkowo jednostajnie gładką), gdy $\delta_{m,X}(\varepsilon) > 0$ dla każdego $\varepsilon \in (0,1]$ (odpowiednio $\lim_{t \to 0^+} \rho_X(t)/t = 0$).

W podrozdziale 1.3 mgr Aleksandrowicz bada również problem niezależności dolnej i górnej lokalnej jednostajnej monotoniczności. Dowodzi (Twierdzenie 1.9), że dla każdej ciągłej przestrzeni Köthego E istnieje równoważna norma kratowa $\|\cdot\|_1$ taka, że $(E, \|\cdot\|_1)$ nie jest górnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Ponadto wykazuje, że na przestrzeni c wszystkich ciągów zbieżnych istnieje kratowa norma $\|\cdot\|$ równoważna standardowej normie $\|\cdot\|_\infty$ taka, że krata Banacha $(c, \|\cdot\|)$ jest lokalnie jednostajnie monotoniczna, natomiast nie jest dolnie lokalnie jednostajnie monotoniczna. Ten rezultat pokazuje, że dolna i górna lokalna jednostajna monotoniczność są własnościami nieporównywalnymi i w konsekwencji rozwiązuje problem postawiony w pracy [24].

W rozdziale drugim dr Aleksandrowicz bada własności geometryczne przestrzeni interpolacyjnych generowanych za pomocą ogólnej dyskretnej metody interpolacji $K_{p,\theta}(\cdot, E)$, gdzie $p \in (1, \infty)$, $\theta \in (0,1)$ oraz E jest kratą Banacha nad $\mathbb{Z}$ ze znormalizowaną bezwarunkową bazą (e_n) o stałej bezwarunkowości równej 1, spełniającą dodatkowo pewien techniczny warunek. Autor dowodzi, że jeśli para $\vec{X} := (X_0, X_1)$ porównywalnych refleksywnych przestrzeni Banacha jest taka, że jedna z tych przestrzeni jest odpowiednio: ściśle wypukła, lokalnie jednostajnie wypukła lub niemal jednostajnie wypukła, to przestrzeń interpolacyjna $K_{p,\theta}(\vec{X}, E)$ dziedziczy te własności, pod warunkiem, że krata E jest odpowiednio: ściśle wypukła, lokalnie jednostajnie wypukła, niemal jednostajnie wypukła i jednostajnie monotoniczna.

W rozdziale drugim badana jest także własność (β). Przypomnijmy, że przestrzeń Banacha X ma własność (β), jeśli funkcja β_X (nazywana modułem własności (β) przestrzeni X) określona jest wzorem $\beta_X(\varepsilon) = \inf\{1 - \liminf_{n \to \infty} \|(x + x_n)/2\| \colon x \in B_X,\ (x_n) \subset B_X,\ \operatorname{sep}(x_n) \geq \varepsilon\} > 0$ dla $\varepsilon \in (0, 2]$, gdzie $\operatorname{sep}(x_n) = \inf_{n \neq m} \|x_n - x_m\|$. Główne Twierdzenie 2.10 dotyczące stabilności własności (β) stwierdza, że jeśli jedna z przestrzeni w parze $\vec{X} = (X_0, X_1)$ ma własność (β), to przestrzeń $K_{p,\theta}(\vec{X}, E)$ także ją posiada. Kluczową rolę w dowodzie odgrywa Twierdzenie 2.8, dotyczące stabilności własności (β) dla sumy prostej $Z := \left(\sum_{i \in I} X_i\right)_E$ rodziny przestrzeni Banacha, dla której zachodzi $\beta(\varepsilon) = \inf_{i \in I} \beta_{X_i}(\varepsilon) > 0$. Dowód tego twierdzenia dostarcza cennego oszacowania: $\beta_Z(\varepsilon) \geq \delta_E\left(\frac{1}{3}\,\delta_{m,E}\left(\frac{\varepsilon}{16}\,\beta\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)\right)\right)$ dla modułu własności (β) przestrzeni Z.

W rozdziale trzecim badana jest stabilność własności geometrycznych przestrzeni Banacha otrzymanych za pomocą dyskretnej i ciągłej wersji metody interpolacji Yoshikawy–Sparra, które zależą od parametrów $p \in [1, \infty)$, $q \in [1, \infty)$ oraz $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$, gdzie $\theta_i > 0$ dla $1 \leq i \leq n$ i spełniony jest warunek $\sum_{i=1}^{n} \theta_i < 1$. Metody te stanowią uogólnienie rzeczywistej metody interpolacji Lionsa–Peetre'a. Podobnie jak w klasycznym przypadku, definiuje się je za pomocą uogólnionej wersji K-funkcjonału dla skończonych ciągów $(X_0, \ldots, X_n)$ $(n \geq 2)$ porównywalnych przestrzeni Banacha, przy czym wiadomo, że generują one przestrzenie Banacha z równoważnymi normami. W rozdziale podany jest przykład pokazujący, że przestrzenie generowane za pomocą tych metod nie są izometryczne.

Stosując techniki dowodowe z pracy [44], mgr Aleksandrowicz dowodzi (Twierdzenie 3.2), że jeśli jedna z przestrzeni Banacha w ciągu jest jednostajnie wypukła, a parametry $p, q \in (1, \infty)$, to dyskretna przestrzeń interpolacyjna Yoshikawy–Sparra $(X_0, \ldots, X_n)_{\boldsymbol{\theta},p,q}$ również jest jednostajnie wypukła. Warto zauważyć, że zastosowanie oszacowań stałych równoważności norm na przestrzeni interpolacyjnej Yoshikawy–Sparra oraz ogólnych oszacowań dla modułów niemal jednostajnej wypukłości i własności (β) (przy założeniu $p \in (1, \infty)$ oraz $q \in [1, \infty)$) dla przestrzeni

Banacha z równoważnymi normami pozwoliło uzyskać warianty twierdzeń dla ciągłej wersji tej metody interpolacji, opierając się na twierdzeniach udowodnionych dla wersji dyskretnej.

W ostatnim, czwartym rozdziale mgr Aleksandrowicz prezentuje dowody twierdzeń dotyczących stabilności ścisłej wypukłości, lokalnej jednostajnej wypukłości oraz jednostajnej wypukłości przestrzeni interpolacyjnych generowanych za pomocą zespolonej metody interpolacji Calderóna. Ponadto, przy pewnym warunku aproksymacyjnym dla zespolonej pary (X_0, X_1) porównywalnych przestrzeni Banacha, wykazuje, że dla dowolnego $\theta \in (0,1)$ przestrzeń Calderóna $[X_0, X_1]_\theta$ posiada jednostajną własność Kadeca–Klee'go. Przy podobnym założeniu dowodzi również, że przestrzenie Calderóna mają własność (β).

Ocena rozprawy. Rozprawa doktorska mgra Aleksandrowicza jest bardzo dobrze zredagowana. Zaprezentowany materiał w czterech rozdziałach został przedstawiony jasno i zrozumiale. Problematyka badawcza rozprawy, związana z geometrią przestrzeni Banacha, dotyczy ważnych własności geometrycznych. Ze względu na istotne zastosowania w lokalnej teorii przestrzeni Banacha oraz teorii operatorów, problem dziedziczenia różnego typu własności przez przestrzenie Banacha generowane za pomocą abstrakcyjnych konstrukcji interpolacyjnych był intensywnie badany przez wielu autorów. Autor umiejętnie prezentuje istotę zagadnień, jest bardzo dobrze zorientowany w literaturze oraz trafnie nawiązuje do znanych wyników i metod.

Pewne dowody dotyczące stabilności badanych w rozprawie własności geometrycznych mają techniczny charakter. W istocie opierają się na umiejętnym zastosowaniu rezultatów dotyczących dziedziczenia niektórych własności przez uogólnione sumy proste przestrzeni Banacha posiadających te własności. Należy podkreślić, że w wielu przypadkach badane własności geometryczne wymagały zastosowania specjalnych technik dowodowych. Prezentacja dowodów uzyskanych rezultatów zawartych w rozprawie jest solidna.

Za najbardziej wartościowe uważam rezultaty dotyczące stabilności własności (β) przestrzeni Banacha generowanych za pomocą ogólnych metod interpolacyjnych badanych w rozprawie. Kluczową rolę w dowodzie odgrywa wspomniany wyżej istotny rezultat o dziedziczeniu własności (β) przez uogólnione sumy proste przestrzeni Banacha posiadających tę własność. Jak już wspomniano, dowód tego twierdzenia prowadzi do wartościowego oszacowania modułu własności (β) dla takich sum. Można oczekiwać, że uzyskane wyniki dotyczące geometrycznych własności abstrakcyjnych krat Banacha znajdą interesujące zastosowania.

Reasumując, stwierdzam, że rozprawa doktorska mgra Aleksandrowicza zawiera nowe rezultaty na dobrym poziomie naukowym i wnosi wartościowy wkład do geometrii krat Banacha oraz przestrzeni interpolacyjnych.

Konkluzja. Uważam, że rozprawa doktorska mgra Karola Aleksandrowicza spełnia wymagania określone w ustawie o stopniach i tytule naukowym. Wnoszę wobec tego o przyjęcie rozprawy oraz dopuszczenie mgra Aleksandrowicza do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

M. Mastyło